JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

S.-B. KELLEHER

Des limites des zéros d'un polynôme

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 2 (1916), p. 169-171.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1916_7_2__169_0>

Des limites des zéros d'un polynome;

PAR S.-B. KELLEHER,

Trinity College, Dublin.

I. Soit $1+a_1z+\ldots+a_nz^n$ un polynome dont les coefficients peuvent être réels ou imaginaires.

Si l'on pose

$$\frac{1}{1+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n}=A_0+A_1z+\ldots+A_pz^p+\frac{R}{1+a_1z+\ldots+a_nz^n},$$

où p est un nombre entier $> 2n$, on trouve

$$\begin{aligned}
0 &= -1+A_0,\\
0 &= \qquad A_0a_1 \quad +A_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0 &= \qquad A_0a_{q-1}+A_1a_{q-2}+\ldots+A_{q-2}a_1+A_{q-1},\\
0 &= A_q+A_0a_q \quad +A_1a_{q-1}+\ldots+A_{q-2}a_2+A_{q-1}a_1,
\end{aligned}$$

où les coefficients $a_q, \ldots$ sont nuls pour $q > n$.

Donc

$$A_q=(-1)^q\begin{vmatrix}
a_1 & 1 & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\
a_2 & a_1 & 1 & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\
a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ddots & \cdot\cdot & \cdot\cdot\\
a_{q-1} & a_{q-2} & \cdot\cdot & \cdots & a_1 & 1\\
a_q & a_{q-1} & \cdot\cdot & \cdots & a_2 & a_1
\end{vmatrix},$$

$$-R=z^{p+1}(A_pa_1+A_{p-1}a_2+\ldots+A_{p-n+1}a_n)+\ldots+z^{p+n}A_pa_n.$$

Par le théorème de M. Hadamard sur la limite supérieure d'un déterminant

$$|A_q| \gt \alpha(1+|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{q-n-1}{2}} \qquad \text{pour} \qquad q>n,$$

où

$$\alpha = [\;(1+|a_1|^2)(1+|a_1|^2+|a_2|^2)\ldots \times(1+|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)(|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)]^{\frac{1}{2}};$$

donc si

$$|z| < \frac{1}{(1+|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on a

$$|R| \gt \frac{n(n+1)}{1.2}\alpha\beta(1+|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{p-n-1}{2}}|z|^{p+1},$$

où β est la plus grande des quantités $|a_1|$, $|a_2|$, $\ldots$, $|a_n|$.

$|R|$ peut donc devenir aussi petit que nous voulons en prenant p assez grand. On a aussi

$$|A_0+A_1z+\ldots+A_pz^p| \gt |A_0|+|A_1||z|+\ldots+|A_n||z^n| + \alpha|z|^{n+1}\frac{1-\left[|z|(1+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{p-n}}{1-\;|z|(1+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$|A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_pz^p|$ est donc borné.

Mais on a identiquement

$$1-R=(1+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n)(A_0+A_1z+\ldots+A_pz^p),$$

donc

$$|1-R|=|1+a_1z+\ldots+a_nz^n||A_0+A_1z+\ldots+A_pz^p|;$$

mais

$$|1-R| > 1-|R| > 0 \qquad \text{pour} \qquad |z| < \frac{1}{(1+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et $|A_0+A_1z+\ldots+A_pz^p|$ ne peut devenir infini; donc

$$|1+a_1z+\ldots+a_nz^n$$

ne peut devenir nul pour

$$|z| < \frac{1}{(1+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

II. En posant $z' = \frac{1}{z}$ dans le polynome $1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, on obtient le polynome

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} z' + \frac{a_{n-2}}{a_n} z'^2 + \ldots + \frac{1}{a_n} z'^n$$

qui ne peut devenir nul pour

$$|z'| < \frac{|a_n|}{(1 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le polynome

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

n'a donc pas de zéros à l'extérieur du cercle de rayon

$$\frac{(1 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{|a_n|}.$$

III. Le même raisonnement montre que la fonction entière

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + \text{ad. inf.}$$

n'a pas de zéros à l'intérieur du cercle de rayon

$$\frac{1}{(1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + \text{ad. inf.})^{\frac{1}{2}}}$$

si la série $1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots +$ ad. inf. est convergente.