JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

# Mécanismes transformables ou déformables. Couples de surfaces applicables qui s'en déduisent

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série*, tome 1 (1922), p. 19-76.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1922_9_1__19_0>

Gallica NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France*
*http://gallica.bnf.fr/*

*et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc*
*http://www.numdam.org/journals/JMPA*

# *Mécanismes transformables ou déformables. Couples de surfaces applicables qui s'en déduisent;*

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. M. Bricard a indiqué dans les *Nouvelles Annales* (1920) quelques exemples de mécanismes déformables que je vais généraliser.

Soient un premier ensemble de $m$ points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et un second ensemble de $p$ points $B_1, B_2, \ldots, B_p$. Nous ne regardons pas comme distinctes deux configurations de ce double ensemble se ramenant l'une à l'autre par un déplacement ou une symétrie. Supposons chaque point $A_i$ relié à chaque point $B_j$ par une tige rectiligne indéformable, inextensible : nous avons un mécanisme de $mp$ tiges à $m+p$ nœuds d'articulation. Sur chaque tige $A_{ij}$ faisons une marque permettant de la reconnaître : inscrivons par exemple $A_{ij}$; *démontons* ce mécanisme. Il résulte de la discussion simple, déjà faite par M. Bricard, que nous ne pourrons, en général, *remonter* ce mécanisme que dans la configuration primitive (ou symétrique). Cela tient à ce que, si nous cherchons à déterminer $m$ points $A_i$ et $p$ points $B_j$ par la donnée des distances $A_{ij}$, nous avons un système de $mp$ équations à $2(m+p)-3$ ou $3(m+p)-6$ inconnues, suivant que l'on opère dans le plan ou l'espace, défalcation faite des paramètres de déplacement d'ensemble. Or

$$(1)\qquad \begin{cases} mp - 2(m+p) + 3 = (m-2)(p-2) - 1, \\ mp - 3(m+p) + 6 = (m-3)(p-3) - 3. \end{cases}$$

En supposant $m \geq p$ et $p \geq 3$ dans le plan ou $p \geq 4$ dans l'espace, nous

avons un nombre d'équations supérieur au nombre d'inconnues. Ces conditions sont sûrement remplies si nous supposons $m$ et $p$ très grands, pouvant même devenir infinis.

Si donc on choisit au hasard la valeur $l_{ij}$ de la distance $A_iB_j$, le système d'équations est incompatible. La construction préalable du mécanisme précédent nous donne des valeurs $l_{ij}$ assurant la compatibilité du système : le cas normal correspond à un système *unique* de solutions; le mécanisme est alors strictement *indéformable*. Il peut arriver que ces équations aient un nombre *fini*, *supérieur à l'unité*, de solutions; le mécanisme est *transformable*, on peut passer d'une configuration à une autre par un *démontage*, mais non par une suite de déformations continues. Enfin il peut arriver qu'il y ait une *infinité* de solutions à un ou plusieurs paramètres, le mécanisme est *déformable*.

On peut imaginer une combinaison des deux derniers cas : deux séries continues de déformations peuvent fort bien exister pour un même mécanisme, sans que l'on puisse passer d'une configuration de la première série à une de la seconde série autrement que par un démontage : nous en donnerons des exemples. On peut imaginer un cas un peu plus spécial; aux notions purement *géométriques* de configuration, transformation, déformation, adjoignons la notion *cinématique* de vitesse. Dans le cas de déformation continue, suivons chaque point avec sa vitesse : deux séries de déformations S et $S_1$ peuvent fort bien admettre une configuration commune $\Sigma$, telle que, pour pouvoir passer d'une configuration déterminée S à une configuration déterminée $S_1$, il soit nécessaire de passer par la configuration $\Sigma$ avec vitesse nulle pour tous les points au moment où l'*embranchement* $\Sigma$ est réalisé. Un schéma très simple fera comprendre ceci : on peut imaginer deux courbes planes ou gauches S et $S_1$ sans point commun, cela correspondrait à deux séries de configurations d'un même mécanisme déformable ne pouvant se succéder que grâce à un démontage; si les courbes S et $S_1$ ont un point commun $\Sigma$, où elles ne sont pas tangentes, on peut imaginer qu'un point décrive la première courbe, arrive en $\Sigma$ avec une vitesse nulle et soit aiguillé, sans choc, sur la seconde courbe. Nous trouverons des exemples de tels mécanismes.

2. On peut faire grandir $m$ et $p$ indéfiniment. Les points $A_i$ seront répartis sur une courbe ou même une surface; de même les points $B_j$. Les raisonnements précédents et leurs conclusions subsistent; on pourrait *a priori* croire que la détermination est plus difficile que si $m$ et $p$ sont finis : c'est le contraire qui a lieu.

Au point de vue analytique, le nouveau problème se pose ainsi : deux courbes $(a)$ et (A), lieux des points $a$ et A respectivement, se correspondent ponctuellement; de même deux autres courbes $(b)$ et (B). Quels que soient les points $a$ et $b$ choisis sur $(a)$ ou $(b)$, on a

$$ab = AB.$$

Appelons $(a_1, a_2, a_3)$ les coordonnées rectangulaires de $a$, $(A_1, A_2, A_3)$ celles de A, nous avons ainsi six fonctions d'un paramètre $\alpha$; de même $(b_1, b_2, b_3)$ et $(B_1, B_2, B_3)$ sont six fonctions d'un second paramètre $\beta$ et l'on a

$$(2) \quad (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2-(A_1-B_1)^2-(A_2-B_2)^2-(A_3-B_3)^2 \equiv 0.$$

Suivant que les douze fonctions, solutions de (2), contiendront ou non un paramètre $t$ distinct de $\alpha$ et $\beta$, une solution de (2) fournira un mécanisme déformable ou simplement transformable.

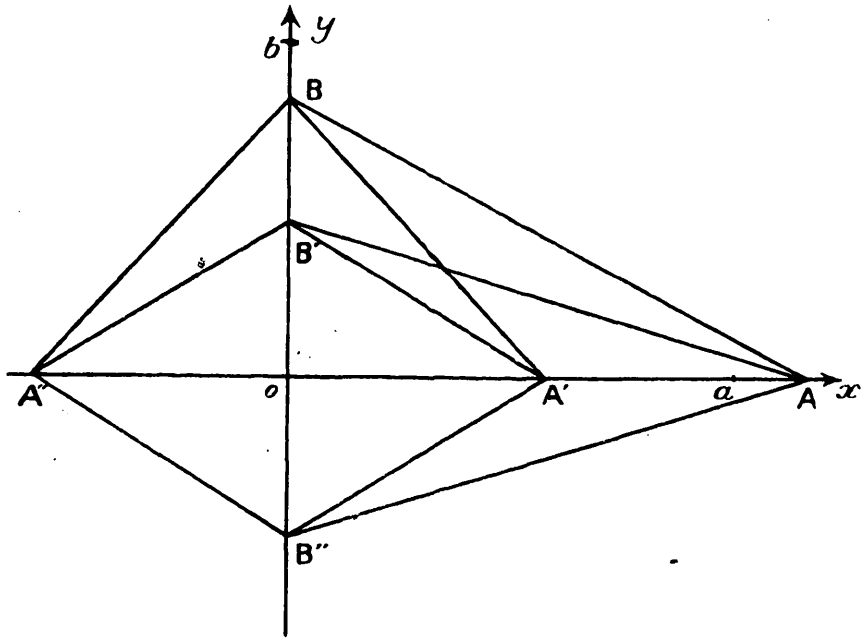
Sur la courbe $(a)$ d'un tel mécanisme, marquons $m$ points; sur la courbe $(b)$, $p$ points : nous retrouvons un mécanisme à nombre fini de points; $m$ et $p$ sont donc arbitraires. Si donc nous cherchons les mécanismes à nombre fini de points, nous devrons d'abord trouver ceux qui dérivent des mécanismes de courbes, puis peut-être d'autres. C'est donc la recherche des mécanismes à nombre fini de points qui sera la plus délicate, la méthode différentielle ne pouvant s'appliquer à ceux-là; il serait précisément intéressant de chercher s'il existe des mécanismes à nombre fini de points non dérivés des mécanismes de courbes.

Dans le cas de mécanismes plans, il suffit de supposer les quatre fonctions d'indice 3 nulles identiquement et l'on trouve uniquement, en ne tenant pas compte du résultat évident où l'une des courbes se réduit à un point, deux exemples qui se déduisent d'ailleurs des mécanismes de l'espace à trois dimensions : l'un est un mécanisme transformable constitué par deux coniques homofocales quelconques, l'autre

est un mécanisme déformable constitué par deux droites rectangulaires. Je n'étudie ce dernier que pour montrer comment le mécanisme si élégant de M. Bricard, constitué de deux inverseurs de Peaucellier avec un losange commun, en dérive.

Soit $a$ un point de $Ox$, d'abscisse $x$ (*fig.* 1); nous lui faisons cor-

Fig. 1.




espondre le point A, situé aussi sur $Ox$ d'abscisse X, par la relation

$$X^2 = x^2 + h,$$

où $h$ est une constante arbitraire $\gtrless 0$. De même au point $b$ de $Oy$, d'ordonnée $y$, correspondra le point B d'ordonnée Y par la relation

$$Y^2 = y^2 - h,$$

on a manifestement $ab = AB$. Marquons donc deux points A', A'' symétriques par rapport à O sur $Ox$, deux points B', B'' symétriques par rapport à O sur $Oy$. La figure A'A'' B'B'' est un losange et nous retrouvons les deux inverseurs accouplés

$$A(A'A''B'B'') \quad \text{et} \quad B(A'A''B'B'')$$

qui, avec la tige supplémentaire AB, forment le mécanisme de M. Bricard; la seule différence c'est que M. Bricard fixe A et B, tandis qu'ici j'oblige les diagonales du losange à rester sur deux directions rectangulaires fixes. Nous retrouvons l'opposition du particulier au général; ce mécanisme si ingénieux de M. Bricard aurait pu nous échapper, et c'eût été dommage, si nous n'avions considéré que le mécanisme des deux droites rectangulaires dont il dérive.

**5.** Indiquons maintenant la méthode de résolution de l'identité (2). Une double dérivation par rapport à $\alpha$ puis $\beta$ donne

$$a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + a'_3 b'_3 - A'_1 B'_1 - A'_2 B'_2 - A'_3 B'_3 = 0. \tag{3}$$

L'identité (3) est d'un type bien connu : fixons $\beta$, j'ai une relation linéaire et homogène entre les $a'$ et A'; $\beta$ variant de $-\infty$ à $+\infty$ si les relations obtenues ainsi ne se réduisent pas à moins de six, on voit que $a$ et A sont deux points fixes, $(b)$ et (B) deux courbes arbitraires. Ce cas est banal; d'ailleurs, à notre point de vue, nous devons supposer que les deux courbes $(a)$ et $(b)$ sont à nombre infini de points toutes deux. On supposera donc que les relations distinctes sont en nombre $k \leq 5$; en posant $l = 6 - k$, les $k$ relations distinctes permettent d'exprimer $a'_1, \ldots, A'_3$ au moyen de $l$ arbitraires $u_1, u_2, \ldots, u_l$. Substituant dans (3), nous égalerons à zéro les coefficients de $u_1, \ldots, u_l$ et obtenons ainsi $l$ relations linéaires et homogènes en $b'_1, \ldots, B'_3$. Comme on peut intervertir les rôles de $(a)$ et $(b)$, on peut supposer $k \geq l$; donc nous étudierons successivement

$$k = 5, \quad l = 1,$$
$$k = 4, \quad l = 2,$$
$$k = 3, \quad l = 3.$$

On se rappellera d'ailleurs qu'un déplacement d'ensemble sur $(a, b)$ d'une part, sur (A, B) de l'autre, est permis. L'identité (3) ayant été résolue, des intégrations donnent $a_1, \ldots, A_3$, et le premier membre de (2), s'il n'est pas identiquement nul, se réduit à une expression

$$F(\alpha) - \Phi(\beta).$$

Nous n'aurons plus qu'à chercher s'il est possible de réduire $F(\alpha)$ et $\Phi(\beta)$ à une même constante numérique.

La discussion complète est assez longue, mais le résultat final est très simple :

*Il existe dans l'espace à trois dimensions un mécanisme transformable, mais non déformable, et un seul; il se compose de deux quadriques homofocales, dont l'une peut être un plan.*

*Il existe des mécanismes déformables : la condition nécessaire et suffisante pour qu'un mécanisme formé de deux courbes soit déformable est que l'une d'elles soit une conique (ou une droite) ou bien que les deux courbes soient planes dans deux plans rectangulaires. Le mécanisme formé des deux courbes planes pourra, si l'on préfère, être regardé comme formé de deux plans rectangulaires.*

**4.** Supposons $k = 5$; les rapports mutuels des $a'$ et A' étant fixes, les points $a$ et A décrivent chacun une droite; on écrira donc

$$a_1 = a_2 = A_1 = A_2 = 0, \qquad A'_3 = m a'_3, \tag{4}$$

où $m$ est une constante, nulle ou non; on en déduit

$$\begin{cases} b'_3 = m B'_3, \\ A_3 = m a_3, \qquad b_3 = m B_3 + p, \end{cases} \tag{5}$$

conformément à la méthode générale, et usant de certains déplacements, puis

$$b_1^2 + b_2^2 + (m^2 - 1) B_3^2 - B_1^2 - B_2^2 = a_3^2 (m^2 - 1) + 2 a_3 p - p^2 = C, \tag{6}$$

où C et $p$ sont des constantes. Si l'on n'a pas à la fois $m^2 - 1$ et $p$ nuls, $a_3$ est une constante, les points $a$ et A sont fixes, cas déjà étudié et écarté. Comme il est indifférent d'adopter $m = +1$ ou $m = -1$, puisqu'on peut prendre le symétrique de (A, B) par rapport à $xOy$, on a $m = 1$, $p = 0$ :

$$A_3 = a_3, \quad b_3 = B_3, \qquad b_1^2 + b_2^2 = B_1^2 + B_2^2. \tag{7}$$

Le point $a$ décrit l'axe des $z$; le point A coïncide avec $a$; le point $b$ décrit une courbe gauche quelconque; en faisant tourner cette courbe

autour de Oz, elle engendre une surface de révolution, la courbe (B) est quelconque sur cette surface, la correspondance entre $(b)$ et (B) étant effectuée par les parallèles. On peut dire, si l'on veut, que *l'axe d'une surface de révolution et cette surface constituent un mécanisme déformable* (1) : adoptons les coordonnées semi-polaires $(r, \theta, z)$; l'axe restera inaltéré et un point de la surface reste sur son parallèle, $\theta$ étant remplacé par $\Theta = f(\theta, z)$, où $f$ est une fonction arbitraire de deux variables, caractérisant la déformation. J'appellerai ce mécanisme *type I*.

3. Supposons $k = 1$. On pourra écrire (les $l$, $m$, L, M étant des constantes et $u$, $v$ deux paramètres arbitraires)

$$(8)\qquad \begin{cases} a'_1 = l_1 u + m_1 v, & A'_1 = L_1 u + M_1 v, \\ a'_2 = l_2 u + m_2 v, & A'_2 = L_2 u + M_2 v, \\ a'_3 = l_3 u + m_3 v, & A'_3 = L_3 u + M_3 v; \end{cases}$$

de la sorte, entre $(a'_1, a'_2, a'_3)$ existe au moins une relation linéaire et homogène. J'aurai donc à distinguer plusieurs cas, suivant que les nombres de relations entre

$$(a'_1, a'_2, a'_3) \quad \text{et} \quad (A'_1, A'_2, A'_3)$$

sont respectivement

$$(3, 1), \quad (2, 2), \quad (1, 2), \quad (1, 1).$$

Si l'on adopte la première hypothèse, on a le droit d'écrire, sans rien particulariser,

$$(9)\qquad \begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = A_3 = 0, \qquad B_1 = B_2 = 0, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - B_3^2 = A_1^2 + A_2^2 = C; \end{cases}$$

le point $a$ est fixe, la courbe $(b)$ est arbitraire; le point B décrit une

(1) Ce mécanisme peut être considéré comme formé de l'espace tout entier et d'une droite. Chaque point de l'espace est soumis à une transformation consistant en une rotation arbitraire autour de la droite : la transformation dépend donc d'une fonction arbitraire de *trois* variables. Il y a peut-être intérêt à ne considérer qu'une surface de révolution et son axe.

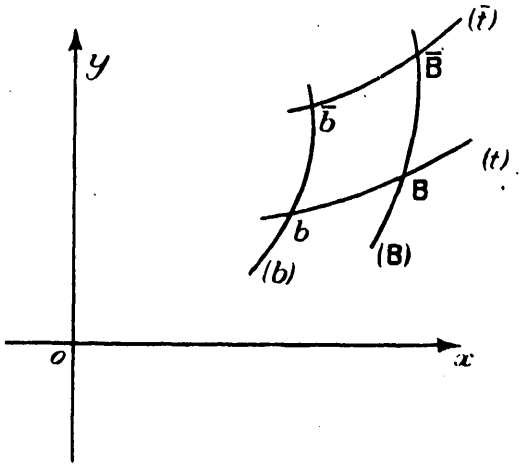
droite, axe du cercle décrit par le point A. Ce sera le type II ; je le conserve parce que, dans le couple (A, B), j'ai effectivement deux courbes; c'est un mécanisme *déformable avec embranchement*.

Dans la seconde hypothèse, $a$ et A décrivent chacun une droite : on est amené à écrire

$$(10)\qquad \begin{cases} a_1 = a_2 = A_1 = A_2 = 0, \qquad b_3 = B_3 = 0, \\ A_3^2 = a_3^2 + C, \\ B_1^2 + B_2^2 = b_1^2 + b_2^2 - C. \end{cases}$$

On obtient *un mécanisme déformable à un paramètre* (type III), *constitué par une courbe plane arbitraire* $(b)$ *et une droite* $(a)$ *normale au plan de cette courbe* (¹). On peut se donner arbitrairement la courbe $(b)$ et les trajectoires des divers points de $(b)$ au cours de la déformation quand C varie; on peut, au contraire, se donner les diverses positions de $(b)$ et une trajectoire. On peut remarquer qu'ici

Fig. 2.




il y a une réciprocité curieuse entre les deux séries de courbes : positions de $(b)$ et trajectoires des points de $b$; on peut échanger leurs rôles, comme on le voit (*fig.* 2), en considérant le quadrilatère formé

(¹) Ce mécanisme peut, si l'on préfère, être regardé comme constitué par une droite et un plan perpendiculaire à la droite; à ce titre, ce n'est qu'un cas particulier du type I, quand la surface de révolution se réduit à un plan.

par deux positions $(b)$ et (B) et deux trajectoires $t$ et $\bar{t}$, l'égalité

$$Ob^2 - O\bar{b}^2 = OB^2 - \overline{OB}^2$$

pouvant s'écrire

$$Ob^2 - OB^2 = O\bar{b}^2 - \overline{OB}^2.$$

Il est très remarquable que ce mécanisme ait fourni au géomètre Peterson une classe particulière de surfaces applicables les unes sur les autres. Si, dans ce mécanisme III, on suppose que la courbe plane est un cercle admettant la droite pour axe, on retrouve le mécanisme II et l'on voit qu'au cours de la déformation on peut obtenir successivement tous les cercles concentriques au premier dans son plan et, en particulier, le réduire à son centre : cette configuration est celle qui constitue embranchement pour le mécanisme II, car le système formé par un point et une courbe peut être déformé, le point restant toujours point et la courbe se déformant à volonté; ce genre de déformation est celui que nous avons indiqué au début pour le rejeter aussitôt.

6. Nous prenons alors $k = 4$ et la troisième hypothèse; une relation entre $a'_1, a'_2, a'_3$, deux entre $A'_1, A'_2, A'_3$. On peut supposer $a_1 = 0$, $A_1 = A_2 = 0$; il existe une relation entre $A'_3$, $a'_2$ et $a'_3$ de la forme $A'_3 = h_1 a'_2 + h a'_3$, que l'on peut intégrer et ramener par rotation de $(a, b)$ autour de $Oz$ et glissement de (A, B) le long de $Oz$ à $A_3 = h a_3 (h \neq 0)$. On en déduit $b_3 = h B_3 + m$, $b_2 = n$. J'indique les expressions générales des coordonnées des points des diverses courbes :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{llll} (a) & 0 & a_2 & a_3 \\ (b) & b_1 & n & h B_3 + m \end{array} \right. \qquad \begin{array}{llll} (A) & 0 & 0 & h a_3 \\ (B) & B_1 & B_2 & B_3 \end{array}$$

Il est visible que je peux remplacer ce Tableau par

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{llll} (a) & 0 & a_2 - n & a_3 + p \\ (b) & 0 & 0 & h B_3 + m + p \end{array} \right. \qquad \begin{array}{llll} (A) & 0 & 0 & h a_3 + q \\ (B) & B_1 & B_2 & B_3 + q \end{array}$$

où $m$, $n$, $p$, $q$, $h$ sont des constantes. On peut déterminer $p$ et $q$ par

$$q = hp, \qquad m + p = hq = h^2 p.$$

Si donc $h^2 \neq 1$, on aura

$$p = \frac{m}{h^2-1}, \qquad q = \frac{mh}{h^2-1},$$

et un simple changement de notations nous donne le Tableau

$$(12) \qquad \begin{cases} (a) & 0 & a_2 & a_3 & & (A) & 0 & 0 & ha_3 \\ (b) & b_1 & 0 & b_3 & & (B) & B_1 & B_2 & \dfrac{b_3}{h} \end{cases}$$

Si $h^2 = 1$, d'où simplement $h = +1$ comme plus haut, on aura

$$(13) \qquad \begin{cases} (a) & 0 & a_2 & a_3 & & (A) & 0 & 0 & a_3 \\ (b) & b_1 & 0 & b_3 & & (B) & B_1 & B_2 & b_3 - m \end{cases}$$

Adoptons le Tableau (12), on obtient

$$(14) \qquad a_2^2 + a_3^2(1-h^2) = B_1^2 + B_2^2 + \frac{b_3^2}{h^2}(1-h^2) - b_1^2 = C.$$

Nous avons un mécanisme IV dont les deux configurations sont à étudier séparément : *la courbe* $(a)$ *est une conique quelconque à centre et la courbe* $(b)$ *une courbe plane quelconque dans un plan principal de* $(a)$ (1), c'est-à-dire dans un plan perpendiculaire au plan de $(a)$ mené par un axe de $(a)$ ; cette configuration étant donnée, C et $h$ sont déterminés; on trouve pour (A) une droite correspondant suivant la loi bien déterminée par (12) à la conique $(a)$, et pour (B) une courbe arbitraire située sur une surface de révolution d'axe A, bien déterminée, car on a trouvé

$$B_3 = \frac{b_3}{h}, \qquad B_1^2 + B_2^2 = C - \frac{b_3^2}{h^2}(1-h^2) + b_1^2.$$

Cette configuration est celle qui caractérise le type 1; nous pouvons, au contraire, partir de la seconde configuration donnée arbitrairement : une droite (A) et une courbe (B) sont données arbitrairement; on pourra prendre (A) pour Oz et se donner arbitrairement le point

(1) On peut encore considérer le mécanisme IV comme constitué par une conique et son plan principal d'une part, et d'autre part par une droite et tout l'espace.

de (A) qui sera origine du système de coordonnées; ensuite on prendra C et $h$ arbitrairement, on obtiendra alors pour $(a)$ la conique

$$a_1 = 0, \qquad a_2^2 + a_3^2(1 - h^2) = C$$

située dans le plan $yOz$, ayant pour centre O, et une grandeur arbitraire. La courbe $(b)$, elle aussi, une fois donnés C, $h$ et la position de O, est bien déterminée par les équations

$$b_2 = 0, \qquad b_3 = hB_3, \qquad b_1^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2(1 - h^2) - C.$$

Le système $(a)$, $(b)$ est un cas particulier d'un mécanisme déformable à trois paramètres que nous trouverons plus bas, constitué par deux courbes planes dans deux plans rectangulaires; quand l'une est une conique et l'autre une courbe située dans un plan principal de cette conique, la déformation à trois paramètres que nous indiquerons conserve la définition de l'ensemble de ces deux courbes, *la conique étant remplaçable par une autre arbitraire* (à centre, ou parabole, ou droite). Si précisément nous transformons la conique $(a)$ en une droite, nous trouvons une *configuration embranchement* qui permet (*voir* type 1) de remplacer la courbe $(b)$ restée plane par une courbe quelconque située sur une surface de révolution dont la droite est l'axe; les configurations ainsi obtenues sont précisément celles que nous rencontrons ici en étudiant les deux parties $(a)(b)$ et (A)(B). Ceci évite donc de procéder à un démontage pour passer de la conique $(a)$ et courbe plane $(b)$ dans le plan principal à la droite (A) et courbe (B). On remarquera que, si la conique $(a)$ se déforme, la surface de révolution décrite par (B) en tournant autour de (A) ne change pas.

Le Tableau (13) donne une parabole et une courbe plane dans le plan principal : cela n'est pas distinct de ce qui précède, d'après le changement possible de $(a)$ en une conique arbitraire.

**7.** Soit maintenant $k = 4$ une seule relation linéaire entre $a'_1, a'_2, a'_3$ seuls, entre $A'_1, A'_2, A'_3$ seuls, d'où $a_3 = A_3 = 0$. On a ensuite, les $h$ étant constants,

$$(15) \qquad \begin{cases} A'_1 = h_1 a'_1 + h'_1 a'_2 \\ A'_2 = h'_2 a'_1 + h_2 a'_2 \end{cases} \qquad (h_1 h_2 - h'_1 h'_2 \neq 0).$$

Des considérations simples d'homographie dans un plan montrent que l'on peut réduire par des rotations autour de Oz de chaque partie $(a)$, $(b)$ et (A), (B) le système (15) à la forme canonique

$$(15') \qquad \begin{cases} A'_1 = h_1 a'_1 \\ A'_2 = h_2 a'_2 \end{cases} \qquad (h_1 h_2 \neq 0).$$

On en déduit comme plus haut

$$(16) \qquad \begin{cases} A_1 = h_1 a_1, & A_2 = h_2 a_2, \\ b_1 = h_1 B_1 + m, & b_2 = h_2 B_2 + n ; \end{cases}$$

si $h_1^2 \neq 1$, on peut supposer $m = 0$; si $h_2^2 \neq 1$, on peut supposer $n = 0$. Prenons d'abord $m = n = 0$. On a donc les courbes

$$(17) \qquad \begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad 0 \qquad (A) \quad h_1 a_1 \quad h_2 a_2 \quad 0 \\ (b) \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \qquad (B) \quad \dfrac{b_1}{h_1} \quad \dfrac{b_2}{h_2} \quad B_3 \end{cases}$$

avec

$$(18) \quad a_1^2(1-h_1^2) + a_2^2(1-h_2^2) = b_1^2\left(\frac{1}{h_1^2} - 1\right) + b_2^2\left(\frac{1}{h_2^2} - 1\right) + B_3^2 - b_3^2 = C.$$

La courbe $(a)$ est une conique à centre arbitraire, la courbe $(b)$ une courbe arbitraire, plane ou gauche (1). La courbe (A) est une conique

$$(19) \qquad \frac{A_1^2(1-h_1^2)}{h_1^2} + \frac{A_2^2(1-h_2^2)}{h_2^2} = C.$$

Les carrés des demi-axes de $(a)$ sont :

$$\alpha^2 = \frac{C}{1-h_1^2}, \qquad \beta^2 = \frac{C}{1-h_2^2};$$

ceux de (A),

$$\alpha'^2 = \frac{Ch_1^2}{1-h_1^2}, \qquad \beta'^2 = \frac{Ch_2^2}{1-h_2^2}.$$

On a

$$\alpha^2 - \alpha'^2 = \beta^2 - \beta'^2 = C,$$

donc les coniques $(a)$ et (A) sont homofocales. Remarquons que l'on

(1) Le mécanisme V pourra être considéré comme formé d'une conique et de tout l'espace.

tire de là

$$h_1 = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha}, \qquad h_2 = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta};$$

il existe donc un seul paramètre de déformation C; nous avons *un mécanisme déformable constitué d'une conique* $(a)$ *arbitraire et d'une courbe* $(b)$ *arbitraire*. Ce sera notre type V.

Quand C est donné, on obtient

$$(20)\qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha} a_1, \qquad A_2 = \dfrac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta} a_2, \qquad A_3 = 0, \\ B_1 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - C}} b_1, \qquad B_2 = \dfrac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - C}} b_2, \\ B_3^2 = C + b_3^2 - \dfrac{b_1^2 C}{\alpha^2 - C} - \dfrac{b_2^2 C}{\beta^2 - C}. \end{cases}$$

Si $b_1$ n'est pas constamment nul, c'est-à-dire si la courbe $(b)$ n'est pas plane et située dans le plan principal $x = 0$ de la conique $(a)$, on voit que, si C tend vers $\alpha^2$, la conique (A) devient une droite, mais que la courbe (B) s'éloigne à l'infini. On ne trouve pas de position d'embranchement; mais si la double condition était réalisée, on retomberait sur le type IV déjà donné, sur lequel il est inutile de revenir.

Dans le cas où $h_1 = 1$, $h_2^2 \neq 1$, on aura le Tableau

$$(21)\qquad \begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad 0 \qquad\qquad (A) \quad a_1 \quad h_2 a_2 \quad 0 \\ (b) \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \qquad\qquad (B) \quad b_1 - m \quad \dfrac{b_2}{h_2} \quad B_3 \end{cases}$$

avec

$$(22)\qquad a_2^2(1 - h_2^2) - 2ma_1 = b_2^2\left(\frac{1}{h_2^2} - 1\right) + B_3^2 - b_3^2 - 2mb_1 + m^2 = C;$$

ici la conique $(a)$ est une parabole, (A) aussi. On peut, par une translation d'ensemble de tout le système parallèlement à $Ox$, pourvu que $m$ soit $\neq 0$, supposer $C = 0$; le paramètre de $(a)$ est $p = \dfrac{m}{1 - h_2^2}$, celui de (A) est $p' = \dfrac{mh_2^2}{1 - h_2^2}$. On en déduit

$$p - p' = m, \qquad h_2 = \sqrt{\frac{p - m}{p}}.$$

Le paramètre de déformation est donc $m$; la parabole $(a)$ se transforme en une parabole de grandeur arbitraire; donc tout ce qui a été dit subsiste sans modification. Remarquons que $m$ nul donnerait $a_2 = \text{const.}$, on retomberait sur un cas déjà étudié (type I).

Si l'on suppose $h_1 = h_2 = 1$, on a le Tableau

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(a)$ | $a_1$ | $a_2$ | 0 | | $(A)$ | $a_1$ | $a_2$ | 0 |
| $(A)$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | | $(B)$ | $b_1 - m$ | $b_2 - n$ | $B_3$ |

on trouve

$$2ma_1 + 2na_2 = b_3^2 - B_3^2 + 2mb_1 + 2nb_2 = C;$$

mais alors on a encore pour courbe $(a)$ une droite et l'on retombe sur un cas déjà étudié.

Un cas particulièrement intéressant est celui où les deux courbes $(a)$ et $(b)$ sont deux coniques quelconques situées dans des plans quelconques : au cours de la déformation, on peut convertir $(a)$ en une conique de même distance focale, $(b)$ devenant courbe gauche; mais on peut avoir une seconde série de déformations où c'est $(b)$ qui reste conique, avec conservation de la distance focale, $(a)$ devenant courbe gauche. La configuration $(a)$, $(b)$, toutes deux coniques, devient ainsi configuration embranchement.

Dans ce cas particulier, prenons même celui, encore plus spécial, où $(a)$ et $(b)$ sont deux coniques homofocales du même plan; leurs équations seront

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_1^2}{\alpha^2} + \dfrac{a_2^2}{\beta_2} = 1, & a_3 = 0, \\ \dfrac{b_1^2}{\alpha^2 - C_1} + \dfrac{b_2^2}{\beta^2 - C_1} = 1, & b_3 = 0. \end{cases}$$

On a d'abord

$$A_1 = a_1 \frac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha}, \qquad A_2 = a_2 \frac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta}, \qquad A_3 = 0,$$

de sorte que A engendre la conique homofocale à $(a)$

$$\frac{A_1^2}{\alpha^2 - C} + \frac{A_2^2}{\beta^2 - C} = 1.$$

On a aisément

$$(24)\qquad \begin{cases} B_1 = \dfrac{b_1\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - C}}, \qquad B_2 = \dfrac{b_2\beta}{\sqrt{\beta^2 - C}}, \\ B_3^2 = C\left[1 - \dfrac{b_1^2}{\alpha^2 - C} - \dfrac{b_2^2}{\beta^2 - C}\right], \end{cases}$$

le point $(B_1, B_2, B_3)$ décrit donc une certaine biquadratique gauche. Supposons, pour fixer les idées, que $(a)$ et $(b)$ soient deux ellipses homofocales réelles, $(b)$ étant intérieure à $(a)$. Si C varie de o à $C_1$, l'ellipse $(a)$ se déforme et balaie toute la région intérieure à la couronne limitée par $(a)$ et $(b)$, et pour $C = C_1$ la courbe (A) n'est autre que $(b)$ et la biquadratique (B) est devenue la conique $(a)$. Le mécanisme $(a)$, $(b)$ considéré uniquement dans le plan est un mécanisme strictement transformable mais non déformable : un démontage permet d'échanger $(a)$ avec $(b)$, et inversement; considéré dans l'espace, il est déformable (avec embranchement).

Nous avons épuisé le cas $k = 4$.

**8.** Dans le cas où $k = 3$, nous avons trois relations :

$$(25)\qquad l_i a'_1 + m_i a'_2 + n_i a'_3 + L_i A'_1 + M_i A'_2 + N_i A'_3 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} l_i & m_i & n_i \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on pourra résoudre en $a'_1$, $a'_2$, $a'_3$ et il n'y aura pas de relation linéaire entre $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$ tous seuls. Si au contraire

$$\begin{vmatrix} l_i & m_i & n_i \end{vmatrix}$$

est nul, on obtient une relation linéaire, ou plusieurs, entre $A'_1, A'_2, A'_3$. Nous allons donc distinguer plusieurs cas, suivant qu'il existe trois, deux, une ou zéro relations entre $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$.

Soit d'abord le premier cas : trois relations entre $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$. On en déduit

$$A_1 = A_2 = A_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 0,$$
$$B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = C.$$

Ce cas est peu intéressant : la courbe $(a)$ est une courbe sphérique et la courbe $(b)$ se réduit au centre de la sphère; sous cette forme on a

un mécanisme, déjà rencontré et écarté, ou du moins un cas particulier de ce mécanisme. Ici on peut déformer à volonté $(a)$ sur la sphère. Mais pour passer à la configuration (A), (B), où cette fois (A) est un point, le centre de la sphère par exemple, il faut *démonter* le mécanisme, toutes les têtes d'articulation situées sur la sphère passent au centre et inversement.

Supposons donc qu'il existe deux relations linéaires entre $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$; la forme canonique des relations entre les A et $a$ sera

$$A_1 = A_2 = 0, \qquad a_3 = hA_3 \qquad (h \neq 0); \tag{26}$$

on en déduit

$$b_1 = b_2 = 0, \qquad B_3 = hb_3 + m.$$

Si $h^2 \neq 1$, on peut supposer $m = 0$.

On trouve alors le Tableau

$$\left\{\begin{array}{llll} (a) & a_1 & a_2 & a_3 \\ (b) & 0 & 0 & \dfrac{B_3}{h} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{llll} (A) & 0 & 0 & \dfrac{a_3}{h} \\ (B) & B_1 & B_2 & B_3 \end{array}\right. \tag{27}$$

et

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) = C; \tag{28}$$

*ici la courbe $(b)$ est l'axe des $z$ et le point $a$ est simplement assujetti à se trouver sur une quadrique de révolution autour de* $Oz$. On a ainsi un cas très particulier du mécanisme I susceptible d'une déformation continue avec une fonction de deux variables; le couple (A), (B) est précisément le même, mais en sens inverse. Or pour passer de $(a)$, quadrique de révolution, à son axe (A), on peut éviter un démontage.

En effet, on peut, soit que l'on conserve simplement une courbe tracée sur la quadrique de révolution, soit que l'on conserve toute la quadrique, réduire par déformation continue la courbe ou la quadrique à la méridienne contenue dans le plan $xOz$, s'il s'agit de $(a)$, $(b)$. On a alors l'embranchement

$$\left\{\begin{array}{llll} (a) & a_1 & 0 & a_3 \\ (b) & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right. \tag{29}$$

avec

$$a_1^2 + a_3^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) = C. \tag{30}$$

Or considérons la déformation, déjà signalée, qui sera obtenue un peu plus loin,

$$\begin{cases} A_3 = \dfrac{a_3}{h'}, & A_1^2 + A_3^2 = a_1^2 + a_3^2 - C', \\ B_3 = h' b_3, & B_2^2 + B_3^2 = b_3^2 + C', \end{cases} \tag{31}$$

qui fait passer, avec les deux paramètres arbitraires $h'$ et $C'$, de (29) à la nouvelle configuration

$$\begin{cases} (A) & A_1 \quad o \quad A_3 \\ (B) & o \quad B_2 \quad B_3 \end{cases} \tag{32}$$

$h'$ et $C'$ variant d'une façon continue, on a pour $C' = o$, $h' = 1$ précisément (29), puis pour $C' = C$, $h' = h$ la configuration nouvelle

$$\begin{cases} (A) & o \quad o \quad \dfrac{a_3}{h} \\ (B) & o \quad B_2 \quad B_3 \end{cases} \tag{33}$$

avec

$$B_2^2 + B_3^2\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) = C. \tag{34}$$

Or, dans l'état (33) qui nous sert de nouvel embranchement, on peut faire tourner les divers points de la conique (B) autour de l'axe $Oz$ de façon à retrouver la seconde partie (A), (B) du Tableau (27). On a ainsi échangé, d'une façon continue, avec deux embranchements, la quadrique de révolution et son axe.

*Ce type VI, constitué par une quadrique de révolution et son axe*, est donc un cas particulier du type I, conçu de façon à obtenir pour ce mécanisme I, quand la surface de révolution est du second degré, deux séries de configurations déformables d'une façon continue séparément, reliées l'une à l'autre par embranchement.

Le cas $h = 1$ donne le Tableau

$$\begin{cases} (a) & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\ (b) & o \quad o \quad b_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} (A) & o \quad o \quad a_3 \\ (B) & B_1 \quad B_2 \quad b_3 + m \end{cases} \tag{35}$$

avec

$$(36)\qquad a_1^2 + a_2^2 + 2ma_3 = B_1^2 + B_2^2 + 2mB_3 - m^2 = C.$$

Rien n'est changé, sauf que la quadrique de révolution est un paraboloïde si $m \neq 0$, un cylindre de révolution si $m = 0$.

**9.** Supposons maintenant qu'il existe toujours deux relations linéaires entre $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$, d'où $A_1 = A_2 = 0$ comme précédemment, et que la quantité $(h)$ entrant dans (26) soit nulle. Nous obtenons, suivant la méthode générale,

$$(37)\qquad \begin{cases} (a) & a_1 & a_2 & 0 & & (A) & 0 & 0 & A_3 \\ (b) & 0 & 0 & b_3 & & (B) & B_1 & B_2 & 0 \end{cases}$$

$$(38)\qquad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = A_3^2 + C, \\ B_1^2 + B_2^2 = b_3^2 + C. \end{cases}$$

Dans le Tableau (37), chaque partie $(a)$, $(b)$ ou (A), (B) reproduit purement et simplement le mécanisme III; mais nous obtenons ici une nouvelle propriété de ce mécanisme, constitué par une courbe plane C (ou un plan) et une droite D perpendiculaire au plan. Nous n'avions signalé que les déformations continues à un paramètre faisant glisser chaque point de D le long de D suivant une loi simple et déformant C dans son plan. Si, laissant D et C inaltérées, nous considérons ce mécanisme comme cas particulier de I, nous pouvons faire tourner chaque point de C autour de D de façon à transformer C en une droite D′ menée arbitrairement dans P par le pied de D.

Mais alors le mécanisme se réduit à deux droites D et D′ jouant même rôle : donc, on peut cette fois faire tourner D autour de D′ de façon à transformer D en une certaine courbe plane C′ (ou un plan) dont le plan est perpendiculaire à D′ : alors cette nouvelle configuration est celle qui est indiquée sous nom (A), (B) dans le Tableau (37), et l'on peut appliquer la déformation III à cette nouvelle configuration. Nous avons, somme toute, le même ordre d'idées que pour le type VI, dont ce nouveau est aussi type particulier : on a réuni ici à la fois I, III et VI, et c'est la notion d'embranchement qui nous permet de réunir toutes ces formes ; je ne donnerai pas de nom nouveau à ce mécanisme qui n'est pas distinct de III; nous avons reconnu simplement que III

admet deux séries de configurations distinctes liées par embranchement.

**10.** Nous devons maintenant étudier $k = 3$, en supposant une relation entre $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$, seuls d'où $A_3 = 0$. Les quantités $a'_1$, $a'_2$, $a'_3$ peuvent être liées par deux relations indépendantes de $A'_1$, $A'_2$, ce serait le cas du paragraphe précédent; elles peuvent être liées par une relation indépendante de $A'_1$, $A'_2$ ou bien une telle relation n'existe pas. Soit donc le premier cas, on a

$$A_3 = a_3 = 0, \qquad A'_1 = la'_1$$

avec $l \neq 0$, sinon on retomberait sur un cas étudié. Suivant la méthode générale, on aura, si $l \neq +1$ ou $-1$, le Tableau

$$(39)\qquad \left\{\begin{array}{llll} (a) & a_1 & a_2 & 0 \\ (b) & b_1 & 0 & b_3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{llll} (A) & la_1 & A_2 & 0 \\ (B) & \dfrac{b_1}{l} & 0 & B_3 \end{array}$$

avec

$$(40)\qquad \left\{\begin{array}{ll} A_1^2 + A_2^2 = a_1^2 + a_2^2 - C, & A_1 = la_1, \\ B_1^2 + B_3^2 = b_1^2 + b_3^2 + C, & B_1 = \dfrac{b_1}{l}. \end{array}\right.$$

*Le mécanisme VII est constitué de deux courbes planes arbitraires dans deux plans rectangulaires, sa déformation dépend de trois paramètres.*

Les paramètres sont les quantités C et $h$ qui figurent explicitement dans les formules (40) plus la position de l'origine sur la droite d'intersection des deux plans, quantité ne figurant plus explicitement dans les formules (40), mais qu'il ne faut pas oublier (1). Si C tend vers zéro et $l$ vers l'unité, la déformation (40) fait tendre (A) vers $(a)$ et (B) vers $(b)$. Ce mécanisme a déjà été signalé nombreuses fois, quand,

(1) Le mécanisme peut être regardé comme formé de deux plans rectangulaires, auquel cas le choix particulier de l'origine sur leur intersection est indifférent, si nous négligeons les déplacements. Mais si l'on trace une courbe sur l'un des plans, la position de l'origine intervient nécessairement comme paramètre. C'est pour une raison analogue qu'une sphère de rayon connu dépend en Mécanique de six paramètres, mais de trois seulement en Géométrie.

par suite d'une forme spéciale de l'une des courbes $(a)$, $(b)$, ce mécanisme est doué d'embranchements; c'est ce qui arrive si $(a)$ est une conique et $(b)$ une courbe plane située dans l'un des deux plans principaux de $(a)$, mécanisme IV, ou encore dans l'hypothèse plus particulière où $(b)$ se réduit à l'un des axes de $(a)$, mécanisme VI.

La transformation à trois paramètres $l, x_0, C$,

$$(41)\qquad \begin{cases} A_1 - x_0 = l(a_1 - x_0), \\ (A_1 - x_0)^2 + A_2^2 = (a_1 - x_0)^2 + a_2^2 - C \end{cases}$$

appliquée à une conique d'axe $Ox$ dans le plan $Oxy$ le transforme en une conique de grandeur arbitraire du même plan $Oxy$, ayant toujours pour axe $Ox$, ou même en deux droites parallèles à $Ox$ et équidistantes de $Ox$, ou même simplement en $Ox$ : nous nous sommes servis de ces résultats.

Un cas particulièrement intéressant est à signaler : supposons que $(a)$ soit une ellipse et $(b)$ l'hyperbole focale de $(a)$ : on peut réduire par déformation continue $(a)$ et $(b)$ à leur axe transverse commun. En effet, on a, en posant $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$ et supposant $\alpha > \beta$,

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_1^2}{\alpha^2} + \dfrac{a_2^2}{\beta^2} - 1 = 0, \\ \dfrac{b_1^2}{\gamma^2} + \dfrac{b_2^2}{\beta^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Nous écrirons, comme pour le mécanisme V, formules (20),

$$(43)\qquad A_1 = \frac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha} a_1, \qquad A_2 = \frac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta} a_2;$$

d'où

$$(44)\qquad \frac{A_1^2}{\alpha^2 - C} + \frac{A_2^2}{\beta^2 - C} = 1, \qquad A_1^2 + A_2^2 = a_1^2 + a_2^2 - C,$$

formules qui rentrent bien dans le type (40). Nous avons ensuite

$$(45)\qquad B_1 = \frac{b_1 \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - C}}, \qquad B_1^2 + B_3^2 = b_1^2 + b_3^2 + C;$$

en éliminant $b_1$ et $b_3$ entre (42) et (45), on trouve l'équation

$$(46)\qquad B_3^2 = (\beta^2 - C)\left[\frac{B_1^2}{\gamma^2} - 1\right],$$

qui, si $\beta^2 - C \neq 0$, peut être mise sous la forme

$$\frac{B_1^2}{\gamma^2} - \frac{B_3^2}{\beta^2 - C} - 1 = 0 \tag{46'}$$

et ceci prouve que les deux coniques (A) et (B) sont encore focales. Si donc on suppose maintenant $\beta^2 = C$, les formules (43), (45), (46) se réduisent à

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\gamma}{\alpha} a_1, & A_2 = 0, \\ B_1 = \dfrac{\alpha}{\gamma} b_1, & B_3 = 0 \end{cases} \tag{47}$$

et le résultat est obtenu. On remarquera que ce calcul fournit précisément, dans la théorie des surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, les cyclides de Dupin (*voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, 2e édition, p. 185 et suiv.). C'est un résultat curieux sur l'analogie de problèmes en apparence éloignés. Il résulte de là que, un premier couple de coniques focales pouvant être réduit par déformation à un système de deux droites coïncidantes, et de même un second couple arbitraire par rapport au premier, on peut passer du premier couple au second par une déformation continue : et, en effet, notre déformation VII permet de passer du premier couple au second. Les considérations qui précèdent sont celles qui ont fait découvrir à M. Bricard, dans l'article déjà cité, le mécanisme si élégant constitué de deux coniques focales. Ce mécanisme donne la solution complète de l'équation

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (a_4 - b_4)^2$$

rencontrée dans la recherche des surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. Cette équation exprime, comme le remarque Darboux pour la résoudre géométriquement, que chaque sphère de centre $(a_1, a_2, a_3)$ et rayon $a_4$ est tangente à chaque sphère de centre $(b_1, b_2, b_3)$ et rayon $b_4$. On a deux séries de sphères à un paramètre; la transformation de Sophus Lie les transforme en deux séries de droites à un paramètre, telles que deux droites quelconques prises dans l'une et l'autre série soient sécantes : on obtient ainsi une quadrique. Cette remarque, due aussi à M. Bricard, eût permis de trouver

encore le résultat qui précède; il est intéressant de constater l'analogie de problèmes de formes si diverses.

Si l'on avait supposé $l = +1$, nous aurions eu le Tableau

$$(48)\qquad \begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad 0 \qquad\qquad (A) \quad a_1 - \dfrac{m}{2} \quad A_2 \quad 0 \\ (b) \quad b_1 \quad 0 \quad b_3 \qquad\qquad (B) \quad b_1 + \dfrac{m}{2} \quad 0 \quad B_3 \end{cases}$$

car, au lieu de prendre $A_1 = a_1$, $B_1 = b_1 + m$, on peut, en faisant glisser (A) (B) le long de $Ox$, obtenir les formules (48); on doit avoir

$$(a_1 - b_1)^2 + a_2^2 + b_3^2 = (a_1 - b_1 - m)^2 + A_2^2 + B_3^2$$

et nous écrirons cette formule sous la forme

$$\left(a_1 - B_1 + \frac{m}{2}\right)^2 + a_2^2 + b_3^2 = \left(a_1 - B_1 - \frac{m}{2}\right)^2 + A_2^2 + B_3^2,$$

d'où

$$(49)\qquad \begin{cases} a_2^2 + 2ma_1 - C = A_2^2, \\ B_3^2 + 2mB_1 - C = b_3^2 \end{cases}$$

et par adjonction de $A_1^2$ ou $b_1^2$ au second membre de la première ou seconde équation (49), on a pour forme canonique de cette déformation

$$(50)\qquad \begin{cases} A_1^2 + A_2^2 = \left(a_1 + \dfrac{m}{2}\right)^2 + a_2^2 - C, \qquad A_1 = a_1 - \dfrac{m}{2}, \\ b_1^2 + b_3^2 = \left(B_1 + \dfrac{m}{2}\right)^2 + B_3^2 - C, \qquad b_1 = B_1 - \dfrac{m}{2}. \end{cases}$$

Les formules (50) montrent une réciprocité entre les deux configurations (A), (B) et $(a)$, $(b)$; la courbe plane $(a)$ peut s'échanger, au point de vue des formules, avec la courbe (B) et (A) avec $(b)$.

Nous avons encore trois paramètres, $m$, C et la position de l'origine sur la droite d'intersection des deux plans rectangulaires qui contiennent les deux courbes; pour $C = m = 0$, on a la transformation identique.

Il est utile de voir qu'on peut trouver un seul et unique système de formules canoniques rassemblant ces deux déformations en apparence distinctes appliquées à un ensemble de deux courbes planes $(a)$, $(b)$ situées dans deux plans rectangulaires. En faisant intervenir un point

d'abscisse $x_0$ sur la droite $Ox$, on peut écrire au lieu des formules (39)

$$(51)\qquad \begin{cases} A_1 - x_0 = l(a_1 - x_0), \\ B_1 - x_0 = \dfrac{b_1 - x_0}{l}; \end{cases}$$

posons

$$L = x_0(1 - l),$$

on aura

$$(52)\qquad \begin{cases} A_1 = la_1 + L, \\ B_1 = \dfrac{b_1 - L}{l}; \end{cases}$$

il en résulte que l'on aura finalement le Tableau équivalant à (39) pour notre but :

$$(53)\qquad \begin{cases} (a) & a_1 & a_2 & o & (A) & la_1 + L & A_2 & o \\ (b) & b_1 & o & b_3 & (B) & \dfrac{b_1 - L}{l} & o & B_3 \end{cases}$$

Cette fois, de même que l'on a

$$A_1 = la_1 + L,$$

on a

$$b_1 = lB_1 + l$$

et l'on écrira donc

$$(a_1 - B_1 l - L)^2 + a_2^2 + b_3^2 = (la_1 + L - B_1)^2 + A_2^2 + B_3^2,$$

d'où

$$(54)\qquad \begin{cases} A_2^2 = a_1^2(1 - l^2) + a_2^2 - 2La_1(1 + l) - C, \\ b_3^2 = B_1^2(1 - l^2) + B_3^2 - 2LB_1(1 + l) - C; \end{cases}$$

en ajoutant aux deux membres de chaque équation (54) $A_1^2$ ou $b_1^2$, on trouve la forme canonique définitive

$$(55)\qquad \begin{cases} A_1^2 + A_2^2 = (a_1 - L)^2 + a_2^2 - C, & A_1 = la_1 + L, \\ b_1^2 + b_3^2 = (B_1 - L)^2 + B_3^2 - C, & b_1 = lB_1 + L \end{cases}$$

qui contient trois constantes arbitraires $l$, L, C. Pour obtenir le type canonique (40), il suffit de supposer L nul. Pour obtenir le type canonique (50), il suffit de supposer $l = 1$. Ceci montre bien qu'il n'y a pas à considérer ces deux déformations comme distinctes, bien que l'on

puisse avoir avantage à conserver chaque type (40) ou (50) isolément comme forme réduite.

**11.** Nous devons maintenant considérer $k = 3$, $A_3 = 0$ et supposer que $a'_1$, $a'_2$, $a'_3$ ne soient liées par aucune relation indépendante de $A'_1$ et $A'_2$. Par des déplacements d'ensemble effectués sur $(a)$, $(b)$ d'une part, (A), (B) de l'autre, nous obtenons la forme canonique

$$(56)\qquad \begin{cases} A_3 = 0, & A_1 = la_1 & A_2 = ma_2, \\ b_3 = 0, & b_1 = lB_1 + l_1, & b_2 = mB_2 + m_1, \end{cases}$$

où $l$, $m$, $l_1$, $m_1$ sont des constantes ($lm \neq 0$).

Si $l^2 \neq 1$, on peut supposer $l_1 = 0$; si $m^2 \neq 1$, on peut de même supposer $m_1 = 0$. Supposons donc d'abord $l^2 \neq 1$, $m^2 \neq 1$, nous aurons le Tableau

$$(57)\qquad \begin{array}{cccc} (a) & a_1 & a_2 & a_3 \\ (b) & lB_1 & mB_2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} (A) & la_1 & ma_2 & 0 \\ (B) & B_1 & B_2 & B_3 \end{array}$$

avec

$$(58)\qquad a_1^2(1-l^2) + a_2^2(1-m^2) + a_3^2 = B_1^2(1-l^2) + B_2^2(1-m^2) + B_3^2 = C.$$

Le point $(a_1, a_2, a_3)$ décrit une quadrique à centre Q et le point $b$ un plan principal de Q; le point $(B_1, B_2, B_3)$ décrit la même quadrique Q. La connaissance de Q détermine sans ambiguïté $l^2$, $m^2$; ayant choisi un des quatre systèmes possibles pour $l$, $m$, le point $a$ de Q est remplacé par un point A du plan principal considéré $(la_1, ma_2, 0)$; le point B de Q est remplacé suivant la même loi par un point $b$ du même plan principal et l'on a $ab = AB$. Ce mécanisme, *simplement transformable*, constitué par une quadrique et un plan principal, n'est qu'un cas particulier de celui que nous indiquerons plus bas en dernier lieu. Dans ce Tableau (57), si $l$ ou $m$ devient égal à l'unité, on a un cylindre du second degré et un plan principal mené par l'axe. Si $l = m = 1$, dans le Tableau (57), le mécanisme n'existe plus à notre point de vue, car il se compose de deux plans parallèles que l'on échange par une symétrie par rapport au plan équidistant. Dans (57) et (58), si l'on suppose $C = 0$, on a un cône du second degré et un plan principal.

Si l'on suppose, dans (56), $l=1$, $l_1\neq 0$, on trouve un paraboloïde et un plan principal ou un cylindre parabolique et son plan principal, mécanisme rentrant toujours comme cas particulier dans celui qui clôturera cette étude. Si $l=1$, $m=1$, on peut supposer $m_1=0$ et l'on a toujours le cylindre parabolique et son plan principal.

**12.** Nous allons enfin trouver le dernier type, type VIII, *mécanisme simplement transformable, composé de deux quadriques homofocales.*

Il existe, par hypothèse, trois relations linéaires homogènes

$$(59)\qquad \begin{cases} A'_1 = l\,a'_1 + m\,a'_2 + n\,a'_3, \\ A'_2 = l_1 a'_1 + m_1 a'_2 + n_1 a'_3, \\ A'_3 = l_2 a'_1 + m_2 a'_2 + n_2 a'_3, \end{cases}$$

de déterminant $|l\ m\ n|$ non nul. Dans une rotation d'ensemble du système $(a)(b)$ autour de l'origine, le point $(a_1, a_2, a_3)$ et le point $(a'_1, a'_2, a'_3)$ subissent la même transformation de coordonnées, de sorte que l'homographie particulière établie entre les points $(A'_1, A'_2, A'_3)$ et $(a'_1, a'_2, a'_3)$ peut être ramenée par une rotation *réelle* convenable à la forme canonique

$$(60)\qquad A'_1 = la'_1, \qquad A'_2 = ma'_2, \qquad A'_3 = na_3$$

avec $lmn\neq 0$. On en déduira comme précédemment

$$(61)\qquad \begin{cases} A_1 = la_1, & A_2 = ma_2, & A_3 = na_3, \\ b_1 = lB_1 + l_1, & b_2 = mB_2 + m_1, & b_3 = nB_3 + n_1. \end{cases}$$

Si $l^2\neq 1$, on peut supposer $l_1=0$ et, de même, si $m^2\neq 1$ ou $n^2\neq 1$, on aura le droit d'écrire $m_1=0$ ou $n_1=0$.

Si donc on suppose $l^2\neq 1$, $m^2\neq 1$, $n^2\neq 1$, on aura simplement

$$(62)\qquad \begin{cases} A_1 = la_1, \quad A_2 = ma_2, \quad A_3 = na_3, \\ b_1 = lB_1, \quad b_2 = mB_2, \quad b_3 = nB_3, \\ a_1^2(1-l^2) + a_2^2(1-m^2) + a_3^2(1-n^2) \\ \quad = B_1^2(1-l^2) + B_2^2(1-m^2) + B_3^2(1-n^2) = C; \end{cases}$$

le point $a$ et le point B décrivent une même quadrique Q à centre;

soient $\alpha^2$, $\beta^2$, $\gamma^2$ les carrés des demi-axes, on a

$$(63)\qquad \alpha^2=\frac{C}{1-l^2},\qquad \beta^2=\frac{C}{1-m^2},\qquad \gamma^2=\frac{C}{1-n^2}.$$

Le point A et le point $b$ décrivent une même quadrique Q′ coaxiale à Q; $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ désignant les quantités analogues à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on a

$$(64)\qquad \alpha'^2=\frac{Cl^2}{1-l^2},\qquad \beta'^2=\frac{Cm^2}{1-m^2},\qquad \gamma'^2=\frac{Cn^2}{1-n^2};$$

donc

$$(65)\qquad \begin{cases} \alpha^2-\alpha'^2=\beta^2-\beta'^2=\gamma^2-\gamma'^2=C, \\ l=\dfrac{\alpha'}{\alpha},\qquad m=\dfrac{\beta'}{\beta},\qquad n=\dfrac{\gamma'}{\gamma}, \end{cases}$$

ce qui prouve que les deux quadriques Q et Q′ sont homofocales.

La donnée de Q et Q′ fixe $l$, $m$, $n$ (au signe près) par les formules (65); l'une des huit combinaisons adoptées, la relation qui lie les points correspondants $a$ de Q et A de Q′ (ou B de Q et $b$ de Q′) est ce que l'on appelle souvent une *affinité*, cas très particulier de l'homographie dans l'espace, et l'on a $ab = AB$ quels que soient $a$ sur Q et $b$ sur Q′. Cette proposition a déjà été signalée par Ivory. On remarquera, en vertu de (62), que l'on a

$$A_1^2+A_2^2+A_3^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2-C \qquad \text{et} \qquad B_1^2+B_2^2+B_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2+C.$$

Si l'on suppose $l^2=1$, et, par suite, $l=1$, sans rien restreindre, on ne pourra annuler $l_1$ et, comme plus haut, on pourra supposer

$$(66)\qquad \begin{cases} A_1=a_1+\dfrac{l_1}{2}, & A_2=ma_2, & A_3=na_3, \\ b_1=B_1+\dfrac{l_1}{2}, & b_2=mB_2, & b_3=nB_3; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(67)\qquad \begin{aligned} &a_2^2(1-m^2)+a_3^2(1-n^2)-2l_1a_1 \\ &=B_2^2(1-m^2)+B_3^2(1-n^2)-2l_1B_1=C, \end{aligned}$$

$a$ ou B décrivent le même paraboloïde Q et $b$ ou A le même paraboloïde Q′ homofocal à Q; tout ce qui a été dit plus haut se répète identiquement, la donnée simultanée de Q et Q′ détermine $l_1$ complète-

ment et $m$, $n$ au signe près; l'un des quatre systèmes étant choisi, A et $b$ dérivent sur Q′ des points $a$ et B de Q par la même transformation homographique; la propriété des paraboloïdes peut se déduire par passage à la limite de celle relative aux quadriques à centre unique.

Si l'on suppose $l = 1$, $m = 1$ et $n^2 \neq 1$, on aura de même

$$(68)\quad \begin{cases} A_1 = a_1 + \dfrac{l_1}{2}, & A_2 = a_2 + \dfrac{m_1}{2}, & A_3 = n a_3, \\ b_1 = B_1 + \dfrac{l_1}{2}, & b_2 = B_2 + \dfrac{m_1}{2}, & b_3 = n B_3 \end{cases}$$

et

$$(69)\quad a_3^2(1-n^2) - 2l_1 a_1 - 2m_1 a_2 = B_3^2(1-n^2) - 2l_1 B_1 - 2m_1 B_2 = C;$$

cette fois on a affaire à deux cylindres paraboliques homofocaux; on peut même supposer, sans restriction, $m_1 = 0$.

Le cas $l = m = n = 1$ ne conduit à rien, sauf une symétrie effectuée sur un couple de deux plans parallèles.

Pour être tout à fait complet, il faut signaler que, dans le cas des formules (62), quadriques à centre, si l'on suppose $n = 1$ avec $C \neq 0$, on tombe sur deux cylindres homofocaux à centres; la transformation se faisant en transformant les sections droites de même cote, on a, somme toute, le mécanisme plan *transformable* (si l'on ne sort pas du plan) constitué par deux coniques homofocales, signalé dès le début de l'étude (§ 2); j'ai montré au paragraphe 7 qu'un tel mécanisme, pris dans l'espace, est *déformable* à un paramètre. Supposer à la fois $l = m = 1$ dans (62) ne donne que l'un des cas rejetés *a priori*, se ramenant à un déplacement en symétrie.

Dans les formules (62), si l'on suppose $C = 0$, on a affaire à deux cônes homofocaux.

Si donc on rassemble les résultats de ce paragraphe et du précédent, nous voyons que l'on a affaire au *mécanisme simplement transformable constitué par une quadrique arbitraire et une quadrique homofocale à la première; la seconde quadrique peut se réduire en particulier à un plan principal de la première, ou même à son axe de révolution, si la première est de révolution.*

Il n'est pas inutile de faire quelques remarques sur ces mécanismes,

qui sont d'ailleurs, sur les huit types obtenus, le seul exemple de mécanisme transformable et non déformable.

Je vais raisonner pour simplifier sur une quadrique Q à centre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{70}$$

du genre ellipsoïde si $a$, $b$, $c$ sont réels tous trois, du genre hyperboloïde si un ou deux de ces nombres est imaginaire pure. A un point $m$ de Q j'associe sur la quadrique

$$\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{Z^2}{C^2}-1=0 \tag{71}$$

le point M par les formules

$$\frac{x}{a}=\frac{X}{A},\qquad \frac{y}{b}=\frac{Y}{B},\qquad \frac{z}{c}=\frac{Z}{C}. \tag{72}$$

Si je suppose

$$A^2=a^2+\lambda,\qquad B^2=b^2+\lambda,\qquad C^2=c^2+\lambda, \tag{73}$$

on a aisément

$$OM^2=X^2+Y^2+Z^2=x^2\frac{A^2}{a^2}+y^2\frac{B^2}{b^2}+z^2\frac{C^2}{c^2}=x^2+y^2+z^2+\lambda=Om^2+\lambda. \tag{74}$$

Si $m'$ et M' sont deux autres points associés, on a aussi

$$OM'^2=Om'^2+\lambda,\qquad Om.OM'=OM.Om'=\frac{A}{a}(xx'+yy'+zz'), \tag{75}$$

le produit $Om.OM'$ étant un produit vectoriel scalaire.

Si donc nous considérons le triangle $OmM'$, on a

$$mM'^2=Om^2+OM'^2-2Om.OM' \tag{76}$$

et il résulte immédiatement de là que $m'M^2$ est égal à $mM'^2$ et ceci démontre géométriquement l'existence du mécanisme transformable puisque $m'M=mM'$.

Supposons Q fixe et $\lambda$ variable : si le point $m$ reste fixe sur la quadrique Q, le point M correspondant décrit une biquadrique gauche dont les équations sont immédiates :

$$\frac{X^2-x^2}{\frac{x^2}{a^2}}=\frac{Y^2-y^2}{\frac{y^2}{b^2}}=\frac{Z^2-z^2}{\frac{z^2}{c^2}}, \tag{77}$$

où $x, y, z$ sont les coordonnées fixes de $m$ et X, Y, Z les coordonnées courantes. On voit immédiatement que cette biquadratique est l'intersection des deux quadriques homofocales à Q qui passent en $m$. En effet, soient $a^2+\lambda$, $b^2+\lambda$, $c^2+\lambda$ les carrés des axes de l'une de ces deux quadriques, on a par hypothèse

$$(78)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2+\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2+\lambda}+\dfrac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0 \end{cases}$$

et en retranchant, puisque $\lambda \neq 0$,

$$(79)\qquad \frac{x^2}{a^2(a^2+\lambda)}+\frac{y^2}{b^2(b^2+\lambda)}+\frac{z^2}{c^2(c^2+\lambda)}=0.$$

Si donc, dans (77), nous multiplions chaque rapport haut et bas par $\frac{1}{a^2+\lambda}$, $\frac{1}{b^2+\lambda}$, $\frac{1}{c^2+\lambda}$ respectivement, et si nous ajoutons, on obtient

$$(80)\qquad \frac{X^2}{a^2+\lambda}+\frac{Y^2}{b^2+\lambda}+\frac{Z^2}{c^2+\lambda}-1=0,$$

où $\lambda$ est l'une des deux racines non nulles de (78), ce qui démontre la proposition.

Ceci donne une propriété intéressante : supposons Q et Q′ ellipsoïdes homofocaux, coupons-les par un hyperboloïde H à une nappe, par exemple, homofocal; les courbes d'intersection C et C′ de H avec Q et Q′ sont donc deux courbes correspondantes sur Q et Q′ et alors elles forment un mécanisme transformable situé sur la quadrique H.

Nous avons donc un théorème de géométrie à deux dimensions sur une quadrique Q quelconque : considérons deux lignes de courbure quelconques C et C′ de Q : elles forment un mécanisme transformable. Au point de vue de la réalité, qui est évident, il faut, s'il s'agit de deux quadriques homofocales Q et Q′, qu'elles soient non sécantes, c'est-à-dire du même type s'il s'agit de quadriques à centre. De même, sur une quadrique, on prendra deux lignes de courbure du même système (non sécantes), la correspondance entre ces courbes s'effectue par les

lignes de courbure du système opposé; il y a là une espèce de réciprocité curieuse à confronter avec celle qu'a fourni le mécanisme III. Dans le cas d'une sphère il faudra prendre, si l'on reste sur la sphère, deux familles de coniques sphériques homofocales; j'ai rencontré ce mécanisme comme base pour construire deux surfaces de translation applicables l'une sur l'autre, avec conservation du réseau de translation. Dans le cas de la sphère, on obtient même un système déformable, et non plus simplement transformable, en considérant deux grands cercles orthogonaux.

**13.** De cette discussion complète, nous avons déduit un résultat simple que je rappelle :

*Il existe dans l'espace à trois dimensions un mécanisme transformable, mais non déformable, et un seul; il se compose de deux quadriques homofocales, dont l'une peut être un plan.*

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'un mécanisme soit déformable est qu'il comprenne comme première partie une conique (ou une droite), ou bien qu'il se compose de deux courbes planes dans deux plans rectangulaires.*

La notion d'embranchement sert à relier plusieurs types distincts. Je vais récapituler les divers types déformables : il sera entendu que chacun est constitué par une première courbe $(a)$ et une seconde courbe $(b)$, $(b)$ pouvant être accidentellement une surface, et que $(a)$ et $(b)$ se déforment d'une façon continue, de sorte que je n'indique pas la nature de (A) et (B) dans les types qui suivent, (A) n'étant qu'une forme de $(a)$ et (B) de $(b)$; j'indiquerai ensuite les embranchements. Je dresse donc le Tableau :

| Numéro du type. | Courbe $(a)$. | Courbe $(b)$. |
|---|---|---|
| I..... | Droite D. | Surface de révolution autour de D. |
| III..... | Droite D. | Courbe plane dans un plan perpendiculaire à D. |
| V..... | Conique. | Courbe arbitraire. |
| VII..... | Courbe plane arbitraire. | Courbe plane arbitraire dans un plan perpendiculaire au plan de la première. |

J'ai montré que le type III admet un embranchement permettant de convertir la droite D en courbe plane et la courbe plane associée à D en une droite. Le type II est un cas particulier de III lorsque la courbe est un cercle dont D est l'axe; le type IV est un cas particulier soit de V, soit de VII, et en réduisant, par la déformation V ou VII, la conique à une droite, on trouve une configuration formant embranchement entre IV et I. Le type VI est un cas particulier de I, ou encore de IV, si nous réduisons la quadrique à sa méridienne.

On pourra remarquer qu'il y a un mécanisme qui, en apparence, ne figure pas dans la discussion : nous avons remarqué que le mécanisme V deviendrait plus intéressant encore s'il était constitué non pas d'une conique et d'une courbe arbitraire, mais de deux coniques $(a)$, $(b)$ d'ailleurs arbitraires. Déformons-le de façon à ce que $(a)$ devienne une conique (A) de même distance focale, et que $(b)$ devienne une biquadratique gauche (B). Partons au contraire de $(a)$, $(b)$ en changeant $(b)$ en une conique $(b')$ de même distance focale et $(a)$ en une biquadratique gauche $(a')$. Le mécanisme (A), (B) peut être *transformé* en le mécanisme $(a')$, $(b')$. La conique (A) se trouve transformée en biquadratique, la biquadratique gauche (B) en conique : mais on s'aperçoit aisément que cette transformation rentre dans la transformation plus étendue échangeant une quadrique Q avec un plan principal P (*voir* § **11**). Dans P traçons deux coniques arbitraires, l'une sera appelée (A), l'autre $(b)$, la transformation ponctuelle entre Q et P transforme (A) en biquadratique $(a)$ et $(b)$ en biquadratique (B) : nous avons ainsi obtenu le mécanisme (A), (B) et son transformé $(a)$, $(b)$. Ce mécanisme est en réalité déformable, avec une configuration d'embranchement formé de deux coniques.

On peut remarquer encore que la considération d'un triangle $Oab$ prenant une nouvelle forme OAB telle que

$$(81)\qquad \begin{cases} OA^2 + OB^2 = Oa^2 + Ob^2, \\ OA.OB = Oa.Ob \end{cases}$$

peut suffire à engendrer presque tous les types; il s'agit d'un produit scalaire dans la seconde égalité (81).

**14.** Les limites de réalité sont faciles à obtenir; je n'y insiste pas.

Je préfère donner une application intéressante à la géométrie des surfaces à courbure totale constante, positive ou négative. Sur la sphère nous avons trouvé, en vertu du type VIII, un mécanisme transformable constitué de deux coniques sphériques homofocales : nous nous bornons pour la réalité à deux coniques non sécantes, que nous pouvons considérer comme ellipses relatives à deux points F et F′ de la sphère; la correspondance entre les points des deux ellipses se fait par les hyperboles sphériques de foyers F et F′; $a$ et $b$ étant deux points pris au hasard sur la première et seconde ellipse, A et B étant les points correspondants sur la seconde et première respectivement, on a $ab = AB$, l'égalité se rapportant aux distances rectilignes, mais pouvant, sur la sphère, être remplacée par l'égalité des arcs de grand cercle $ab$ et AB; donc, si l'on préfère, l'égalité se rapportera aux distances géodésiques. Nous avons ainsi sur la sphère un mécanisme transformable constitué par les deux coniques et les géodésiques reliant les points d'une conique aux points de l'autre; ceci subsistera dans une déformation de la sphère, et par une homothétie d'origine O et de rapport $i$, nous pouvons étendre ceci à toute surface à courbure totale constante, positive ou négative. Dans une projection stéréographique, suivie d'une inversion plane, on pourra réduire le $ds^2$ de la sphère $x^2+y^2+z^2+a^2=0$ et par suite aussi celui d'une surface à courbure totale négative à la forme $ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ et l'image du mécanisme dans le plan $Oxy$ se composera de deux quartiques bicirculaires, convenablement choisies : il suffit de reprendre les raisonnements exposés par Darboux (*Théorie des surfaces*, t. 3, p. 415).

Sur la sphère nous avons, d'autre part, un mécanisme déformable constitué par deux grands cercles orthogonaux d'équations respectives

$$(82)\qquad \begin{cases} z=0, & x^2+y^2=1, \\ y_1=0, & x_1^2+z_1^2=1; \end{cases}$$

on fait correspondre à un point $(x, y, 0)$ du premier le point qui a pour abscisse $\lambda x$, où $\lambda$ est une constante arbitraire, et au point $(x_1, 0, z_1)$ du second le point d'abscisse $\frac{x_1}{\lambda}$. Le paramètre de déformation est $\lambda$.

Ce mécanisme sera remplacé, sur une surface à courbure totale constante, positive ou négative, par deux géodésiques orthogonales quelconques. Avec le $ds^2$ caractéristique des surfaces à courbure négative $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, on aura pour image deux cercles orthogonaux entre eux et à l'axe des $x$.

On pourrait chercher à réaliser sur d'autres surfaces des mécanismes analogues constitués par des géodésiques de longueur constante reliant une série de points $A_i$ à une série de points $B_j$ de la surface; dans une transformation ou déformation, chaque distance géodésique comptée sur la surface doit rester constante. Sur les surfaces à courbure totale constante, nous avons donné des exemples, distincts de ceux, peu intéressants, qui seraient obtenus par une simple application de la surface sur elle-même (dans le cas de la sphère, déplacement ou symétrie).

**13.** Une autre application intéressante donne soit un couple de surfaces applicables, soit une famille continue de déformées d'une surface, comme le montre Darboux (*Théorie des surfaces*, t. 1, 2e éd., p. 181) d'après Peterson. En modifiant les notations de Darboux et adoptant celles de ce travail, nous avons deux surfaces S et $S_1$ définies par les formules

$$(83)\qquad S\begin{cases} X = Ab_1 - \int A' a_1\, d\alpha, \\ Y = Ab_2 - \int A' a_2\, d\alpha, \\ Z = Ab_3 - \int A' a_3\, d\alpha; \end{cases}$$

$$(84)\qquad S_1\begin{cases} X_1 = AB_1 - \int A' A_1\, d\alpha, \\ Y_1 = AB_2 - \int A' A_2\, d\alpha, \\ Z_1 = AB_3 - \int A' A_3\, d\alpha; \end{cases}$$

où $a_1$, $a_2$, $a_3$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ sont les six fonctions de $\alpha$ et $b_1$, $b_2$, $b_3$, $B_1$, $B_2$, $B_3$ les six fonctions de $\beta$ déjà rencontrées et A une nouvelle fonc-

tion arbitraire de $\alpha$. On trouve pour $ds^2$ de S

$$(85)\quad \begin{aligned} ds^2 = {} & A^2(db_1^2 + db_2^2 + db_3^2) \\ & + 2A\,dA[(b_1 - a_1)\,db_1 + (b_2 - a_2)\,db_2 + (b_3 - a_3)\,db_3] \\ & + [(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2]\,dA^2. \end{aligned}$$

Si les courbes $(a)$, $(b)$ constituent avec (A), (B) un de nos mécanismes transformables ou déformables, le coefficient de $dA^2$ et $A\,dA$ sera le même en passant à $S_1$, et il suffira de chercher si l'on peut obtenir la relation complémentaire

$$(86)\quad db_1^2 + db_2^2 + db_3^2 = dB_1^2 + dB_2^2 + dB_3^2,$$

et alors les deux surfaces auront même $ds^2$; la relation (86) rompt la symétrie entre les deux courbes $(a)$, (A) d'une part et $(b)$, (B) de l'autre; nous devrons donc passer en revue les types I à VIII, avec la précaution, pour chacun d'eux, de débaptiser au besoin $(a)$ et $(b)$ en échangeant leurs noms. Quelques remarques simples permettront de se borner aux essais strictement indispensables. Si $(a)$, $(b)$ subissent une translation d'ensemble, S reste inaltérée; si l'ensemble $(a)$, $(b)$ est déplacé autour de l'origine, S subit ce même déplacement. Donc on peut, comme précédemment, infliger à l'ensemble $(a)$, $(b)$ le déplacement le plus général; si $(a)$ est un point, donc si $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, S est un cône; si $(b)$ est un point, donc si $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, S est une courbe. Donc nous pouvons écarter le cas où le mécanisme comprend une courbe réduite à un point (type II ou divers autres types signalés sans numérotage). D'autre part, si un mécanisme comprend une droite, on ne pourra utiliser la droite que comme courbe $(a)$, et non comme courbe $(b)$. En effet, si $(b)$ est une droite, soit $b_1 = b_2 = 0$, X et Y ne dépendent que de $\alpha$, donc S est un cylindre, donc nous pouvons écarter ces solutions banales.

Passons en revue les types : pour I, il y a une droite qui est donc $(a)$, on aurait ensuite

$$b_1^2 + b_2^2 = B_1^2 + B_2^2, \qquad db_1^2 + db_2^2 = dB_1^2 + dB_2^2,$$

ce qui donne simplement une rotation autour de $Oz$, donc on n'a rien. Le type II contenant une courbe point est à rejeter. Le type III a été utilisé par Peterson, et Darboux a exposé quelques résultats simples

relatifs aux quadriques. J'ai moi-même montré, au *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1921, comment on en déduit trois types de surfaces ayant même forme de $ds^2$ qu'une quadrique arbitraire, tels que deux surfaces réelles de type différent ne puissent se recouvrir physiquement.

Le type IV et le type V nous donneront des surfaces intéressantes, que j'étudierai un peu plus bas. Le type VI est à rejeter, car l'une des deux courbes $(b)$ ou (B) est une droite, quelle que soit la façon de nommer les courbes. Les types VII et VIII sont aussi à rejeter. Prenons, en effet, le type VII : en raison de la symétrie qu'y jouent $(a)$ et $(b)$, peu importe le nom $(a)$ ou $(b)$ donné à l'une des deux courbes planes. Adoptons le Tableau (39); on doit écrire

$$(87)\qquad \begin{cases} dB_1^2 + dB_3^2 = db_1^2 + db_3^2, \\ B_1^2 + B_3^2 = b_1^2 + b_3^2 + C, \\ B_1 = \dfrac{b_1}{l}. \end{cases}$$

Posons

$$b_1\sqrt{1-\frac{1}{l^2}} = x, \qquad b_3 = y, \qquad B_1 = z,$$

on a à intégrer

$$(88)\qquad \begin{cases} dz^2 = dx^2 + dy^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 + C. \end{cases}$$

En éliminant $z$, on a

$$(y\,dx - x\,dy)^2 + C(dx^2 + dy^2) = 0,$$

et, en regardant $y$ comme fonction de $x$,

$$(89)\qquad y - xy' + \sqrt{-C}\sqrt{1+y'^2} = 0.$$

L'équation (89) est une équation de Clairaut : l'intégrale générale est une droite tangente au cercle de centre O et rayon $\sqrt{-C}$, mais alors $(b)$ est une droite, donc ceci est à rejeter. L'intégrale singulière de (89),

$$x^2 + y^2 + C = 0,$$

ne donne pas une solution de (88). Si, pour le même type VII, on

prenait le Tableau (48), on aurait

$$b'_3 = B'_3 \qquad \text{ou} \qquad b_3 = B_3 - K$$

et, en remplaçant dans (49), on voit que (B) serait une droite. Donc tout cela est à rejeter.

Reste le type VIII : il faut trouver sur les deux quadriques homofocales deux courbes correspondantes dont les arcs infiniment petits correspondants ont même longueur; si nous adoptons les coordonnées elliptiques $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$ dans l'espace, $\rho_2 = 0$ et $\rho_2 = \rho_2^0$ étant les équations des deux quadriques Q et Q', aux points correspondants des deux surfaces les coordonnées $\rho$ et $\rho_1$ ont la même valeur, d'après ce qui a été expliqué. Prenons le $ds^2$ dans ce système de coordonnées et nous trouvons immédiatement l'équation

$$(90) \qquad \frac{d\rho^2}{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)} - \frac{d\rho_1^2}{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)} = 0,$$

qui est précisément l'équation des asymptotiques de l'une ou l'autre quadrique, $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$ étant l'équation de l'une d'elles. Ce résultat est à peu près évident *a priori*, car nous avons vu que les équations de la correspondance reviennent à une affinité : une droite se transformant en droite, les génératrices rectilignes de Q se transforment dans les génératrices rectilignes de Q' et un segment de génératrice de Q conserve la même longueur en passant de Q à une quadrique homofocale voisine, puis à une autre, puis à Q', car ce segment est normal aux trajectoires de ses extrémités. Les courbes $(b)$ et (B) étant des droites, nous n'obtenons rien.

Nous n'aurons donc à étudier que le type IV et le type V, qui avec le type III (Peterson-Darboux) fourniront toutes les surfaces de même $ds^2$ susceptibles d'être obtenues ici. Je rappelle que, sur ces surfaces, les courbes $\alpha$ et $\beta$ sont conjuguées; les courbes $\beta = \text{const.}$ sont les courbes de contact de cônes circonscrits, les courbes $\alpha = \text{const.}$ sont les courbes de contact de cylindres circonscrits.

**16.** Je prends le mécanisme III qui donne les surfaces de Peterson-

Darboux :

$$S\begin{cases} X = A b_1, \\ Y = A b_2, \\ Z = \int a_3\, dA, \end{cases} \qquad S_1\begin{cases} X_1 = AB_1, \\ Y_1 = AB_2, \\ Z_1 = \int A_3\, dA, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(91)\qquad \begin{cases} B_1^2 + B_2^2 = b_1^2 + b_2^2 - C, \\ B_1'^2 + B_2'^2 = b_1'^2 + b_2'^2, \\ A_3^2 = a_3^2 + C. \end{cases}$$

Sur ces surfaces, les courbes $\alpha = \text{const.}$ et $\beta = \text{const.}$ forment un système conjugué pour une double raison comme conséquence du théorème de M. Kœnigs. La méthode de Peterson consiste à calculer $B_1$ et $B_2$, quand $b_1$ et $b_2$ sont données, en écrivant

$$(92)\qquad \begin{cases} B_1 = \rho\cos\theta, \qquad B_2 = \rho\sin\theta, \\ \rho^2 = b_1^2 + b_2^2 - C, \\ \theta' = \dfrac{\sqrt{(b_1 b_2' - b_2 b_1')^2 - C(b_1'^2 + b_2'^2)}}{b_1^2 + b_2^2 - C}. \end{cases}$$

Je vais indiquer quelques conditions nécessaires pour que les déformées d'une surface S algébrique de ce type soient toutes algébriques quand C varie; je fournirai des solutions élégantes de cette espèce. Mais les solutions de ce problème précis devant être probablement en assez petit nombre, je donnerai le moyen d'obtenir, quand C prend une valeur convenablement choisie, une surface $S_1$ algébrique en même temps que S, de sorte que nous aurons cette fois deux échantillons seulement algébriques dans la famille; pour ce problème moins précis, nous trouverons immédiatement des solutions en nombre illimité.

Pour traiter le premier problème, nous aurons d'abord à déterminer $a_3$ et A en fonction d'un paramètre $\alpha$ de façon que

$$\int a_3\, dA \qquad \text{et} \qquad \int \sqrt{a_3^2 + C}\, dA$$

soient fonctions algébriques de A. Une solution très étendue s'obtient

en supposant $A = P(a_3^2)$, où P désigne un polynome entier; on aura

$$P(a_3^2) = P(A_3^2 - C) = Q(A_3^2),$$

où Q désigne un autre polynome entier. Le cas le plus simple sera

$$A = a_3^2 - K,$$

d'où

$$\int a_3\, dA = \frac{2}{3}(A+K)^{\frac{3}{2}}, \qquad \int A_3\, dA = \frac{2}{3}(A+K+C)^{\frac{3}{2}}.$$

Nous avons ensuite à écrire que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont algébriques; je considère la courbe plane $(b_1, b_2)$ comme enveloppe de la droite

$$x\sin\omega - y\cos\omega = p. \tag{93}$$

Désignant par $p'$ la dérivée $\frac{dp}{d\omega}$, $r$ la distance du point $(b_1, b_2)$ à l'origine, $s$ l'arc, R le rayon de courbure, on a

$$\left\{\begin{array}{ll} b_1 = p\sin\omega + p'\cos\omega, & r^2 = p^2 + p'^2, \\ b_2 = -p\cos\omega + p'\sin\omega, & R = p + p'', \\ ds = (p+p'')\, d\omega, & R = \dfrac{r\,dr}{dp}, \\ b_1 b_2' - b_2 b_1' = p(p+p''). & \end{array}\right. \tag{94}$$

On en déduit

$$d\theta = \frac{ds\sqrt{p^2 - C}}{r^2 - C}, \tag{95}$$

formule qui ne fait plus intervenir que des éléments géométriques.

La fonction $e^{i\theta}$ doit être fonction algébrique des coordonnées $b_1, b_2$. Considérons une racine de l'équation $r^2 - C = 0$, soient $r_0$, $s_0$, $p_0'$, $R_0$, $\omega_0$ les valeurs numériques en ce point des éléments $r$, $s$, .... Le résidu de $\frac{d\theta}{ds}$ pour $r = r_0$ est

$$\frac{\sqrt{p_0^2 - r_0^2}}{2r_0\dfrac{dr_0}{ds}} = i\frac{dp_0}{d\omega_0} : 2r_0\frac{dr_0}{ds_0},$$

et ceci se réduit à $\frac{i}{2}$, car

$$r_0\, dr_0 = R_0\, dp_0, \qquad ds_0 = R_0\, d\omega_0.$$

En intégrant, on aura

$$\theta = \frac{-\varepsilon i}{2}\log(s-s_0) + F(s-s_0),$$
$$e^{i\theta} = (s-s_0)^{\frac{\varepsilon}{2}}\Phi(s-s_0),$$

où F et $\Phi$ sont fonctions régulières de $s$ pour $s = s_0$. Une circulation faite autour du point racine de $r^2 - C$ augmente $\log(s-s_0)$ de $2i\pi$ et $\theta$ de $\varepsilon\pi$, $\tang\theta$ ne varie pas. Pour que $e^{i\theta}$ soit algébrique, il faudra donc simplement que les périodes cycliques de l'intégrale (95) soient commensurables avec $\pi$. On voit aisément qu'une condition *nécessaire, mais non suffisante en général*, est que l'arc $s$ soit lui-même algébrique, autrement dit que la courbe $(b_1, b_2)$ soit développée d'une autre courbe algébrique. Car nous pouvons, si C est très grand, poser $C = \frac{-1}{K^2}$, où K sera infiniment petit, et développer

$$\frac{d\theta}{ds} = K + \frac{K^3}{2}(p^2 - 2r^2) + \dots,$$
$$\theta = Ks + K^3\theta_1 + K^5\theta_2 + \dots,$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots$ sont certaines fonctions de $s$

$$(96)\qquad \begin{cases} e^{i\theta} = 1 + i(Ks + K^3\theta_1 + \dots) - \frac{1}{2}(Ks + \dots)^2 + \dots \\ \quad = 1 + iKs - \frac{K^2}{2}s^2 + iK^3\left(\theta_1 - \frac{s^3}{6}\right) + \dots, \end{cases}$$

et alors les coefficients du développement (96) doivent être algébriques; finalement $s, \theta_1, \theta_2, \dots$ doivent être algébriques. Nous allons constater que, si la courbe $(b_1, b_2)$ est développée de conique, $\tang\theta$ est effectivement algébrique. Écrivons donc

$$(97)\qquad b_1 = a\cos^3\varphi, \qquad b_2 = b\sin^3\varphi$$

de façon à avoir, si $a \neq b$, une développée d'ellipse; et si $a = b$ une hypocycloïde à quatre rebroussements.

On trouve sans peine

$$(98)\qquad d\theta = \frac{3\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{a^2b^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi - C(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)}}{a^2\cos^6\varphi + b^2\sin^6\varphi - C}d\varphi,$$

et, en posant $\cos 2\varphi = u$,

$$(99) \qquad d\theta = \frac{-du\sqrt{a^2b^2(1-u^2) - 2C[a^2(1+u) + b^2(1-u)]}}{a^2(1+u)^3 + b^2(1-u)^3 - 8C}.$$

Le calcul est valable pour $a = b$ ou $a \neq b$. Si C est négatif, pour la réalité, aucune condition n'est imposée à $\varphi$, donc $u$ peut varier de $-1$ à $+1$; si $C > 0$, il faudra que C soit inférieur au maximum de

$$\frac{a^2b^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

d'où résulte aisément

$$C < \frac{a^2b^2}{(a+b)^2},$$

et alors il y a deux valeurs de $\varphi$ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ annulant le radical de la formule (98), donc deux valeurs de $u$ comprises entre $-1$ et $+1$ annulant le radical de la formule (99) et limitant entre elles la variation de $u$. De toutes façons, le radical de la formule (99) a deux racines réelles $u_0$, $u_1$ telles que

$$u_0 < -1 < +1 < u_1 \quad \text{si} \quad C < 0$$

et

$$-1 < u_0 < u_1 < +1 \quad \text{si} \quad 0 < C < \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

Si nous écrivons

$$\frac{u-u_0}{u_1-u} = t^2, \qquad u = \frac{u_1t^2 + u_0}{1+t^2},$$

l'intégrale devient, A, B, C, D étant certaines constantes,

$$(100) \qquad d\theta = \frac{t^2\,dt}{At^6 + Bt^4 + Ct^2 + D}.$$

Considérons le multiplicateur de $dt$ comme une fraction du troisième degré en $t^2$, on aura, $h$, $k$, ..., $l_1$ étant des constantes,

$$d\theta = \frac{h_1\,dt}{1+h^2t^2} + \frac{k_1\,dt}{1+k^2t^2} + \frac{l_1\,dt}{1+l^2t^2}.$$

Les explications données plus haut sur les racines de $r^2 - C = 0$

montrent que l'on doit avoir

$$h_1 = h, \qquad k_1 = k, \qquad l_1 = l.$$

D'autre part, la somme des résidus de la fraction

$$\frac{x}{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}$$

est nulle, donc on a

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 0.$$

Si dans (100) nous remplaçons $t$ par $\frac{1}{t}$, on est conduit par le même procédé à la relation

$$h + k + l = 0.$$

L'intégration donne

$$\theta = \operatorname{arc\,tang} ht + \operatorname{arc\,tang} kt + \operatorname{arc\,tang} lt,$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(h+k+l)t - hklt^3}{1 - (kl + lh + hk)t^2} = -hklt^3 = mt^3.$$

On en déduit

$$d\theta = \frac{3mt^2\,dt}{1 + m^2t^6}. \tag{101}$$

C'est une chose aisée de vérifier qu'effectivement le second membre de (100) a cette forme : les fonctions $B + C$ et $\frac{B - C}{u_1 - u_0}$ sont des fonctions symétriques de $u_1$ et $u_0$ dont on constate aisément qu'elles se réduisent à zéro, mais nos prévisions rendent cette vérification superflue. On a

$$\left\{\begin{aligned} m^2 &= \frac{a^2(1+u_1)^3 + b^2(1-u_1)^3 - 8C}{a^2(1+u_0)^3 + b^2(1-u_0)^3 - 8C}, \\ \operatorname{tang}\theta &= m\left(\frac{u-u_0}{u_1-u}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ \rho &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2(1+u)^3 + b^2(1-u)^3 - 8C}, \end{aligned}\right. \tag{102}$$

$u_1$ et $u_0$ étant les deux racines de

$$a^2b^2(1-u^2) - 2C[a^2(1+u) + b^2(1-u)] = 0,$$

C étant une constante au plus égale à $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$.

Désignons par $P(u)$ le polynome

$$a^2(1+u)^3+b^2(1-u)^3-8C;$$

le calcul qui précède fournit l'identité

$$P(u)\equiv\frac{(u-u_0)^3P(u_1)+(u_1-u)^3P(u_0)}{(u_1-u_0)^3},$$

que l'on obtient d'ailleurs en cherchant à résoudre l'équation $P(u)=0$ par l'une des méthodes classiques. On a alors les surfaces S et $S_1$ (K et $K_1$ étant deux constantes)

S (103)
$$\begin{cases} X=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}t(1+u)^{\frac{3}{2}},\\ Y=\dfrac{b}{2\sqrt{2}}t(1-u)^{\frac{3}{2}},\\ Z=\dfrac{2}{3}(Kt+K_1)^{\frac{3}{2}}; \end{cases}$$

$S_1$ (104)
$$\begin{cases} X_1=\dfrac{\sqrt{P(u_1)}}{2\sqrt{2}}t\left(\dfrac{u-u_0}{u_1-u_0}\right)^{\frac{3}{2}},\\ Y_1=\dfrac{\sqrt{P(u_0)}}{2\sqrt{2}}t\left(\dfrac{u_1-u}{u_1-u_0}\right)^{\frac{3}{2}},\\ Z_1=\dfrac{2}{3}\left(Kt+K_1+\dfrac{C}{K^2}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Pour $C=0$, la surface $S_1$ se réduit à S. Si C est négatif, en supposant $K>0$, il faut que $u$ soit compris entre $-1$ et $+1$ et que $t>-\frac{K_1}{K}$ pour que le point de S soit réel; mais, puisque $u_0<-1$ et $+1<u_1$, il faut encore que $t>-\frac{K_1}{K}-\frac{C}{K^3}$ pour que le point correspondant de $S_1$ soit réel, donc $S_1$ ne recouvre S qu'en partie. De même, pour qu'un point de $S_1$ soit réel, il faut et il suffit que

$$u_0<u<u_1 \quad \text{et} \quad t>\frac{-K_1}{K}-\frac{C}{K_3};$$

mais alors le point correspondant de S n'est réel que si $-1<u<+1$, donc S portée sur $S_1$, n'en recouvre elle aussi qu'une partie.

Si l'on suppose $o < C < \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2}$, on a des résultats semblables qui reviennent au fond à échanger les rôles de S et $S_1$. On le voit aussi en posant

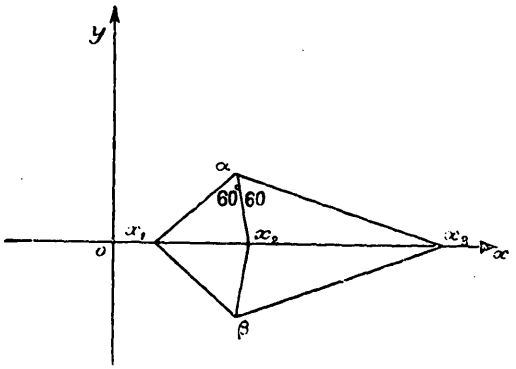
$$c = \frac{2u - u_0 - u_1}{u_1 - u_0}, \qquad a_1 = \sqrt{\frac{P(u_1)}{8}}, \qquad b_1 = \sqrt{\frac{P(u_0)}{8}},$$

$$K_1 + \frac{C}{K^2} = K_1', \qquad C_1 = -C;$$

les rôles de S et $S_1$ s'échangent.

Les résultats que nous venons de découvrir par voie déductive peuvent être énoncés synthétiquement, sous la forme suivante, qui ne fera plus de différence entre la développée d'ellipse ou d'hyperbole ou l'hypocycloïde à quatre rebroussements : soit $P(x)$ un polynome du troisième degré (ou du second degré) qui a ses racines réelles et dis-

Fig. 3.




tinctes; marquons (*fig.* 3), sur l'axe des $x$, les racines $x_1$, $x_2$ et $x_3$ ($x_3 = \infty$ si l'équation est du second degré). Il existe un point $\alpha$ au-dessus de $Ox$, tel que l'on voit de ce point le segment $x_1 x_2$ et le segment $x_2 x_3$ sous un angle de 60°; soit $\beta$ le point symétrique de $\alpha$ par rapport à $Ox$. Si le plan $xOy$ représente un plan complexe, et $\alpha$, $\beta$ désignent les affixes des points $\alpha$, $\beta$, on a manifestement

$$\frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} = j \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta} = j^2 \frac{x_3 - \alpha}{x_3 - \beta},$$

où $j$ est une racine cubique imaginaire de l'unité. On en conclut donc

que l'expression $\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^3$ a une seule et même valeur pour les trois racines de l'équation $P(x)$ et par suite

$$P(x) \equiv \lambda(x-\alpha)^3 + \mu(x-\beta)^3, \tag{105}$$

où $\lambda$, $\mu$, $\alpha$, $\beta$ sont certaines constantes; $\alpha$ et $\beta$ sont données par une équation du second degré quand P est donné; si P a ses trois racines réelles et distinctes, $\alpha$ et $\beta$ sont imaginaires conjuguées, $\lambda$ et $\mu$ aussi. Telle est l'interprétation géométrique élégante, que m'a signalée M. Kœnigs, de cette méthode classique de résolution de l'équation $P(x) = 0$ (1). Supposons donc *donné* un polynome arbitraire $f(x)$ du troisième degré (ou du second); nous supposons que $f'(x)$ n'est pas carré parfait. Dans ces conditions, posons

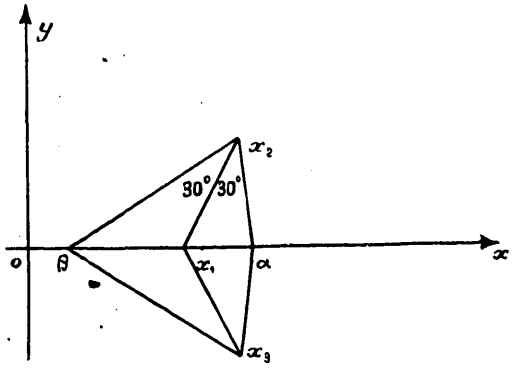
$$P(x) \equiv f(x) - C,$$

où C est une constante arbitraire, que nous ne ferons varier que dans les intervalles convenables de façon que P ait une racine réelle et deux imaginaires conjuguées. A chaque valeur de C correspondent, par une

---

(1) Si l'on suppose que P a une racine réelle $x_1$ et deux racines imaginaires $x_2$, $x_3$ (*fig.* 4), on joint $x_2$ à $x_1$ et l'on fait tourner de 30° dans un sens ou l'autre

Fig. 4.




autour de $x_2$ le rayon allant de $x_2$ à $x_1$; les deux droites ainsi obtenues percent $Ox$ aux points réels $\alpha$, $\beta$. Dans ce cas, si P était du second degré, à racines imaginaires, $x_2$ et $x_0$ sont ces racines et $x_1$ est le point à l'infini sur $Ox$.

équation du second degré, deux valeurs $u_0$, $u_1$ réelles et deux nombres $\lambda_0$, $\lambda_1$ réels tels que l'on ait

$$(106)\qquad \begin{cases} f(u)-C \equiv \lambda_1(u-u_0)^3 + \lambda_0(u-u_1)^3, \\ f'(u) \equiv 3[\lambda_1(u-u_0)^2+\lambda_0(u-u_1)^2], \\ f''(u) \equiv 6[\lambda_1(u-u_0)+\lambda_0(u-u_1)]. \end{cases}$$

Il en résulte qu'en écrivant

$$X = t\sqrt{\lambda_1(u-u_0)^3},$$
$$Y = t\sqrt{\lambda_0(u-u_1)^3},$$
$$Z = \int \sqrt{H(t)+C}\,dt,$$

on définit une infinité de surfaces variables avec C ayant toutes pour $ds^2$

$$ds^2 = [f(u)+H(t)]\,dt^2 + t f'(u)\,dt\,du + \frac{3t^2}{8} f''(u)\,du^2,$$

donc applicables les unes sur les autres. Pour avoir des surfaces algébriques il suffira, par exemple, de supposer que la relation entre H et $t$ est $t=\varphi(H)$, où $\varphi$ est un polynome entier. En posant $H+C=H_1$, on a encore $t=\psi(H_1)$, où $H_1$ est un nouveau polynome, et l'intégrale Z devient

$$Z = \int \sqrt{H_1}\,\psi'(H_1)\,dH_1,$$

qui est un polynome entier en $\sqrt{H_1}$.

Supposons $\lambda_1$ et $\lambda_0$ positifs, $u_1 > u_0$, on fera varier $u$ par valeurs supérieures à $u_1$, chaque plan horizontal coupe la surface suivant une développée d'hyperbole; dans ce cas, il n'y a pas de restriction à la variation de C.

Supposons $u_1 > u_0$, $\lambda_0 < 0$ et $\lambda_1 > 0$, on fera varier $u$ entre $u_0$ et $u_1$; chaque plan horizontal coupe la surface suivant une développée d'ellipse si $\lambda_0+\lambda_1 \neq 0$ [$f(u)$ du troisième degré], suivant une hypocycloïde à quatre rebroussements si $\lambda_0+\lambda_1 = 0$ [$f(u)$ du second degré]. Dans ce cas, C ne peut varier que dans un intervalle bien déterminé.

D'ailleurs, on voit aisément que remplacer $u$ par $\lambda U + \mu$ effectue la même substitution sur $u_0$ et $u_1$, tandis que $\lambda_0$ et $\lambda_1$ sont remplacées par $\lambda_0\lambda^2$ et $\lambda_1\lambda^2$; que l'on peut remplacer $f(u)$ par $\rho f(u)$, à condition de remplacer $\lambda_1$ et $\lambda_0$ par $\rho\lambda_1$, $\rho\lambda_0$, C par $\rho$C sans toucher à $u_0$ et $u_1$, $t$ étant remplacé par $\frac{t}{\sqrt{\rho}}$. On peut donc réduire le polynome $f(u)$ à la forme réduite $u^3 + 3pu$. Dans ce cas, on trouve immédiatement que $u_0$ et $u_1$ sont racines de

$$u^2 - \frac{C}{p}u - p = 0.$$

Si $p$ est positif, C peut varier arbitrairement; $u_1$ est positif, $u_0$ négatif et l'on a

$$u_1 = \frac{C}{2p} + \sqrt{\frac{C^2}{4p^2} + p} \qquad [\lambda_0 = -u_0(u_1 - u_0)],$$

$$u_0 = \frac{C}{2p} - \sqrt{\frac{C^2}{4p^2} + p} \qquad [\lambda_1 = u_1(u_1 - u_0)].$$

$$u_1 - u_0 = \sqrt{\frac{C^2}{p^2} + 4p}$$

Si $p$ est négatif, il faudra prendre C inférieur à $-2\sqrt{-p^3}$; $u_0$ et $u_1$ sont réels et positifs, $\lambda_1$ est positif, $\lambda_0$ négatif, on fait varier $u$ de $u_0$ à $u_1$.

Si l'on suppose le polynome $f$ du second degré, on pourra écrire les formules plus simples

$$(107)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{t}{k\sqrt{2}}(k^2 + u)^{\frac{3}{2}}, \\ Y = \dfrac{t}{k\sqrt{2}}(k^2 - u)^{\frac{3}{2}}, \\ Z = \displaystyle\int \sqrt{\Pi(t) - k^3}\, dt, \end{cases}$$

où $k$ est le paramètre de déformation; le $ds^2$ est

$$ds^2 = [3u^2 + \Pi(t)]\,dt^2 + 6u\,dt\,du + \frac{9}{4}t^2\,du^2.$$

17. En prenant le type III, nous aurions pu écrire, en suivant une

méthode légèrement différente,

$$(108)\qquad \begin{cases} B_2^2 = b_1^2 + b_2^2 - B_1^2 - C, \\ B_2'^2 = b_1'^2 + b_2'^2 - B_1'^2. \end{cases}$$

L'élimination de $B_2$ est immédiate :

$$(109)\quad (b_1^2 + b_2^2 - B_1^2 - C)(b_1'^2 + b_2'^2 - B_1'^2) - (b_1 b_1' + b_2 b_2' - B_1 B_1')^2 = 0.$$

Si nous considérons la quadrique Q

$$x^2 + y^2 - z^2 - C = 0,$$

le cône circonscrit à Q, de sommet $x_0, y_0, z_0$, a pour équation

$$(x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - C)(x^2 + y^2 - z^2 - C) - (x_0 x + y_0 y - z_0 z - C)^2 = 0$$

ou encore

$$(110)\quad \begin{aligned}(x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - C)[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2] \\ - [x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - z_0(z - z_0)]^2 = 0.\end{aligned}$$

L'équation (108) exprime donc que $b_1'$, $b_2'$, $B_1'$ sont les paramètres directeurs d'une génératrice du cône de sommet $(b_1, b_2, B_1)$ circonscrit à Q. Autrement dit, la courbe lieu du point $(b_1, b_2, B_1)$ est l'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à Q. Si donc nous nous donnons la valeur de la constante C, la quadrique Q est connue, nous pouvons circonscrire à Q une développable et nous prendrons pour $b_1$, $b_2$, $B_1$ les coordonnées d'un point courant de l'arête de rebroussement; en prenant ensuite $B_2 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + B_1^2 - C}$, nous aurons $B_2$; nous donnant ensuite $a_3$ et A, nous avons un *couple* S et $S_1$ obtenu sans quadratures autres que $\int a_3\, dA$ et $\int A_3\, dA$. Ici S et $S_1$ jouant le même rôle, on peut supposer $C \geqslant 0$ et même $C = 1$, car on peut multiplier par un même facteur les fonctions $a_1, a_2, \ldots, B_3$, à condition de diviser A par le même facteur. On pourra donc écrire

$$(111)\qquad a_3 = \operatorname{sh}\varphi, \qquad A_3 = \operatorname{ch}\varphi, \qquad A = t - t'',$$

où $t$ est une fonction algébrique de $e^{\varphi}$, de sorte que

$$\int \operatorname{ch}\varphi\, d(t-t'') = t'\operatorname{sh}\varphi - t''\operatorname{ch}\varphi,$$

$$\int \operatorname{sh}\varphi\, d(t-t'') = t'\operatorname{ch}\varphi - t''\operatorname{sh}\varphi.$$

On prendra d'autre part une courbe algébrique C arbitraire sur la quadrique $x^2+y^2-z^2-1=0$; l'arête de rebroussement $\Gamma$ de la développable D circonscrite à Q le long de C s'obtiendra algébriquement, nous aurons ainsi un couple algébrique S, $S_1$; quand le paramètre de déformation est nul, nous avons S; quand il devient égal à 1, nous obtenons $S_1$; mais, pour les autres valeurs de ce paramètre, nous aurons des surfaces déformées de S ou $S_1$ qui ne seront plus algébriques.

Donnons immédiatement un exemple simple; sur la quadrique Q,

$$x^2+y^2-z^2-1=0,$$

on peut exprimer les coordonnées d'un point courant avec deux paramètres $(\lambda, \mu)$, ainsi que les coordonnées $u, v, w, p$ du plan tangent, par les formules

$$(112)\quad \begin{cases} x=\dfrac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}, \qquad y=\dfrac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}, \qquad z=\dfrac{1-\lambda\mu}{\lambda+\mu}, \\ u=\lambda-\mu, \qquad v=1+\lambda\mu, \qquad w=\lambda\mu-1, \qquad p=-\lambda-\mu. \end{cases}$$

En prenant $\lambda=\mu^2$, nous avons une développable D de troisième classe

$$(113)\quad u=\mu^2-\mu, \qquad v=1+\mu^3, \qquad w=\mu^3-1, \qquad p=-\mu^2-\mu.$$

L'arête de rebroussement $\Gamma$ est la cubique gauche

$$(114)\quad x=\frac{-1-\mu}{1-\mu}, \qquad y=\frac{1+\mu+\mu^2}{3\mu}, \qquad z=\frac{1+\mu^3}{3\mu(1-\mu)}.$$

Je prendrai

$$a_3=\operatorname{sh}\varphi, \qquad A_3=\operatorname{ch}\varphi, \qquad A=e^{2\varphi}$$

et j'ai le couple algébrique

$$S\begin{cases} X=\alpha^2\dfrac{1+\mu}{1-\mu},\\ Y=\alpha^2\dfrac{1+\mu+\mu^2}{3\mu},\\ Z=\dfrac{\alpha^3}{3}-\alpha, \end{cases} \qquad S_1\begin{cases} X_1=\alpha^2\dfrac{1+\mu^3}{3\mu(1-\mu)},\\ Y_1=\alpha_2\dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{\mu}}{3(1-\mu)},\\ Z_1=\dfrac{\alpha^3}{3}+\alpha, \end{cases}$$

où j'ai remplacé $e^2$ par $\alpha$.

On voit que la surface $S_1$ ne recouvre S que sur la région $\mu>0$; dans tous les exemples obtenus par cette méthode, à cause du radical $B_2=\sqrt{b_1^2+b_2^2-B_1^2-1}$, nous aurons une surface $S_1$ ne recouvrant S que sur les régions limitées par des plans méridiens correspondant aux arcs de Γ satisfaisant à l'inégalité $x^2+y^2-z^2-1>0$. Nous pouvons prévoir *a priori* le nombre des points d'intersection de Γ et de Q; en effet, Γ est la polaire réciproque par rapport à Q de la développable enveloppe des plans osculateurs de C; si, en un point de C, le plan osculateur à cette courbe est tangent à Q, le point correspondant de Γ est sur Q (coïncidant d'ailleurs avec ce point de C); car le plan osculateur de C contient deux tangentes consécutives de C, tandis que le point de Γ est à l'intersection des deux tangentes conjuguées de celles-là. Dans le plan ωλμ image de Q, les asymptotiques de Q ont pour image les droites parallèles aux axes ωλ, ωμ, et, pour avoir les points de C où le plan osculateur est tangent à Q, il suffit de mener à l'image de C les tangentes parallèles à ωλ ou ωμ. Nous pourrons donc obtenir des courbes Γ coupant Q en un nombre arbitrairement grand $2n$ de points, S sera partagée en $2n$ régions, alternativement recouvertes ou non par la surface $S_1$. Cette disposition curieuse méritait d'être signalée. Avec l'exemple numérique $\lambda=\mu^2$, le nombre $n$ est égal à l'unité.

**18.** Nous pouvons maintenant étudier rapidement les couples de surfaces applicables fournis par le type IV. La courbe (A) est une droite, donc elle doit bien s'appeler (A) et non (B); (A) est l'axe des $z$, (B) est une courbe arbitraire et, avec le Tableau (12), nous

devons choisir deux constantes arbitraires C et $h$, et, puisque

$$b_3 = hB_3 \qquad \text{et} \qquad b_1'^2 + b_2'^2 = B_1'^2 + B_2'^2 + B_3'^2,$$

on aura

$$(115) \qquad \begin{cases} b_1^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2(1-h^2) - C, \\ b_1'^2 = B_1'^2 + B_2'^2 + B_3'^2(1-h^2). \end{cases}$$

Un raisonnement déjà fait montre que la courbe $(B_1, B_2, B_3)$ est l'arête de rebroussement $\Gamma$ d'une développable D circonscrite à la quadrique Q de révolution

$$x^2 + y^2 + z^2(1-h^2) - C = 0.$$

On opérera comme plus haut pour avoir une courbe (B) algébrique et l'on prendra ensuite

$$b_3 = hB_3, \qquad b_1 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2(1-h^2) - C}.$$

Comme on a

$$a_2^2 + a_3^2(1-h^2) = C,$$

si $C > 0$ et si $0 < h < 1$, on posera

$$a_2 = \sqrt{C}\cos\varphi, \qquad a_3 = \sqrt{\frac{C}{1-h^2}}\sin\varphi,$$

et les quadratures $\int a_2\,dA$, $\int a_3\,dA$ s'effectueront en écrivant

$$A = t + t'',$$

où $t$ est une fonction algébrique de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. On a ainsi

$$S \begin{cases} X = Ab_1, \\ Y = -\int a_2\,dA, \\ Z = Ab_3 - \int a_3\,dA; \end{cases}$$

$$S_1 \begin{cases} X_1 = AB_1, \\ Y_1 = AB_2, \\ Z_1 = AB_3 - h\int a_3\,dA = AB_3 - \int A_3\,dA. \end{cases}$$

Si $C > 0$ et $h > 1$, on pose

$$a_2 = \sqrt{C}\,\mathrm{ch}\,\varphi, \qquad a_3 = \sqrt{\frac{C}{h^2-1}}\,\mathrm{sh}\,\varphi \qquad \text{et} \qquad \Lambda = t - t'',$$

où $t$ est fonction algébrique de $e^{\varphi}$.

Si $C < 0$ et $h > 1$, on pose

$$a_3 = \sqrt{\frac{C}{1-h^2}}\,\mathrm{ch}\,\varphi, \qquad a_2 = \sqrt{-C}\,\mathrm{sh}\,\varphi \qquad \text{et} \qquad \Lambda = t - t''.$$

On pourrait se demander ici si le couple S, $S_1$ étant ainsi constitué, la courbe (B) ne permettrait pas de déterminer une autre déformée de $S_1$; en effet, $Oz$ et la courbe (B) étant donnés, on peut déplacer sur $Oz$ le point pris pour origine; soit $z_0$ la cote d'un point pris sur $Oz$; si la courbe (B) avait ses tangentes également tangentes à une seconde quadrique Q′ de révolution autour de $Oz$,

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 (1 - h'^2) - C' = 0,$$

on pourrait en déduire une nouvelle déformée de $S_1$; mais alors, (B) devant être arête de rebroussement de la développable circonscrite à Q et Q′, (B) se réduirait à un point, puisque Q et Q′ ont le même axe de révolution; donc nous n'obtenons rien.

La constante $h$ ne peut être nulle; si l'on avait $h = 1$, on aurait $a_2^2 = C$, et, comme on peut réduire C à l'unité, on aurait

$$a_2 = 1, \qquad C = 1, \qquad b_3 = B_3, \qquad b_1 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 1}, \qquad b_1'^2 = B_1'^2 + B_2'^2.$$

Un calcul déjà fait montre que le point $(B_1, B_2, 0)$ décrit une tangente au cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on pourra donc supposer $B_2 = 1$, $b_1 = B_1$, et alors les deux surfaces S et $S_1$ coïncident.

Si l'on suppose $C = 0$, la quadrique Q est un cône, la courbe $(B_1, B_2, B_3)$ est une courbe plane contenue dans un plan tangent au cône; écrivons $1 - h^2 = -m^2$, et je pourrai supposer

$$B_2 = m B_3, \qquad b_1 = B_1, \qquad b_2 = 0, \qquad b_3 = \sqrt{1 + m^2} B_3, \qquad a_2 = m a_3,$$

et l'on constate aisément que S et $S_1$ peuvent coïncider par rotation autour de $Ox$. Finalement, on doit donc simplement garder le cas

d'une quadrique de révolution à centre non développable, ou encore d'un paraboloïde de révolution. Ce cas du paraboloïde correspond au Tableau

$$(116)\qquad \begin{cases} (a) & 0 & a_2 & a_3 & & (A) & 0 & 0 & a_3+\dfrac{m}{2}, \\ (b) & b_1 & 0 & b_3 & & (B) & B_1 & B_2 & b_3-\dfrac{m}{2} \end{cases}$$

avec

$$(117)\qquad a_2^2-2ma_3=B_1^2+B_2^2-2mB_3-b_1^2=0.$$

L'équation

$$b_1'^2=B_1'^2+B_2'^2$$

entraîne que la courbe $(B_1, B_2, B_3)$ soit l'arête de rebroussement $\Gamma$ d'une développable circonscrite au paraboloïde

$$(118)\qquad x^2+y^2-2mz=0;$$

on aura une courbe (B) algébrique comme plus haut et l'on pourra prendre pour A la dérivée seconde d'une fonction algébrique de $a_2$ afin que $\int a_2\,dA$ et $\int a_2^2\,dA$ soient algébriques en même temps que A.

Dans le cas du mécanisme IV, on fera les mêmes remarques que précédemment sur les régions de $S_1$ effectivement recouvertes par S, à cause du radical qui donne $b_1$. On remarquera que s'il s'agit d'un ellipsoïde de révolution, d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes ou du paraboloïde de révolution, en partant d'une courbe réelle C située sur la quadrique, l'arête de rebroussement $\Gamma$ perce la quadrique en points tous imaginaires et la quantité $b_1$ est toujours réelle : les deux surfaces S et $S_1$ se recouvrent complètement. Si la quadrique est un hyperboloïde à une nappe, on retrouve la possibilité de partager la surface $S_1$ en $2n$ secteurs alternativement recouverts ou non.

Pour avoir un exemple numérique, je pourrai prendre $C=1$, $h=\sqrt{2}$, de façon à retrouver la quadrique $x^2+y^2-z^2-1=0$ déjà étudiée; en prenant la même courbe d'image $\lambda=\mu^2$, $a_2=\operatorname{ch}\varphi$, $a_3=\operatorname{sh}\varphi$, $A=e^{2\varphi}$

et posant $e^2 = \alpha$, j'aurai

$$(S)\begin{cases} X = \alpha^2 \dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{\mu}}{3(1-\mu)}, \\ Y = \dfrac{\alpha^3}{3} + \alpha, \\ Z = \alpha^2 \dfrac{\sqrt{2}(1+\mu^3)}{3\mu(1-\mu)} - \dfrac{\alpha^3}{3} + \alpha; \end{cases}$$

$$(S_1)\begin{cases} X_1 = \alpha^2 \dfrac{1+\mu}{1-\mu}, \\ Y_1 = \alpha^2 \dfrac{1+\mu+\mu^2}{3\mu}, \\ Z_1 = \alpha^2 \dfrac{1+\mu^3}{3\mu(1-\mu)} - \dfrac{\sqrt{2}\alpha^3}{3} + \alpha\sqrt{2}. \end{cases}$$

**19.** Le mécanisme V conduit à des résultats semblables. Supposons la conique $(a)$ à centre. Les formules du Tableau (17) montrent que l'on doit avoir à la fois

$$B_3^2 = b_1^2\left(1 - \frac{1}{h_1^2}\right) + b_2^2\left(1 - \frac{1}{h_2^2}\right) + b_3^2 + C,$$
$$B_3'^2 = b_2'^2\left(1 - \frac{1}{h_1^2}\right) + b_2'^2\left(1 - \frac{1}{h_2^2}\right) + b_3'^2.$$

La courbe $(b_1, b_2, b_3)$ est donc l'arête de rebroussement $\Gamma$ d'une développable D circonscrite à la quadrique Q

$$x^2\left(1 - \frac{1}{h_1^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{1}{h_2^2}\right) + z^2 + C = 0.$$

Si l'on remplace $h_1$ par $\frac{\sqrt{\alpha^2 - C}}{\alpha}$, $h_2$ par $\frac{\sqrt{\beta^2 - C}}{\beta}$, on voit que la conique $(a)$ étant donnée par l'équation

$$\frac{a_1^2}{\alpha^2} + \frac{a_2^2}{\beta^2} = 1, \tag{119}$$

$\alpha$ et $\beta$ étant soit réels, soit imaginaires pures, on doit fixer C et circon-

scrire une développable à la quadrique Q

$$\frac{x^2}{\alpha^2-C}+\frac{y^2}{\beta^2-C}-\frac{z^2}{C}-1=0, \tag{120}$$

d'où l'on déduit $(b)$ et par suite (A) et (B). On remarquera que la quadrique Q est l'une quelconque de celles qui appartiennent au faisceau homofocal déterminé par la conique $(a)$ et le cercle de l'infini; la conique (A) est la section de Q par le plan $z=0$. La courbe (B) est arête de rebroussement d'une certaine développable circonscrite à la quadrique Q'

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{C}-1=0. \tag{121}$$

Il est facile, comme plus haut, d'avoir deux surfaces S et $S_1$ algébriques. Les formules donnant S et $S_1$ sont :

$$(S)\quad\begin{cases} X=A\,b_1-\int a_1\,dA,\\ Y=A\,b_2-\int a_2\,dA,\\ Z=A\,b_3; \end{cases}$$

$$(S_1)\quad\begin{cases} X_1=A\dfrac{b_1}{h_1}-h_1\int a_1\,dA,\\ Y_1=A\dfrac{b_2}{h_2}-h_2\int a_2\,dA,\\ Z_1=AB_3. \end{cases}$$

Remarquons que l'on peut supposer $C>0$, sinon on renverserait le rôle de $(a)$ et (A). Nous supposons d'abord $(a)$ et (A) coniques homofocales non sécantes de façon que $h_1$ et $h_2$ soient réelles. Alors, si $(a)$ est une ellipse, Q' est un ellipsoïde réel et Q un hyperboloïde à une nappe; tout point réel de $S_1$ a un homologue réel sur S, mais il peut y avoir des points réels de S sans homologue réel sur $S_1$ à cause du radical qui donne $B_3$, la courbe $(b)$ pouvant couper la quadrique Q en des points réels, pour la raison donnée au Chapitre précédent, tandis que Q' n'étant pas à génératrices réelles la courbe (B) ne peut couper Q' en des points réels. Si $(a)$ est une hyperbole, toujours

avec $C > o$, Q est un hyperboloïde à deux nappes, Q' un hyperboloïde à une nappe; cette fois les rôles de S et $S_1$ dans la correspondance par points réels ou imaginaires sont renversés.

Si l'on suppose les coniques $(a)$ et (A) réelles, mais de genre opposé, donc sécantes, en général l'une des surfaces S étant réelle, l'autre $S_1$ sera complètement imaginaire : supposons, en effet, $\alpha$ et $\beta$ réels, $\alpha > \beta > o$ et $\alpha^2 > C > \beta^2$; $h_1$ est réel, $h_2$ imaginaire pure; à un point réel de S correspond un point de $S_1$ pour lequel $X_1$ et $Z_1$ sont réelles et $Y_1$ imaginaire pure (Q est ici un hyperboloïde à deux nappes); mais, si l'on s'arrange pour que la courbe $(b_1, b_2, b_3)$ ait le plan $xOz$ pour plan de symétrie et admette des points à coordonnées $b_1$ et $b_3$ réelles mais $b_2$ imaginaire pure, en prenant sur $(a)$ les points à coordonnée $a_1$ réelle et $a_2$ imaginaire pure, on obtient des points réels de $S_1$, de sorte que $S_1$ est néanmoins réelle et l'on a de nouveau un exemple de correspondance par point réel pour point imaginaire entre deux surfaces réelles applicables.

Dans le cas où la conique $(a)$ est une parabole, on a des résultats analogues; j'adopterai le Tableau

$$(122)\qquad \begin{cases} (a) \quad a_1 \quad a_2 \quad o \qquad\qquad (A) \quad a_1 + \dfrac{m}{2} \quad h_2 a_2 \quad o \\ (b) \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \qquad\qquad (B) \quad b_1 - \dfrac{m}{2} \quad \dfrac{b_2}{h_2} \quad B_3 \end{cases}$$

d'où

$$a_2^2(1 - h_2^2) - 2ma_1 = B_2^2(1 - h_2^2) + B_3^2 - 2mB_1 - b_3^2 = o.$$

L'égalité

$$b_3'^2 = B_2'^2(1 - h_2^2) + B_3'^2$$

entraîne que la courbe $(B_1, B_2, B_3)$ soit arête de rebroussement d'une développable circonscrite au paraboloïde

$$y^2(1 - h_2^2) + z^2 - 2mx = o.$$

En posant $p = \dfrac{m}{1 - h_2^2}$, on voit que (B) est arête de rebroussement d'une développable circonscrite au paraboloïde

$$y^2 + z^2\frac{p}{m} - 2px = o,$$

et alors tout est parfaitement déterminé. On s'arrangera encore comme précédemment pour avoir des surfaces algébriques.

Pour avoir un exemple simple emprunté au mécanisme V, je prendrai

$$\alpha^2=\beta^2=2, \qquad C=1, \qquad h_1=h_2=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui fait intervenir des cercles au lieu d'ellipses, ce qui ne gêne pas. Je prends pour courbe $(b)$ la cubique déjà obtenue, puisque la quadrique Q est encore $x^2+y^2-z^2-1=0$. J'ai

$$b_1=\frac{-1-\mu}{1-\mu}, \qquad b_2=\frac{1+\mu+\mu^2}{3\mu}, \qquad b_3=\frac{1+\mu^3}{3\mu(1-\mu)},$$
$$B_1=\sqrt{2}\,\frac{-1-\mu}{1\mu}, \qquad B_2=\sqrt{2}\,\frac{1+\mu+\mu^2}{3\mu}, \qquad B_3=\frac{4\sqrt{2}\sqrt{-\mu}}{3(1-\mu)};$$

et, en prenant

$$A=\cos^2\varphi, \qquad a_1=\sqrt{2}\cos\varphi, \qquad a^2=\sqrt{2}\sin\varphi,$$

$$S\begin{cases} X=\cos^2\varphi\,\dfrac{1+\mu}{1-\mu}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cos^3\varphi, \\ Y=\cos^2\varphi\,\dfrac{1+\mu+\mu^2}{3\mu}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sin^3\varphi, \\ Z=\cos^2\varphi\,\dfrac{1+\mu^3}{3\mu(1-\mu)}; \end{cases}$$

$$S_1\begin{cases} X_1=\sqrt{2}\cos^2\varphi\,\dfrac{1+\mu}{1-\mu}+\dfrac{2}{3}\cos^3\varphi, \\ Y_1=\sqrt{2}\cos^2\varphi\,\dfrac{1+\mu+\mu^2}{3\mu}+\dfrac{2}{3}\sin^3\varphi, \\ Z_1=\cos^2\varphi\,\dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{-\mu}}{3(1-\mu)}. \end{cases}$$

Conformément aux prévisions, $S_1$ ne recouvre S que sur la région $\mu<0$.

**20.** Il résulte de ce qui précède que toute développable circonscrite à une quadrique Q permettra, si l'on prend pour axes de coordonnées les axes de Q, de déterminer trois séries de couples du type V dépendant d'une fonction arbitraire (A avec les notations de ce travail); il

faut, en effet, indiquer celui des trois axes de Q qui s'appelle $Oz$. Si cette quadrique Q est de révolution, ces trois séries se réduisent à deux, mais on aura une nouvelle série du type IV en prenant l'axe de révolution pour $Oz$; si cette quadrique est même un hyperboloïde de révolution à une ou deux nappes de cône asymptotique $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, on peut en déduire de plus une famille de couples du type III. Mais nous n'obtenons à chaque fois qu'un couple pour les types IV ou V. Il résulte de là que les développables intéressantes seront celles de quatrième classe circonscrites à un faisceau tangentiel de quadriques et les développables de troisième classe, circonscrites, comme on sait, à toutes les quadriques d'un réseau tangentiel ayant une génératrice commune; il suffira d'ailleurs de se donner l'arête de rebroussement, qui est une cubique. Ces développables de quatrième classe ou troisième classe pourront être successivement associées à chaque quadrique inscrite, mais nous n'obtenons à chaque fois qu'un couple.

**21.** Le problème que j'ai traité en détail se trouve, par une coïncidence curieuse, identique au problème suivant :

*Déterminer toutes les surfaces dont les lignes de courbure sont sphériques dans les deux systèmes.*

Je renvoie au Tome IV de la *Théorie des Surfaces* de Darboux, pages 26 et suivantes. Avec un léger changement de notations, le résultat est le suivant : *on détermine de la manière la plus générale six fonctions* $A_i$ *de* $\alpha$ *et six fonctions* $B_i$ *de* $\beta$ *vérifiant identiquement la relation*

$$\sum_{1}^{6} (A_i - B_i)^2 = 0, \tag{123}$$

*puis on prendra l'enveloppe de la sphère variable définie en coordonnées pentasphériques par l'équation*

$$\sum_{1}^{5} (A_i - B_i)\, x_i = 0.$$

*Les deux nappes de l'enveloppe seront les surfaces les plus générales cherchées.*

L'équation (123) est celle à laquelle se réduit le problème traité dans ce Mémoire en remplaçant $ia_1$ par $A_1$, $ia_2$ par $A_5$, $ia_3$ par $A_6$, et de même $ib_1$, $ib_2$, $ib_3$ par $B_4$, $B_5$. $B_6$.

La méthode esquissée par Darboux consiste à introduire une substitution orthogonale dans l'espace à six dimensions de façon que les fonctions $A_i$ satisfassent à 1, 2, ou 3 relations telles que :

1° Chaque relation ait la forme

$$A'_h = 0 \qquad \text{ou} \qquad A'_h + iA'_k = 0;$$

2° La même dérivée $A'_h$ ne figure que dans une relation.

Cette méthode est peut-être plus intuitive pour remarquer que les quadriques, coniques, droites et plans joueront un rôle prépondérant; mais, au point de vue de la réalité, pour le problème des mécanismes, elle serait peut-être un peu plus pénible; cet inconvénient disparaît, au contraire, si l'on se borne aux coordonnées pentasphériques. Je dois signaler, d'ailleurs, une omission dans l'exposé de Darboux : Darboux écarte le cas d'une seule relation de la forme $A'_h = 0$, ce qui est exact, mais il écarte aussi le cas d'une seule relation de la forme $A'_h + iA'_k = 0$, ce qui n'est plus exact. En effet, la solution définie par les relations

$$\begin{aligned} A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 &= 0, \qquad & A_5 + iA_6 &= 0, \\ B_1 = B_2 = B_3 = B_4 &= 0, \qquad & B_5 + iB_6 &= 0 \end{aligned}$$

correspond précisément au mécanisme I de ce travail, constitué par une droite et une surface de révolution autour de la droite.