JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

**Sur la méthode d'approximation d'Hermite**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série*, tome 2 (1916), p. 79-103.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1916_7_2__79_0>

# *Sur la méthode d'approximation d'Hermite;*

PAR G. HUMBERT.

## Exposé du travail.

**1.** Hermite a indiqué, pour l'approximation d'un nombre irrationnel *positif*, $\omega$, une méthode extrêmement remarquable [1].

Il considère la forme quadratique binaire et positive

$$\varphi(X, Y) = (X - \omega Y)^2 + k^2 Y^2, \tag{1}$$

où $k$ est un paramètre positif. Soient $X = a$, $Y = c$ les valeurs *entières*, non nulles à la fois, de X et Y, qui rendent $\varphi(X, Y)$ minimum : il est clair, puisque $\omega > 0$, qu'on a le droit d'admettre que $a$ et $c$, évidemment premiers entre eux, sont tous deux positifs. D'autre part, on sait que le minimum, $\varphi(a, c)$, est au plus égal au produit de la racine carrée du discriminant de $\varphi$ par le facteur $2 : \sqrt{3}$, c'est-à-dire que

$$(a - c\omega)^2 + k^2 c^2 \leqq \frac{2k}{\sqrt{3}}.$$

Le produit des deux termes qui figurent au premier membre étant au plus égal au carré de la moitié du second membre, on en déduit l'inégalité

$$\left| \frac{a}{c} - \omega \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}\, c^2};$$

en sorte que la fraction irréductible $a : c$ représente $\omega$ avec une

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 41, p. 195, et *Œuvres*, t. I, p. 168.

approximation au moins égale à $1 : \sqrt{3}c^2$, approximation supérieure (à cause du facteur $1 : \sqrt{3}$) à celle que donnent les fractions continues ordinaires.

En faisant décroître $k$ de $\infty$ à $0$, on obtient ainsi une suite de fractions irréductibles, qui tendent vers $\omega$, et Hermite montre qu'elles possèdent plusieurs propriétés des fractions continues.

Le but du présent travail est l'étude approfondie de cette méthode d'approximation; grâce à une *interprétation géométrique* simple, on résoudra les problèmes suivants :

1° *Étant données deux fractions d'Hermite consécutives, trouver la suivante*, c'est-à-dire former directement la suite d'Hermite.

2° *Reconnaître si une fraction donnée appartient à cette suite.*

3° *Étudier la liaison entre les réduites ordinaires de* $\omega$ *et les fractions d'Hermite.*

Nous serons également conduits à un *développement de* $\omega$, analogue au développement en fraction continue, et dont nous exposerons les propriétés principales.

### Interprétation géométrique.

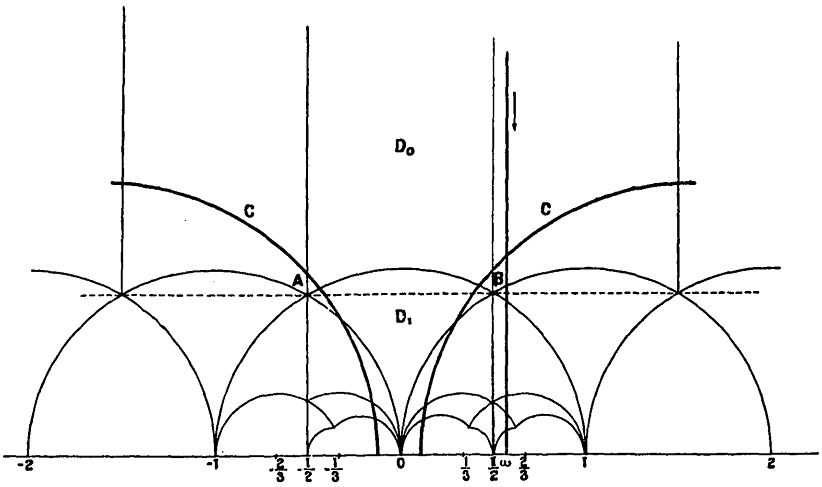
**2.** Elle se rattache à la *division modulaire* classique du demi-plan analytique (*fig.* 1), en triangles ou domaines, dont les côtés sont des segments de droite, ou des arcs de cercle, normaux à l'axe réel $Ox$. On l'obtient en partant du *domaine fondamental* ordinaire, $D_0$, dont les sommets sont $(-1 + i\sqrt{3}) : 2$, soit A; $(1 + i\sqrt{3}) : 2$, soit B; et le point à l'infini sur $Oy$; ses angles sont $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ et $0$. On prend ensuite les *symétriques* [1] de $D_0$ par rapport à ses trois côtés, et ainsi de suite pour les domaines successivement obtenus : chaque domaine de la division a, sur $Ox$ ou à l'infini, un sommet d'angle nul, que nous appellerons *pointe*, réservant le nom de *sommets* à ceux

[1] La symétrique d'une figure par rapport à une circonférence est son inverse quand on prend pour pôle le centre, et pour puissance, le carré du rayon de la circonférence.

d'angle $\frac{\pi}{3}$. Nous dirons que, dans un domaine, le côté opposé à la pointe est la *base*, et que les côtés aboutissant à la pointe sont les *côtés* du domaine.

Nous désignerons par $D_1$ le domaine OAB (de pointe o) adjacent à $D_0$ par la base.

Fig. 1.




Nous rappelons ces résultats pour mémoire ; nous supposerons connues les propriétés classiques de la figure modulaire ([1]), et en particulier, l'invariance de l'ensemble de cette figure vis-à-vis de toute substitution modulaire.

**3.** Cela posé, la forme $\varphi$ s'annule pour $X : Y = \omega \pm ik$; le point analytique $z = \omega + ik$, situé au-dessus de $Ox$, est ce qu'on nomme le *point représentatif* de $\varphi$; il est situé sur la droite $x = \omega$, marquée en trait fort sur la figure 1, et, lorsque $k$ va de $\infty$ à o, il parcourt cette droite, en allant de $\infty$ au point $\omega$ de $Ox$.

Dans ce mouvement, il traverse des domaines modulaires successifs

([1]) Dans la figure 1, qui représente quelques domaines de la division modulaire, les lignes tracées en traits plus forts n'appartiennent pas à cette division; leur signification sera donnée plus loin (ci-après, n° **3**, pour la ligne droite, et n°s **6** et **9** pour les arcs).

en nombre infini, car on sait que les domaines modulaires deviennent infiniment petits dans tous les sens, à l'approche de l'axe $Ox$; soit D l'un d'eux : on transforme D en $D_0$ par une substitution modulaire

$$(2) \qquad z = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \qquad (a, b, c, d \text{ entiers et } ad - bc = 1),$$

$z$ désignant un point de D et $\zeta$ son transformé dans $D_0$. Par la substitution à deux variables correspondante, $\varphi(X, Y)$ devient la forme *équivalente* $\varphi(ax + by, cx + dy)$; si $z$, point de D, est le point représentatif de $\varphi(X, Y)$, le point transformé $\zeta$, *situé dans* $D_0$, représentera $\varphi(ax + by, cx + dy)$ : cette dernière forme, en vertu d'une propriété classique, sera donc *réduite*, dans le sens de Gauss.

Or, dans une réduite, le premier coefficient, celui de $x^2$, est le minimum de la forme (pour les valeurs entières, non nulles à la fois, prises par les variables); le minimum de la réduite est donc $\varphi(a, c)$, et c'est aussi le minimum de la forme équivalente $\varphi(X, Y)$. En d'autres termes, le minimum de $\varphi(X, Y)$ s'obtient pour $X = a$, $Y = c$.

D'autre part, on voit dans (2) que, pour $z = a : c$, on a $\zeta = \infty$; sous une autre forme, le point $a : c$ de $Ox$ correspond, par (2), *à la pointe de* $D_0$ : *c'est donc la pointe de* D.

Dès lors, la méthode d'Hermite consistant à prendre $a : c$ pour valeur approchée de $\omega$, on peut en donner l'interprétation géométrique suivante :

*Un point mobile parcourt la droite $x = \omega$, en partant de $\infty$ et en se dirigeant vers le point $\omega$ de $Ox$, dans le demi-plan supérieur : on prend, pour approcher de $\omega$, les abscisses, $a : c$, des* POINTES *des domaines modulaires que traverse successivement le point mobile.*

On a ainsi un procédé géométrique sûr pour obtenir, *dans leur ordre*, les fractions successives d'Hermite, et l'on voit de suite, par la représentation précédente, que ces fractions ont $\omega$ pour limite.

*Remarque.* — Si $\omega$ est irrationnel, je dis que la droite $x = \omega$ ne contient aucun *sommet* de domaine modulaire : car un tel sommet, transformé par une substitution modulaire du sommet B de $D_0$, a, comme on le reconnaît de suite, une abscisse rationnelle.

Dès lors, quand le point mobile passe d'un domaine à un autre, il le fait en traversant une frontière (base ou côté) commune à ces deux domaines, et jamais en franchissant un sommet.

### Formation de la suite d'Hermite.

**4.** Il est clair (*fig.* 1) que le premier domaine traversé par la droite $x = \omega$ a pour pointe le point à l'infini, c'est-à-dire $1:0$, et le second le point $\theta_0 : 1$, en désignant par $\theta_0$ l'*entier* (positif ou nul) *le plus voisin de* $\omega$.

Donc, pour obtenir la suite d'Hermite, il suffira de savoir résoudre ce problème :

*Soient* $p_0 : q_0$ *et* $p : q$ *deux fractions (irréductibles) successives de la suite d'Hermite; trouver la suivante*, $P : Q$.

D'après le n° **1**, $\omega$ étant positif, on peut supposer tous les $p_0$, $p$, $P$, ..., $q_0$, $q$, $Q$, ... positifs.

**5.** Soient $d$ le *dernier* domaine, $d'$ le *premier* domaine, *de pointe* $p : q$, que traverse la droite $x = \omega$, parcourue de $\infty$ à $\omega$. Il est clair qu'elle *sort* de $d$ par la *base :* car, autrement, le domaine dans lequel elle pénétrerait en quittant $d$ serait adjacent à $d$ le long d'un *côté*, donc aurait même pointe, $p : q$, que $d$. De même, la droite entre dans $d'$ par la base.

Il suit de là que, au sortir de $d$, la droite pénètre dans un domaine, D, qui est *adjacent à $d$ par la base;* d'ailleurs, en vertu des définitions ci-dessus, la pointe de D est $P : Q$.

Effectuons alors la substitution modulaire (2) qui transforme $d$ en $D_0$; elle transforme D en le domaine adjacent à $D_0$ par la base, c'est-à-dire en $D_1$. Donc, aux points $z = p : q$ et $z = P : Q$, pointes de $d$ et D, elle fait correspondre respectivement $\zeta = \infty$ et $\zeta = 0$, pointes de $D_0$ et $D_1$, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{a}{c} = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad \frac{b}{d} = \frac{P}{Q}. \tag{3}$$

Comme, en vertu de $ad - bc = 1$, $a$ et $c$, ainsi que $b$ et $d$, sont premiers entre eux et qu'il en est de même de $p$ et $q$, P et Q, on a nécessairement

$$\begin{matrix} a = \varepsilon_1 p, & b = \varepsilon_2 P \\ c = \varepsilon_1 q, & d = \varepsilon_2 Q \end{matrix} \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1);$$

d'où l'on conclut

$$(4) \qquad pQ - qP = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon' \qquad (\varepsilon' = \pm 1).$$

On aurait de même

$$(5) \qquad pq_0 - qp_0 = \eta \qquad (\eta = \pm 1).$$

L'équation (5) exprime une importante propriété de la suite d'Hermite, établie par Hermite d'une manière toute différente (¹).

6. Observons maintenant que les *sommets* des domaines modulaires de pointe $\infty$ sont tous situés (*fig.* 1) sur la droite AB, d'équation $y = \sqrt{3} : 2$; on en conclut aisément que les sommets des domaines modulaires de pointe $p : q$ sont sur une circonférence $\mathfrak{C}$ (*fig.* 2), d'équation (²)

$$(6) \qquad q^2(\xi^2 + \eta^2) - 2pq\xi - \frac{2}{\sqrt{3}}\eta + p^2 = 0,$$

qui touche $Ox$ au point d'abscisse $p : q$.

Cela posé, $\eta$ étant l'unité $\pm 1$ qui figure au second membre de (5), faisons la substitution

$$(7) \qquad z = \frac{p\zeta + p_0\eta}{q\zeta + q_0\eta},$$

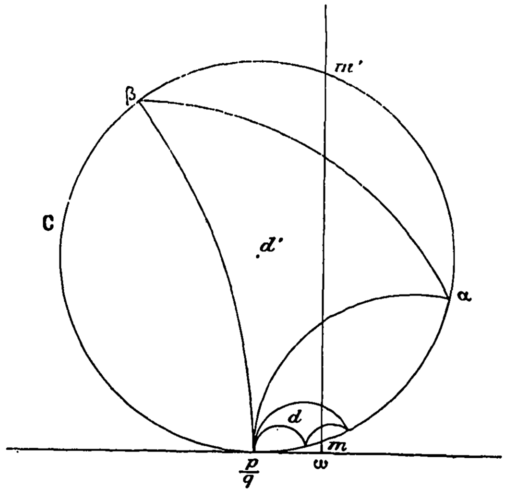
qui est modulaire, d'après (5). Elle change les points $z = p : q$ et $p_0 : q_0$ respectivement en $\zeta = \infty$ et $\zeta = 0$; les domaines de pointe $p : q$ deviennent donc les domaines de pointe $\infty$, et, ceux de pointe $p_0 : q_0$, les domaines de pointe 0. En particulier, $d'$, premier domaine de

(¹) En réalité, c'est une propriété *de la figure modulaire :* si deux domaines, de pointes $a' : c'$ et $b' : d'$ sont adjacents par la base, on a $a'd' - b'c' = \pm 1$.

(²) On obtient cette équation en effectuant une substitution modulaire, d'ailleurs quelconque, changeant $\zeta = \infty$ en $z = p : q$ et cherchant la transformée de la droite $y = \sqrt{3} : 2$.

pointe $p:q$, et $\delta'$, dernier domaine de pointe $p_0:q_0$, traversés par $x=\omega$, domaines adjacents par la base (n° **5**), deviennent respectivement $D_0$ et $D_1$ : car $D_0$ et $D_1$ forment le seul couple de domaines, de pointes respectives $\infty$ et o, qui soient adjacents par la base.

Fig. 2.




Dès lors, la demi-droite $x=\omega$ devient une demi-circonférence C, orthogonale à $Ox$, qui passera de $D_1$ à $D_0$ en traversant la base commune, AB, de ces deux domaines (*fig.* 1).

La circonférence $\mathfrak{C}$ devient la droite AB, soit $y=\sqrt{3}:2$, qui contient les sommets des domaines de pointe $\infty$, et les deux points, *que nous appellerons m' et m* (*fig.* 2), où $x=\omega$ coupe $\mathfrak{C}$ se transforment respectivement en deux points, M' et M, de la droite $y=\sqrt{3}:2$.

La base commune, $\alpha\beta$, de $\delta'$ et de $d'$, devient l'*arc* AB (*fig.* 1); l'arc $\alpha m'\beta$ de $\mathfrak{C}$ devient la *corde* AB. Il résulte de là que M' (transformé de $m'$) est sur cette corde : il est donc dans le domaine $D_1$. Inversement, *m' est dans le domaine* $\delta'$.

Par une raison semblable, $m$ est dans le domaine D, où pénètre la droite $x=\omega$ au sortir de $d$.

Cette remarque va nous permettre de déterminer D et sa pointe : il suffira de chercher à quel domaine appartient M ; si $\zeta$ est la pointe de celui-ci, on aura la pointe $z$, de D (c'est-à-dire P : Q), par la formule (7). Or, par la figure modulaire (*fig.* 1), la pointe du domaine qui contient un point M de la droite AB est l'entier, $\sigma$, tel que $\sigma - \frac{1}{2}$ et $\sigma + \frac{1}{2}$ comprennent l'abscisse de M : *tout revient donc à calculer cette abscisse.*

On trouve aisément, par (6), pour le $z$ de $m$,

$$z = \omega + \frac{i}{q^2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} - q^2(p - q\omega)^2}\right]; \tag{8}$$

celui de $m'$ n'en diffère que par le changement de signe du second radical (1); portant la valeur ci-dessus de $z$ dans (7), on en déduira $\zeta$ et la partie réelle de $\zeta$ sera l'abscisse cherchée de M. Le résultat est le suivant.

Soit posé

$$q(p - q\omega) = \varepsilon u, \tag{9}$$

$\varepsilon$ désignant $\pm 1$, et ayant le signe de $p - q\omega$, *en sorte que $u$ est toujours positif* (2); l'abscisse de M sera

$$-\eta\frac{q_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}\left(1 + \sqrt{1 - 3u^2}\right); \tag{10}$$

celle de M' sera la même, avec le signe — devant le radical; quant à $\eta$, c'est toujours l'unité $\pm 1$ définie par (5).

---

(1) *Remarque.* — Il est clair que, si $p : q$ est une fraction d'Hermite pour $\omega$, la droite $x = \omega$ doit rencontrer $\mathfrak{S}$, ce qui exige la réalité du radical dans (8); on a donc nécessairement

$$q^2(p - q\omega)^2 \leqq \frac{1}{3},$$

d'où l'on conclut

$$\left|\frac{p}{q} - \omega\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}\,q^2}.$$

C'est l'inégalité fondamentale (nº **1**) qui exprime l'approximation d'Hermite; on a ainsi, de cette inégalité, une démonstration géométrique extrêmement simple.

(2) En vertu de $q\,|p - q\omega| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (note précédente), on voit que $0 \leqq u \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. L'entier $\sigma$, défini plus haut, est tel que $\sigma - \frac{1}{2}$ et $\sigma + \frac{1}{2}$ comprennent le nombre (10); c'est donc le plus grand entier inférieur à la quantité (10) qu'on aurait augmentée de $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur à

$$(11) \qquad -\eta\frac{q_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}(1 + \sqrt{1 - 3u^2}) + \frac{1}{2}.$$

De même, le point M′ est dans un domaine de pointe $\sigma'$, où $\sigma'$ est le plus grand entier inférieur à

$$(12) \qquad -\eta\frac{q_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}(1 - \sqrt{1 - 3u^2}) + \frac{1}{2}.$$

De là les conséquences suivantes :

1° $P : Q$, c'est-à-dire la fraction qui suit $p : q$, est donnée (n° 6) par le second membre de la formule (7), où l'on remplace $\zeta$ par $\sigma$; donc

$$(13) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{p\sigma + p_0\eta}{q\sigma + q_0\eta}.$$

2° On a de même pour la fraction $p_0 : q_0$, qui précède $p : q$ (en introduisant M′ au lieu de M),

$$(14) \qquad \frac{p_0}{q_0} = \frac{p\sigma' + p_0\eta}{q\sigma' + q_0\eta}.$$

Chassant les dénominateurs, et tenant compte de $pq_0 - qp_0 = \eta$, on trouve $\sigma'\eta = 0$, d'où $\sigma' = 0$. En d'autres termes, le point M′ est, sur la droite AB, dans un domaine de pointe o, donc dans $D_1$, ce qu'on savait déjà (n° 6).

3° Par la transformation (7), la corde $m'm$ est devenue l'arc de cercle, orthogonal à $Ox$, passant par M et M′, et situé *au-dessus* de la droite $y = \sqrt{3} : 2$ : ce dernier point résulte de ce que, la corde $m'm$ traversant des domaines de pointe $p : q$, l'arc M′M doit traverser des domaines de pointe $\infty$.

Le nombre de ces domaines traversés par M′M est évidemment, comme le montre la figure modulaire, égal à $|\sigma - \sigma'| + 1$; ou encore, puisque $\sigma' = 0$, on peut dire que :

*Le nombre des domaines de pointe $p:q$ traversés par la droite $x=\omega$ est égal à $|\sigma|+1$.*

**8.** Ces domaines sont au nombre de *deux, au moins*, parce que la droite *pénètre* dans un premier domaine (de pointe $p:q$) par la base (n° **5**) et *sort*, également par la base, d'un dernier domaine qui, dès lors, ne peut coïncider avec le précédent. On a donc nécessairement

$$|\sigma| \geqq 1.$$

Il résulte de là, puisque l'abscisse de M est entre $\sigma-\frac{1}{2}$ et $\sigma+\frac{1}{2}$, et celle de M′ entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ (car $\sigma'=0$), que la différence entre l'abscisse de M et celle de M′ a le signe de $\sigma$. D'autre part, en vertu de (10), cette différence étant $\varepsilon\sqrt{1-3u^2}:u$, on conclut que *$\sigma$ a le signe de $\varepsilon$.*

*Désignons alors $\varepsilon\sigma$, c'est-à-dire $|\sigma|$, par $\theta$*; nous pouvons écrire (13)

$$\frac{P}{Q}=\frac{p\theta+p_0\varepsilon\eta}{q\theta+q_0\varepsilon\eta}, \qquad (\text{et } \theta=|\sigma|\geqq 1). \tag{15}$$

Le numérateur et le dénominateur au second membre sont premiers entre eux, à cause de (5); on a supposé que P et Q le sont aussi : donc P et Q, qui sont positifs, sont respectivement égaux, *au même signe près*, aux deux termes de la fraction second membre. Étudions donc le signe de ces termes.

**9.** Je dis qu'ils sont tous deux positifs, et il suffira de le démontrer pour le dénominateur, $q\theta+q_0\varepsilon\eta$.

1° Soit d'abord $\varepsilon\eta=+1$; comme $\theta$ est $\geqq 1$, la proposition est évidente, et de plus on a $Q>q$.

2° Soit $\varepsilon\eta=-1$. Cela exprime [(5) et (9)] que $p-q\omega$ et $pq_0-qp_0$ sont de signes contraires, c'est-à-dire que les pointes $p_0:q_0$ et $p:q$ sont d'un même côté de la droite $x=\omega$.

Or, par la substitution modulaire (7), la demi-droite $x=\omega$ est devenue (n° **6**) une *demi-circonférence*, C, orthogonale à $Ox$; celle-ci laissera dès lors les pointes $\infty$ et 0 d'un même côté, donc à son extérieur. De plus, en vertu du n° **6**, C traverse nécessairement l'arc AB, base commune de $D_0$ et de $D_1$.

De ces deux propriétés de C on conclut de suite (figure 1, où C est représentée en traits plus forts, dans deux de ses positions possibles) que C coupe $Ox$ en un premier point d'abscisse inférieure à 1 (en valeur absolue) et, en un second point, d'abscisse supérieure à 2 (en valeur absolue), ces deux abscisses étant de même signe. Par suite, C traverse au moins *trois* domaines de pointe $\infty$. Dès lors (n° **7**, 3°), on a

$$|\sigma|+1 \geqq 3 \qquad \text{ou} \qquad |\sigma| = \theta \geqq 2,$$

en sorte que le dénominateur, au second membre de (14), à savoir $q\theta - q_0$, est au moins égal à $2q - q_0$.

Or, les deux premières fractions d'Hermite sont $1 : 0$ et $\theta_0 : 1$ (où $\theta_0$ entier $\geqq 0$) : elles vérifient $q > q_0$; si donc nous admettons que, jusqu'à $p : q$, inclus, les dénominateurs des fractions d'Hermite vont en croissant, nous voyons que $2q - q_0$ est $> 0$ et supérieur à $q$; ce qui entraîne $Q = q\theta - q_0 > q$. Il résulte de là les conséquences suivantes :

**10.** 1° *Les dénominateurs, dans la suite d'Hermite, vont en croissant sans cesse.*

Car si l'on admet qu'ils vont en croissant jusqu'à $q$, inclus, on vient de voir que le dénominateur suivant, Q, est toujours supérieur à $q$.

2° Le dénominateur du second membre de (15) est, d'après cela, toujours positif (car $q > q_0$ et $\theta \geqq 1$); donc on aura toujours

$$(15') \qquad P = p\theta + \varepsilon\eta p_0, \qquad Q = q\theta + \varepsilon\eta q_0.$$

3° On verrait de même que les numérateurs, dans la suite d'Hermite, croissent, à partir de la seconde fraction tout au moins. La propriété résultera d'ailleurs de ce fait, établi plus loin, que la suite d'Hermite se déduit de celle des réduites ordinaires de $\omega$ en y *supprimant* certains termes.

**11.** *Résumé.* — Soient $p_0 : q_0$ et $p : q$ deux fractions d'Hermite consécutives pour le nombre $\omega$; on a nécessairement

$$pq_0 - qp_0 = \eta \qquad (\eta = \pm 1).$$

La fraction suivante, P : Q, s'obtient comme il suit :

Soit posé $\varepsilon u = q(p - q\omega)$, $\varepsilon$ étant $\pm 1$, choisi de manière que $u$ soit positif, c'est-à-dire $\varepsilon$ étant du signe de $p - q\omega$; désignons par $\theta$ la valeur absolue de l'entier $\sigma$, qui est le plus grand entier inférieur à la quantité (11) : on reconnaît de suite ([1]) que $\theta$ est l'entier maximum contenu dans la quantité

$$\left| -\eta\frac{q_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}\left(1 + u + \sqrt{1 - 3u^2}\right) \right|,$$

qui est évidemment aussi la valeur absolue de

$$-\varepsilon\eta\frac{q_0}{q} + \frac{1}{2u}\left(1 + u + \sqrt{1 - 3u^2}\right). \tag{16}$$

Mais cette dernière quantité est positive. En effet, puisque

$$0 \leqq u \leqq 1 : \sqrt{3} \ (\text{n}^\circ\ \mathbf{6}) \qquad \text{et} \qquad q_0 < q \ (\text{n}^\circ\ \mathbf{10}),$$

et que d'ailleurs le minimum du second terme de (16) a lieu pour $u = 1 : \sqrt{3}$, la quantité (16) reste *supérieure* à $-1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, quantité positive.

Donc enfin, $\theta$ *étant l'entier (positif) maximum contenu dans la quantité* (16), $\varepsilon$ *et* $\eta$ *les unités* $\pm 1$ *définies ci-dessus, on a*

$$P = p\theta + \varepsilon\eta p_0, \qquad Q = q\theta + \varepsilon\eta q_0. \tag{17}$$

D'ailleurs, $\theta$ est $\geqq 1$; et même, si $\varepsilon\eta = -1$, $\theta$ est $\geqq 2$.

---

([1]) Soit en effet A la quantité (11), à savoir

$$-\eta\frac{q_0}{q} + \frac{\varepsilon}{2u}\left(1 + \sqrt{1 - 3u^2}\right) + \frac{1}{2};$$

on a, par définition de $\sigma$,

$$\sigma < A < \sigma + 1.$$

Si $\varepsilon = +1$, $\sigma$, qui a le signe de $\varepsilon$ (n° **8**), est $> 0$, ainsi dès lors que A, et la proposition est évidente, puisque, ici, $\theta = \sigma$. Si $\varepsilon = -1$, on déduit des inégalités précédentes $\sigma\varepsilon > A\varepsilon > \varepsilon\sigma + \varepsilon$; ou, puisque $\theta = \varepsilon\sigma$,

$$\theta < -A + 1 < \theta + 1,$$

ce qui montre que $\theta$ est l'entier maximum contenu dans $-A + 1$, ou dans $|A - 1|$, puisque $\theta$ est positif. De là encore la proposition à établir.

*Enfin* (n° **7**, 3°), $\theta + 1$ *est le nombre des domaines de pointe* $p : q$ *traversés par la droite* $x = \omega$.

On sait donc, à partir des deux premières fractions, $1 : 0$ et $\theta_0 : 1$ (n° **4**), former successivement toutes les fractions de la suite d'Hermite.

**12.** *Remarque.* — Il ne figure, dans (16) et (17), que l'unité $\varepsilon\eta$; par définition de $\varepsilon$ et $\eta$, elle est $+1$ si $\omega$ et $p_0 : q_0$ sont d'un même côté de $p : q$; elle est $-1$ s'ils sont de part et d'autre de $p : q$.

On pourrait, dans la formation de P et de Q, *faire abstraction complète* de $p_0$ et $q_0$, c'est-à-dire *de la fraction qui précède* $p : q$.

Soit, en effet, $q'_0$ la solution comprise entre $0$ et $q$ (c'est-à-dire la plus petite solution positive) de la congruence $pq'_0 \equiv \varepsilon \pmod{q}$; on voit de suite que $q'_0 = q_0$ si $\varepsilon\eta = +1$, et $q'_0 = q - q_0$ si $\varepsilon\eta = -1$. On en déduit aisément, pour P et Q, les valeurs suivantes :

$$Q = qs + q'_0, \qquad P = ps + p'_0,$$

où $p'_0 = \frac{pq'_0 - \varepsilon}{q}$, et où $s$ désigne l'entier maximum contenu dans la quantité

$$-\frac{q'_0}{q} + \frac{1}{2u}\left(1 + u + \sqrt{1 - 3u^2}\right);$$

seulement $s$, qui est $\theta$ si $\varepsilon\eta = 1$, et $\theta - 1$ si $\varepsilon\eta = -1$, n'est plus, *dans tous les cas*, le nombre des domaines de pointe $p : q$ traversés par la droite. Comme nous aurons à faire, en une autre occasion, une application importante de cette propriété de $\theta$, nous avons donné la préférence aux formules (17).

### Fractions d'Hermite « a priori ».

**13.** Nous allons maintenant aborder le problème inverse de celui de la formation régulière de la suite d'Hermite, c'est-à-dire le suivant :

*Reconnaître si une fraction irréductible donnée* $p : q$ *est une fraction d'Hermite pour le nombre* $\omega$.

Pour que $p:q$ soit fraction d'Hermite, il faut et il suffit que la droite $x=\omega$ pénètre dans un domaine (au moins) de pointe $p:q$.

Soit toujours posé

$$q(p-q\omega)=u\varepsilon \qquad (\varepsilon=\pm 1 \text{ et } u>0);$$

nous désignerons par $p'_0$ et $q'_0$ deux entiers positifs définis ainsi : $q'_0$ est *la* solution (positive) comprise entre o et $q$ de la congruence

$$pq'_0 \equiv \varepsilon \pmod{q}$$

qui entraîne

$$pq'_0=\varepsilon+qp'_0, \tag{18}$$

d'où $p'_0$. Il est clair que $p'_0$ est positif, puisque $p$, $q$, $q'_0$ le sont.

Effectuons alors la substitution, qui est *modulaire* [en vertu de 18)],

$$z=\frac{p\zeta+\varepsilon p'_0}{q\zeta+\varepsilon q'_0}; \tag{19}$$

elle change $z=p:q$ et $p'_0:q'_0$ en $\zeta=\infty$ et o, et la demi-droite $x=\omega$ en une demi-circonférence, C, qui coupe la droite $y=\sqrt{3}:2$ en deux points, M et M', dont les abscisses, par un calcul déjà fait, sont

$$-\varepsilon\frac{q'_0}{q}+\frac{\varepsilon}{2u}\left(1+\sqrt{1-3u^2}\right) \qquad \text{et} \qquad -\varepsilon\frac{q'_0}{q}+\frac{\varepsilon}{2u}\left(1-\sqrt{1-3u^2}\right),$$

et tout revient à exprimer que C pénètre dans un domaine, au moins, de pointe $\infty$. On le fera évidemment en écrivant que M' et M, qui appartiennent à des domaines de pointe entière, ne sont pas dans le même domaine, c'est-à-dire qu'entre leurs abscisses, augmentées (ou diminuées) de $\frac{1}{2}$, il y a au moins un entier; donc, que *les deux nombres*

$$-\frac{q'_0}{q}+\frac{1}{2u}\left(1+u-\sqrt{1-3u^2}\right), \tag{20}$$

$$-\frac{q'_0}{q}+\frac{1}{2u}\left(1+u+\sqrt{1-3u^2}\right), \tag{21}$$

*comprennent entre eux un entier, au moins.*

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que $p:q$ soit fraction d'Hermite, pour $\omega$.

**14.** *Transformation de la condition.* — Présentons d'abord quelques remarques :

1° Naturellement, les nombres (20) et (21) doivent être réels, c'est-à-dire qu'on doit avoir $u \leqq 1 : \sqrt{3}$, ce qu'on savait être nécessaire *a priori* (approximation d'Hermite).

2° La différence entre les deux mêmes nombres est $\sqrt{1-3u^2} : u$; si elle est $\geqq 1$, c'est-à-dire *si* $u \leqq \frac{1}{2}$, *la condition ci-dessus est sûrement remplie, et* $p : q$ *est donc sûrement une fraction d'Hermite.*

3° Reste donc le cas où

$$\frac{1}{2} < u \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Je dis qu'alors les nombres (20) et (21) ne peuvent comprendre entre eux d'autre entier que 1.

En effet, les deux quantités $(1 + u \pm \sqrt{1-3u^2}) : 2u$ sont positives pour $u$ compris entre $1 : 2$ et $1 : \sqrt{3}$; le *minimum* de celle qui correspond au signe $-$ et le *maximum* de celle qui correspond au signe $+$ ont lieu, dans cet intervalle, pour $u = 1 : 2$, et sont respectivement 1 et 2. Comme $q'_0 : q$ est $> 0$ et $< 1$, par définition de $q'_0$, il en résulte que le nombre (20) est supérieur à zéro et le nombre (21) inférieur à 2, ce qui établit la proposition.

Exprimons donc que les deux nombres comprennent 1; nous trouvons, sans difficulté, les inégalités

$$(22) \qquad \begin{cases} \sqrt{1-3u^2} > -2u\dfrac{q'_0}{q} - u + 1, \\ \sqrt{1-3u^2} > \phantom{-}2u\dfrac{q'_0}{q} + u - 1. \end{cases}$$

Les seconds membres étant égaux et de signes contraires, les inégalités (22) se résument en celle-ci :

$$(\sqrt{1-3u^2})^2 > \left(2u\frac{q'_0}{q} + u - 1\right)^2,$$

qui, après développement et division par le facteur positif $u$, s'écrit

$$(23) \qquad u < \frac{q(q+2q'_0)}{2(q^2+qq'_0+q'^2_0)}.$$

Ainsi $p:q$, pour $u \leqq 1:2$, est toujours fraction d'Hermite; pour $\frac{1}{2} < u \leqq 1:\sqrt{3}$, elle le sera seulement si (23) est satisfaite.

Mais on voit de suite, en s'appuyant sur $q'_0 < q$, que le second membre de (23) est *supérieur* à $1:2$; il en résulte que (23) est satisfaite d'elle-même lorsque $u$ est $\leqq 1:2$. On peut donc dire que la condition (23), jointe à $u \leqq 1:\sqrt{3}$, est la condition nécessaire et suffisante pour que $p:q$ soit fraction d'Hermite.

On peut même ajouter que (23) entraîne $u \leqq 1:\sqrt{3}$; je dis en effet que le second membre de (23) est *inférieur* à $1:\sqrt{3}$, c'est-à-dire qu'on a

$$2q_0'^2 + 2qq'_0(1-\sqrt{3}) + q^2(2-\sqrt{3}) > 0,$$

ce qui a lieu, le premier membre étant un carré (1).

Donc enfin :

Règle. — *L'inégalité* (23) *est la seule condition nécessaire et suffisante pour que la fraction irréductible* $p:q$ *soit de la suite d'Hermite, pour le nombre* $\omega$ (2).

Rappelons que $u = \varepsilon q(p - q\omega)$, $\varepsilon$ étant $\pm 1$, choisi de manière que $u$ soit positif; et que $q'_0$ est *la plus petite solution positive* de la congruence $pq'_0 \equiv \varepsilon \pmod{q}$.

### Comparaison avec la suite des réduites.

**15.** La condition nécessaire et suffisante (unique) pour qu'une fraction irréductible, $p:q$, soit une *réduite* de $\omega$, dans le développe-

(1) Si $p:q$ est fraction d'Hermite, on sait que $u$ est compris entre 0 et $1:\sqrt{3}$; ces deux limites peuvent-elles être atteintes par $u$?

D'abord $u = 0$ exigerait $p - q\omega = 0$, donc $\omega$ rationnel.

Ensuite, $u = 1:\sqrt{3}$ ne pourrait être atteint, en vertu de (23), que si

$$2q_0'^2 + 2qq'_0(1-\sqrt{3}) + q^2(2-\sqrt{3}) < 0,$$

ce qui est impossible, en vertu du texte ci-dessus.

(2) On vérifierait aisément que (23) exprime que $\omega$ est compris entre la plus petite et la plus grande des abscisses qui correspondent aux *sommets* des domaines modulaires de pointe $p:q$.

ment de $\omega$ en fraction continue ordinaire, est bien connue ([1]) depuis Lagrange et peut recevoir la forme suivante :

Soit toujours posé

$$u = \varepsilon q(p - q\omega) \qquad (\varepsilon = \pm 1 \text{ et } u > 0);$$

$q'_0$ désignant encore la plus petite solution positive de la congruence $pq'_0 \equiv \varepsilon \pmod q$, la condition considérée s'écrit

$$u < \frac{q}{q + q'_0}. \tag{24}$$

Or il est remarquable que le second membre de (24) est toujours *supérieur* à celui de (23) : l'inégalité

$$\frac{q(q + 2q'_0)}{2(q^2 + qq'_0 + q'^2_0)} < \frac{q}{q + q'_0}$$

revient en effet à la suivante, $qq'_0 < q^2$, qui est satisfaite, puisque

$$q'_0 < q.$$

Il suit de là que, si $u$ vérifie (23), il vérifie *a fortiori* (24), c'est-à-dire que :

*Toute fraction d'Hermite pour $\omega$ est une réduite ordinaire de $\omega$.*

**16.** La *réciproque* n'est pas vraie, car (24) n'entraîne pas (23). Toutefois, si $u \leqq 1 : 2$, on a vu plus haut (n° **14**, 2°) que $p : q$ (réduite de $\omega$ ou non) est sûrement une fraction d'Hermite. Or $u \leqq \frac{1}{2}$ s'écrit

$$\left|\frac{p}{q} - \omega\right| \leqq \frac{1}{2q^2}.$$

Supposons que $p : q$ soit une réduite; cette inégalité est sûrement vérifiée si le *quotient incomplet* qui suit $p : q$ dans la fraction continue donnant $\omega$, c'est-à-dire celui auquel on s'est arrêté (*exclusivement*) pour calculer la réduite $p : q$, est égal ou supérieur à 2 (propriété classique des réduites); donc :

---

([1]) *Voir* LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, t. I, n° 9, p. 25; SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I, p. 19. Il y a peut-être un peu d'incertitude dans les démonstrations données par ces deux auteurs, mais le résultat est exact.

*Si, dans la fraction continue représentant $\omega$, un quotient incomplet est supérieur à 1, la réduite qui le précède (c'est-à-dire qui est arrêtée à ce quotient exclus) est sûrement une fraction d'Hermite.*

Reste donc seulement le cas d'une réduite arrêtée à un quotient incomplet 1 (exclus); il faut alors, pour reconnaître si elle est ou non fraction d'Hermite, avoir recours à la condition fondamentale (23).

Il peut ainsi arriver qu'une telle réduite, $p : q$, quoique vérifiant l'inégalité d'Hermite

$$\left|\frac{p}{q} - \omega\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}\, q^2}$$

ne soit pas fraction d'Hermite.

**17.** *Remarque.* — Supposons toujours que $p : q$ soit une réduite de $\omega$ : les entiers $p'_0$ et $q'_0$ introduits au n° **13** ont alors une signification arithmétique simple.

Soit, en effet, $p' : q'$ *la réduite de $\omega$ qui précède $p : q$*; on sait que $\omega$ est compris entre $p' : q'$ et $p : q$, c'est-à-dire que $\frac{p}{q} - \omega$ et $\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}$ sont de même signe, donc aussi $p - q\omega$ et $pq' - qp'$. Mais $p - q\omega$ a le signe de $\varepsilon$; d'autre part $pq' - qp'$ étant $\pm 1$, par une propriété classique des réduites, il s'ensuit que

$$pq' - qp' = \varepsilon.$$

Et comme $q'$ est $> 0$ et $< q$, on en conclut $q'_0 = q'$ et $p'_0 = p'$, par définition même de $q'_0$ et $p'_0$. Ainsi :

*Quand $p : q$ est une réduite de $\omega$, les $p'_0$ et $q'_0$ du n° **13** sont le numérateur et le dénominateur de la réduite précédente.*

La condition (23), qui exprime que $p : q$ est fraction d'Hermite, peut alors s'écrire autrement.

Soient

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x}}},$$

$$x = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cdots}, \qquad \frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}.$$

On a

$$\omega = \frac{px + p'_0}{qx + q'_0}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{u} = x + \frac{q'_0}{q},$$

et (23) prend la forme

$$x > \frac{2q + q'_0}{q + 2q'_0}, \tag{25}$$

$p'_0 : q'_0$ étant la réduite de $\omega$ qui précède $p : q$.

### Suite d'Hermite.

**18.** C'est la suite, S, des fractions d'Hermite, dans l'ordre où elles se présentent quand on les trouve en parcourant la demi-droite $x = \omega$ de $\infty$ à $\omega$.

Tous les termes de S figurent dans la suite, $S_0$, des réduites de $\omega$ (n° **15**).

De plus, dans S (n° **10**), comme dans $S_0$, les dénominateurs des termes successifs vont en croissant : donc, on passera de $S_0$ à S en supprimant, dans $S_0$, certaines réduites, et l'on obtiendra ainsi S, *ordre des termes compris*.

D'après le n° **16**, les réduites à supprimer ainsi ne peuvent être prises *que parmi celles* qui précèdent un quotient incomplet égal à 1; et, pour qu'une de ces dernières soit à conserver, il suffit que soit vérifiée par elle l'inégalité (23), ou son équivalente (25).

On pourra même rejeter de suite les réduites (précédant le quotient incomplet 1) pour lesquelles $u$ serait supérieur à $1 : \sqrt{3}$.

**19.** Théorème. — *On n'aura jamais à supprimer, dans la suite des réduites, deux réduites consécutives.*

Soient quatre réduites consécutives

$$\frac{p'_0}{q'_0}, \quad \frac{p}{q}, \quad \frac{p'}{q'}, \quad \frac{P}{Q};$$

supposons qu'on ait à supprimer les deux du milieu. Alors, les quotients incomplets suivants étant 1, on aurait, par la formule classique des réduites,

$$p' = p + p'_0, \qquad P = p' + p = 2p + p'_0;$$
$$q' = q + q'_0, \qquad Q = q' + q = 2q + q'_0.$$

Mais $p'_0 : q'_0$ et $P : Q$ étant maintenant deux fractions *consécutives* d'Hermite, on aurait (nº 5)

$$Pq'_0 - Qp'_0 = \pm 1.$$

Des valeurs ci-dessus de P et Q on déduit, d'autre part,

$$Pq'_0 - Qp'_0 = 2(pq'_0 - qp'_0) = \pm 2$$

(puisque $p'_0 : q'_0$ et $p : q$ sont deux réduites consécutives), ce qui contredit l'équation précédente.

*A fortiori*, on n'aura jamais à supprimer trois, quatre, ... réduites consécutives.

**20.** *Cas où* $\omega$ *est rationnel.* — Toute la théorie faite pour $\omega$ irrationnel s'applique au cas de $\omega$ rationnel (la suite d'Hermite étant alors finie), sauf une exception.

On a admis en effet (Remarque à la fin du nº 5) que la droite $x = \omega$ ne sortait jamais d'un domaine modulaire par un sommet (ce qui est sûrement vérifié quand $\omega$ est irrationnel); pour $\omega$ rationnel, il faudra dès lors exclure le cas où, sur la droite, il y aurait un ou plusieurs *sommets* modulaires. On reconnaîtrait aisément que, dans ce cas d'exception, $\omega$ est de la forme

$$(\varphi) \qquad \omega = \frac{2a - 1}{2c},$$

$a$ et $c$ étant des entiers, de signe quelconque, vérifiant la congruence $a^2 - a + 1 \equiv 0 \pmod{c}$.

**21.** *Exemple.* — Soit $\omega = \frac{445}{992}$, qui *n'est pas* du type ($\varphi$). On trouve, pour la suite des réduites $\left(\text{en la faisant précéder de } \frac{1}{0}\right)$,

$$(S_0) \qquad \frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \underline{\frac{10}{21}},\ \underline{\frac{11}{23}},\ \frac{21}{44},\ \frac{53}{111},\ \frac{445}{992}.$$

On a souligné les réduites qui précèdent le quotient incomplet 1; il s'agit de reconnaître si elles figurent, ou non, dans la suite d'Hermite (S).

Soit d'abord $\frac{10}{21}$. On a

$$u = 21 |10 - 21\omega| = \frac{25 \times 21}{932}.$$

Cette valeur de $u$ est $< \frac{1}{\sqrt{3}}$; néanmoins, la réduite est à supprimer, parce que la condition (23) s'écrit ici

$$\frac{21 \times 25}{932} < \frac{21}{2} \frac{21 + 2 \times 2}{\overline{21}^2 + 2 \times 21 + 2^2},$$

ce qui n'est pas vérifié.

Ainsi $\frac{10}{21}$, bien que donnant, pour $\omega$, l'approximation d'Hermite, est à supprimer.

Il est alors inutile de faire le calcul pour $\frac{11}{23}$, car c'est la réduite *suivante* et l'on ne supprime jamais deux réduites consécutives. La suite d'Hermite est donc

$$\text{(S)} \qquad \frac{1}{0}, \quad \frac{0}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{11}{23}, \quad \frac{21}{44}, \quad \frac{53}{111}, \quad \frac{445}{932}.$$

On vérifie, sur cet exemple, que les fractions d'Hermite ne sont pas toujours alternativement de part et d'autre de $\omega$; car $\frac{1}{2}$ et $\frac{11}{23}$, réduites dont les rangs sont de même parité, ne comprennent pas $\omega$ entre elles.

### Développement hermitien de $\omega$.

**22.** Soit la fraction continue (unique) qui représente $\omega$ :

$$\omega = h_0 + \frac{1}{h_1 + \ddots} \qquad (h_0 \geq 0;\ h_1, h_2, \ldots \geq 1).$$

La première réduite (abstraction faite de $1:0$) est $h_0:1$; si $h_1 = 1$, elle est à supprimer; si $h_1 > 1$, à conserver dans la suite d'Hermite.

En effet, dans celle-ci, la première fraction (après $1:0$) est $\theta_0:1$, où $\theta_0$ désigne l'entier *le plus voisin* de $\omega$, et $\theta_0$ est $h_0$ *ou* $h_0+1$, selon que $|\omega - h_0|$ est inférieur *ou* supérieur à $1:2$. D'autre part, si $h_1 = 1$, il est clair que $|\omega - h_0|$ est supérieur à $\frac{1}{2}$; donc que $\theta_0 = h_0 + 1$; ce qui montre que la réduite $h_0:1$ est à rejeter.

Supposons, plus généralement, que la *première* réduite à supprimer soit celle qui précède $h_n$; alors $h_n = 1$, et l'on peut écrire identiquement :

$$\omega = h_0 + \cfrac{1}{h_1 + \ddots + \cfrac{1}{(h_{n-1}+1) - \cfrac{1}{(h_{n+1}+1) + \cfrac{1}{h_{n+2}+\ddots}}}},$$

car

$$\cfrac{1}{h_{n-1} + \cfrac{1}{h_n + \cfrac{1}{h_{n+1}}}} = \cfrac{1}{(h_{n-1}+1) - \cfrac{1}{(h_{n+1}+1)}}.$$

Continuons à appliquer le même procédé au premier quotient incomplet $1$ qui se présente dans cette nouvelle expression de $\omega$, *et qui ~~précède~~ une réduite à supprimer*, et ainsi de suite; nous obtenons, pour $\omega$, ce que nous appellerons le *développement hermitien :*

$$(26) \qquad \omega = \theta_0 + \cfrac{\varepsilon_1}{\theta_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{\theta_2 + \ddots + \cfrac{\varepsilon_{n-1}}{\theta_{n-1} + \cfrac{\varepsilon_n}{\theta_n + \ddots}}}},$$

les $\varepsilon_i$ étant $\pm 1$, et les $\theta_i$ étant des entiers *supérieurs à* $0$, sauf $\theta_0$, qui peut être nul. De plus, il résulte du mode même de formation de (26), à partir de la fraction continue, que

$$\theta_k \geqq 2 \quad \text{si} \quad \varepsilon_k \textit{ ou } \varepsilon_{k+1} = -1;$$
$$\theta_k \geqq 3 \quad \text{si} \quad \varepsilon_k \textit{ et } \varepsilon_{k+1} = -1.$$

Quant à $\theta_0$, il est $\geqq 1$, si $\varepsilon_1 = -1$.

**23.** THÉORÈME. — *Si, dans* (26), *on s'arrête aux quotients incomplets successifs*, c'est-à-dire si l'on forme les fractions

$$\frac{\theta_0}{1}, \quad \theta_0+\frac{\varepsilon_1}{\theta_1}, \quad \theta_0+\cfrac{\varepsilon_1}{\theta_1+\cfrac{\varepsilon_2}{\theta_2}}, \quad \ldots,$$

*on obtient exactement la suite d'Hermite* (sauf le terme initial $1:0$); car, en s'appuyant sur le théorème du n° **19**, on voit de suite que les modifications par lesquelles on passe de la fraction continue au développement hermitien ont eu précisément pour résultat de supprimer les réduites (précédant un quotient incomplet 1) qui ne doivent pas figurer dans la suite d'Hermite.

**24.** *Exemple* [1]. — Soit $\omega=\frac{17}{10}$, qui n'est pas du type ($\varphi$). La fraction continue est

$$\omega=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}.$$

La réduite qui précède le second quotient $h_1=1$ est à supprimer (n° **22**); de là le développement hermitien

$$\omega=2+\cfrac{-1}{3+\cfrac{1}{3}}.$$

**25.** THÉORÈME. — *Les quotients incomplets*, $\theta_k$, *du développement hermitien reproduisent, dans le même ordre, les entiers successifs* $\theta$, *rencontrés aux n*$^{os}$ **8-11**.

---

[1] *Remarque.* — Si, dans la fraction continue qui représente $\omega$, on fait la modification indiquée au n° **22**, à partir du premier quotient incomplet $h_i (i>0)$, égal à 1, en continuant ainsi pour tous les quotients incomplets 1 qui se présentent successivement, on obtient, pour $\omega$, un développement du type (26). Les fractions successives, $p_n : q_n$, que fournit ce développement sont intéressantes.

Sous une autre forme, en effet, si l'on pose $\omega=k_0\pm\frac{1}{\omega_1}$, $k_0$ étant l'entier le plus voisin de $\omega$, et le signe $\pm$ étant choisi de manière que $\omega_1$ soit positif; si de même on pose $\omega_1=k_1\pm\frac{1}{\omega_2}$, et ainsi de suite, le nouveau développement de $\omega$

Soit en effet $p:q$ la fraction obtenue quand on s'arrête, dans (26), au terme $\theta_{n-1}$, *inclus;* soient $p_0:q_0$ et $P:Q$ les fractions précédente et suivante. On a, par une propriété classique des développements tels que (26),

$$P = p\theta_n + \varepsilon_n p_0, \qquad Q = q\theta_n + \varepsilon_n q_0.$$

Comparant aux formules (17), à savoir

$$P = p\theta + \varepsilon\eta p_0, \qquad Q = q\theta + \varepsilon\eta q_0,$$

on en déduit nécessairement (car $pq_0 - qp_0$, égal à $\pm 1$, n'est pas nul)

$$\theta = \theta_n, \qquad \varepsilon_n = \varepsilon\eta.$$

Donc d'abord, les $\theta$ reproduisent les $\theta_n$, ce qu'il s'agissait d'établir; ensuite $\varepsilon_n$ est $+1$, ou $-1$, selon que $p_0:q_0$ et $\omega$ sont, ou ne sont pas, d'un même côté de $p:q$.

---

coïncide avec le développement

$$\omega = k_0 \pm \cfrac{1}{k_1 \pm \cfrac{1}{k_2 \pm \ddots}}$$

qui a été étudié directement par M. Hurwitz (*Acta mathematica*, t. 12).

Par exemple, la fraction continue

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}},$$

donne successivement :

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}, \qquad \omega = 1 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{6}}}.$$

On pourra également consulter, sur des approximations analogues, un Mémoire de M. Minkowski (*Math. Ann.*, t. 54, 1901).

*Nota.* — On peut transformer cette dernière propriété de la manière suivante. On a, toujours en vertu d'une propriété connue des développements tels que (26),

$$pq_0 - qp_0 = (-1)^n \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1},$$

ce qui s'écrit, grâce à (5),

$$\eta = (-1)^n \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}.$$

Par $\varepsilon\eta = \varepsilon_n$, on en tire

$$\varepsilon = (-1)^n \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n;$$

ce qui montre que $\frac{p}{q} - \omega$ a le signe de $(-1)^n \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$. De même, $\frac{p_0}{q_0} - \omega$ a le signe de $(-1)^{n-1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}$. Il s'ensuit que $\varepsilon_n$ est égal à $+1$ quand $\omega$ est entre $p_0 : q_0$ et $p : q$; et à $-1$ dans le cas contraire.

**26.** Corollaire. — Si l'on se reporte à la signification géométrique des $\theta$, donnée au n° **11**, on voit que :

*Le quotient incomplet, $\theta_n$, qui suit la fraction $p : q$ dans le développement* (26) (¹), *jouit de cette propriété que $1 + \theta_n$ est le nombre des domaines modulaires de pointe $p : q$ traversés par la droite $x = \omega$.*

(¹) C'est-à-dire que $p : q$ est la fraction qu'on obtient quand on s'arrête, dans (26), au terme $\theta_{n-1}$ *inclusivement.*