JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Remarques sur certaines suites d'approximation

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 2 (1916), p. 155-167.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1916_7_2__155_0>

Remarques sur certaines suites d'approximation;

Par G. HUMBERT ([1]).

1. *But du travail.* — Soient ω une irrationnelle positive et ν un nombre donné, au moins égal à 2 : nous dirons qu'une fraction irréductible, $p : q$, est, pour ω, une fraction (ν) si l'on a

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\nu q^2}. \tag{1}$$

On sait, puisque $\nu \geqq 2$, que toute fraction (ν) est une réduite ordinaire de ω; on trouvera donc les fractions (ν) en supprimant, dans la suite, S_0, des réduites successives, celles, $p : q$, qui ne satisfont pas à (1) : il restera alors une suite, que nous appellerons S_ν, et qui contiendra toutes les fractions (ν), rangées dans l'ordre des dénominateurs croissants. Mais rien ne prouve que S_ν existe, ni, surtout, que S_ν soit une suite *infinie*.

M. Hurwitz a établi ([2]), et le résultat est aujourd'hui classique, que S_ν existe toujours, et est infinie, pour $\nu = \sqrt{5}$: quelle que soit la simplicité de la démonstration de M. Hurwitz, on peut donner, de son théorème, une démonstration plus simple encore, et c'est là le premier objet du présent travail.

M. Hurwitz a montré ensuite (*Ibid.*), en s'appuyant sur une belle proposition de M. Markoff, que, si l'on excepte l'irrationnelle $\alpha = (1 + \sqrt{5}) : 2$, et celles qui équivalent modulairement à α ou à $-\alpha$, la suite répondant à $\nu = \sqrt{8}$ est une suite infinie pour toute irration-

([1]) Nous renverrons aux deux Mémoires qui précèdent par les chiffres I et II.
([2]) *Math. Ann.*, t. XXXIX, 1891, p. 279.

nelle : nous établirons également ce fait, d'une manière directe et élémentaire.

Puis, après avoir présenté quelques remarques sur la formation des suites S_2 et $S_{\sqrt{5}}$, nous montrerons que, quel que soit ν, la suite S_ν, si elle existe, possède, *pour un nombre quadratique*, ω, une sorte de périodicité; nous déduirons de là le théorème de M. Markoff; nous exprimerons enfin, d'une manière simple, la condition nécessaire et suffisante pour que ω admette une suite S_ν infinie.

2. *Premier théorème de M. Hurwitz.* — Je dis d'abord que, pour passer de S_0 à $S_{\sqrt{5}}$, on n'a *jamais* à supprimer *trois* réduites consécutives.

En premier lieu, il est clair que les réduites à supprimer sont parmi celles qui précèdent un des quotients incomplets 1 ou 2; supposons ensuite qu'on doive supprimer les réduites successives $p_0 : q_0$; $p_1 : q_1$; $p_2 : q_2$; c'est-à-dire qu'on ait

$$\left|\omega - \frac{p_0}{q_0}\right| \geqq \frac{1}{q_0^2\sqrt{5}}; \quad \left|\frac{p_1}{q_1} - \omega\right| \geqq \frac{1}{q_1^2\sqrt{5}}; \quad \left|\omega - \frac{p_2}{q_2}\right| \geqq \frac{1}{q_2^2\sqrt{5}}.$$

Ajoutant les deux premières inégalités membre à membre, et observant que ω est entre $p_0 : q_0$ et $p_1 : q_1$, on a, puisque $p_0q_1 - p_1q_0 = \pm 1$,

$$\frac{1}{q_0q_1} \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q_0^2} + \frac{1}{q_1^2}\right),$$

ce qu'on écrit

$$(2) \qquad q_1^2 - \sqrt{5}\,q_1q_0 + q_0^2 \leqq 0 \quad \text{et, de même,} \quad q_2^2 - \sqrt{5}\,q_2q_1 + q_1^2 \leqq 0.$$

Comme d'autre part $q_0 < q_1 < q_2$, et que l'équation $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ a une racine entre 0 et 1, et une autre entre 1 et ∞, on tire de (2)

$$(3) \qquad \frac{q_1}{q_0} \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \frac{q_2}{q_1} \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Enfin, si h_1 est le quotient incomplet qui suit $p_1 : q_1$, on a $q_2 = h_1q_1 + q_0$, et la dernière inégalité (3) s'écrit

$$h_1 + \frac{q_0}{q_1} \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Par hypothèse, $h_1 = 1$ ou 2; or $h_1 = 2$ est impossible, le second membre étant < 2; donc $h_1 = 1$, et il reste

$$\frac{q_0}{q_1} \leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{q_1}{q_0} \geqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Cela contredit la première inégalité (3), car le signe $=$ ne peut convenir, q_1 et q_0 étant entiers.

Donc, si $\nu = \sqrt{5}$, on ne supprime *jamais* trois réduites consécutives dans S_0, c'est-à-dire que, sur trois réduites consécutives, l'une au moins est une fraction $(\sqrt{5})$.

Corollaire I. — La suite $S_{\sqrt{5}}$ est dès lors infinie; *c'est le théorème de M. Hurwitz.*

Corollaire II. — Si l'on a à supprimer $p_1 : q_1$ et $p_2 : q_2$, réduites consécutives, il résulte de l'analyse précédente que $h_1 = 1$: donc, si deux réduites consécutives ne sont pas fractions $(\sqrt{5})$, le quotient incomplet qui suit la *première* est 1.

3. *Remarque.* — Si l'on reprend les calculs précédents en écrivant ν, au lieu de $\sqrt{5}$, les inégalités (3) deviennent

$$(4) \qquad \frac{q_1}{q_0} \leqq \mu; \qquad \frac{q_2}{q_1} \leqq \mu; \qquad \text{où} \qquad \mu = \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 - 4}}{2};$$

de la seconde on tire

$$h_1 + \frac{q_0}{q_1} \leqq \mu.$$

Si $\mu < 2$, c'est-à-dire si $\nu < \frac{5}{2}$, on reconnaît encore que h_1 (qui est 1 ou 2, d'après cette valeur de ν) est nécessairement 1; alors, $q_1 : q_0 \geqq 1 : (\mu - 1)$; mais il n'y a contradiction avec la première (4) que si $1 : (\mu - 1) \leqq \mu$, d'où l'on tire aisément $\nu \leqq \sqrt{5}$.

La démonstration ne s'applique donc pas à un nombre $\nu > \sqrt{5}$; elle explique l'intervention du nombre $\sqrt{5}$ dans la question.

4. *Second théorème de M. Hurwitz.* — Soit $\nu = \sqrt{8}$. Les réduites à supprimer dans S_0 sont toujours (puisque $\nu < 3$) parmi celles qui

précèdent un des quotients incomplets 1 ou 2; je dis que, si l'on a supprimé k réduites consécutives ($k \geqq 3$), et si l'on choisit d'une manière quelconque *trois réduites consécutives* parmi ces k, celle du milieu précède nécessairement le quotient incomplet 1.

Supposons supprimées les trois réduites consécutives $p_0 : q_0$; $p_1 : q_1$ et $p_2 : q_2$; tout revient à établir que $h_1 = 1$, avec les notations précédentes.

On a, par les mêmes calculs qu'au n° **2**,

$$(5) \qquad \frac{q_1}{q_0} \leqq \frac{\sqrt{8}+2}{2} = 1+\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{q_2}{q_1} \leqq 1+\sqrt{2}.$$

De la seconde on tire encore

$$h_1 + \frac{q_0}{q_1} \leqq 1+\sqrt{2}.$$

Mais $h_1 = 1$ ou 2; si $h_1 = 2$, on aurait

$$\frac{q_0}{q_1} \leqq (\sqrt{2}-1),$$

ou

$$\frac{q_1}{q_0} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1+\sqrt{2}$$

d'où contradiction avec la première (5). Donc $h_1 = 1$. C. Q. F. D.

Nota. — La démonstration ne s'applique pas pour $\nu^2 > 8$; car, en gardant les notations du n° **3**, la contradiction n'existe que si

$$1 : (\mu - 2) \geqq \mu, \qquad \text{d'où} \qquad \mu \leqq 1+\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \nu \leqq 2\sqrt{2}.$$

5. *Corollaire.* — Si, dans la fraction continue ω, les quotients incomplets sont, à partir d'un certain rang, tous égaux à 1, ω équivaut modulairement à α ou à $-\alpha$, en désignant par α la fraction $1 + \cfrac{1}{1+\ddots}$, et $\alpha = (1+\sqrt{5}) : 2$.

En tout autre cas, il y a, dans la fraction, *une infinité* de quotients incomplets au moins égaux à 2, et il résulte alors du numéro précédent que *toutes* les réduites de ω ne pourront pas être supprimées, dans le passage à $S_{\sqrt{8}}$, à partir d'un rang fini donné, *d'ailleurs quelconque*. Sous une autre forme, la suite $S_{\sqrt{8}}$ est infinie pour une irrationnelle ω, non équivalente modulairement à α ou à $-\alpha$; *c'est le second théorème de M. Hurwitz.*

6. *Suite de Minkowski* (¹). — C'est S_2. On établit comme au n° **2** que, pour passer de S_0 à S_2, on n'a jamais à supprimer *deux* réduites consécutives de ω. D'autre part, les réduites à supprimer ne peuvent être (puisque $\nu = 2$) que parmi celles qui précèdent le quotient incomplet 1, et de là résulte un développement de ω en fraction continuelle, par le procédé indiqué (I, n° **22**) pour déduire le développement hermitien de la fraction continue :

$$\omega = \theta_0 + \cfrac{\varepsilon_1}{\theta_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{\theta_2 + \dots}} \qquad (\varepsilon_i = \pm 1).$$

Ce développement coïncide avec celui que Minkowski obtient directement ; les fractions successives qu'il fournit donnent, dans leur ordre, les termes de S_2.

7. *Remarques sur les suites* $S_{\sqrt{5}}$ *et* S_2. — De ce qui précède résulte aisément un procédé pour former chacune de ces deux suites à partir de ses deux premiers termes.

Il suffit d'observer que, si l'on connaît deux réduites consécutives $p_1 : q_1$ et $p : q$, de ω, la réduite suivante est $(p\theta + p') : (q\theta + q')$, en désignant par θ l'entier maximum contenu dans le quotient complet $(p' - q'\omega) : (q\omega - p)$.

Soient alors $p_0 : q_0$ et $p : q$ deux termes consécutifs de $S_{\sqrt{5}}$; on reconnaît facilement (²) que la *réduite* $p' : q'$, de ω, qui précède $p : q$, est donnée par les formules suivantes, où l'on a posé

$$a = |pq_0 - qp_0| :$$

(¹) *Math. Ann.*, t. LIV, 1901, p. 91-124.

(²) On suppose successivement que, entre $p_0 : q_0$ et $p : q$, il y a eu 1, 0 ou 2 réduites supprimées, lesquelles précèdent alors des quotients incomplets 1 ou 2. De là les trois cas à distinguer. On utilisera le corollaire II du n° **2** ci-dessus.

1° Si $\left(\omega-\frac{p}{q}\right)\left(\omega-\frac{p_0}{q_0}\right)>0$, on aura

$$p'=\frac{p-p_0}{a},\qquad q'=\frac{q-q_0}{a}\qquad \text{et nécessairement}\qquad a=1 \text{ ou } 2;$$

2° Si $\left(\omega-\frac{p}{q}\right)\left(\omega-\frac{p_0}{q_0}\right)<0$ et $a=1$, on aura

$$p'=p_0,\qquad q'=q_0;$$

3° Si $\left(\omega-\frac{p}{q}\right)\left(\omega-\frac{p_0}{q_0}\right)<0$ et $a>1$, on aura

$$p'=\frac{p-(a-1)p_0}{a},\qquad q'=\frac{q-(a-1)q_0}{a}\qquad \text{et}\qquad a=2 \text{ ou } 3.$$

On a ainsi p' et q', sans avoir de *congruence* à résoudre.

Il ne restera qu'à former (au plus) les *trois* réduites de ω qui suivent $p:q$, et la première d'entre elles qui sera une fraction $(\sqrt{5})$ sera le terme de $S_{\sqrt{5}}$ venant après $p:q$.

Pour la suite S_2, avec les mêmes notations :

1° Si $\left(\omega-\frac{p}{q}\right)\left(\omega-\frac{p_0}{q_0}\right)<0$, on aura

$$p'=p_0,\qquad q'=q_0;$$

2° Si $\left(\omega-\frac{p}{q}\right)\left(\omega-\frac{p_0}{q_0}\right)>0$, on aura

$$p'=p-p_0,\qquad q'=q-q_0,$$

et il ne restera qu'à former (au plus) les *deux* réduites qui suivent $p:q$; la première qui sera une fraction (2) donnera le terme suivant de S_2. Cette règle, pour S_2, revient à celle de Minkowski.

8. *Cas de ω quadratique.* — Nous allons, dans ce cas, mettre en évidence une sorte de *périodicité* de la suite S_ν, quel que soit ν.

Voici comment on peut poser la question :

Soit l'irrationnelle (positive)

$$\omega=\frac{-b+\eta\sqrt{D}}{a}\qquad(\eta=\pm 1),$$

racine de la forme quadratique (a, b, c) à coefficients entiers et de déterminant D. La fraction continue qui représente ω est périodique : cette périodicité se manifeste directement dans la suite des quotients incomplets; dans la suite des réduites elles-mêmes, elle se manifeste *indirectement* de la manière suivante :

Soit $p : q$ une réduite, arrêtée à un certain quotient incomplet d'une période; celle, $p_1 : q_1$, arrêtée au même quotient (de même rang) de la période suivante sera dite sa première *homologue*, et l'on définit de même les *homologues* successives, $p_2 : q_2 ; \ldots, p_m : q_m$; or on a vu (II, nos **23** et **40**) que $p_1 : q_1$ se déduit de $p : q$ par une substitution linéaire fixe, Σ, qui ne dépend que de ω, et l'on a donné [II, n° **40**, éq. (22)] l'expression de $p_m : q_m$ en fonction de $p : q$, déduite de la relation symbolique

$$\frac{p_m}{q_m} = \frac{p}{q} \Sigma^m.$$

On peut dès lors se demander si une périodicité de cette nature se manifeste dans la suite S_ν; la réponse est affirmative et résulte aisément des formules du Mémoire II.

9. Soient, avec les notations de II (n° **40**), $p'_m : q'_m$ la réduite de ω qui précède $p_m : q_m$; z le quotient complet qui suit $p_m : q_m$ (*et c'est aussi celui qui suit* $p : q$); on a

$$\omega = \frac{p_m z + p'_m}{q_m z + q'_m},$$

et la condition pour que $p_m : q_m$ soit une fraction (ν) s'écrit

$$\left| \frac{p_m z + p'_m}{q_m z + q'_m} - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{1}{\nu q_m^2},$$

ou, puisque $| p_m q'_m - q_m p'_m | = 1$,

$$\frac{q'_m}{q_m} > \nu - z. \tag{6}$$

Or on a vu (II, n° **40**) que, lorsque m tend vers $+\infty$, le premier membre de (6) tend vers $-z'$, en désignant par z' l'irrationnelle quadratique conjuguée de z, de sorte qu'il y a à distinguer trois cas :

1° $-z' > \nu - z$. — Alors (6) est vérifiée dès que m dépasse une certaine limite, c'est-à-dire que les réduites homologues successives de $p:q$ *finissent* par être toutes des fractions (ν).

2° $-z' < \nu - z$. — Ces réduites *finissent* par n'être jamais des fractions (ν).

3° $-z' = \nu - z$. — L'inégalité (6) se trouve remplacée, en vertu des calculs de II (n° **40**), par l'inégalité (28) de ce numéro, ramenée elle-même à l'inégalité (30). De là, en désignant par $p':q'$ la réduite qui précède $p:q$, les *deux sous-cas :*

1° ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$; les $p_m : q_m$ *finissent* par être, ou ne pas être, des fractions (ν) selon que

$$\eta a(pq' - qp') > 0 \quad \text{ou} \quad \eta a(pq' - qp') < 0;$$

2° ω équivaut à $-\omega$; l'inégalité nécessaire et suffisante pour que $p_m : q_m$ soit fraction (ν) est

$$\eta a(pq' - qp')\,(-1)^m > 0;$$

donc, de deux réduites homologues consécutives, l'une est fraction (ν) et l'autre ne l'est pas.

10. En utilisant

$$(6\ bis) \qquad \omega = (pz + p') : (qz + q')$$

et l'équation analogue en ω', z' (ω' conjuguée de ω), on met l'inégalité $-z' > \nu - z$, ou $z - z' > \nu$, sous la forme

$$(7) \qquad \frac{2\eta\sqrt{D}\,(pq' - qp')}{ap^2 + 2bpq + cq^2} > \nu.$$

On peut simplifier, car le premier membre est, par formation, $z - z'$; d'autre part, z est une fraction périodique simple, d'après sa définition même, et $z > 1$; en sorte que, par un résultat classique, z' est entre 0 et -1, et $z - z'$ est positif. On pourra donc remplacer le premier membre de (7) par sa valeur absolue, et écrire, puisque $pq' - qp' = \pm 1$,

$$(7\ bis) \qquad \frac{2\sqrt{D}}{|ap^2 + 2bpq + cq^2|} > \nu.$$

Cela posé, voici dès lors le *résultat final.*

Soit $\omega = (-b + \eta\sqrt{D}) : a$, avec $\eta = \pm 1$, une racine positive de la forme (a, b, c); soient

$$(8) \qquad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_\rho}{q_\rho}$$

les réduites de ω précédant les quotients incomplets qui forment une période (minima) de la fraction continue ω; supposons aussi que la réduite $p_0 : q_0$, qui vient avant $p_1 : q_1$, précède également un quotient de la partie périodique.

Nous supprimerons, dans la suite finie (8), *certains termes, selon la loi suivante :*

La réduite $p_i : q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \rho)$ *sera conservée* ou *supprimée* selon qu'on aura

$$(9) \qquad \frac{2\sqrt{D}}{|ap_i^2 + 2bp_iq_i + cq_i^2|} > \nu \quad \text{ou} \quad < \nu.$$

Si, au lieu de l'un des signes $>$ *ou* $<$, *on a le signe* $=$, *la réduite* $p_i : q_i$ *sera conservée* ou *supprimée* selon qu'on aura

$$\eta a(p_iq_{i-1} - q_ip_{i-1}) > 0 \quad \text{ou} \quad < 0.$$

Toutefois, si le signe $=$ se présente pour au moins une valeur de i, *et* si ω équivaut modulairement à $-\omega$, il faudra doubler la série (8) en y ajoutant les réduites de la période suivante, et opérer sur la série doublée comme sur (8).

Soient alors

$$(10) \qquad \frac{p'_1}{q'_1}, \quad \frac{p'_2}{q'_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p'_r}{q'_r}$$

les termes conservés dans la suite (8), *doublée au besoin, selon les règles ci-dessus ; si l'on désigne toujours par* Σ *la substitution linéaire définie* II, n° **40**, *les termes successifs de la suite* S_ν, *à partir d'un rang fini, seront*

$$\frac{p'_1}{q'_1}\Sigma^m, \quad \ldots, \quad \frac{p'_r}{q'_r}\Sigma^m; \quad \frac{p'_1}{q'_1}\Sigma^{m+1}, \quad \ldots, \quad \frac{p'_r}{q'_r}\Sigma^{m+1}; \quad \frac{p'_1}{q'_1}\Sigma^{m+2}, \quad \ldots$$

c'est-à-dire les transformés des termes (10) *par* Σ^m, Σ^{m+1}, ...

Toutefois, dans le cas où l'on aurait doublé la suite (8), il faudra écrire Σ^2 au lieu de Σ.

De là résulte la *périodicité* de S_ν, dans le sens où nous l'avons entendue.

11. *Corollaire*. — La condition nécessaire et suffisante pour que S_ν existe et soit infinie est que la suite (10) comprenne au moins un terme. On saura donc, ω étant un nombre quadratique donné, reconnaître si une suite *infinie* S_ν existe pour ce nombre, et cela *par un nombre limité d'opérations* (*voir* plus bas, n° **13**).

12. *Théorèmes de M. Markoff*. — 1° Si $\nu = \sqrt{5}$, nous savons que S_ν est infinie pour toute irrationnelle ω; donc, si ω est quadratique, la suite (10) correspondante comprend au moins un terme, c'est-à-dire que l'on a, au moins pour une valeur de i, en vertu de (9),

$$\frac{2\sqrt{D}}{|ap_i^2 + 2bp_iq_i + cq_i^2|} \geqq \sqrt{5}.$$

En d'autres termes, *on peut donner à x, y, dans une forme indéfinie $ax^2 + 2bxy + cy^2$, à coefficients entiers et de déterminant* D, *des valeurs entières rendant la forme inférieure ou égale, en module, à* $2\sqrt{\frac{D}{5}}$.

2° Si $\nu = \sqrt{8}$, nous avons vu que S_ν est infinie, sauf pour les nombres équivalents à $\pm\alpha$, où $\alpha = (1 + \sqrt{5}) : 2$. Donc, par le même raisonnement, *on peut donner à x, y, dans une forme indéfinie (a, b, c), non équivalente à la forme $2x^2 - 2xy - 2y^2$, ou à un de ses multiples, des valeurs entières rendant (a, b, c) au plus égale, en module, à* $2\sqrt{\frac{D}{8}}$.

Ces théorèmes, énoncés sans démonstration par Korkine et Zolotareff [1], ont été établis et généralisés par M. Markoff [2].

---

(1) *Math. Ann.*, t. VI, 1873, p. 369.
(2) *Ibid.*, t. XV, 1879, p. 382.

13. *Autre point de vue.* — La condition nécessaire et suffisante pour que ω admette une suite infinie, S_ν, peut être présentée autrement.

Pour préciser, supposons que ω soit la *première* racine de la forme (a, b, c), c'est-à-dire que $\eta = -1$. On sait que les z et z' du n° **9**, ou $-z$ et $-z'$, sont les racines d'une *réduite de Gauss* (A, B, C), équivalente à (a, b, c) : nous entendons par réduites de Gauss celles même définies dans les *Disquisitiones*, mais en appelant première racine $(-B-\sqrt{D}):A$.

Il résulte alors du n° **9** que :

La condition nécessaire et suffisante pour que ω, *positif et première racine de la forme* (a, b, c), *de déterminant* D, *admette une suite* S_ν *infinie, est que, parmi les réduites de Gauss* (A, B, C), *équivalentes à* (a, b, c), *il en existe une, au moins, dont les racines aient une différence supérieure ou égale (en valeur absolue) à* ν, *c'est-à-dire telle que* $2\sqrt{D} \geqq |A|\nu$.

Toutefois (n° **9**, 3°) lorsque ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$, si, pour aucune des réduites (A, B, C), on n'a $2\sqrt{D} > |A|\nu$, mais si seulement $2\sqrt{D} = |A|\nu$ pour certaines d'entre elles, il y a une *condition supplémentaire* à ajouter, celle exprimée par $\eta a(pq'-qp') > 0$. On peut la transformer ainsi :

Soit (A, B, C) une réduite pour laquelle $2\sqrt{D} = |A|\nu$; ses racines sont z et z', ou $-z$ et $-z'$. Comme, dans les réduites de Gauss, B est positif, et que d'ailleurs, en vertu de $-1 < z' < 0 < 1 < z$, la somme $z+z'$ est toujours positive, les racines de (A, B, C) sont z et z', ou $-z$ et $-z'$, selon que A est négatif ou positif.

1° $A < 0$. — Par (6 *bis*) ω équivaut à z ou à $-z$, selon que

$$pq'-qp' = +1 \quad \text{ou} \quad -1;$$

on en conclut que z est première racine de (A, B, C) si $pq'-qp'$ est $+1$, seconde, si -1; donc, en général,

$$z = \frac{-B-(pq'-qp')\sqrt{D}}{A}.$$

2° $A > 0$. — C'est $-z$ qui est racine de (A, B, C), et l'on trouve de même

$$-z = \frac{-B + (pq' - qp')\sqrt{D}}{A}.$$

Donc, en général,

$$z = \frac{\pm B - (pq' - qp')\sqrt{D}}{A}.$$

Enfin, si $(\operatorname{sgn} A)$ désigne le signe de A, c'est-à-dire $A : |A|$, on a évidemment, dans tous les cas, puisque $z > z'$,

$$z = \frac{\mp B + (\operatorname{sgn} A)\sqrt{D}}{A};$$

d'où, par comparaison,

$$-(pq' - qp') = (\operatorname{sgn} A).$$

Alors, l'inégalité $\eta a(pq' - qp') > 0$, où $\eta = -1$, s'écrit $a(\operatorname{sgn} A) > 0$, c'est-à-dire que a et A doivent être de même signe.

Donc, quand ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$, si, pour aucune des réduites (A, B, C) équivalentes à (a, b, c), on n'a

$$2\sqrt{D} > |A|\nu.$$

mais si seulement $2\sqrt{D} = |A|\nu$ pour certaines d'entre elles, il faut et il suffit, pour que ω admette une suite S_ν infinie, que, dans l'une au moins de ces dernières, le premier coefficient, A, ait le signe de a.

C'est la *condition supplémentaire cherchée.*

14. *Exemples.* — 1° Soit $\omega = \frac{10 - \sqrt{79}}{3}$; la forme (a, b, c) est $(3, -10, 7)$, et non $(-3, 10, -7)$, puisque ω doit être *première* racine.

Les réduites de Gauss, équivalentes à (a, b, c), sont

$$(-10, 7, 3); \quad (3, 8, -5); \quad (-5, 7, 6); \quad (6, 5, -9); \quad (-9, 4, 7); \quad (7, 3, -10).$$

Pour ces réduites, le maximum, en valeur absolue, de la différence entre les deux racines, est $\frac{2}{3}\sqrt{79}$, et correspond à la *seconde* réduite.

Donc, si ν est inférieur à $\frac{2}{3}\sqrt{79}$, la suite S_ν, pour ω, est infinie.

Si $\nu = \frac{2}{3}\sqrt{79}$, comme ω n'équivaut pas modulairement à $-\omega$, on est dans le cas douteux. Mais ici $a = 3$; et, dans la *seconde* réduite, $A = 3$, en sorte que $Aa > 0$: donc encore, pour ω, S_ν *est infinie*.

Enfin, si $\nu > \frac{2}{3}\sqrt{79}$, il n'y a pas de S_ν infinie pour ω.

2° Soit $\omega = \frac{7+\sqrt{79}}{5}$; (a, b, c) est $(-5, 7, 6)$; les réduites de Gauss équivalentes sont celles ci-dessus. On a les mêmes conclusions respectives que tout à l'heure, pour $\nu \lesseqgtr \frac{2}{3}\sqrt{79}$; mais, si $\nu = \frac{2}{3}\sqrt{79}$, comme $a = -5$ et $A = 3$, on voit que $Aa < 0$; donc S_ν *n'est pas infinie* pour ω.

15. *Corollaire.* — Pour un nombre quadratique, ω, racine de la forme (a, b, c), de déterminant D, les nombres ν, pour lesquels la suite S_ν est infinie, ne dépassent pas $2\sqrt{D} : |A|$, où A est le plus petit, en valeur absolue, parmi les premiers coefficients des réduites de Gauss équivalentes à (a, b, c); si l'on veut, $|A|$ est le *minimum*, en valeur absolue, de la forme (a, b, c).

Remarque. — Il serait aisé de voir qu'on peut, au n° **13**, supprimer la condition que ω soit la *première* racine de (a, b, c); *avec les mêmes énoncés*, ω peut être la seconde.

ERRATUM. — Ce Volume, page 100, ligne 14, *au lieu de* précède, *lire* suit.