

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALEX. VÉRONNET

**Figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide en rotation. Variation
du grand axe avec moment de rotation constant**

Journal de mathématiques pures et appliquées 8^e série, tome 2 (1919), p. 211-247.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1919_8_2__211_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide en rotation. Variation du grand axe avec moment de rotation constant;

PAR ALEX. VÉRONNET.

Une masse liquide homogène peut prendre en tournant la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati ou celle d'un ellipsoïde à trois axes. On obtient toutes les figures intermédiaires depuis la sphère jusqu'au disque aplati et à l'aiguille allongée. On a étudié la variation de ces figures avec la variation de la vitesse de rotation ω , ou du moment de rotation $\mu = I\omega$, ou de la densité ρ ⁽¹⁾. Il est intéressant d'introduire dans les formules comme paramètre le grand axe de l'ellipsoïde au lieu de la densité. On obtient alors la *variation de la grandeur des figures*, en même temps que la variation de la forme et l'on peut *calculer les éléments réels* correspondant aux différents cas et aux différentes formes. On fera les calculs numériques pour une masse analogue à la Terre.

I. — Ellipsoïde de révolution homogène ou ellipsoïdes de Maclaurin.

Pour les ellipsoïdes de révolution aplatis on a les formules

$$(1) \quad h = \frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = \frac{3+l^2}{l^3} \arctan l - \frac{3}{l^2}, \quad 1+l^2 = \frac{a^2}{b^2},$$

$$(2) \quad k = \frac{50\mu^2}{3fM^3} \left(\frac{4\pi\rho}{3M} \right)^{\frac{1}{3}} = 4h(1+l^2)^{\frac{2}{3}},$$

⁽¹⁾ M. Appell a fait son cours d'avant-guerre sur la question générale des figures d'équilibre d'un liquide homogène en rotation, en publication chez Gauthier-Villars. Un intéressant résumé en a paru dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1919. On y trouvera les formules et les résultats connus.

où a est le rayon équatorial et b le rayon polaire, correspondant à l'axe de rotation. M représente la masse. Si l varie de 0 à l'infini, la figure passe de la sphère à celle d'un ellipsoïde de plus en plus aplati. La valeur de h part de 0 pour retourner à 0 en passant par un maximum égal à 0,224 pour $l = 2,53$. La valeur de k , au contraire, part de 0 et croît indéfiniment.

Si l'on considère la densité ρ comme constante, la première formule indique que la vitesse de rotation croît d'abord jusqu'à un maximum pour décroître ensuite. Au-dessous du maximum, il y a deux valeurs de l et deux valeurs de l'aplatissement correspondant à une même valeur de la vitesse de rotation ω . La seconde formule indique que le moment de rotation μ croît indéfiniment avec l'aplatissement et réciproquement.

Si l'on considère le moment de rotation comme constant (c'est le cas d'astronomie pratique d'un astre qui se contracte en dehors de toute action extérieure), la seconde formule indique que la densité ρ doit croître indéfiniment, comme k , avec l et l'aplatissement. Mais la densité ne peut pas devenir pratiquement infinie. Il est intéressant de voir quelles seraient la figure et les dimensions limites.

Nous avons ici

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho a^2 b = \frac{4}{3} \pi \rho \frac{a^3}{\sqrt{1+l^2}}$$

En éliminant ρ de (2) au moyen de cette relation, on obtient

$$(3) \quad g = \frac{50}{3fM^3} \frac{\mu^2}{a} = 4h \sqrt{1+l^2} = \frac{h}{(1+l^2)^{\frac{1}{6}}}.$$

C'est cette expression g qui va nous donner la variation du grand axe a en fonction de l .

Pour $l = 0$, on a $g = 4h = 0$ et pour $l = \infty$, en se reportant à la valeur de h , on a $g = 2\pi$.

Prenons la dérivée de cette expression g par rapport à l , on a

$$\frac{dg}{dl} = 4 \frac{9+7l^2}{l^2 \sqrt{1+l^2}} \left(\frac{9+4l^2}{9+7l^2} l - \text{arc tang } l \right).$$

Cette expression est toujours positive. La valeur de g est donc toujours croissante de 0 à 2π quand l croît de zéro à l'infini. En effet,

pour $l = 0$, l'expression entre crochets tend vers $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{l}{5}$, et sa dérivée, qui est

$$\frac{9 + 4l^2}{9 + 7l^2} - \frac{54l^2}{(9 + 7l^2)^2} - \frac{1}{1 + l^2} = \frac{24l^4 + 26l^6}{(1 + l^2)(9 + 7l^2)^2},$$

reste toujours positive. Par conséquent, quand l va de zéro à l'infini, c'est-à-dire quand l'aplatissement de l'ellipsoïde augmente indéfiniment, g croît de 0 à 2π . Comme le moment de rotation reste constant pendant la contraction, la formule (3) indique que a part d'une valeur très grande et décroît continuellement en tendant finalement vers une valeur limite définie par

$$(4) \quad \frac{50\mu^2}{3fM^3a} = 2\pi.$$

Pour de faibles aplatissements, en développant la formule (3) en fonction de l et en négligeant l^4 , on obtient

$$(5) \quad g = \frac{16}{15}l^2 \dots = \frac{32}{15}e \dots,$$

l'aplatissement e étant relié à l par la formule

$$(6) \quad \frac{a^2}{b^2} = 1 + l^2 = \frac{1}{(1 - e)^2} = 1 + 2e \dots$$

En tenant compte de la valeur de g , on peut donc écrire

$$(7) \quad \frac{\mu^2}{ae} = \frac{3fM^3}{25\pi} = \text{const.} \quad \text{ou} \quad ae = \text{const.}$$

avec μ constant. Ainsi, pour de faibles aplatissements et dans le cas où le moment de rotation reste constant, l'aplatissement varie en raison inverse du rayon équatorial de l'ellipsoïde et réciproquement.

J'avais démontré dans ma thèse [*Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre (Journal de Mathématiques, 1912, p. 385)*] que pour un fluide hétérogène, dans le cas de faibles aplatissements, la loi de variation de ces aplatissements ne dépend que

de celle des densités et l'aplatissement superficiel est proportionnel à h , pour la même répartition des densités. Les formules (7) sont donc conservées, e ayant seulement une valeur différente de celle qu'il aurait dans le cas de l'homogénéité ⁽¹⁾. Pour la Terre, par exemple, il faudrait qu'elle se contracte jusqu'à un rayon moitié moindre pour que son aplatissement devienne double. Il res-

(1) Pour la Terre, dans l'hypothèse de Clairaut, vitesse de rotation égale sur toutes les surfaces de niveau, l'aplatissement déterminé par la constante de précession et le rapport de la force centrifuge à l'attraction est renfermé en première approximation dans les deux limites très voisines (*Journal de Mathématiques*, 1912, p. 390) :

$$297,10 < \frac{1}{e} < 297,40.$$

La première limite est celle de Poincaré, la seconde est déterminée par ce fait, démontré dans le travail indiqué, que la fonction de Radau est toujours croissante pour la Terre. En faisant les calculs exacts correspondant aux lois de densité de Legendre, Roche, Lipschitz, Lévy, Radau, on trouve, pour 21 déterminations, des nombres qui ne s'écartent pas de 0,04 de la valeur moyenne

$$\frac{1}{e} = 297,17.$$

En deuxième approximation, en tenant compte du carré de l'aplatissement, les autres corrections en e^3 ... étant négligeables, on obtient les limites définitives

$$296,00 < \frac{1}{e} < 296,85,$$

et les calculs numériques donnent à quelques centièmes près (p. 416)

$$\frac{1}{e} = 296,45.$$

Ces déterminations sont indépendantes de celles du pendule ou des mesures géodésiques. Si l'aplatissement réel était de $\frac{1}{297,2}$, d'après les nombres de Clarke et de Faye, il s'ensuivrait que la vitesse de rotation de l'écorce serait ralentie par le freinage des marées de telle sorte que la vitesse de rotation au centre serait un peu plus grande, $\omega_0 = 1,16 \omega_1$ (p. 427). Si l'aplatissement réel est voisin de $\frac{1}{297}$, comme les dernières déterminations de Helmert, Hayford semblent l'indiquer, il s'ensuivrait que la vitesse de rotation est uniforme, que le freinage dû aux marées est sensiblement nul et que cette action retardatrice, invoquée par Darwin pour ses explications cosmogoniques, est insensibile.

terait encore très petit, de l'ordre de $\frac{1}{150}$ environ. Mais la densité devrait être 8 fois plus grande, c'est-à-dire égale à 44. Ce n'est guère possible et l'aplatissement de la Terre n'atteindra jamais cette limite.

Soient maintenant M' , r , ω' la masse, la distance et la vitesse de rotation de la Lune. Le moment de rotation du système Terre-Lune sera

$$\mu' = I' \omega' = \frac{2}{5} M a^2 \omega + M' r^2 \omega' = 4,82 \mu.$$

Supposons les deux masses réunies, avec leur quantité de mouvement totale, on peut négliger l'accroissement de I et de a , on aura

$$\frac{\mu^2}{e} = \text{const.}, \quad \frac{1}{e'} = \frac{297}{4,82^2} = 12,4.$$

L'aplatissement ne serait encore que de $\frac{1}{12}$, de l'ordre de celui de Jupiter ou de Saturne. Le moment de rotation serait 4,82 fois plus grand qu'actuellement, ainsi que la nouvelle vitesse de rotation

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\mu'}{\mu} = 4,82.$$

Nous serions encore très loin d'un dédoublement possible de la masse. En supposant la Terre homogène, ce qui nous sera utile pour rendre les résultats suivants comparables, on aura

$$\frac{1}{e} = 231,7, \quad \frac{1}{e'} = \frac{232}{4,82^2} = 10,0.$$

Pour de très grands aplatissements, si nous désignons par a_0 la valeur limite du grand axe, par r le rayon de la sphère dans le cas des petits aplatissements, les formules (7) et (4) peuvent s'écrire

$$(8) \quad ag = \frac{50 \mu^2}{3 f M^3} = \frac{32}{15} e r = 2 \pi a_0, \quad \frac{a_0}{r} = \frac{16}{15} \frac{e}{\pi}.$$

Comme la limite 2π s'applique seulement dans le cas d'une masse homogène, il faut faire $\frac{1}{e} = 232$ pour la Terre. On obtient

$$\frac{a_0}{r} = \frac{1}{681} \quad \text{et} \quad a_0 = 9 \text{ km}, 4.$$

Le rayon de la Terre à la limite de contraction devrait être 681 fois plus petit. Elle tendrait à se réduire à un disque de $9^{\text{km}},4$ de rayon avec densité indéfiniment croissante.

On pourrait voir que, dans le cas d'une masse hétérogène, la limite, tout en étant différente de 2π , reste du même ordre. En introduisant l'aplatissement réel actuel dans les formules, on aura

$$\frac{a_0}{r} = \frac{1}{874} \quad \text{et} \quad a_0 = 7 \text{ km}, 3.$$

On a d'ailleurs

$$\mu = 1\omega = \frac{2}{5} M a^2 \omega = \text{const.}$$

La vitesse de rotation serait inverse du carré du grand axe, c'est-à-dire 462 000 fois plus grande qu'actuellement, dans le cas de l'homogénéité. Le disque limite ferait 5,35 tours par seconde. On aurait une vitesse 763 000 fois plus grande et 8,84 tours dans le second cas (¹).

Si l'on suppose la Lune réunie à la Terre, avec le moment de rotation total, alors g et a_0 sont multipliés par $4,82^2$ et ω est divisé par $4,82^3$, d'après les formules

$$\frac{a'_0}{\mu'^2} = \frac{a_0}{\mu^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{a'^2 \omega'}{a^2 \omega}; \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \left(\frac{\mu}{\mu'} \right)^3.$$

Le grand axe limite du disque aurait 219^{km} et la vitesse de rotation limite serait de 2,86 tours par minute.

A la limite, pour le disque aplati, il y a équilibre entre la force centrifuge et l'attraction. En effet, l'attraction F dans le plan équatorial de l'ellipsoïde homogène de révolution, à une distance quelconque x du centre (elle est proportionnelle à x comme la force centrifuge), est donnée par la formule

$$(9) \quad \frac{F}{2\pi f \rho x} = \frac{1+l^2}{l^3} \arctan l - \frac{1}{l^2}.$$

(¹) Ces résultats, publiés dans une Note des *Comptes rendus* (t. 169, 1919, p. 320), ont été retrouvés par H.-G. Plummer [*On the ellipticities of the Maclaurin ellipsoids* (*Monthly Notices*, t. 80, n° 1, nov. 1919, p. 26-33)].

En comparant avec la valeur h , formule (1), on obtient pour le rapport entre la force centrifuge et l'attraction

$$(10) \quad \frac{\omega^2 x}{F} = \frac{(3 + l^2) \operatorname{arc tang} l - 3l}{(1 + l^2) \operatorname{arc tang} l - l} = 1 - \frac{2(l - \operatorname{arc tang} l)}{(1 + l^2) \operatorname{arc tang} l - l}.$$

Le dernier terme est égal à 1 pour $l = 0$, cas de la sphère. Il est égal à zéro pour $l = \infty$, cas du disque aplati. Il est toujours décroissant. La force centrifuge est donc toujours plus petite que l'attraction dans un ellipsoïde homogène de révolution en équilibre. Il en est de même d'ailleurs pour un ellipsoïde hétérogène (*Journal de Mathématiques*, 1912, p. 478, thèse). Elle tend à équilibrer l'attraction à l'équateur à mesure que l'ellipsoïde s'aplatit. Il y aura équilibre entre ces deux forces à la limite, pour un disque aplati, considéré comme la limite d'un ellipsoïde de révolution indéfiniment aplati. Il en serait de même pour un ellipsoïde hétérogène.

Toutefois la *pression à l'intérieur* ne tend pas à s'annuler à cause de ρ infini, mais tend au contraire vers une limite finie. En effet, la composante de l'attraction suivant l'axe polaire est $-Bz$ où

$$B = 4\pi f\rho \frac{1 + l^2}{l^3} (l - \operatorname{arc tang} l).$$

La pression est donnée par la formule générale

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho [(A - \omega^2)(x^2 + y^2) + Bz^2].$$

En évaluant cette pression le long de l'axe polaire $x = y = 0$, la pression superficielle étant nulle, $p = 0$ pour $z = b$, on aura pour la pression centrale p_0

$$p_0 = \frac{1}{2} \rho B b^2 = \frac{9fM^2}{8\pi a^4} \frac{1 + l^2}{l^3} (l - \operatorname{arc tang} l).$$

La dérivée du terme en l est toujours positive. Cette expression croît de $\frac{1}{2}$ à 1 quand l croît de zéro à l'infini. La pression centrale est ainsi comprise entre les deux limites

$$\frac{9fM^2}{8\pi a^4} \leq p_0 \leq \frac{3fM^2}{8\pi a^4}.$$

La première correspond à la sphère, la seconde au disque aplati. Dans une sphère qui s'aplatit, en conservant le même grand axe, la pression centrale est toujours croissante. A la limite, dans le disque aplati, elle est trois fois plus grande que dans la sphère.

Le long de l'axe équatorial, on aura, comme dans l'ellipsoïde ordinaire,

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho (A - \omega^2) x^2 = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

La pression diminuera du centre à la surface comme le carré de la distance.

L'application à la Terre de la formule (8) peut nous permettre de calculer également quel serait son moment de rotation μ et sa vitesse de rotation si elle était réduite à un disque de même rayon que son rayon actuel et où la force centrifuge ferait équilibre à la pesanteur. En faisant $a_0 = r$, on a

$$(11) \quad \frac{50}{3fM^3} = \frac{32}{15} \frac{er}{\mu^2} = 2\pi \frac{a_0}{\mu^2},$$

et comme I resterait le même, on aura

$$(12) \quad \frac{\mu'^2}{\mu^2} = \frac{\omega'^2}{\omega^2} = \frac{r}{a_0} = 681 = 26,1^2.$$

Le moment de rotation et la vitesse de rotation devraient être 26 fois plus grands qu'actuellement dans l'hypothèse d'une Terre homogène.

On peut vérifier qu'alors la force centrifuge ferait bien équilibre à la pesanteur. En effet, l'attraction sur l'équateur dans un ellipsoïde de révolution homogène, donnée par la formule (9), peut s'écrire, en remplaçant φ par sa valeur en fonction de M et de e ,

$$(13) \quad F = - \frac{3fM}{2a^2} \frac{(1+l^2)^{\frac{3}{2}}}{l^3} \left(\arctan l - \frac{l}{1+l^2} \right).$$

A la limite, pour $l = \infty$, on obtient pour l'attraction en un point de l'équateur d'un disque aplati, qui serait la limite d'un ellipsoïde de révolution, la valeur

$$(14) \quad F = - \frac{3\pi}{4} f \frac{M}{a^2} = -2,37\gamma.$$

L'attraction y serait 2,37 fois plus grande que l'attraction à la surface d'une sphère de même rayon et de même masse. Or on sait que pour la Terre, supposée solide et sphérique, on devrait avoir pour l'équilibre entre la force centrifuge et l'attraction une vitesse de rotation 17 fois plus grande. On a donc

$$\omega^2 r = \frac{1}{17^2} \gamma$$

et, d'après (12),

$$\omega'^2 r = 681 \omega^2 r = \frac{681}{17^2} \gamma = 2,36 \gamma.$$

La force centrifuge, à la limite, serait bien égale à l'attraction F du disque aplati, dans les limites d'approximations envisagées ici.

Au voisinage de la limite du disque aplati, comme l est très grand, en désignant par λ et par ε des quantités très petites, on peut écrire

$$\frac{1}{l^2} = \lambda^2, \quad \text{arc tang } l = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

$$g = 4\sqrt{1+\lambda^2} \left[(1+3\lambda^2) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - 3\lambda^2 \right].$$

Or

$$\text{tang} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha = l \quad \text{et} \quad \text{tang } \alpha = \frac{1}{l} = \lambda.$$

On peut prendre l'arc pour la tangente, ou $\alpha = \lambda$, et en négligeant λ^2 devant λ , il vient

$$g = 4 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{l} \right) = \frac{50}{3fM^3} \frac{\mu^2}{a}.$$

En comparant avec la valeur limite, on aura

$$\frac{50\mu^2}{3fM^3} = 2\pi a_0 = 2(\pi - 2\alpha)a.$$

Cette formule permet de déterminer la valeur de a et b au voisinage de a_0 en prenant

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{1+l^2}} = \frac{1}{l} \dots = \alpha.$$

Pour $\alpha = 0,1$, c'est-à-dire pour un aplatissement de 0,9, le disque

terrestre aurait un axe équatorial de 10^{km} , un axe polaire de 1^{km} , avec un volume qui serait près de 2,6 milliards de fois plus petit que le volume actuel et par conséquent une densité 2,6 milliards de fois plus grande.

Pour $\alpha = 0,01$ ou un aplatissement de 0,99, le grand axe aurait $9^{\text{km}},5$, le petit axe 95^{m} et la densité serait 10 fois plus grande que dans le cas précédent, le volume étant sensiblement 10 fois plus petit.

Pour l'ellipsoïde de bifurcation qui conduit des Maclaurin aux Jacobi, des ellipsoïdes de révolution aux ellipsoïdes à trois axes, on a

$$h_0 = 0,1871, \quad t_0 = 0,340 = \frac{b^2}{a^2} = 1 + l^2,$$

La formule (3) donne alors

$$(16) \quad g_0 = 4h\sqrt{1+l^2} = 4h\frac{a}{b} = 1,28.$$

Dans le cas où μ reste constant, la formule (8) devient

$$(17) \quad ag = 1,28a = 2\pi a_0.$$

On obtient 46^{km} et $26^{\text{km}},8$ pour la valeur des deux axes. Le volume serait 46 millions de fois plus petit et la densité 46 millions de fois plus grande qu'actuellement. La vitesse de rotation serait de 13,4 tours par minute.

En supposant la Lune réunie à la Terre, avec le moment de rotation total, les axes seraient multipliés par μ^2 ou $4,82^2$. Ils auraient respectivement 1070^{km} et 622^{km} et la densité devrait être encore 365 fois plus grande qu'actuellement. La vitesse de rotation serait de 7,16 tours par heure.

Si au contraire nous conservons à la Terre le même volume et la même densité qu'actuellement, la valeur des éléments pour l'ellipsoïde de bifurcation serait

$$(18) \quad a^3 = a^2 b = r^3 \sqrt{1+l_0^2}.$$

Le rayon équatorial aurait 7650^{km} et le rayon polaire 4460^{km} . La valeur de g reste la même, puisqu'elle ne dépend que de l . La valeur de μ^2 seule est changée. Les formules (3), (8) et (16)

donnent

$$(19) \quad \frac{ag_0}{\mu'^2} = 1,28 \frac{a}{\mu'^2} = \frac{32}{15} \frac{er}{\mu^2}.$$

Or d'après la valeur de μ dans (18) on a

$$\frac{\mu'^2}{\mu^2} \frac{r}{a} = \frac{a^3 \omega'^2}{r^3 \omega^2} = \frac{\omega'^2}{\omega^2} \sqrt{1 + l_0^2},$$

d'où il vient

$$(20) \quad \frac{\omega'^2}{\omega^2} = \frac{15}{32} \frac{g}{l \sqrt{1 + l_0^2}} = \frac{15}{32} \frac{g}{l} \sqrt{s}.$$

La vitesse de rotation devrait être 9 fois plus grande qu'actuellement. D'ailleurs, en partant des valeurs de h , on aurait directement

$$(21) \quad \frac{\omega'^2}{\omega^2} = \frac{h'}{h} = \frac{15}{8e} 0,1871,$$

expression qui donnerait la même valeur.

II. — Ellipsoïdes homogènes à trois axes ou ellipsoïdes de Jacobi.

Les axes sont reliés par l'équation de condition (APPELL, *Annuaire*, p. A.16, et *Mécanique rationnelle*, t. III, p. 170) :

$$(1) \quad (1-s-t) \int_0^\infty \frac{x dx}{D^3} = st \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{D^3} \quad (c < b < a),$$

$$D^2 = (1+x)(1+sx)(1+tx), \quad s = \frac{c^2}{a^2}, \quad t = \frac{c^2}{b^2}.$$

Sur l'ellipsoïde de révolution d'où partent les Jacobi, on a $s=t=t_0$. A mesure que l'ellipsoïde à trois axes s'en éloigne, b tend vers c et c vers zéro. Alors t tend vers 1 et s vers zéro. La limite est un ellipsoïde de révolution allongé en aiguille.

La vitesse de rotation est donnée ici par la formule

$$(2) \quad h = \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = st \int_0^\infty \frac{x(1+x) dx}{D^3} = st(A+B),$$

en représentant par A et B les intégrales de (1).

Les fonctions k et g qui exprimeront la variation en fonction du moment de rotation et du grand axe a s'écriront

$$(3) \quad k = \frac{50\mu^2}{3fM^3} \left(\frac{4\pi\rho}{3M} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{1}{3}}} h,$$

$$(4) \quad g = \frac{50}{3fM^3} \frac{\mu^2}{a} = k \frac{s^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}} = \frac{(s+t)^2}{st} \frac{h}{\sqrt{t}},$$

où t correspondra à l'axe moyen b et passera de la valeur t_0 à 1.

Désignons par h_0 , k_0 , g_0 , les valeurs correspondant à l'ellipsoïde de bifurcation où $s = t = t_0$. Alors h décroît et tend vers zéro à mesure que l'ellipsoïde s'allonge et que s tend vers zéro. La vitesse de rotation tend vers zéro, si l'on suppose la densité constante, ou bien la densité ρ tend vers l'infini si l'on suppose ω constant.

Au contraire, k tend vers l'infini, quand s tend vers zéro. Si le moment de rotation μ reste constant, la densité ρ tend vers l'infini, et si ρ reste constant, il faut que μ tende vers l'infini.

Déterminons la valeur de g pour $t = 1$ et s tendant vers zéro, cas limite de l'aiguille allongée. On a, d'après (1) et (2),

$$(5) \quad g = \frac{h}{s} = A + B = \int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x)^2} = L\infty - 1.$$

La valeur de g tend donc logarithmiquement vers l'infini. Il en résulte, avec μ constant, d'après (4), que le grand axe a tend vers zéro en même temps que b et c , mais beaucoup plus lentement. *La figure d'équilibre prend la forme d'une aiguille allongée, mais de longueur indéfiniment décroissante.* Les axes a , b , c tendent donc ici tous trois vers zéro à la limite, mais b et c sont infiniment petits du second ordre par rapport à a .

Le grand axe ne tendra donc pas vers une valeur limite, comme pour le disque aplati, mais nous verrons, par les calculs numériques, que, pratiquement, il aurait une valeur voisine de celle du disque pour des aplatissements très grands, presque limites, où les deux autres axes seraient tous deux excessivement petits.

On ne peut pas démontrer que g , à partir de $t = t_0$ reste toujours décroissant comme h ou toujours croissant comme k . On verra, par

les calculs numériques, qu'il décroît d'abord jusqu'à un minimum avant de tendre vers l'infini.

Au voisinage de la limite, la force centrifuge tend à égaler l'attraction, dans la direction du grand axe, comme pour l'ellipsoïde de révolution, quand l'allongement de l'ellipsoïde devient considérable par rapport à sa section.

Nous pouvons poser alors $1 - t = \varepsilon$ et considérer ε et s comme très petits. L'équation (1) pourra s'écrire en conservant seulement les termes du premier ordre

$$(6) \quad (\varepsilon - s)A = sB, \quad \varepsilon A = s(A + B) = h.$$

Avec la même approximation, on aura

$$A = \int_0^\infty \frac{x \, dx}{(1+x)^3 (1+sx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si nous négligeons d'abord s dans cette expression, on a

$$(7) \quad \frac{x}{(1+x)^3} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3} \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}.$$

Le terme en s dans A est égal à 1 pour $x = 0$ et nul pour $x = \infty$. Il n'introduit que des corrections de l'ordre de s , que l'on peut négliger, en première approximation, devant $\frac{1}{2}$. On aura donc

$$(8) \quad \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}(1-t) = s(A+B),$$

formule qui déterminera t , en fonction de s , au voisinage de la limite.

Il faut calculer A et B pour avoir t et h . En faisant de même $t = 1$ dans D , on a

$$(9) \quad A+B = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2} \frac{dx}{(1+sx)^{\frac{3}{2}}}.$$

Posons

$$z^2 = \frac{s}{1+sx}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{s-z^2}{s z^2} \quad \text{et} \quad 1+x = \frac{s-(1-s)z^2}{s z^2}.$$

Les limites sont 0 et $\sqrt{s}$. Si l'on néglige d'abord s devant 1 dans $1+x$,

on obtient

$$A + B = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^{\sqrt{s}} \frac{z^2 dz}{s - z^2} = \left| L \frac{z + \sqrt{s}}{z - \sqrt{s}} \right|_0^{\sqrt{s}} - 2,$$

valeur qui devient infinie sans être déterminée par rapport à s . C'est la même valeur qu'en (5). Si, au contraire, dans la valeur de x nous remplaçons z^2 par la valeur $(1 - s)z^2$, qui lui est égale, à un terme très petit près, on peut écrire

$$x = \frac{s - (1 - s)z^2}{s z^2} = \frac{1 - l^2 z^2}{z^2}, \quad 1 + l^2 = \frac{1}{s} = \frac{a^2}{c^2},$$

et l'on obtient

$$(10) \quad A + B = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{\sqrt{s}} \frac{l^2 z^2}{1 - l^2 z^2} dz = \left| L \frac{1 + lz}{1 - lz} \right|_0^{\sqrt{s}} - 2 = L \frac{4}{s} - 2,$$

en faisant dans le calcul de la valeur aux limites

$$l\sqrt{s} = \sqrt{1 - s} = 1 - \frac{1}{2}s \dots$$

On aura ainsi la valeur de $A + B$ et de h en fonction de s , quand s est très petit et l'ellipsoïde très allongé.

La valeur de g , donnée par (5), devient

$$(11) \quad g = \frac{h}{s} = A + B = L \frac{4}{s} - 2.$$

L'attraction à l'extrémité du grand axe a , dans un ellipsoïde à trois axes, est donnée par l'expression

$$P = -\frac{X}{a} = 2\pi f \rho abc \int_0^\infty \frac{du}{(a^2 + u)D},$$

$$D^2 = (a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u).$$

Si l'on pose $u = c^2 x$, on obtient l'expression en s et t :

$$(12) \quad P = 2\pi f \rho s \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + sx)D} = 2\pi f \rho s \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x)(1 + sx)^{\frac{3}{2}}}.$$

La deuxième forme est celle obtenue au voisinage de la limite avec $t = 1$. Si l'on y fait la transformation en z^2 de l'expression (9)

on obtiendra pour l'intégrale la même forme qu'en (10). On aura donc

$$(12') \quad P = -\frac{X}{a} = 2\pi f \rho s (A + B) = 2\pi f \rho s \left(L \frac{4}{s} - 2 \right).$$

En comparant avec la formule (2), où l'on fait $t = 1$, on a bien

$$(13) \quad \omega^2 = P \quad \text{ou} \quad \frac{\omega^2 a}{-X} = 1.$$

Il y a bien égalité entre la force centrifuge $\omega^2 a$ et l'attraction $-X$, en tous les points de l'ellipsoïde à trois axes, tendant vers sa limite d'ellipsoïde de révolution très allongé.

Remarque. — On retrouve les mêmes résultats au moyen des formules relatives à l'ellipsoïde de révolution allongé.

La formule (12) donne, par la transformation indiquée en z^2 , quel que soit la valeur de s , avec $t = 1$, c'est-à-dire $b = c$,

$$(14) \quad \frac{P}{4\pi f \rho} = \frac{1}{l^3 \sqrt{s}} \left| L \frac{1 + lz}{1 - lz} \right|_0^{\sqrt{s}} - \frac{1}{l^2} = \frac{1 - l'^2}{l'^3} \left(\frac{1}{2} L \frac{1 + l'}{1 - l'} - l' \right),$$

où

$$l'^2 = l^2 s = 1 - s = 1 - \frac{c^2}{a^2}.$$

C'est la formule connue de l'attraction suivant le grand axe, de l'ellipsoïde de révolution allongé. Si c tend vers zéro, alors l' tend vers 1, et l'on retrouvera la formule (12') en considérant s comme très petit :

$$(15) \quad P = -\frac{X}{a} = 2\pi f \rho s \left(L \frac{4}{s} - 2 \right) = 2\pi f \rho s L \frac{4}{s}.$$

L'autre composante serait de même

$$Q = R = -\frac{Y}{b} = -\frac{Z}{c} = 2\pi f \rho \frac{1 - l'^2}{l'^3} \left(\frac{l'}{1 - l'^2} - \frac{1}{2} L \frac{1 + l'}{1 - l'} \right).$$

En considérant s comme très petit, il vient

$$(16) \quad R = 2\pi f \rho \left(1 - \frac{s}{2} L \frac{4}{s} \right) = 2\pi f \rho.$$

Les conditions d'équilibre dans la rotation autour du petit

axe c s'écrivent

$$(17) \quad a^2(P - \omega^2) = b^2(Q - \omega^2) = c^2R.$$

Ces équations ne sont pas compatibles si $b = c$ et $Q = R$. Elles le deviennent quand b et c tendent vers zéro, précisément dans le cas limite de Jacobi. On a alors

$$a^2(P - \omega^2) = c^2R.$$

En remplaçant P et R par leurs valeurs (15) et (16), on obtient

$$(18) \quad h = \frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = s \left(L \frac{4}{s} - 1 \right), \quad g = L \frac{4}{s} - 1.$$

C'est bien la même valeur que (11) à une unité près devant le logarithme très grand et tendant vers l'infini. A la limite, en comparant (15) et (18), on a bien égalité entre la force centrifuge et l'attraction :

$$\frac{\omega^2 a}{-X} = \frac{L \frac{4}{s} - 1}{L \frac{4}{s} - 2} = 1 \dots$$

La formule (17) permet encore de déterminer l'ordre de grandeur de la composante Q dans la direction de l'axe moyen :

$$Q - \omega^2 = \frac{c^2}{b^2} R, \quad Q = \omega^2 + \iota R.$$

On a $Q > \omega^2$, l'attraction est supérieure à la force centrifuge. Puis vers la limite, par approximations successives, avec s tendant vers zéro, il vient

$$\frac{Q}{2\pi f \rho} = s \left(L \frac{4}{s} - 1 \right) + \iota \left(1 - \frac{s}{2} L \frac{4}{s} \right) = \iota \left(1 - \frac{s}{2} L \frac{4}{s} \right) = \iota,$$

valeur qui tend vers 1 comme pour R . Il y a bien concordance entre les différents résultats des méthodes différentes.

Considérons un ellipsoïde homogène ayant la masse de la Terre et le même moment de rotation. Nous avons vu qu'en conservant la forme d'un ellipsoïde de révolution, il aboutissait finalement à un

disque de $9^{\text{km}},4$ de rayon. Nous pouvons calculer les éléments de l'ellipsoïde à trois axes qui aurait même grand axe.

Le deux valeurs de g sont alors égales d'après (4). On a, d'autre part, d'après (10),

$$(19) \quad L \frac{4}{s} - 2 = 2\pi.$$

On trouve pour s et le petit axe c

$$s = \frac{1}{362}, \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{19,0}, \quad c = 500^{\text{m}}.$$

L'axe moyen est donné par la formule (8) qui devient

$$(20) \quad t = 1 - 2s \left(L \frac{4}{s} - 2 \right), \quad \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{t}} = 1 + s \left(L \frac{4}{s} - 2 \right).$$

On en tire $b = 510^{\text{m}}$. La Terre se réduirait à un ellipsoïde très allongé de $18^{\text{km}},8$ pour le grand diamètre, sur 1020^{m} et 1000^{m} pour les autres.

La vitesse de rotation ω' , comparée à celle de Maclaurin de même axe a , serait donnée par

$$(21) \quad \mu = I\omega' = I\omega = \frac{1}{5} M a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \omega' = \frac{2}{5} M a^2 \omega.$$

Comme $\frac{b^2}{a^2}$ est sensiblement égal à s et négligeable, on a ici

$$\omega' = 2\omega.$$

La vitesse de rotation du Jacobi devient sensiblement égale au double de celle du Maclaurin de même grand axe, dès que l'aplatissement devient considérable. Notre ellipsoïde ferait donc 10,7 tours par seconde dans le cas de l'homogénéité et 17,7 dans le second cas.

Nous pouvons calculer de même les éléments de notre ellipsoïde pour différentes valeurs assez petites de s . En comparant toujours à la valeur limite a du grand axe de Maclaurin limite, et considérant que μ est constant, on peut écrire

$$(22) \quad \frac{50\mu^2}{3fM^2} = a \left(L \frac{4}{s} - 2 \right) = 2\pi a_0.$$

Cette formule donnera a ; la valeur correspondante de s donnera c . Enfin la valeur ci-dessus (20) de t donnera b . On obtient le Tableau suivant :

$1 : s \dots\dots$	100.	200.	500.	10^2 .	10^4 .	10^6 .	10^{10} .
$a \text{ (km)} \dots\dots$	$11^{\text{km}}, 8$	$10^{\text{km}}, 4$	$8^{\text{km}}, 9$	$8^{\text{km}}, 1$	$6^{\text{km}}, 2$	$4^{\text{km}}, 1$	$2^{\text{km}}, 5$
$b \dots\dots\dots$	$1^{\text{km}}, 38$	750^{m}	404^{m}	262^{m}	62^{m}	$4^{\text{m}}, 1$	25^{mm}
$c \dots\dots\dots$	$1^{\text{km}}, 18$	730^{m}	400^{m}	260^{m}	62^{m}	$4^{\text{m}}, 1$	25^{mm}

On voit que la valeur de a diminue très lentement, de 12^{km} à $2^{\text{km}}, 5$, soit de 5 fois sa valeur, tandis que b et c diminuent beaucoup plus rapidement de $1^{\text{km}}, 38$ et $1^{\text{km}}, 18$ à 25^{mm} , c'est-à-dire dans la proportion de 50 000 fois, soit 10 000 fois plus vite.

La densité est donnée par les formules

$$(23) \quad \rho \frac{c^3}{\sqrt{s}} = \rho_1 r^3, \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{r^3}{c^3} \sqrt{s},$$

où ρ_1 et r représentent la densité et le rayon actuels de la Terre. Cette formule se déduit immédiatement de l'expression de la masse, où l'on fait $t = 1$, c'est-à-dire $b = c$:

$$(24) \quad M = \frac{4}{3} \pi \rho abc = \frac{4}{3} \pi \rho \frac{c^3}{\sqrt{s} t} = \frac{4}{3} \pi \rho \frac{c^3}{\sqrt{s}}.$$

La valeur de la densité serait de 16 milliards de fois la densité actuelle, pour $a = 11^{\text{km}}, 8$. Elle serait de 11 000 milliards pour $a = 6^{\text{km}}, 2$. Enfin elle serait de 400 milliards de milliards pour $a = 2^{\text{km}}, 5$.

Le moment de rotation μ étant constant et b négligeable devant a , pour de forts aplatissements, on a $a^2 \omega = \text{const.}$ La vitesse de rotation est inverse du carré du grand axe et croît indéfiniment à mesure que a tend vers zéro.

Nous pouvons considérer au contraire la Terre avec sa densité actuelle et chercher le moment de rotation et la vitesse de rotation, qui pourraient donner à la masse les valeurs de s et l'allongement correspondant aux valeurs du Tableau ci-dessus.

En désignant par μ' et a' les nouvelles valeurs du moment

de rotation et du grand axe correspondant à s , on a, d'après (22),

$$(25) \quad \frac{\mu'^2}{a'} = \frac{\mu^2}{a} = \frac{3fM^3}{50} \left(L \frac{4}{s} - 2 \right).$$

Pour la même forme d'équilibre, même s , et la même masse M , les grands axes a sont proportionnels au carré du moment de rotation. C'est ce qu'indique la formule générale (4) qui donne g .

Comme ici b est très petit par rapport à a , on peut le négliger dans l'expression de I , on aura

$$(26) \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{a'^2 \omega'}{a^2 \omega}, \quad \text{d'où} \quad a' \omega' = a \omega,$$

en comparant avec (25). Les vitesses de rotation sont inverses des grands axes, pour les mêmes aplatissements, dans le cas de forts aplatissements.

Dans le cas présent, on fait $\rho = \rho_1$. La formule (23) donne

$$c'^3 = r^3 \sqrt{s}, \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{c'}{\sqrt{s}} = \frac{r}{\sqrt[3]{s}}.$$

Il vient

$$(27) \quad \frac{\mu'^2}{\mu^2} = \frac{a'}{a} = \frac{r}{a} \frac{1}{\sqrt[3]{s}}.$$

Or on peut écrire aussi

$$(28) \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{a'^2 \omega'}{2 r^2 \omega}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\mu'}{\mu} \frac{2 r^2}{a'^2} = 2 \frac{\mu'}{\mu} s^{\frac{2}{3}}.$$

On aura μ' et ω' en fonction du rayon actuel r de la Terre et des valeurs de a du Tableau ci-dessus.

Le Tableau suivant indique quelles devraient être les valeurs des quantités cherchées, par rapport à leurs valeurs actuelles. Celles du grand axe a' et du petit axe c' sont en milliers de kilomètres. Celles de μ' et de ω' sont exprimées par rapport à leurs valeurs actuelles :

1 : s	100.	200.	500.	10 ³ .	10 ⁴ .	10 ⁶ .	10 ¹⁰ .
a' km : 10 ³	29,6	37,2	50,7	63,8	137	638	13700
c' km : 10 ³	2,96	2,63	2,26	2,02	1,37	0,638	0,137
$\mu' : \mu$	50,1	60,0	75,3	88,7	149	392	2340
$\omega' : \omega$	4,67	3,52	2,39	1,77	0,64	0,08	0,001

On voit que pour un allongement de 10 fois, $s = 0,01$, il faudrait

que le moment de rotation soit 50 fois plus grand que le moment actuel, soit 10 fois plus grand que le moment de rotation du système Terre-Lune. Cette valeur croît indéfiniment avec l'allongement, comme l'indique la discussion du paramètre k . La vitesse de rotation devrait être près de 5 fois plus grande qu'actuellement (4,67). Elle décroît indéfiniment comme l'indique la valeur de la fonction h .

On verra dans les calculs du paragraphe suivant les valeurs de l'ellipsoïde terrestre pour des conditions moins éloignées des conditions normales et en particulier pour les ellipsoïdes de bifurcation et les figures piriformes susceptibles peut-être de donner lieu à une rupture.

Les conditions à remplir par un système double, pour qu'il provienne d'un dédoublement d'une masse unique, peuvent se déduire de la valeur du moment de rotation de ce système.

En appelant M et m les deux masses, a le grand axe de l'orbite de m autour de M , et T étant la période, on a

$$(28) \quad 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = f(M + m).$$

En supposant les orbites à peu près circulaires et appelant r la distance des masses, on peut écrire

$$(29) \quad \omega^2 r^3 = f(M + m).$$

En désignant, d'autre part, par r_1 et r_2 leur distance au centre de gravité, on a

$$(30) \quad r = r_1 + r_2, \quad Mr_1 = mr_2 \quad \text{ou} \quad (M + m)r_1 = mr,$$

$$(31) \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 = (Mr_1^2 + mr_2^2)\omega = Mr_1\omega r.$$

En remplaçant r , par sa valeur en r tirée de (30), on a

$$(32) \quad \mu = \frac{Mm}{M + m} \omega r^2.$$

Telle est l'expression du moment de rotation de l'ensemble en fonction des masses, de leur distance et de leur vitesse de rota-

tion (1). Cette valeur portée dans (29) donne

$$(33) \quad \frac{\mu^2}{r} = f \frac{M^2 m^2}{M + m} = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} f M^2,$$

expression du moment de rotation indépendante de ω .

Nous pouvons porter cette valeur de μ dans l'expression (4) de g , puisque le moment de rotation doit rester constant après comme avant la rupture. On obtient la formule simple et remarquable

$$(34) \quad g = \frac{50}{3} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} \frac{r}{a},$$

où g ne dépend plus que du rapport des masses α et du rapport de la distance r des masses du système double, et du grand axe a de l'ellipsoïde antérieur, correspondant à g et à l'aplatissement s , qui aurait pu donner naissance au système double.

Il est facile de voir que dans le fractionnement d'un ellipsoïde on a $r \leq a$, on a donc

$$\frac{\alpha^2}{1 + \alpha} > \frac{3g}{50}.$$

Considérons, comme ellipsoïde de comparaison, l'ellipsoïde de bifurcation qui donne naissance aux figures piriformes et soit a son grand axe. La valeur calculée de g serait alors de 1,35, comme on le verra dans la troisième Partie. La valeur de α déduite de (34) serait $\alpha = 0,327$, avec $r = a$. Comme il faut qu'il y ait encore contraction à partir de cet ellipsoïde, avant la rupture, on aura $r < a$. On aura donc pour le rapport des composantes d'un sys-

(1) En tenant compte de l'excentricité e des orbites, ωr^2 dans (32) serait remplacé par le double de la constante des aires :

$$\omega r^2 = \frac{2\pi ab}{T} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T},$$

les seconds membres de (33) et (34) seraient multipliés par $1 - e^2$ et r représenterait alors le grand axe de l'orbite du compagnon autour de l'astre principal. Mais au début, les orbites devaient être circulaires, car il fallait que la force centrifuge fasse équilibre à l'attraction pour qu'il y ait dédoublement.

tème double la condition

$$\frac{m}{M} \geq 0,327 \quad \text{ou} \quad M < 3m.$$

Le rapport des composantes doit être plus grand que $\frac{1}{3}$. *Leurs masses doivent être du même ordre et assez voisines l'une de l'autre.* La Lune n'a pas pu provenir d'une rupture de ce genre avec la Terre.

En faisant $r = \frac{1}{2}a$, c'est-à-dire en admettant que la distance des centres de gravité des composantes provenant de la rupture soit la moitié du grand axe de l'ellipsoïde de bifurcation correspondant aux figures piriformes, on obtient

$$\frac{m}{M} = 0,492 \quad \text{ou environ} \quad M = 2m.$$

La grosse masse devrait être seulement le double de l'autre. La valeur probable du rapport doit être plus voisine de 2 que de 3, car, au voisinage des figures piriformes, a a dépassé sa valeur maximum et décroît avec la contraction. Il en sera de même de r .

En tout cas, dans un système homogène, si la figure piriforme aboutit à une rupture (système double, les ellipsoïdes de bifurcation d'ordre supérieur donneraient des systèmes triples, quadruples, etc.), le rapport $\frac{r}{a}$ aura une valeur bien déterminée et toujours la même. Si l'on pouvait déterminer ce rapport, on déterminerait par le fait même le rapport des masses commun à tous les systèmes doubles engendrés ainsi. Mais il faudrait savoir d'abord si les ellipsoïdes de bifurcation donneront naissance à des figures d'équilibre où la force centrifuge finira par l'emporter sur l'attraction, au lieu de tendre seulement à lui faire équilibre comme à la limite des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi. Or nous n'en savons rien.

III. — Calculs numériques et courbes représentatives.

Les formules (1), (2), (3) du paragraphe I donnent les valeurs de h , k , g par rapport à l dans le cas des *ellipsoïdes de révolution*.

Comme l varie de zéro à l'infini, il est préférable d'exprimer ces valeurs en fonction de s , qui ne varie que de 0 à 1, ce qui permet de représenter tout l'ensemble de la variation. On a

$$(1) \quad 1 + l^2 = \frac{1}{s} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Pour la sphère, $l = 0$ et $s = 1$. Pour le disque aplati, $l = \infty$ et $s = 0$. Ces valeurs et ces courbes n'avaient pas été calculées exactement, mais seulement leurs valeurs principales et l'allure générale. Les Tableaux ci-dessous donnent ces valeurs pour 10 valeurs de s assez voisines pour permettre le tracé exact de la courbe.

$s \dots$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,25	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1
$h \dots$	0	0,155	0,190	0,208	0,216	0,210	0,138	0,109	0,081	0,053	0,027	0
$k \dots$	∞	8,39	6,49	5,41	4,64	2,12	0,88	0,61	0,41	0,25	0,12	0
$g \dots$	2π	4,39	3,79	3,39	3,04	1,68	0,78	0,56	0,39	0,23	0,11	0
$a \dots$	0,204	0,291	0,337	0,377	0,440	0,760	1,64	2,27	3,30	5,40	11,2	∞
$c \dots$	0	0,041	0,067	0,092	0,124	0,380	1,16	1,76	2,76	4,82	10,6	∞

Les valeurs de h sont représentées par la courbe OMS de la figure 1, ellipsoïdes de Maclaurin. La courbe OJS représente les ellipsoïdes à trois axes de Jacobi (p. 236). On remarquera que la courbe de Maclaurin est presque droite, très légèrement concave vers le haut, entre J et S. En effet, la formule (1) du paragraphe I donnerait comme dérivée l'expression

$$\frac{dh}{dl} = \frac{9 + l^2}{l^3} \left(\frac{9 + 7l^2}{9 + l^2} \frac{l}{1 + l^2} - \text{arc tang } l \right) = \frac{8}{15} l \dots$$

La valeur indiquée à droite est ce que devient cette expression pour l très petit, en négligeant l^3 . De plus, nous avons

$$\frac{dh}{ds} = \frac{dh}{dl} \frac{dl}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{dl}{ds} = -\frac{1}{2s^2 l} = -\frac{1}{2l},$$

en dérivant la formule (1) ci-dessus et faisant $s = 1$. Il vient donc pour l très petit ou pour $s = 1$

$$\frac{dh}{ds} = -\frac{4}{15} \dots = -0,267.$$

Telle est la valeur de la tangente à la courbe MS au point S. Or,

au point J on a la valeur $h_0 = 0,1871$ et $s_0 = 0,340$. La pente de la droite JS serait de 0,283, valeur assez voisine de la précédente. La tangente en S passerait à 3^{mm} au-dessous de J. On peut donc dire qu'à partir de la sphère jusqu'à l'ellipsoïde de bifurcation de Jacobi la valeur de ω^2 croît à peu près proportionnellement à $1-s$, avec ρ constant. Elle passe ensuite par un maximum M pour décroître indéfiniment à mesure que l'ellipsoïde s'aplatit davantage et tend vers le disque aplati.

La courbe des valeurs de k en SJM (fig. 2) croît continuellement de zéro, au point S, à l'infini. Le moment de rotation μ croît continuellement avec l'aplatissement si la densité ρ est constante, ou bien la densité croît indéfiniment si μ reste constant.

Les valeurs de g sont représentées par la courbe SJM de la figure 3. Elles croissent de zéro, en S, à 2π quand s décroît de 1 à 0.

Les deux dernières lignes du Tableau donnent les valeurs des axes, en prenant comme unité la valeur du grand axe au point de bifurcation des Jacobi. La valeur de ces axes est donnée par les formules suivantes déduites de (3) du paragraphe I et de (1) ci-dessus, $g_0 = 1,28$ désignant la valeur de g au point de bifurcation :

$$(2) \quad a = \frac{g_0}{g}, \quad c = a\sqrt{s}.$$

La valeur limite du disque serait alors 0,204, c'est-à-dire le cinquième du grand axe au point de bifurcation.

Pour les ellipsoïdes à trois axes ou de Jacobi, les valeurs de h et des axes a , b , c , avec la condition $abc = 1$ ont été calculées par G.-H. Darwin (*Scientific papers*, t. III, p. 130 ou *Proceedings of the royal Society*, t. XLI, 1887). en fonction d'un angle γ défini par

$$(3) \quad \cos \gamma = \frac{c}{a} = \sqrt{s}.$$

Il est facile de traduire ces valeurs en fonction de s et de calculer celles de k et g correspondant, par les formules (3) et (4) du paragraphe II. On obtient le Tableau suivant :

γ	51°21'.	57°.	60°.	65°.	70°.	75°.	80°.	85°.	90°.
s	0,340	0,296	0,250	0,178	0,117	0,066	0,030	0,008	0
t	0,340	0,384	0,438	0,536	0,640	0,748	0,853	0,944	1
a	1,197	1,279	1,383	1,601	1,899	2,346	3,129	5,041	∞
b	1,197	1,123	1,045	0,923	0,811	0,702	0,588	0,452	0
c	0,698	0,696	0,692	0,676	0,649	0,607	0,543	0,439	0
h	0,187	0,186	0,181	0,166	0,141	0,107	0,066	0,026	0
k	1,527	1,561	1,629	1,935	2,565	3,860	6,812	17,02	∞
g	1,276	1,220	1,178	1,208	1,350	1,643	2,177	3,368	∞
a	1,000	1,046	1,083	1,056	0,945	0,776	0,586	0,379	0
b	1,000	0,918	0,819	0,609	0,404	0,184	0,108	0,034	0
c	0,583	0,569	0,542	0,446	0,323	0,160	0,102	0,033	0
ρ	1,00	1,06	1,21	2,04	4,73	16,2	88,5	1370	∞

Les trois premières lignes donnent les valeurs de s et de t correspondant aux valeurs de γ de Darwin. Les trois lignes suivantes donnent les valeurs des axes a , b , c avec la condition $abc = 1$, ce sont des valeurs relatives correspondant à celles de s et t et donnant la forme de la figure d'équilibre et non ses dimensions réelles.

Les courbes représentatives des ellipsoïdes de Jacobi peuvent être tracées au moyen des valeurs des fonctions h , k , g indiquées dans les trois lignes correspondantes du Tableau.

Ces courbes des Jacobi en fonction de s et t seraient des courbes gauches dans un espace à trois dimensions, la troisième étant l'une des fonctions h , k , g . Comme les formules sont symétriques en s et t dont les valeurs peuvent s'interchanger, en redonnant le même ellipsoïde, il est plus simple de prendre la projection de ces courbes sur le plan de celles des Maclaurin. La courbe OJ , J (fig. 1) représente les valeurs de h pour s croissant de 0 à 0,340. La portion JJ_1S représentera les valeurs de h pour s croissant de 0,340 à 1, qui sont égales à celles de t dans le Tableau ci-dessus.

La figure 1 donne donc les courbes représentatives de h pour les Maclaurin et pour les Jacobi. Si l'on a $h > H$, il n'y a pas de figures d'équilibre. Si l'on a

$$h_0 < h < H,$$

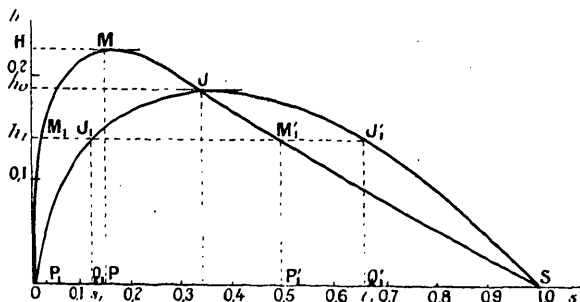
par exemple $h = 0,20$, la parallèle à OS rencontre la courbe des Maclaurin en deux points. Il y a deux ellipsoïdes de Maclaurin

comme figure d'équilibre. Si l'on a

$$h = h_1 < h_0,$$

la parallèle à OS rencontre la courbe des Maclaurin en deux

Fig. 1.



points M_1 et M'_1 qui déterminent deux ellipsoïdes d'équilibre dont les aplatissements sont donnés par

$$s = OP_1 \quad \text{et} \quad s' = OP'_1.$$

Cette parallèle rencontre également la courbe des Jacobi en deux points J_1 et J'_1 qui déterminent, non pas deux ellipsoïdes, mais les deux aplatissements de l'ellipsoïde de Jacobi correspondant

$$s_1 = OQ_1 \quad \text{et} \quad t_1 = OQ'_1.$$

On a deux ellipsoïdes de Maclaurin et un ellipsoïde de Jacobi comme figures d'équilibre.

La figure 2 représente de même les courbes de k en fonction de s . Pour $k < k_0$, on a un ellipsoïde de Maclaurin et un seul comme figure d'équilibre. Pour $k > k_0$ on a un ellipsoïde de Maclaurin M_1 d'aplatissement $s = OP_1$ et un ellipsoïde de Jacobi J_1, J'_1 d'aplatissement

$$s_1 = OQ_1 \quad \text{et} \quad t_1 = OQ'_1.$$

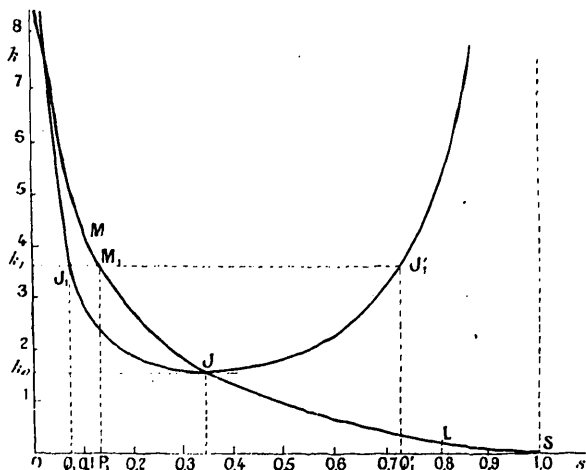
Enfin, la figure 3 représente l'ensemble des valeurs de g pour les Maclaurin et les Jacobi. Elle est beaucoup plus curieuse et instructive.

La courbe des Maclaurin SJM croît de E à un maximum 2π ,

comme on l'a vu. Celle des Jacobi bifurque en J. Elle est d'abord décroissante jusqu'à un minimum m_1, m'_1 pour les valeurs approxi-

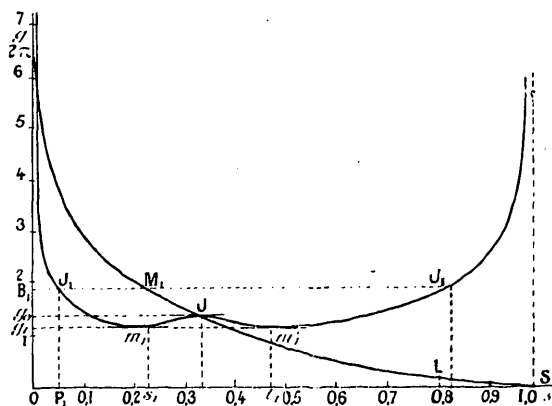
$$g_1 = 1,18, \quad s_1 = 0,24, \quad t_1 = 0,45,$$

Fig. 2.



déterminées par interpolation, au moyen de la parabole voisine

Fig. 3.



Elle se rapproche ensuite beaucoup de l'axe vertical qu'elle suit jusqu'à l'infini.

Or on a vu que le premier membre de g dépend de $\frac{\mu^2}{aM^3}$ et le

second uniquement de s (ou encore de t déterminé par s). Si donc on a

$$g > 2\pi, \quad a < \frac{25\mu^2}{3\pi f M^2},$$

il n'y a pas d'ellipsoïde de Maclaurin possible comme figure d'équilibre, mais seulement un ellipsoïde de Jacobi. Au-dessus de M , en effet, la parallèle à OS ne rencontre que la courbe des Jacobi. Ceci n'avait pas lieu pour les autres cas où la région des Maclaurin était toujours plus étendue que celle des Jacobi.

Pour $g_0 < g < 2\pi$, la droite rencontre la courbe des Maclaurin et celle des Jacobi. On a un ellipsoïde de révolution et un ellipsoïde à trois axes comme figures d'équilibre.

Pour $g_1 < g < g_0$, la droite rencontre quatre fois la courbe des Jacobi, ce qui détermine deux ellipsoïdes à trois axes et une fois celle des Maclaurin. Il y a donc ici un ellipsoïde de Maclaurin comme figure d'équilibre, mais il y a deux ellipsoïdes de Jacobi différents, avec des axes différents, qui sont tous deux figures d'équilibre.

Enfin, pour $g < g_1$, il n'y a qu'un ellipsoïde de Maclaurin comme figure d'équilibre.

Les valeurs réelles des trois axes des Jacobi, et leurs variations, sont données dans les dernières lignes du Tableau, en prenant comme unité la valeur du grand axe au point de bifurcation [formule (2), § III]. La dernière ligne donne la densité correspondante en prenant comme unité sa valeur au point de bifurcation.

On voit que la valeur de a commence d'abord par croître jusqu'à un maximum 1,083 pour $s = 0,25$, et décroît ensuite lentement. Pour $s = 0,008$, on a encore $a = 0,38$, alors que b parti de la même valeur est déjà descendu à 0,034, à peine supérieur à $c = 0,033$.

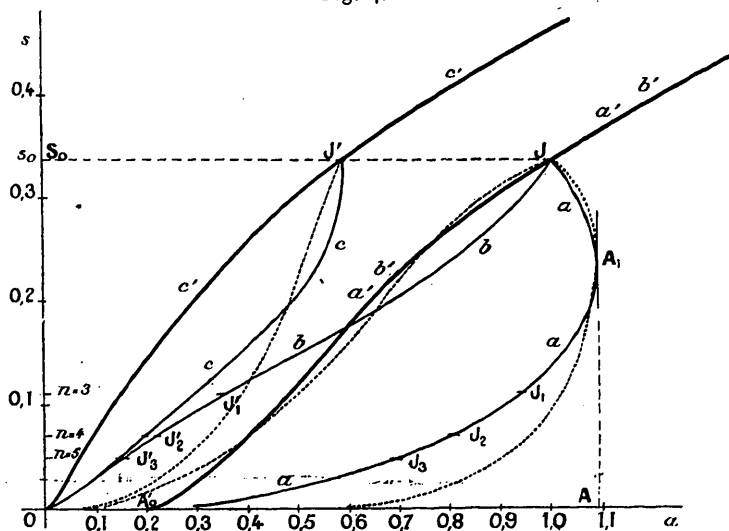
La figure 4 représente en ordonnée les valeurs de s et en abscisse les valeurs des différents axes. Les courbes représentatives des deux axes des Maclaurin sont en traits forts et celles des trois axes des Jacobi en traits fins.

Pour les valeurs de $s > 0,340$, on n'a que les deux courbes des deux axes des ellipsoïdes de révolution, dont les valeurs s'éloignent vers l'infini en se rapprochant l'une de l'autre, à mesure que s

tend vers 1, c'est-à-dire quand l'ellipsoïde se rapproche de la sphère.

Pour $s < 0,340$, les deux courbes des Maclaurin tendent vers zéro et vers A'_0 , point qui détermine le rayon du disque limite. Les trois courbes en traits fins nous donnent l'évolution des axes des Jacobi, comparativement à ceux des Maclaurin, à mesure que s tend vers zéro et que les deux sortes d'ellipsoïdes tendent vers leurs figures limites : le disque aplati et l'aiguille allongée et évanouissante.

Fig. 4.



Au point de bifurcation J et J', les axes se séparent. Le grand axe a des Jacobi diverge normalement du grand axe a' du Maclaurin. Il commence par croître alors que a' décroissait et continue à décroître. Il passe par son maximum, puis décroît lentement en venant couper la courbe du Maclaurin près de sa valeur limite A'_0 , rayon du disque aplati. Il y aura donc de nouveau ici un ellipsoïde de Jacobi qui aura même grand axe qu'un autre ellipsoïde de Maclaurin. Ce Jacobi sera très sensiblement un ellipsoïde de révolution allongé, et non aplati, comme le premier, car les deux axes b et c auront pris mêmes valeurs, comme on voit sur la figure que leurs courbes se sont fusionnées.

On voit également que la courbe du petit axe c se détache ver-

ticalement au point J' . Au voisinage de la bifurcation, le petit axe du Jacobi conserve donc un certain temps la même valeur qu'au point de bifurcation. Il diminue ensuite de plus en plus vite jusqu'à zéro.

La courbe de b , à partir de J , suit presque celle de a' , puis va rejoindre celle de c . L'axe moyen du Jacobi varie d'abord, à partir du point de bifurcation, à peu près comme le grand axe du Maclaurin, dont il dérive. Il varie ensuite plus vite que lui, et finalement prend sensiblement la même valeur que le petit axe c .

Ainsi, au point de bifurcation, l'axe polaire du Maclaurin reste fixe, alors que le cercle équatorial s'aplatit, en faisant apparaître un grand axe a , qui s'allonge, et un axe moyen b , qui se raccourcit. C'est bien d'ailleurs ce qu'indique la théorie de la formation des nouvelles figures d'équilibre aux points critiques, pour le cas $n = 2$, qui est celui des figures ellipsoïdales de bifurcation.

On a tracé en pointillé les courbes des valeurs des axes des Jacobi en prenant $\frac{1}{\rho}$ comme ordonnée, au lieu de s . Elles conservent à peu près la même allure. Il y a bien toujours après la bifurcation deux Jacobi ayant même grand axe et des densités différentes. Les courbes précédentes montraient la valeur des axes avec l'aplatissement ou s . Celles-ci montrent directement la variation de ces axes avec la contraction, c'est-à-dire avec la densité ρ .

Pour les figures d'équilibre dérivées des Jacobi, on a pour $n = 3$, figures piriformes, $s = 0,117$ d'après les calculs de Darwin et Liapounoff. Ce sont précisément les éléments de la colonne 4 du Tableau ci-dessus. Pour $n = 4$ et $n = 5$, on a $s = 0,069$ et $s = 0,028$, valeurs qui correspondent sensiblement aux colonnes 5 et 6. On obtient les points représentatifs J_1, J_2, J_3 (fig. 4) pour les valeurs représentatives des grands axes, et J'_1, J'_2, J'_3 pour l'axe moyen.

Les valeurs de ces axes par rapport à la valeur a de l'axe de bifurcation sont données approximativement par la colonne correspondante du Tableau. Pour une masse de même M et μ que la Terre, on a obtenu $a = 46^{\text{km}}$ et $b = 26^{\text{km}},8$. L'ellipsoïde de Jacobi qui donnerait naissance à la figure piriforme, la première

figure de bifurcation susceptible de se dédoubler et de former un satellite, aurait alors dans ce cas pour longueur des axes $43^{\text{km}},5$, $18^{\text{km}},6$ et $14^{\text{km}},9$.

On voit également sur la figure que la valeur du grand axe en J , est assez voisine de celle de l'ellipsoïde de bifurcation en J , mais les valeurs des axes b et c en sont assez éloignées et se rapprochent déjà beaucoup l'une de l'autre en J'_1 et J''_1 .

Le volume serait 4,73 fois plus petit que pour l'ellipsoïde de bifurcation et la densité 217 millions de fois plus grande qu'actuellement. On voit à quel point la Terre en est loin. La vitesse de rotation de cet ellipsoïde serait près de deux fois plus grande que celle de l'ellipsoïde de bifurcation, exactement 1,9. Il ferait donc 4,7 tours par seconde. Ce serait presque la vitesse de rotation du disque limite des Maclaurin, qui serait de 5,35 tours par seconde.

En ajoutant à la Terre le moment de rotation de la Lune, les éléments correspondant à la figure piriforme seraient, pour les axes, 945^{km} , 404^{km} et 323^{km} , et la densité devrait être encore 2110 fois la densité actuelle.

Le Tableau des valeurs principales relatives à l'ellipsoïde terrestre celles qu'il aurait pu prendre au cours de son évolution cosmique montre que le fractionnement d'un astre, par suite de sa contraction, est tout à fait improbable. Nous allons faire les calculs pour cinq cas spéciaux intéressants : L'ellipsoïde de bifurcation des Maclaurin et des Jacobi, l'ellipsoïde de Maclaurin pour lequel la vitesse de rotation est maximum, enfin pour les trois premiers ellipsoïdes de Jacobi, qui donnent des figures de bifurcation voisines pouvant aboutir à un fractionnement en 2, 3 ou 4 composantes. Les deux premiers ellipsoïdes sont de révolution.

1.^o Nous considérons d'abord la densité ρ comme constante. On obtient alors facilement pour les ellipsoïdes de révolution, en désignant par l'indice 1 les valeurs actuelles :

$$a = \frac{r}{\sqrt[3]{s}}, \quad c = a\sqrt{s},$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_1^2} = \frac{h}{h_1}, \quad h_1 = \frac{8}{15}e, \quad \frac{\mu}{\mu_1} = \frac{a^2\omega}{r^2\omega_1} = \frac{\omega}{\omega_1} \frac{1}{\sqrt[3]{s}}.$$

Pour les ellipsoïdes à trois axes, on a de même

$$c = r\sqrt[6]{st}, \quad a = \frac{c}{\sqrt{s}}, \quad b = \frac{c}{\sqrt{t}};$$

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{a^2 + b^2}{2r^2} \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\omega}{\omega_1} \frac{s+t}{2(st)^{\frac{2}{3}}}$$

avec la même formule pour ω . On obtient le Tableau suivant, où l'on a désigné par $\mu' : \mu_1$ la valeur que devrait avoir le rapport des moments de rotation dans le cas où μ_1 comprendrait celui de la Lune :

s	0,340	0,135	0,117	0,069	0,008
t	0,340	0,135	0,640	0,742	0,845
h	0,187	0,224	0,141	0,110	0,061
$\omega : \omega_1$	9,0	9,86	7,81	6,90	5,26
$\mu : \mu_1$	12,9	19,2	17,1	20,2	28,4
$\mu' : \mu_1$	2,67	3,99	3,54	4,20	5,90
a km.....	7,650	8,910	12,100	14,800	20,400
b km.....	7,650	8,910	5,060	4,520	3,710
c km.....	4,460	3,270	4,140	3,900	3,410

On voit par la valeur de μ que la Terre devrait avoir un moment de rotation près de 13 fois plus grand pour arriver à l'ellipsoïde de bifurcation des Jacobi (1^{re} colonne) et 17 fois plus grand pour pouvoir arriver à la figure piriforme (3^e colonne). Même en lui adjoignant son satellite, le moment de rotation serait encore 2,67 fois trop faible dans le premier cas et 3,54 dans le second. Il lui aurait fallu une valeur plus grande encore pour atteindre la figure de rupture, dérivée de la figure piriforme, et donner ainsi naissance à son satellite par un dédoublement de la masse primitive. Le grand axe de l'ellipsoïde terrestre, dans le cas de la figure piriforme, serait de 12 100^{km}, presque le double de sa valeur actuelle, avec un petit axe trois fois plus petit de 4 140^{km}.

On voit également que, pour réaliser l'ellipsoïde de bifurcation des Maclaurin-Jacobi, il faudrait que la Terre tourne 9 fois plus vite, avec la densité actuelle. Comme pour chaque ellipsoïde d'équilibre, la valeur de $h = \frac{\omega^2}{2\pi f\rho}$ est déterminée, égale ici à 0,187, on peut dire également qu'il faudrait que la densité de la Terre soit 81 fois plus petite, avec la vitesse actuelle, pour réaliser cette

figure d'équilibre, soit de 0,068. Cette valeur est indépendante de la masse. Telle doit donc être la densité de tout astre tournant sur lui-même en 24 heures et qui réaliserait cette figure d'équilibre du Maclaurin-Jacobi.

En désignant par ω la vitesse nécessaire pour réaliser cette figure d'équilibre pour un autre astre de densité ρ et par $\omega_0 = 9 \omega_1$ la vitesse correspondante à la densité ρ_1 de la Terre, on a

$$\frac{\omega^2}{\rho} = \frac{\omega_0^2}{\rho_1^2} = 9^2 \frac{\omega_1^2}{\rho_1}, \quad \frac{\omega}{\omega_1} = 9 \frac{\omega_1}{\omega_1} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_1}},$$

où ω_1 désigne la vitesse de rotation actuelle du second astre.

La densité du Soleil est environ 4 fois plus petite que celle de la Terre. Il devrait faire 4,5 tours pour réaliser cet ellipsoïde. Il en serait de même pour Jupiter, qui a presque la même densité que le Soleil : 1,36. Il fait près de 2,5 tours en 24 heures. Il lui suffirait d'avoir une vitesse double. Pour Saturne, il suffirait que sa vitesse soit de $\frac{4}{10}$ seulement plus grande qu'actuellement, exactement 1,37, pour atteindre la figure de bifurcation des ellipsoïdes de révolution aux ellipsoïdes à trois axes. Il aurait donc suffi d'un léger accroissement de vitesse pour trancher pratiquement la question de savoir si un ellipsoïde de révolution qui se contracte se transformera réellement en un ellipsoïde à trois axes.

D'ailleurs, la contraction future de ces astres ne pourra pas non plus réaliser cette figure. En effet, on a, en désignant par les indices 1 les valeurs relatives à la Terre actuellement, et en négligeant l'aplatissement et l ,

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \frac{\rho_1}{\rho}, \quad g = 4h \sqrt{1 + l^2} = 4h.$$

D'après les calculs ci-dessus, h_1 est 81 fois plus petit que 0,187, valeur de h pour le Maclaurin-Jacobi. On obtient pour Jupiter $g = 0,224$ et pour Saturne 0,397. La valeur de g pour le Maclaurin-Jacobi est 1,28. Supposons que Jupiter et Saturne se condensent jusqu'à atteindre cette valeur et réaliser cette figure. On a ag constant. On trouve que le rayon du grand axe de Jupiter serait alors 5,7 fois plus petit et sa densité 318 plus grande. Pour Saturne,

son grand axe serait, seulement 3,2 fois plus petit et sa densité 56,5 fois plus grande, c'est-à-dire égale à 39,5. Il est peu probable que ces valeurs puissent être atteintes et la contraction maximum de Saturne ne lui permettra pas de dépasser les ellipsoïdes de révolution.

Pour la valeur de g correspondant au système Terre-Lune, on a 0,367. C'est sensiblement la valeur relative à Saturne. On a indiqué sur la courbe de la figure 3 le point figuratif L correspondant. Il est encore loin du point de bifurcation J.

2° Nous considérons le moment de rotation comme constant. On a alors ag constant et, en comparant aux valeurs actuelles avec e suffisamment petit, on peut écrire

$$\frac{r}{a} = \frac{g}{g_1}, \quad g_1 = 4h_1 = \frac{32}{15}e.$$

Les valeurs de g du Tableau donneront a . On aurait b et c par leur valeur en fonction de s et t donnée plus haut. Leur rapport à a serait d'ailleurs le même que dans le Tableau précédent. Il est inutile de les écrire. Enfin ω sera déterminé par la condition de μ constant

$$a^2\omega = r^2\omega_1 \quad \text{ou} \quad (a^2 + b^2)\omega = 2r^2\omega_1,$$

pour les ellipsoïdes de révolution ou les ellipsoïdes à trois axes. La densité ρ sera déterminée par la condition de M constant :

$$\rho_1 r^3 = \rho a^2 b = \rho a^3 \sqrt{s}, \quad \rho_1 r^3 = \rho abc = \rho a^3 \frac{s}{\sqrt{t}}.$$

On obtient ainsi le Tableau suivant :

s	0,340	0,135	0,117	0,069	0,028
g	1,276	2,43	1,35	1,66	2,22
$r : a$	139	263	146	180	240
$r : a'$	5,97	11,3	6,31	7,74	10,4
a' km.....	1070	563	1010	824	617
$\rho' : \rho_1$	365	3980	1720	5800	35600

On voit qu'avec le moment de rotation actuel il faudrait que la contraction de la Terre soit telle que le grand axe ait une valeur 139 fois plus petite pour arriver à la figure d'équilibre de l'ellip-

soïde de bifurcation des Jacobi, et 146 fois plus pour atteindre la figure piriforme. En ajoutant le moment de rotation de la Lune, il faudrait que la contraction soit encore 6 et 6,31 fois plus grande, quatrième ligne $r : a'$. Le grand axe a' aurait alors 1070^{km} et 1010^{km}. La densité serait 365 fois et 1720 fois plus grande qu'actuellement, ce qui serait impossible.

G.-H. Darwin expliquait la formation de la Lune par dédoublement de la masse primitive avec l'accélération du mouvement de rotation dû à la contraction. Après la formation du satellite, la Terre, continuant à se contracter, aurait eu tendance à tourner encore plus vite, l'attraction de la Lune voisine aurait produit des marées considérables qui auraient provoqué un véritable freinage. La quantité de mouvement de la Terre aurait diminuée et celle de la Lune aurait augmentée. Notre satellite se serait éloigné alors jusqu'à la distance actuelle. On voit ici que le moment de rotation de l'ensemble, lequel n'a pas varié, n'a pas été suffisant dans le passé pour amener l'ensemble au voisinage des figures de rupture. Cette formation par gémination a donc été impossible. Même si la Lune avait continué à faire corps avec la Terre, il lui aurait été impossible d'atteindre une figure de rupture. La contraction nécessaire serait en effet beaucoup trop considérable, car elle lui donnerait une densité 80 fois plus grande que celle des métaux les plus lourds.

D'ailleurs, le ralentissement dû aux marées doit être sensiblement nul si l'aplatissement est de $\frac{1}{297}$, et l'éloignement des deux astres ne peut pas être attribué à cette cause.

En résumé, en introduisant le grand axe au lieu de la densité dans les formules de discussion des figures ellipsoïdales d'équilibre, on obtient la variation de la grandeur des figures en même temps que la variation de la forme, et l'on peut calculer les valeurs réelles des éléments au cours de l'évolution d'une masse qui se contracterait indéfiniment et dont le moment de rotation reste constant.

On démontre alors que l'*ellipsoïde de révolution* prend finalement la forme d'un disque aplati de rayon fini. A la limite, la *force centrifuge* devient égale à l'*attraction*, du bord au centre du disque.

Le rayon du disque limite pour la Terre supposée homogène serait de $9^{\text{km}},4$ et sa vitesse serait de 5,35 tours par seconde. Si l'on suppose la Lune réunie à la Terre, le moment de rotation totale devient près de cinq fois plus grand (4,82). Le disque limite aurait 219^{km} et ferait 2,86 tours par minute. Pour que la Terre tende à la limite vers un disque aplati ayant son rayon actuel, il faudrait qu'elle tourne 26 fois plus vite.

Pour les *ellipsoïdes de Jacobi*, les trois axes décroissent indéfiniment et tendent tous vers zéro. *La figure d'équilibre prend la forme d'une aiguille allongée, mais de longueur indéfiniment décroissante.* Comme pour les Maclaurin, à la limite, la force centrifuge devient égale à l'attraction, de l'extrémité du grand axe au centre.

L'introduction de l'expression du moment de rotation d'un *système double* dans la formule de variation des ellipsoïdes donne une *limite du rapport de la masse des composantes*. Il doit être plus grand que un tiers et les masses doivent être assez voisines.

Mais, pour qu'il y ait *dédoublément* pour une autre figure dérivée des ellipsoïdes, il faudrait que l'égalité entre la force centrifuge et l'attraction ait lieu *avant la limite*, avant que l'une des dimensions ne devienne nulle. En bifurquant vers les Jacobi, on s'éloigne de cette condition. On s'en rapprocherait peut-être avec la première figure de bifurcation des Maclaurin, aboutissant à l'anneau de Plateau.

On a calculé et représenté sur un plan les courbes de variation des Maclaurin et des Jacobi dans les trois cas principaux avec s comme variable : 1^o en fonction de h , c'est-à-dire ρ constant et ω variable, ou réciproquement; 2^o en fonction de k , c'est-à-dire μ constant et ρ variable, ou inversement; 3^o en fonction de g , c'est-à-dire μ constant et a variable, ou inversement. Dans ce dernier cas, la courbe des Maclaurin aboutit à une limite maximum 2π . Celle des Jacobi descend d'abord jusqu'à un minimum, puis croît sans limite. On trouve un intervalle où il y a deux ellipsoïdes de Jacobi et un de Maclaurin comme figures d'équilibre.

Enfin, on a tracé la courbe des deux axes des Maclaurin et des trois axes des Jacobi, au cours de leur évolution, en fonction de s

et en fonction de $\frac{1}{\rho}$. A partir du point de bifurcation, le *grand axe* du *Jacobi* croît d'abord jusqu'à un *maximum*, malgré la contraction de l'ensemble, puis décroît indéfiniment.

Pour arriver aux figures de bifurcation, il faudrait que le rayon de la Terre se contracte de 140 fois sa valeur. Il aurait 46^{km} et la densité serait 46 millions de fois plus grande qu'actuellement. En supposant la *Lune* réunie à la Terre, avec son moment de rotation, cela ne suffirait pas encore. Son rayon serait 6 fois trop grand. Le système en était encore plus éloigné dans le passé et *n'a donc pas pu se former par dédoublement*.

