

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. ABRAMESCO

Sur les séries de polynômes à une variable complexe

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 1 (1922), p. 77-84.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1922_9_1__77_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur les séries de polynomes à une variable complexe;

PAR N. ABRAMESCO.

1. Considérons une série de M. Appell ⁽¹⁾,

$$(1) \quad \sum \frac{a_n}{P_n(x)},$$

où les a_n sont des quantités données et où les polynomes donnés $P_n(x)$ ont leurs racines intérieures à une courbe (C). *Proposons-nous de trouver la région de convergence de ces séries, quand les polynomes $P_n(x)$ sont liés par des relations données.*

2. Considérons le cas où les polynomes $P_n(x)$ sont donnés par une relation récurrente de Poincaré ⁽²⁾

$$(2) \quad R_k(x) P_{n+k}(x) + R_{k-1}(x) P_{n+k-1}(x) + \dots + R_0(x) P_n(x) = 0$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

k étant un nombre donné et $R_s(x)$ des fonctions données qui dépendent de x et du rang n .

Posant $v_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$, la relation (2) s'écrit

$$v_{n+k-1} v_{n+k-2} \dots v_n + \frac{R_{k-1}}{R_k} v_{n+k-2} v_{n+k-3} \dots v_n + \dots + \frac{R_1}{R_k} v_n + \frac{R_0}{R_k} = 0,$$

⁽¹⁾ Voir P. APPELL, *Sur les développements en série suivant les inverses de polynomes donnés* (Comptes rendus, t. 157, p. 5 et 1042; Bulletin des Sciences mathématiques, novembre 1913; Bulletin de la Société mathématique de France, t. 58, 1920, p. 1). — N. ABRAMESCO, *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 649.

⁽²⁾ POINCARÉ, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (American Journal, vol. VII).

et si, pour $n \rightarrow \infty$, le rapport v_n a une limite, cette limite est une racine de l'équation

$$(3) \quad F(\lambda) \equiv \lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + A_0 = 0,$$

où

$$A_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_s}{R_k}.$$

Par un procédé analogue à celui employé par Poincaré ⁽¹⁾ pour le cas $k=3$, on montre que le rapport $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ tend, en général, vers la racine $\alpha(x)$ de plus grand module de l'équation (3).

La série de Poincaré,

$$\sum a_n P_n(x),$$

qui est une série de polynômes $P_n(x)$ liés par la relation (2), a sa région de convergence ⁽²⁾ limitée par la courbe

$$|\alpha(x)| = \rho,$$

$\alpha(x)$ étant la racine de plus grand module de l'équation (3), et

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

3. Considérons une série de M. Appell,

$$\sum \frac{a_n}{P_n(x)},$$

les polynômes $P_n(x)$ étant liés par la relation (2), et les polynômes $P_n(x)$ ayant leurs racines intérieures à une courbe (C). Pour trouver la région de convergence de cette série, considérons la série

$$(4) \quad a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots,$$

convergente à l'extérieur du cercle $|z| = \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

⁽¹⁾ POINCARÉ, *loc. cit.* — Voir aussi PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 420.

⁽²⁾ PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 420.

Laissant de côté certains cas exceptionnels, nous supposons que l'équation (3) a toutes ses racines distinctes et que $\alpha(x)$ est la racine de plus grand module de cette équation.

Supposons premièrement $|\alpha| > \rho$ et considérons un nombre ρ_1 , tel que $\rho < \rho_1 < |\alpha|$. Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \alpha, \quad \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| > \rho_1 > \rho;$$

et si, pour fixer les idées, nous supposons que l'on a cette inégalité en partant de $n = 0$, nous aurons

$$\left| \frac{P_1}{P_0} \right| > \rho_1, \quad \left| \frac{P_2}{P_1} \right| > \rho_1, \quad \dots, \quad \left| \frac{P_n}{P_{n-1}} \right| > \rho_1;$$

$$|P_n| > |P_0| \rho_1^n; \quad \left| \frac{\alpha_n}{P_n} \right| < \frac{1}{|P_0|} \frac{|\alpha_n|}{\rho_1^n}.$$

Donc, si $|\alpha| > \rho$, la série de M. Appell est valablê, comme ayant les modules de ses termes plus petits que ceux de la série convergente (4) ($\rho_1 > \rho$).

Supposons, au contraire, que $|\alpha| < \rho$ et que $|\alpha| < \rho_2 < \rho$. Nous aurons

$$\left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| < \rho_2 < \rho$$

et, si cette inégalité existe depuis $n = 0$, on a

$$|P_n| < |P_0| \rho_2^n, \quad \left| \frac{\alpha_n}{P_n} \right| > \frac{1}{|P_0|} \frac{|\alpha_n|}{\rho_2^n}.$$

Donc, si $|\alpha| < \rho$, la série (1) est divergente comme ayant les modules de ses termes plus grands que ceux d'une série divergente

$$\sum \frac{\alpha_n}{\rho_2^n}, \quad (\rho_2 < \rho).$$

Il en résulte que la courbe de convergence de la série de M. Appell, où les polynomes $P_n(x)$ sont liés par la relation (2), est donnée par l'équation $|\alpha(x)| = \rho$, $\alpha(x)$ étant la racine qui a le plus grand module de l'équation (3).

La courbe (Γ) , $|\alpha| = \rho$, ($x = X + iY$), du plan XOY, sépare le

plan en deux régions, l'une intérieure à la courbe, et l'autre extérieure où se trouvent les points à l'infini. Pour une de ces régions, on a $|\alpha(x)| - \rho > 0$ et, pour l'autre, $|\alpha| - \rho < 0$; donc, d'après ce que nous avons vu, dans la première région, $|\alpha(x)| - \rho > 0$, la série de M. Appell converge, dans l'autre elle diverge. Or, la série (1) converge pour x tendant vers l'infini, qui est dans la région extérieure à la courbe (Γ) et donc la série de M. Appell sera convergente dans la région extérieure à la courbe $|\alpha(x)| = \rho$, qui est en même temps extérieure à la courbe (C) où se trouvent les racines des polynômes $P_n(x)$.

4. *Exemples.* — 1° $P_n(x) = (x - a)^n$. La relation (2) et l'équation (3) sont

$$P_n(x) = (x - a)P_{n-1}(x), \quad \lambda = x - a.$$

La série de M. Appell est dans ce cas $\sum \frac{a_n}{(x - a)^n}$, et la région de convergence est le domaine extérieur au cercle $|\alpha| = \rho$, ou $|x - a| = \rho$, et l'on retrouve les résultats connus.

2° Supposons que $P_n(x)$ soit le *polynôme de Legendre*,

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

qui a toutes ses racines réelles et sur le segment $(-1, +1)$. La relation (2) et l'équation (3) sont

$$nP_n - (2n - 1)xP_{n-1} + (n - 1)P_{n-2} = 0, \quad \lambda^2 - 2\lambda x + 1 = 0.$$

Faisant la transformation conforme

$$x = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right),$$

les racines λ' et λ'' de l'équation (3) sont ξ et $\frac{1}{\xi}$. Dans l'hypothèse $|\xi| > 1$, la région de convergence est le domaine extérieur à l'ellipse

$$x = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right), \quad |\xi| = \rho,$$

de foyers $-1, +1$.

3° Considérons les *polynômes orthogonaux* ⁽¹⁾ $P_n(x)$, qui généralisent les polynômes de Legendre et qui sont définis par les relations

$$\int_a^b \varphi(x) P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n);$$

$$\int_a^b \varphi(x) P_n^2(x) dx = I_n = \text{const.},$$

où $\varphi(x)$ est une fonction positive et intégrable dans l'intervalle (a, b) . On sait que les polynômes $P_n(x)$ ont leurs racines réelles et sur le segment (a, b) . Dans le cas $a = -1$, $b = 1$, $\varphi(x) = 1$, on a les polynômes de Legendre.

Posant, dans le cas général,

$$I_n = \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)}, \quad D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & g_{n+1} & \dots & g_{2n} \end{vmatrix}, \quad g_s = \int_a^b \varphi(t) t^s dt,$$

le polynôme $P_n(x)$ est donné par

$$P_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}(\varphi)} \begin{vmatrix} xg_0 - g_1 & xg_1 - g_2 & \dots & xg_{n-1} - g_n \\ xg_1 - g_2 & xg_2 - g_3 & \dots & xg_n - g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ xg_{n-1} - g_n & xg_n - g_{n+1} & \dots & xg_{2n-2} - g_{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$P_n(x) = \frac{D_{n-1}(F)}{D_{n-1}(\varphi)}, \quad F = (x-t)\varphi(t),$$

$$xg_s - g_{s+1} = \int_a^b (x-t)\varphi(t)t^s dt = \int_a^b F(t)t^s dt,$$

et l'on voit que $D_{n-1}(F)$ et $D_{n-1}(\varphi)$ sont respectivement les détermi-

(1) Voir DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IV, 1878, p. 411).

nants des formes ⁽¹⁾ quadratiques

$$\int_a^b (x-t)\varphi(t)(y_0+y_1t+\dots+y_{n-1}t^{n-1})^2 dt = \sum \sum (xg_{p+q}-g_{p+q+1})y_p y_q,$$

$$\int_a^b \varphi(t)(y_0+\dots+y_{n-1}t^{n-1})^2 dt = \sum \sum g_{p+q}y_p y_q \quad [p, q = 0, 1, \dots, (n-1)].$$

La relation de récurrence connue ⁽²⁾, entre trois polynomes consécutifs, est

$$P_{n+1} - (x - u_n)P_n + \frac{I_n}{I_{n-1}}P_{n-1} = 0,$$

et, avec les notations employées, on trouve

$$u_n = \frac{\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-1} & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & g_{n+1} & \dots & g_{2n-1} & g_{2n+1} \end{vmatrix}}{D_n(\varphi)} - \frac{\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-2} & g_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & \dots & g_{2n-3} & g_{2n-1} \end{vmatrix}}{D_{n-1}(\varphi)},$$

et pour $n \rightarrow \infty$, l'équation (3) devient

$$\lambda^2 - \frac{4}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \lambda + 1 = 0.$$

⁽¹⁾ Étudiées par M. Szegő dans son Mémoire *A Hankel-féle formákról* (Les formes de Hankel) dans le bulletin hongrois *Mathematikai és Természettudományi értesítő*, 1918, p. 497. M. Szegő considère les polynomes $P_n(x)$ qui sont égaux aux déterminants des formes de Hankel et démontre que ces polynomes satisfont aux conditions des polynomes orthogonaux; il obtient une relation (incomplète) de récurrence (d'ailleurs trouvée par Darboux en 1878) entre trois polynomes consécutifs (sans dire un mot des grands géomètres *Stieltjes* et *Darboux*, qui ont étudié ces polynomes); il démontre que la limite pour $n \rightarrow \infty$ de $\sqrt[n]{P_n(x)}$ est égale à

$$e^{\int_a^b \log(x-t) \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}}$$

et enfin, que les courbes de convergence des séries $\sum c_n P_n(x)$ sont des ellipses de foyers a et b .

⁽²⁾ Voir aussi le *Cours d'Analyse supérieure* fait, à la Sorbonne, par M. E. Picard, en 1918.

La région de convergence de la série (1) de M. Appell est le domaine extérieur à l'ellipse

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right), \quad |\alpha| = \rho,$$

de foyers a et b .

4° Considérons les *polynômes électrosphériques* $P_n(x)$ qui admettent la fonction génératrice

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum t^n P_n(x).$$

Ces polynômes ont été rencontrés par MM. Guillet et Aubert (1) dans leurs recherches sur l'attraction mutuelle de deux sphères électrisées ou d'une sphère et d'un plan; la capacité commune des deux armatures en présence est donnée, à un facteur près, par la série de M. Appell

$$(5) \quad \sum \frac{1}{P_n(x)}.$$

La relation (2) est

$$P_{n+1} - 2xP_n + P_{n-1} = 0.$$

On voit, de cette relation, que la suite de Sturm : $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$, devient respectivement pour $-1, +1$,

$$1, -2, 3, \dots, (-1)^n(n+1); \quad 1, 2, 3, \dots, (n+1);$$

donc la suite perd, entre -1 et $+1$, n variations, et donc les polynômes $P_n(x)$ ont leurs racines réelles sur le segment $(-1, +1)$.

L'équation (3) est $\lambda^2 - 2\lambda x + 1 = 0$, et la région de convergence de la série (5), où $\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, est limitée par le segment $(-1, +1)$,

$$x = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right), \quad |\xi| = 1,$$

et donc cette série est valable dans tout le plan XOY ($x = X + iY$), sauf sur la coupure $(-1, +1)$.

(1) *Comptes rendus*, t. 155, 1912, p. 139, 204, 708, 820; t. 157, 1913, p. 367.

3. *Considérons la série*

$$(6) \quad \sum \frac{a_n}{P_n(x)} + \sum b_n P_n(x),$$

qui généralise la série de Laurent. La région de convergence de cette série, quand les polynomes $P_n(x)$ sont liés par la relation (2), est le domaine intérieur à la courbe $|\alpha(x)| = \rho_1$ et extérieur à la courbe $|\alpha(x)| = \rho$, et qui est en même temps extérieur à la courbe (C) où se trouvent les racines des polynomes $P_n(x)$; $\alpha(x)$ étant la racine de plus grand module de l'équation (3) et $\rho = \overline{\lim}^n \sqrt[n]{|a_n|}$, $\frac{1}{\rho_1} = \overline{\lim}^n \sqrt[n]{|b_n|}$.

Exemple. — Dans le cas des polynomes orthogonaux, le domaine de convergence de la série (6) est une couronne formée par deux ellipses homofocales.

