

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LOUIS ROCHE

**Sur la surface des ondes dans la polarisation rotatoire magnétique
et dans quelques phénomènes plus généraux**

Journal de mathématiques pures et appliquées 6^e série, tome 10 (1914), p. 1-95.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1914_6_10__1_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la surface des ondes dans la polarisation rotatoire magnétique et dans quelques phénomènes plus généraux;

PAR LOUIS ROCHE.

INTRODUCTION.

Le présent travail a pour point de départ cette phrase de M. Bousinesq ⁽¹⁾, à propos d'une certaine biréfringence spéciale, engendrée dans un corps isotrope transparent par un champ magnétique, et de l'altération qu'elle produit dans la forme circulaire des trajectoires pour des ondes inclinées sur l'axe du champ : « Cette altération, et la double réfraction elliptique spéciale qui en résulte, ne paraissent pas avoir encore été étudiées. »

Cette étude constitue notre première Partie. Elle consiste d'abord à introduire, dans les équations du mouvement, un coefficient ν' représentant cette biréfringence, et à en chercher des solutions du type

⁽¹⁾ *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie analytique de la lumière*, t. II, 1903, p. 481. Paris, Gauthier-Villars. Les renvois à ce Volume seront désignés par II.

classique, modifiées par la présence de ce terme : c'est l'objet d'un premier Chapitre.

Un autre est consacré à l'équation aux vitesses ω de propagation des deux systèmes possibles d'ondes planes, un troisième aux conséquences physiques des résultats, un quatrième à la surface des ondes, généralisant celle de Fresnel, avec des différences qui constituent l'un des points nouveaux de ce travail.

L'altération dont il s'agit concerne l'inégalité créée par le champ magnétique entre les trois coefficients a , b , c , figurant dans les trois équations du mouvement de l'éther, et dont le troisième c , corrélatif à l'axe du champ pris pour Oz , cesse d'être égal aux deux premiers a et b . Cette inégalité, comme l'a remarqué M. Boussinesq ⁽¹⁾, a pour effet de rendre le corps biréfringent à la manière d'un cristal uniaxe, dont l'axe optique ou principal coïnciderait avec la ligne des pôles de l'aimant. C'est ce qui m'a suggéré l'idée d'une généralisation à deux degrés, dont j'ai fait l'objet de deux autres Parties.

L'une, ma deuxième Partie, où $a \neq b \neq c$, avec un seul coefficient ν de dissymétrie, concernerait des cristaux à deux axes, où la biréfringence prépondérante a jusqu'ici empêché d'observer la polarisation rotatoire magnétique, mais où l'on peut espérer la mettre un jour en évidence avec des courants assez puissants.

L'autre, ma troisième Partie, où $a \neq b \neq c$, mais avec trois coefficients ν , ν_1 , ν_2 de dissymétrie dans le sens des axes coordonnés, concernerait des cristaux à deux axes, soumis à un champ magnétique dont la ligne des pôles ne coïnciderait avec aucun des axes principaux. Elle présente le système le plus général d'équations aux dérivées partielles à trois variables, de ce type, et m'a paru offrir, à ce point de vue, un réel intérêt, soit comme représentant un grand nombre de phénomènes encore à découvrir, soit comme conduisant à une forme tout à fait générale et symétrique de surfaces d'ondes, généralisation de celle de Fresnel. Les propriétés de cette dernière, tout à fait distinctes des nôtres, et résultant des travaux de géomètres trop nombreux pour que je puisse les citer ici, ont été réunies et complétées par M. Jules Richard dans sa Thèse (Sorbonne, 1901) ⁽²⁾, où je les ai constamment prises comme termes de comparaison.

⁽¹⁾ II, p. 480.

⁽²⁾ *Sur la surface des ondes de Fresnel*. Châteauroux, P. Langlois et Cie.

J'ai adopté pour ces deux dernières Parties une division en Chapitres de mêmes titres que ceux de la première (Chap. I : Équations du problème; Chap. II : Équation aux vitesses de propagation; Chap. III : Conséquences physiques; Chap. IV : Surface des ondes) dont quelques-uns d'une brièveté qui semblerait les rendre inutiles. Je les ai maintenus afin de conserver entre les trois Parties une symétrie permettant d'y signaler, d'un seul mot, les Chapitres qui les intéressent, à ceux qui me feraient l'honneur de parcourir ce travail, pour y chercher soit des conclusions physiques neuves et à vérifier par l'expérience (Chap. III des trois Parties), soit des développements purement géométriques (Chap. IV des trois Parties).

Toutefois, dans la troisième Partie, j'ai introduit un Chapitre V levant d'un seul coup et pour le cas le plus général la difficulté suivante : L'analyse actuelle suppose les ondes planes latéralement illimitées. Subsistera-t-elle avec un rayon lumineux supposé latéralement limité pour rentrer dans le cas de la réalité? La réponse affirmative a été donnée par M. Boussinesq dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* ⁽¹⁾ pour le cas général $a \neq b \neq c$, mais dans l'hypothèse ordinaire $v = v_1 = v_2 = 0$. L'objet de ce Chapitre est d'étendre la conclusion de ce Mémoire à notre cas général malgré la présence de v , v_1 , v_2 quelconques.

J'ajoute que l'étude des divers cas suggérés par la discussion de la surface des ondes dans la troisième Partie entraînerait à des développements trop nombreux et considérables pour être abordés avant que l'expérience ait montré lesquels de ces cas seront physiquement intéressants.

Je ne veux pas terminer cette Introduction sans un hommage de respectueuse gratitude à mes vénérés maîtres, MM. Boussinesq et Kœnigs. Si je dois au Traité aujourd'hui classique du premier le point de départ et à ses conseils l'interprétation physique de ces recherches, je voudrais mettre un reflet des belles leçons du second dans l'étude géométrique des surfaces auxquelles elles m'ont conduit.

(¹) 6^e série, t. VII, fasc. 3, 1911 (*Contribution à l'optique cristalline*, p. 335 et suiv.).

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

Je rappelle d'abord les notations adoptées par M. Boussinesq :
 ξ, η, ζ représentent les composantes du déplacement vibratoire de
 la molécule d'éther dont les coordonnées d'équilibre sont x, y, z ;
 θ est la dilation cubique

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

Δ_2 représente le paramètre différentiel du second ordre de Lamé

$$\Delta_2 f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2}.$$

Alors le phénomène de la polarisation rotatoire magnétique peut
 être étudié par l'analyse suivante (1).

Dans les équations

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz}, \end{cases}$$

on modifie d'abord les résistances des premiers membres en y intro-
 duisant trois binomes, où d, e, f sont les trois coefficients d'', e'', f'' du
 Mémoire de M. Boussinesq (*Journal de Mathématiques*, 6^e série,

(1) II, p. 476-480.

t. VII, fasc. 3, 1911, p. 326), ce qui donne

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{d}{dt} \Delta_2 (f\eta - e\zeta) = \Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{d}{dt} \Delta_2 (d\zeta - f\xi) = \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{d}{dt} \Delta_2 (e\xi - d\eta) = \Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

Or, dans une première approximation, si l'on faisait $d = e = f = 0$, on aurait (II, p. 272) $\theta = 0$, et par suite

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Delta_2 \xi, \quad \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \Delta_2 \eta, \quad \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \Delta_2 \zeta.$$

De plus, s'il s'agit de mouvements pendulaires de période $\frac{2\pi}{k}$, auxquels on cherche à réduire le phénomène (¹), on aura

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -k^2 \xi, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -k^2 \eta, \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -k^2 \zeta,$$

ce qui permet de remplacer $\Delta_2 \xi$, $\Delta_2 \eta$, $\Delta_2 \zeta$ par $-\frac{k^2}{a^2} \xi$, $-\frac{k^2}{a^2} \eta$, $-\frac{k^2}{a^2} \zeta$, et d'obtenir

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{k^2}{a^2} \frac{d}{dt} (f\eta - e\zeta) = \Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{k^2}{a^2} \frac{d}{dt} (d\zeta - f\xi) = \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \frac{k^2}{a^2} \frac{d}{dt} (e\xi - d\eta) = \Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

Si l'on a pris pour axe Oz la ligne des pôles du champ magnétique, on devra faire $d = e = 0$, et en posant $f = v$, où v est un petit coefficient, fonction de la nature du corps transparent et de l'intensité du champ magnétique, on obtiendra les équations (α) (²).

Mais nous voulons de plus, et c'est le premier objet de ce travail, tenir compte de la biréfringence spéciale engendrée par le champ magnétique, et dont l'étude restait à faire (³).

(¹) II, p. 438.

(²) II, p. 478.

(³) II, p. 480-481.

La même isotropie dissymétrique, autour de l'axe du champ, entraîne, pour représenter cette biréfringence, l'introduction, dans la troisième équation seule, d'un terme unique $+ \nu' \Delta_2 \frac{d^2 \xi}{dt^2}$, qui, par les raisonnements précédents, n'est autre que $+ \nu' \frac{k^2}{a^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ pourvu que ν' soit assez petit. Le coefficient de $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$ dans cette troisième équation deviendra donc

$$(3) \quad \frac{1}{a^2} + \frac{\nu' k^2}{a^2} = \frac{1}{c^2},$$

en introduisant le nouveau coefficient c^2 comme s'il s'agissait de la biréfringence d'un cristal uniaxe dont l'axe optique coïnciderait avec la ligne des pôles du champ. Ce second coefficient ν' est fonction, comme ν , de la nature du corps transparent et de l'intensité du champ magnétique. Il est plus difficile à mettre en évidence expérimentalement, ce qui serait une raison de le supposer plus petit que ν . Mais, comme ce sont des expériences d'un autre ordre ⁽¹⁾, nous ne préjugeons pas cette question et garderons ν et ν' indépendants l'un de l'autre, en négligeant leurs carrés et leur produit.

J'ajoute que, pour l'homogénéité, ν' doit être de l'ordre du carré d'un temps, comme ν^2 , pour que $\frac{1}{a^2} + \nu' \frac{k^2}{a^2}$ soit homogène et de dimensions T^2 .

Les équations prennent alors la forme définitive

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{k^2}{a^2} \nu \frac{d\eta}{dt} = \Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{k^2}{a^2} \nu \frac{d\xi}{dt} = \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

C'est la généralisation du système (α) de la page 478, le coefficient $\frac{1}{a^2}$ de la troisième équation étant remplacé par $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \nu' \frac{k^2}{a^2}$ et ν' étant toujours assez petit, s'il est négatif, pour que $\frac{1}{c^2}$ soit positif.

⁽¹⁾ Quirino MAJORANA, *C. R. Acad. Sc.*, t. CXXXV, 21 juillet 1902, p. 159.

Cherchons, comme on le fait dans les questions de ce genre, à vérifier ces équations par des solutions symboliques de la forme

$$(5) \quad \frac{\xi}{L} = \frac{\eta}{M} = \frac{\zeta}{N} = e^{k(lx - my - nz)\sqrt{-1}},$$

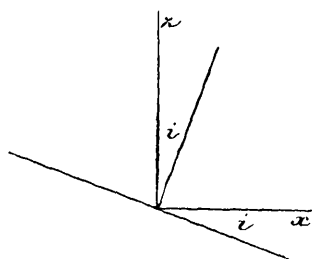
les solutions physiques étant les parties réelles des solutions analytiques imaginaires que nous obtiendrons.

Toujours d'après la même isotropie dissymétrique autour de l'axe Oz du champ, nous choisirons les axes Oxy , dans le plan normal à cet axe, de façon à faire passer Oy par la trace du plan de l'onde $lx + my + nz = 0$ sur ce plan normal, c'est-à-dire à supposer $m = 0$, ce qui, avec les notations ordinaires

$$l = \frac{\alpha}{\omega}, \quad m = \frac{\beta}{\omega}, \quad n = \frac{\gamma}{\omega},$$

(α, β, γ cosinus directeurs de la normale au plan de l'onde, ω vitesse

Fig. 1.



de propagation), donne

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin i, & \beta &= 0, & \gamma &= \cos i; \\ l &= \frac{\sin i}{\omega}, & m &= 0, & n &= \frac{\cos i}{\omega}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= -k\sqrt{-1}l\xi, & \frac{d^2\xi}{dx^2} &= -k^2l^2\xi, & \Delta_2\xi &= -k^2(l^2 + n^2)\xi = -\frac{k^2}{\omega^2}\xi; \\ \frac{d\xi}{dt} &= k\sqrt{-1}\xi, & \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -k^2\xi, & \theta &= -k\sqrt{-1}(l\xi + n\xi). \end{aligned}$$

Ces valeurs, portées dans les équations, donnent, pour déterminer L, M, N , après suppression du facteur commun $k^2 e^{k(lx - nz)\sqrt{-1}}$, les trois

équations homogènes

$$(6) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} + l^2 \right) L + \frac{kv}{a^2} M \sqrt{-1} + nlN = 0, \\ -\frac{kv}{a^2} L \sqrt{-1} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) M = 0, \\ nlL + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\omega^2} + n^2 \right) N = 0. \end{cases}$$

La condition de compatibilité de ces trois équations homogènes s'obtient en égalant à zéro leur déterminant

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} + l^2 & \frac{kv}{a^2} \sqrt{-1} & nl \\ -\frac{kv}{a^2} \sqrt{-1} & \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} & 0 \\ nl & 0 & \frac{1}{c^2} - \frac{1}{\omega^2} + n^2 \end{vmatrix} = 0$$

et peut recevoir deux formes différentes :

1° En remplaçant l par $\frac{\sin i}{\omega}$ et n par $\frac{\cos i}{\omega}$, on aura l'équation aux vitesses ω pour une onde de direction i , savoir :

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - \frac{\cos^2 i}{\omega^2} & \frac{kv}{a^2} \sqrt{-1} & \frac{\sin i \cos i}{\omega^2} \\ -\frac{kv}{a^2} \sqrt{-1} & \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} & 0 \\ \frac{\sin i \cos i}{\omega^2} & 0 & \frac{1}{c^2} - \frac{\sin^2 i}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0;$$

2° En y remplaçant $\frac{1}{\omega^2}$ par $l^2 + n^2$, on aura l'équation tangentielle de la méridienne de la surface des ondes, enveloppe (de révolution) des traces $lx + nz = 1$ des plans d'onde,

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - n^2 & \frac{kv}{a^2} \sqrt{-1} & nl \\ -\frac{kv}{a^2} \sqrt{-1} & \frac{1}{a^2} - (l^2 + n^2) & 0 \\ nl & 0 & \frac{1}{c^2} - l^2 \end{vmatrix} = 0.$$

CHAPITRE II.

ÉQUATION AUX VITESSES ω DE PROPAGATION.

L'équation aux vitesses de propagation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \left(1 - \frac{\cos^2 i}{\omega^2} a^2\right) & k\nu\sqrt{-1} & \frac{a^2 \sin i \cos i}{\omega^2} \\ -k\nu\sqrt{-1} & \left(1 - \frac{a^2}{\omega^2}\right) & 0 \\ \frac{a^2 \sin i \cos i}{\omega^2} & 0 & \left(\frac{a^2}{c^2} - \frac{\sin^2 i}{\omega^2} a^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant et posant pour un moment $1 - \frac{a^2}{\omega^2} = X$,

$$\left(a^2 \frac{\cos^2 i}{c^2} + \sin^2 i\right) X^2 + \left[\left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right) - k^2 \nu^2\right] X \sin^2 i - k^2 \nu^2 \left(\frac{a^2}{c^2} - \sin^2 i\right) = 0.$$

Or, $\frac{a^2}{c^2} = 1 + \nu' k^2$, et le terme indépendant de X est, par suite,

$$-k^2 \nu^2 (\cos^2 i + \nu' k^2).$$

Donc, même en supposant ν' négatif, comme ce coefficient reste très petit, il faudrait supposer i très voisin de $\frac{\pi}{2}$ pour que la parenthèse pût devenir positive, et les deux racines X de même signe.

Dans les expériences ordinaires, *elles resteront de signes contraires*, la forme définitive de l'équation étant

$$(10) \quad (1 + \nu' k^2 \cos^2 i) X^2 + (\nu' - \nu^2) k^2 X \sin^2 i - k^2 \nu^2 (\nu' k^2 + \cos^2 i) = 0,$$

où l'on aura toujours $1 + \nu' k^2 > 0$, de sorte que le premier coefficient est positif, même si $\nu' < 0$.

La condition de réalité des racines est

$$(\nu' - \nu^2)^2 k^2 \sin^4 i + 4 k^2 \nu^2 (\nu' k^2 + \cos^2 i) (1 + \nu' k^2 \cos^2 i) \geq 0.$$

Elle est évidemment vérifiée, comme nous venons de le voir, pour $\nu' > 0$. Mais, pour $\nu' < 0$, elle le sera encore tant que l'angle i n'atteindra pas des valeurs assez voisines de $\frac{\pi}{2}$ pour que $\cos^2 i$ puisse être de l'ordre de ν' et compensé par $\nu' k^2$.

L'observation du phénomène pour des valeurs de i voisines de $\frac{\pi}{2}$ prouvera donc que v' ne peut pas atteindre de valeurs négatives telles que, par exemple, pour $i = \frac{\pi}{2}$, on ait

$$(v' - v^2)^2 + 4v'v^2k^2 < 0.$$

CHAPITRE III.

CONSÉQUENCES PHYSIQUES.

La condition de compatibilité étant supposée remplie, les équations homogènes fournissent, pour L, M, N , un système de valeurs proportionnelles, que nous allons interpréter physiquement.

A cet effet, écrivons-les, en remplaçant $l = \frac{\sin i}{\omega}$, $n = \frac{\cos i}{\omega}$ et groupant les termes,

$$(11) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)L + \frac{\sin i}{\omega^2}(L \sin i + N \cos i) = -\frac{kv}{a^2}M\sqrt{-1}, \\ -\frac{kv}{a^2}L\sqrt{-1} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)M = 0, \\ \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)N + \frac{\cos i}{\omega^2}(L \sin i + N \cos i) = 0. \end{cases}$$

1° Multiplions-les par $\sin i, 0, \cos i$, et ajoutons. Il vient

$$\frac{L \sin i + N \cos i}{a^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)N \cos i - \frac{kv}{a^2}M \sin i \sqrt{-1}.$$

Ce résultat montre que $L \sin i + N \cos i$ est de l'ordre de petitesse du moins petit des deux v et v' , à cause de $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} = -\frac{v'k^2}{a^2}$, ou *qu'il y a quasi-transversalité des vibrations*, comme dans le cas de la page 478 (II) que nous généralisons ici.

2° Multiplions-les ensuite par L, M, N et ajoutons. Il vient

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)(L^2 + M^2 + N^2) + \frac{v'k^2}{a^2}N^2 + \frac{1}{\omega^2}(L \sin i + N \cos i)^2 = 0.$$

Ce résultat montre que $\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) (L^2 + M^2 + N^2)$ est de l'ordre de ν' et de ν^2 , et non plus précisément de ν^2 , comme dans le cas de la page 479. Or, d'après la seconde de nos équations, $\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) M$ est de l'ordre de ν . Donc $\frac{L^2 + M^2 + N^2}{M}$ est de l'ordre de $\frac{\nu'}{\nu}$, c'est-à-dire $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$ peut être fini si ν' est du même ordre que ν , *ce que l'expérience décidera.*

Tirons alors des équations linéaires rendues compatibles des valeurs proportionnelles à L , M , N . Les deux dernières donneront

$$\frac{L}{\omega^2 \left(1 - \frac{a^2}{\omega^2}\right)} = \frac{M}{k\nu\omega^2\sqrt{-1}} = \frac{N}{-c^2 \sin i \cos i \frac{\omega^2 - a^2}{\omega^2 - c^2 \sin^2 i}}.$$

On aura donc, en prenant les parties réelles de ces solutions, les composantes du déplacement proportionnelles à

$$(12) \quad \begin{cases} \xi = \omega_1^2 \left(1 - \frac{a^2}{\omega_1^2}\right) \cos \left(kt - k \frac{x \sin i + z \cos i}{\omega_1}\right), \\ \eta = \omega_1^2 k \nu \sin \left(kt - k \frac{x \sin i + z \cos i}{\omega_1}\right), \\ \zeta = -c^2 \sin i \cos i \frac{\omega_1^2 - a^2}{\omega_1^2 - c^2 \sin^2 i} \cos(kt \dots), \end{cases}$$

pour la trajectoire correspondant à la première racine ω_1 de l'équation aux vitesses de propagation;

$$(12') \quad \begin{cases} \xi = \omega_2^2 \left(1 - \frac{a^2}{\omega_2^2}\right) \cos \left(kt - k \frac{x \sin i + z \cos i}{\omega_2}\right), \\ \eta = \omega_2^2 k \nu \sin \left(kt - k \frac{x \sin i + z \cos i}{\omega_2}\right), \\ \zeta = -c^2 \sin i \cos i \frac{\omega_2^2 - a^2}{\omega_2^2 - c^2 \sin^2 i} \cos(kt \dots), \end{cases}$$

pour les trajectoires correspondant à la seconde racine ω_2 .

Ces trajectoires sont donc des ellipses, intersections des cylindres

$$(13) \quad \frac{\xi^2}{(\omega^2 - a^2)^2} + \frac{\eta^2}{\omega^4 k^2 \nu^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

(dépendant de i par l'intermédiaire de $\omega = \omega_1$ pour l'une et $\omega = \omega_2$

pour l'autre) par deux plans différant en réalité pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$, mais confondus, à notre approximation, avec le plan

$$\xi \sin i + \zeta \cos i = 0$$

de l'onde, puisque nous avons vérifié que $L \sin i + N \cos i$ était de l'ordre de ν' et de ν . Seulement, *le fait essentiel, au point de vue physique, consiste en ce que*, les deux racines ω_1, ω_2 donnant des signes contraires au facteur $1 - \frac{a^2}{\omega^2}$, comme on l'a vu en ordonnant l'équation en ω par rapport à $1 - \frac{a^2}{\omega^2}$, *ces ellipses sont parcourues dans des sens différents.*

Éléments de chacune de ces ellipses. — Elle est située dans le plan

$$\frac{\zeta}{\xi} = - \frac{c^2 \sin i \cos i}{\omega^2 - c^2 \sin^2 i} = - \tan \psi,$$

où nous savons que ψ est voisin de i .

Les longueurs des carrés des demi-axes sont donc (à un facteur constant près)

$$\frac{(\omega^2 - a^2)^2}{\cos^2 \psi} \text{ et } \omega^4 k^2 \nu^2.$$

Leur rapport est donc

$$\left(\frac{\omega^2 - a^2}{\omega^2 k \nu \cos \psi} \right)^2 = \left(\frac{1 - \frac{a^2}{\omega^2}}{k \nu \cos \psi} \right)^2.$$

Or, les racines de l'équation en X sont

$$X = 1 - \frac{a^2}{\omega^2} = \frac{\left\{ -(\nu' - \nu^2) k^2 \sin^2 i \pm k |\nu| \cos i \sqrt{1 + \nu' k^2 \left(\cos^2 i + \frac{1}{\cos^2 i} \right) + k^2 \left(\frac{\nu'}{\nu} - \nu \right)^2 \frac{\sin^2 i \tan^2 i}{4} + \nu'^2 k^4} \right\}}{2(1 + \nu' k^2 \cos^2 i)},$$

où $|\nu|$ désigne la valeur absolue de ν .

I. A l'approximation $\psi = i$, qu'il est logique de faire, puisque la comparaison des deux ellipses est surtout intéressante si on les consi-

dère comme dans le même plan, les valeurs absolues des demi-axes sont, à des facteurs constants près,

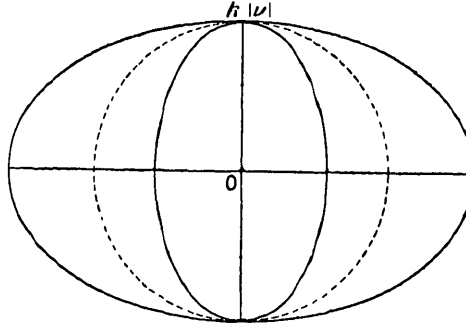
$$A = \left| 1 - \frac{a^2}{\omega^2} \right| \frac{1}{\cos i} \quad \text{et} \quad B = k|\nu|.$$

Or

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{a^2}{\omega^2} \right) \frac{1}{\cos i} \\ &= \frac{1}{2(1 + \nu' k^2 \cos^2 i)} \left\{ -(\nu' - \nu^2) k^2 \sin i \tan i \right. \\ & \quad \left. \pm k|\nu| \left[1 + \frac{\nu'}{2} k^2 \left(\cos^2 i + \frac{1}{\cos^2 i} \right) + \dots \right] \right\}, \end{aligned}$$

la racine positive correspondant au signe supérieur et la négative au signe inférieur.

Fig. 2.



Je désigne alors par (A_1, B_1) , (A_2, B_2) les valeurs de A, B pour les deux ellipses, qui correspondent aux racines ω_1, ω_2 ; on a

$$B_1 = B_2 = k|\nu|, \quad A_1 = \left(1 - \frac{a^2}{\omega_1^2} \right) \frac{1}{\cos i}, \quad A_2 = \left(1 - \frac{a^2}{\omega_2^2} \right) \frac{1}{\cos i}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} (A_1 - B_1)(1 + \nu' k^2 \cos^2 i) &= -\frac{\nu' - \nu^2}{2} k^2 \frac{\sin^2 i}{\cos i} + k|\nu| \left[\nu' \frac{k^2}{2} \left(-\cos^2 i + \frac{1}{\cos^2 i} \right) + \dots \right], \\ (A_2 - B_2)(1 + \nu' k^2 \cos^2 i) &= +\frac{\nu' - \nu^2}{2} k^2 \frac{\sin^2 i}{\cos i} + k|\nu| \left[\nu' \frac{k^2}{2} \left(-\cos^2 i + \frac{1}{\cos^2 i} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Donc, à notre approximation, le premier terme $\frac{\nu'}{2} k^2 \frac{\sin^2 i}{\cos i}$ étant prépondérant, ces différences sont de signes contraires. *Le grand axe de chacune des ellipses est sur la direction du petit axe de l'autre*, ce qui pourrait conduire à une vérification expérimentale.

De plus, *l'écart relatif des deux axes est proportionnel à k^2 , c'est-à-dire à l'inverse du carré de la période vibratoire des radiations*, ce que l'expérience pourrait peut-être aussi vérifier.

Enfin, les deux ellipses *se réduiront en même temps, toujours à notre approximation, à un cercle de rayon $k|\nu|$, dans le cas singulier où il existerait la relation $\nu' = \nu^2$ entre le coefficient ν de dissymétrie et le coefficient ν' de biréfringence.*

Si donc *l'expérience décelait l'existence de deux vibrations circulaires de sens opposés*, on serait en présence d'un corps pour lequel cette relation $\nu' = \nu^2$ serait vérifiée, et par suite où tous nos calculs se simplifieraient considérablement, comme nous allons l'indiquer.

Cas singulier $\nu' = \nu^2$. — L'équation aux vitesses se réduit à

$$(1 + \nu' k^2 \cos^2 i) X^2 - k^2 \nu^2 (k^2 \nu^2 + \cos^2 i) = 0,$$

et les deux racines $X = 1 - \frac{a^2}{\omega^2}$ sont égales et de signes contraires :

$$1 - \frac{a^2}{\omega_1^2} = k|\nu| \cos i \left[1 + \frac{k^2 \nu^2}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 i} - \cos^2 i \right) + \dots \right],$$

$$1 - \frac{a^2}{\omega_2^2} = -k|\nu| \cos i \left[1 + \dots \right],$$

d'où

$$a^2 \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) = k|\nu| \cos i \left[2 + k^2 \nu^2 \left(\frac{1}{\cos^2 i} - \cos^2 i \right) + \dots \right]$$

ou

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1 + \omega_2} k|\nu| \cos i [2 + \dots]$$

ou sensiblement

$$\omega_1 - \omega_2 = a k|\nu| \cos i,$$

comme dans la polarisation rotatoire magnétique.

Cette analyse exclut :

1° Le cas $i = \frac{\pi}{2}$, où $X = 1 - \frac{a^2}{\omega^2} = \pm k^2 \nu^2$,

$$1 - \frac{a^2}{\omega_1^2} = k^2 \nu^2 :$$

$$\frac{\omega_1^2}{a^2} = \frac{1}{1 - k^2 \nu^2} = 1 + k^2 \nu^2 \dots, \quad \frac{\omega_1}{a} = 1 + \frac{k^2 \nu^2}{2} \dots$$

et

$$1 - \frac{a^2}{\omega_2^2} = -k^2 v^2 ;$$

$$\frac{\omega_2^2}{a^2} = \frac{1}{1 + k^2 v^2} = 1 - k^2 v^2 \dots, \quad \frac{\omega_2}{a} = 1 - \frac{k^2 v^2}{2} \dots;$$

ou sensiblement

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{a} = k^2 v^2.$$

2° Le cas où i serait assez voisin de $\frac{\pi}{2}$ pour que $\cos i$, sans être nul, fût de l'ordre de kv et empêchât le développement ci-dessus du radical; prenons, par exemple, comme valeur limite, $\cos^2 i = k^2 v^2$, ce qui donne

$$X^2(1 + k^4 v^4) = 2k^4 v^4, \quad X = \frac{k^2 v^2 \sqrt{2}}{\sqrt{1 + k^4 v^4}}.$$

Ce sont donc des cas tout à fait nouveaux, qu'il serait intéressant de vérifier en faisant varier l'inclinaison i et la radiation k .

II. A une plus grande approximation, au lieu de $\psi = i$, reprenons

$$\tan \psi = \frac{c^2 \sin i \cos i}{\omega^2 - c^2 \sin^2 i} = \tan i \left(1 - \frac{\omega^2 - c^2}{\omega^2 - c^2 \sin^2 i} \right).$$

Pour i assez éloigné de $\frac{\pi}{2}$, on obtient bien $\tan \psi$ voisin de $\tan i$. On peut d'ailleurs écrire

$$\tan(i - \psi) = \left(1 - \frac{c^2}{\omega^2} \right) \tan i = \frac{v' k^2 + X}{1 + v' k^2} \tan i.$$

Si l'on réduit les angles à leurs tangentes, à une approximation justifiée par leur petitesse, il viendra

$$i - \psi_1 = \frac{X_1 + v' k^2}{1 + v' k^2} \tan i,$$

$$i - \psi_2 = \frac{X_2 + v' k^2}{1 + v' k^2} \tan i,$$

$$\psi_2 - \psi_1 = \frac{X_1 - X_2}{1 + v' k^2} \tan i.$$

Or, nous avons vu que la partie principale de la différence des

racines est $k|\nu|\cos i$. On a donc

$$\psi_2 - \psi_1 = k|\nu|\sin i + \dots$$

du même ordre.

A cette approximation, ψ_1 et ψ_2 ne diffèrent pas moins l'un de l'autre, comme ordre infinitésimal, qu'ils ne diffèrent de i .

D'autres conséquences physiques, à vérifier par l'expérience, résulteront de la discussion de la surface des ondes au Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

SURFACE DES ONDES.

I. — Propriétés générales de la méridienne.

D'après l'équation (9) du Chapitre I, la surface des ondes, de révolution autour de Oz , a pour méridienne une courbe dont l'équation tangentielle en coordonnées (l, n) , c'est-à-dire comme enveloppe de la trace $lx + nz = 1$, du plan d'onde, est

$$(14) \quad [1 - a^2(l^2 + n^2)][1 - c^2l^2 - a^2n^2] - k^2\nu^2(1 - c^2l^2) = 0.$$

Pour $\nu = 0$, on retrouve la décomposition de la méridienne en un cercle et une ellipse, c'est-à-dire de la surface en une sphère et un ellipsoïde de révolution se raccordant à leurs deux pôles sur Oz .

Cette méridienne est symétrique par rapport à chacun des deux axes Ox et Oz .

Rendue homogène, c'est-à-dire pour le plan $lx + nz = p$, cette équation devient

$$(15) \quad [p^2 - a^2(l^2 + n^2)][p^2 - c^2l^2 - a^2n^2] - k^2\nu^2p^2(p^2 - c^2l^2) = 0,$$

et ses dérivées partielles sont :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial l} = -c^2 l [p^2 - a^2(l^2 + n^2)] - a^2 l [p^2 - c^2l^2 - a^2n^2] + k^2\nu^2p^2c^2l,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -a^2 n [p^2 - a^2(l^2 + n^2)] - a^2 n [p^2 - c^2l^2 - a^2n^2],$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial p} = p [p^2 - a^2(l^2 + n^2) + p^2 - c^2l^2 - a^2n^2 - 2k^2\nu^2p^2 + k^2\nu^2c^2l^2].$$

Alors les tangentes parallèles à Ox , $l = 0$, sont données par

$$\begin{aligned}(p^2 - a^2 n^2)^2 - k^2 v^2 p^4 &= 0, \\ p^2 - a^2 n^2 &= \pm k v p^2, \\ p^2 (1 \mp k v) &= a^2 n^2, \\ \frac{p^2}{n^2} &= \frac{a^2}{1 \mp k v}.\end{aligned}$$

Le point de contact, sur Oz ($l = 0$), est donné par

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= -2 a^2 n (p^2 - a^2 n^2) = \mp 2 a^2 n k v p^2, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= p [2 (p^2 - a^2 n^2) - 2 k^2 v^2 p^2] = 2 p [\pm k v p^2 - k^2 v^2 p^2] = -2 k v p^3 (\pm 1 - k v),\end{aligned}$$

dont le quotient est

$$\frac{\pm a^2 n}{p (\pm 1 - k v)} = \frac{\pm a^2 n}{p (1 \mp k v)} = \pm \frac{a^2}{a} \frac{\sqrt{1 \mp k v}}{1 \mp k v} = \pm \frac{a}{\sqrt{1 \mp k v}},$$

comme vérification.

Ce sont les quatre sommets de la courbe sur Oz .

Les tangentes parallèles à Oz , $n = 0$, sont de même

$$(p^2 - a^2 l^2) (p^2 - c^2 l^2) - k^2 v^2 p^2 (p^2 - c^2 l^2) = 0 :$$

1° c'est-à-dire d'abord

$$\frac{p^2}{l^2} = c^2,$$

dont les points de contact, sur Ox , sont donnés par

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial l} &= -c^2 l [p^2 - a^2 l^2] + k^2 v^2 p^2 c^2 l \\ &= c^2 l^3 (a^2 - c^2 + k^2 v^2 c^2), \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= p [(p^2 - a^2 l^2) - 2 k^2 v^2 p^2 + k^2 v^2 c^2 l^2] \\ &= p l^2 [c^2 - a^2 - k^2 v^2 c^2],\end{aligned}$$

dont le quotient est

$$- \frac{c^2 l}{p} = \mp c,$$

comme vérification (ce sont deux sommets de la courbe sur Ox);

2° c'est-à-dire ensuite

$$p^2 - a^2 l^2 = k^2 v^2 p^2, \quad p^2(1 - k^2 v^2) = a^2 l^2, \quad \frac{p^2}{l^2} = \frac{a^2}{1 - k^2 v^2}.$$

Les points de contact, sur Ox ($n = 0$), sont donnés par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial l} &= -c^2 l[p^2 - a^2 l^2] - a^2 l[p^2 - c^2 l^2] + k^2 v^2 p^2 c^2 l \\ &= -l p^2[(a^2 - c^2) + c^2 k^2 v^2], \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= p[p^2 - a^2 l^2 + p^2 - c^2 l^2 - 2k^2 v^2 p^2 + k^2 v^2 c^2 l^2] \\ &= p l^2(a^2 - c^2 + c^2 k^2 v^2), \end{aligned}$$

dont le quotient est $-\frac{p}{l}$ comme vérification.

(Ce serait $\frac{p}{l}$ avec $lx + nz + p = 0$ de la théorie classique des coordonnées tangentielles.)

Les deux sommets sur Oz positif ont donc pour cotes

$$\frac{p}{n} = \frac{a}{\sqrt{1 \mp k^2 v^2}} = a(1 \mp k^2 v^2)^{-\frac{1}{2}} = a\left(1 \pm \frac{k^2 v^2}{2} + \dots\right)$$

et ne peuvent coïncider.

Les deux sommets sur Ox positif ont donc pour abscisses

$$\begin{aligned} \frac{p}{l} &= \frac{a}{\sqrt{1 - k^2 v^2}} = a(1 - k^2 v^2)^{-\frac{1}{2}} = a\left(1 + \frac{k^2 v^2}{2} + \dots\right), \\ \frac{p}{l} &= c. \end{aligned}$$

Pour comparer ces deux derniers, il faut comparer $\frac{a^2}{1 - k^2 v^2}$ à c^2 , ou a^2 à $c^2(1 - k^2 v^2)$, ou $c^2 - a^2$ à $c^2 k^2 v^2$.

Cette même équation (15) va nous servir à chercher si la méridienne a des tangentes doubles réelles. En effet, soit $\frac{p}{n}$ la cote du point où une telle tangente rencontrerait Oz . $\frac{l}{n}$ sera donné par l'équation bicarrée

$$(16) \quad a^2 c^2 l^4 - [(a^2 + c^2)(p^2 - a^2 n^2) - c^2 k^2 v^2 p^2] l^2 n^2 + [(p^2 - a^2 n^2)^2 - k^2 v^2 p^4] n^4 = 0.$$

qui devrait avoir deux racines égales, d'où

$$(17) \quad f = (a^2 - c^2)^2 (p^2 - a^2 n^2)^2 - 2 k^2 v^2 (a^2 + c^2) c^2 p^2 (p^2 - a^2 n^2) \\ + c^4 k^4 v^4 p^4 + 4 k^2 v^2 a^2 c^2 p^4 = 0,$$

équation du second degré en $\frac{p^2 - a^2 n^2}{p^2}$, dont le discriminant est

$$-4 k^2 v^2 a^2 c^2 [(a^2 - c^2)^2 - k^2 v^2 c^4].$$

Or nous avons posé, d'après (3),

$$c^2 + v' c^2 k^2 = a^2,$$

et le discriminant devient

$$-4 k^2 v^2 a^2 c^2 (k^2 v'^2 - v^2);$$

d'où deux cas extrêmes à distinguer, en excluant le cas limite où $k^2 v'^2 = v^2$, qui sera étudié plus loin à part (§ II).

(Il faut d'ailleurs remarquer que ces conditions dépendant de la période vibratoire $\frac{1}{\lambda}$, *un même corps pourrait réaliser l'une pour certaines radiations et la condition contraire pour d'autres, se prêtant ainsi à de curieuses vérifications expérimentales.*)

1° Si $k|v'| > |v|$, (17) n'a pas de racines réelles, *il n'y a pas de tangentes doubles réelles à la méridienne*, la surface de révolution n'admet pas de cône circonscrit à deux parallèles de contact.

2° Si $-|v| < k v' < |v|$, (17) a des racines $\frac{p^2 - a^2 n^2}{p^2}$ réelles et positives, ce qui donne, pour les points où se croiseraient sur Oz les tangentes doubles, des cotes $\frac{p}{n}$ supérieures en valeur absolue à a .

Mais, pour que ces tangentes doubles soient réelles, il faut encore que $1 - \frac{a^2 n^2}{p^2}$ soit ≤ 1 , pour que $\frac{a^2 n^2}{p^2}$ soit positif ou nul, et par suite acceptable.

Or

$$f(1) = (a^2 - c^2 + c^2 k^2 v'^2)^2 > 0.$$

Donc 1 est toujours en dehors des racines. Les deux conviendront si 1 est au-dessus. Aucune ne conviendra si 1 est au-dessous.

Or, leur demi-somme est $\frac{(a^2 + c^2) c^2 k^2 v^2}{(a^2 - c^2)^2}$.

Le dénominateur, qui est de l'ordre de v'^2 , nous l'avons vu, sera, dans les cas les plus fréquents, inférieur au numérateur qui est de l'ordre de v^2 . Donc cette demi-somme sera > 1 , et avec elle les deux racines, qui ne conviendront pas. *Il n'y aura pas, en général, de tangentes doubles, résultat capital et nouveau pour une surface d'ondes.*

Le cas où la demi-somme serait 1 est celui où

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 &= \frac{c^2}{2} k^2 v^2 \pm \sqrt{\frac{c^4}{4} k^4 v^4 + 2 c^k k^2 v^2}, \\ (17 \text{ bis}) \quad &= \frac{c^2}{2} k^2 v^2 \pm c^2 k v \sqrt{2 + \frac{k^2 v^2}{4}}. \end{aligned}$$

Le cas où $f(1)$ serait nul est celui où

$$a^2 - c^2 = -c^2 k^2 v^2$$

et sera traité à part (§ III), $v' = -v^2$.

Le cas où les racines sont égales est celui où

$$a^2 - c^2 = \pm c^2 k v.$$

Mais les racines $\frac{\rho^2 - a^2 n^2}{\rho^2}$ étant supposées réelles, on a

$$|a^2 - c^2|^2 < k^2 v^2 c^4;$$

la demi-somme ne peut donc pas être égale à 1 puisque

$$|a^2 - c^2| < c^2 k |v|,$$

et que $a^2 - c^2$ aurait alors pour partie principale $\pm c^2 k |v| \sqrt{2}$ d'après (17 bis).

Donc $f(1) > 0$, demi-somme > 1 , les deux racines < 1 , aucune tangente double.

Certains des résultats ci-dessus vont se retrouver dans l'étude des cas de décomposition. Le principal, l'absence de tangentes doubles, aurait pu être établi directement par les substitutions suivantes à la place de p^2 : $\varphi(+\infty) > 0$ à cause de $1 - k^2 v^2 > 0$ vu la petitesse de v ;

$$\begin{aligned} \varphi(c^2 l^2 + a^2 n^2) &= -k^2 v^2 (c^2 l^2 + a^2 n^2) a^2 n^2 < 0, \\ \varphi(0) &= a^2 (l^2 + n^2) (c^2 l^2 + a^2 n^2) > 0. \end{aligned}$$

Cette valeur $c^2 l^2 + a^2 n^2$ sépare les racines p^2 , lesquelles ne peuvent dès lors se confondre qu'avec elle, ce qui exige $n^2 = 0$. Ce serait donc une tangente double parallèle à Oz , pour laquelle l'équation se décompose en

$$(p^2 - c^2 l^2)(p^2 - a^2 l^2 - k^2 v^2) = 0$$

et n'aura ses racines égales que si

$$a^2 = c^2(1 - k^2 v^2) \quad \text{ou} \quad v' = v^2,$$

cas qui sera traité à part (§ III), comme nous l'avons déjà annoncé.

En dehors de ce cas, les tangentes à la méridienne sont séparées, deux à deux et avec la même direction, par la tangente à l'ellipse

$$p^2 = c^2 l^2 + a^2 n^2.$$

II. — Cas de décomposition.

L'équation de la méridienne peut encore s'écrire

$$[p^2 - a^2(l^2 + n^2)]^2 + (a^2 - c^2)l^2[p^2 - a^2(l^2 + n^2)] - k^2 v^2 p^2(p^2 - c^2 l^2) = 0.$$

Elle se décomposera donc si

$$c^2 k^2 v^2 - (c^2 - a^2)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad c^2 - a^2 = \pm c^2 k v \quad \text{ou} \quad -k v' = \pm v;$$

nous retrouvons les deux cas fournis par la recherche des tangentes doubles.

L'expression sous le radical s'écrit alors

$$(c^2 - a^2)^2 \left(\frac{l^2}{2} - \frac{p^2}{c^2} \right)^2,$$

et les deux coniques en lesquelles se décompose la méridienne de quatrième classe sont

$$p^2 - a^2(l^2 + n^2) = \frac{c^2 - a^2}{2} \left[l^2 \pm \left(l^2 - 2 \frac{p^2}{c^2} \right) \right],$$

c'est-à-dire, pour l'une,

$$\left(2 - \frac{a^2}{c^2} \right) p^2 - c^2 l^2 - a^2 n^2 = 0 \text{ (ellipse),} \quad a^2 l^2 + \gamma^2 n^2 - 1 = 0,$$

et, pour l'autre,

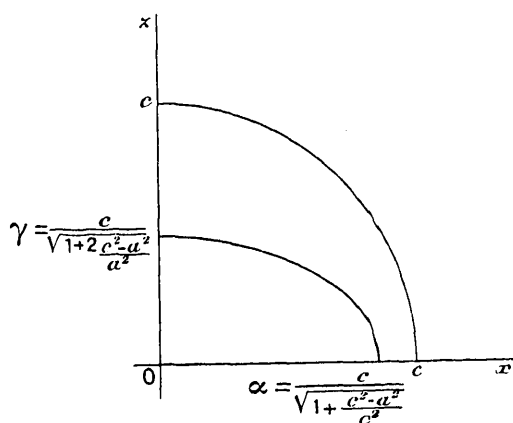
$$p^2 - c^2(l^2 + n^2) = 0 \quad \text{(cercle de rayon } c \text{)}.$$

Pour l'ellipse,

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{1 + \frac{c^2 - a^2}{c^2}} \quad (\alpha^2 < c^2 \text{ si } \nu' < 0, c^2 - a^2 > 0; \alpha^2 > c^2 \text{ si } \nu' > 0, c^2 - a^2 < 0),$$

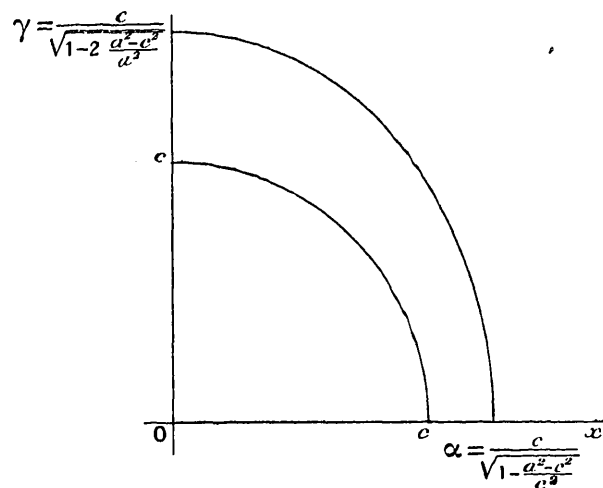
$$\gamma^2 = c^2 - \frac{2(c^2 - a^2)}{1 + \frac{c^2 - a^2}{c^2}} \quad (\gamma^2 < c^2 \text{ si } \nu' < 0, c^2 - a^2 > 0; \gamma^2 > c^2 \text{ si } \nu' > 0, c^2 - a^2 < 0).$$

Fig. 3.



On ne pourrait, dans cette hypothèse, avoir $\nu' = 0$ sans avoir $\nu = 0$,

Fig. 4.



et les deux se réduiraient à un même cercle de rayon a .

Représentons ces résultats, en exagérant les écarts entre les axes de l'ellipse, et remarquant que $\frac{1}{c^2} < \frac{2}{a^2}$ puisque $\frac{a^2}{c^2} < 2$ (fig. 3 et 4).

Les tangentes doubles seront alors données par la racine double $\frac{p^2 - a^2 n^2}{p^2}$ de l'équation, où

$$k^2 v^2 = \frac{(c^2 - a^2)^2}{c^4}, \quad \left(n^2 + \frac{p^2}{c^2}\right)^2 = 0.$$

Les tangentes doubles sont imaginaires, ce qui constitue la vérification annoncée.

Comme autre vérification, dans le cas de décomposition

$$c^2 - a^2 = \pm c^2 k v, \quad -k v' = \pm v,$$

les sommets sur Ox ont bien pour abscisses c et

$$\frac{a}{\sqrt{1 - k^2 v}} = \frac{c}{\sqrt{2 - \frac{a^2}{c^2}}} = \alpha,$$

et les sommets sur Oz ont bien pour cotes

$$\frac{a}{\sqrt{1 \mp \frac{c^2 - a^2}{c^2}}},$$

c'est-à-dire, pour le signe $-$,

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}}} = c$$

et, pour le signe $+$,

$$\frac{a}{\sqrt{2 - \frac{a^2}{c^2}}} = \gamma.$$

III. — Variation de forme à partir de ces cas.

Faisons maintenant varier $a^2 - c^2$ ou v' à partir de la valeur qui a fourni la décomposition.

Les deux branches de la méridienne se déformeront, à partir du

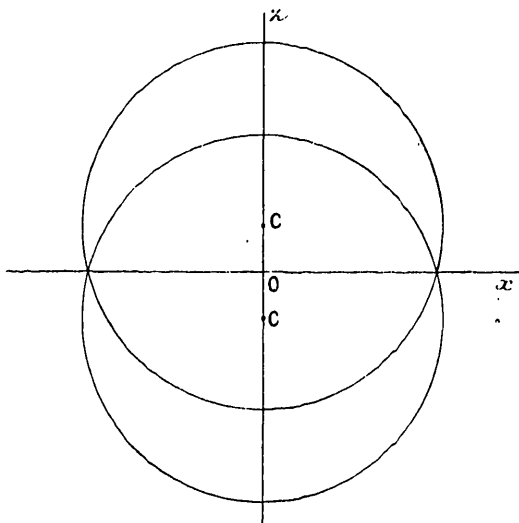
cercle et de l'ellipse, en présentant d'abord des formes analogues à celle de la figure.

Le cas où $a^2 - c^2$ (ou v') croîtrait en valeur absolue a moins d'intérêt physique, car déjà, pour la décomposition, nous avons $kv' = \pm v$, et, comme nous l'avons dit, v' doit être le plus souvent considéré comme inférieur à v , et même d'un ordre plus élevé. Suivons donc la variation du côté où v' décroît en valeur absolue.

Cas $v' = 0$. — Comme cas limite, pour $v' = 0$, $c = a$, nous aurions comme sommets, sur Ox , a et $\frac{a}{\sqrt{1-k^2v^2}} > a$ et, sur Oz , $\frac{a}{\sqrt{1 \mp kv}}$ de part et d'autre de a .

Dans ce cas l'équation de la méridienne, ordonnée en $p^2 - a^2 l^2$,

Fig. 5.



donne, si l'on développe le radical par rapport aux puissances de v ,

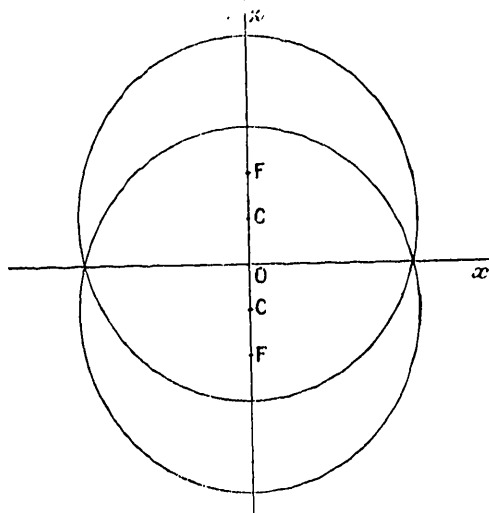
$$a^2(l^2 + n^2) = p^2 \mp k\gamma anp - \frac{k^2\gamma^2}{2} p^2 + \dots \quad (3^{\text{e}} \text{ ordre}).$$

Si l'on néglige le second ordre, on obtient (fig. 5)

$$a^2(l^2 + n^2) = \left(p \mp a \frac{k\gamma n}{2}\right)^2,$$

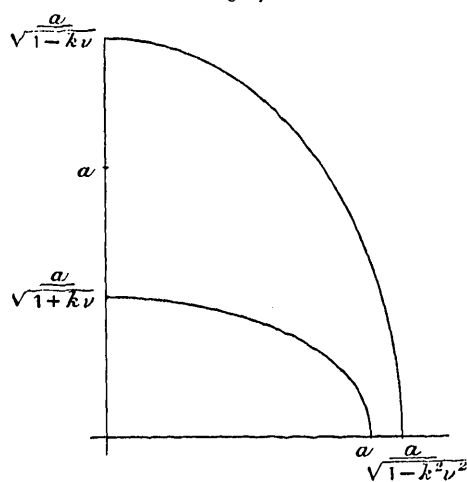
c'est-à-dire deux cercles, méridiens *des deux sphères obtenues* préci-

Fig. 6.



sément dans ce cas par M. Boussinesq ⁽¹⁾.

Fig. 7.



Si l'on ne néglige que le troisième ordre, on obtient (fig. 6)

$$a^2(l^2 + n^2) = p \left[p \left(1 - \frac{k^2 y^2}{2} \right) \mp k \nu a n \right],$$

(¹) T. II, p. 479, note.

c'est-à-dire deux ellipses ayant un foyer commun à l'origine, et les deux autres foyers réels respectifs aux points $\mp \frac{akv}{1 - k^2 \frac{v^2}{2}}$.

Il est très remarquable que la singularité (points doubles et tangentes doubles) de ces deux méridiennes approchées disparaisse dans l'équation complète, où, comme nous venons de le dire, les deux tangentes parallèles à Oz ont deux points de contact distincts a et $\frac{a}{\sqrt{1 - k^2 v^2}}$, que nous avons représentés en exagérant beaucoup l'écart kv (*fig. 7*).

Cas $v' \neq 0$. — Les deux sommets sur Ox ont pour abscisses c et

$$\frac{a}{\sqrt{1 - k^2 v^2}} = \frac{c\sqrt{1 + v'k^2}}{\sqrt{1 - k^2 v^2}}.$$

Donc, pour v' négatif, on aura l'hypothèse remarquable

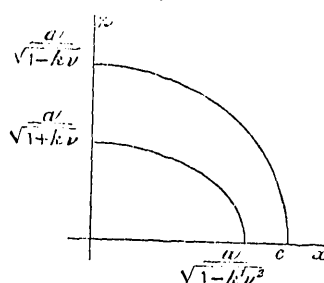
$$a^2 = c^2(1 - v^2 k^2), \quad c^2 - a^2 = c^2 v^2 k^2 \quad (v' = -v^2),$$

pour laquelle ces deux sommets coïncideront.

Supposons que v' , négatif, diminue en valeur absolue à partir du cas de décomposition $-kv' = v$.

Les deux branches partent d'une forme voisine de l'ensemble (cercle, ellipse).

Fig. 8.



Au moment où les deux sommets sur Ox viennent coïncider avec l'abscisse c , c'est-à-dire où (*fig. 9*)

$$a^2 = c^2(1 + v'k^2) = c^2(1 - v^2k^2) \quad (v' = -v^2),$$

les deux autres sommets, sur Oz , sont ($v > 0$ pour fixer les idées)

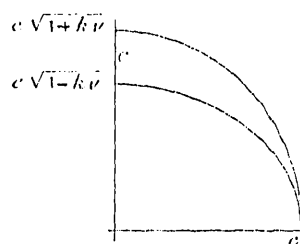
$$\frac{a}{\sqrt{1-kv}} = \frac{c\sqrt{1-v^2k^2}}{\sqrt{1-kv}} = c\sqrt{1+kv},$$

et

$$\frac{a}{\sqrt{1+kv}} = \frac{c\sqrt{1-v^2k^2}}{\sqrt{1+kv}} = c\sqrt{1-kv}.$$

Mais si v , continuant à décroître en valeur absolue, descend au-

Fig. 9.



dessous de v^2 , le sommet sur Ox dépasse c et la forme générale redevient la même.

Faisons

$$a^2 = c^2(1 - k^2v^2),$$

dans l'équation aux tangentes doubles

$$k^4c^4v^4(p^2 - a^2n^2)^2 - 2k^2v^2(a^2 + c^2)c^2p^2(p^2 - a^2n^2) + c^4k^4v^4p^4 + 4k^2v^2a^2c^2p^4 = 0$$

doit avoir pour racine double

$$\frac{p}{l} = c, \quad n = 0.$$

En d'autres termes, c'est l'équation précédente qui doit avoir racine double $n = 0$, $\frac{p}{l} = c$.

Or elle est alors

$$(p^2 - a^2l^2)(p^2 - c^2l^2) - k^2v^2p^2(p^2 - c^2l^2) = 0.$$

et $(p^2 - c^2l^2)^2(1 - k^2v^2) = 0$ ou a bien une racine double $p^2 = c^2l^2$.

Mais alors aussi l'équation suivante (17) donne, en effet,

$$2k^2c^2v^2 + 2(a^2 - c^2) \equiv 0.$$

C'est le cas où $f(1) = 0$ donne la solution $n = 0$, d'où

$$(p^2 - c^2 l^2)^2 = 0.$$

Mais c'est un cas limite, affleuré, après lequel il y a retrait en sens contraire.

Comme vérification de ce résultat capital, je vais prendre l'hypothèse

$$v' = -\theta v^2, \quad 0 < \theta < 1, \\ c^2 - a^2 = -v' c^2 k^2 = \theta c^2 v^2 k^2, \quad a^2 = c^2 - \theta c^2 v^2 k^2,$$

La demi-somme est

$$\frac{2 - \theta v^2 k^2}{\theta^2 v^2 k^2} = \frac{2}{\theta^2 v^2 k^2} - 1 > 1, \quad \text{si } v \text{ est petit.}$$

Donc les deux racines sont > 1 et ne conviennent pas.

Écart des deux nappes de la surface, ou des deux arcs de la méridienne. — Il est intéressant, au point de vue optique, de se rendre compte de l'ordre de grandeur de cet écart. Il suffit, dans $lx + nz = p$, de considérer l et n comme $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$; p est alors la distance de la tangente à l'origine, et l'écart dépend de la différence des valeurs absolues des racines p de l'équation

$$(p^2 - a^2)(p - c^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha) - k^2 v^2 p^2 (p^2 - c^2 \cos^2 \alpha) = 0.$$

A cette évaluation nous substituerons la recherche équivalente de l'ordre de grandeur de $p^2 - a^2$, qui mesure l'écart de la nappe et de la sphère de rayon a , d'où l'écart des deux nappes entre elles.

La somme des racines $p^2 - a^2$ est de l'ordre de v' et de v^2 , le produit de l'ordre de v^2 .

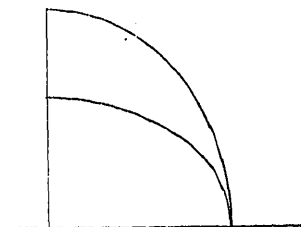
Sous le radical, il vient

$$(a^2 - c^2 + c^2 k^2 v^2)^2 \cos^4 \alpha + 4a^4 k^2 v^2 \sin^2 \alpha.$$

Ceci est une vérification de plus de l'absence de tangentes doubles

dans tous les cas possibles, avec le seul cas d'exception que nous avons rencontré.

Fig. 10.



Les racines sont donc de l'ordre de v' et de v^2 .

La discussion que nous venons de faire de la méridienne de notre surface d'ondes, de révolution dans cette première Partie, fournit une réponse négative à la question suivante, qu'il serait naturel de se poser dans cette Partie et dans les deux autres :

La surface de Fresnel se déduisant de l'ellipsoïde par la transformation apsidale, d'ailleurs réciproque, quelle serait l'apsidale de notre surface par rapport à son centre ?

On voit facilement, en effet, que, pour une surface de révolution, et par rapport à un point de son axe, l'apsidale de révolution s'obtient en faisant tourner la méridienne d'un angle $\frac{\pi}{2}$ autour du point dans son plan.

Nous obtiendrons donc ici une surface de révolution assez compliquée, au lieu de l'ellipsoïde de Fresnel, et, par induction, dans les cas plus compliqués encore des deuxième et troisième Parties, *on ne peut espérer obtenir une surface apsidale simple correspondant à la nôtre.*



DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

Reprenons les équations de la première Partie, en y remplaçant $\frac{1}{a^2}$ par $\frac{1}{b^2}$ dans la seconde et par $\frac{1}{c^2}$ dans la troisième, ce qui donne

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{d}{dt} \Delta_2 f \eta = \Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{b^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \frac{d}{dt} \Delta_2 f \xi = \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

Une première approximation, basée sur la petitesse de f , de $b - a$ et de $c - a$, donne $\theta = 0$ et, par suite,

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Delta_2 \xi, \quad \frac{1}{b^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \Delta_2 \eta, \quad \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \Delta_2 \zeta,$$

avec

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -k^2 \xi, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -k^2 \eta, \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -k^2 \zeta,$$

d'où

$$\Delta_2 \xi = -\frac{k^2}{a^2} \xi, \quad \Delta_2 \eta = -\frac{k^2}{b^2} \eta, \quad \Delta_2 \zeta = -\frac{k^2}{c^2} \zeta.$$

Cette hypothèse approchée, $\theta = 0$, implique qu'on négligera plus loin les produits de v et des différences telles que $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$.

Les équations (18) deviennent alors, en posant $f = v$,

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{k^2}{b^2} v \frac{d\eta}{dt} = \Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{b^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{k^2}{a^2} v \frac{d\xi}{dt} = \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

Mais on n'altérera les résultats que d'erreurs du second ordre, également négligeables, comme celles du calcul précédent, et l'on donnera aux formules toute la symétrie possible, en remplaçant $\frac{\nu}{a^2}$ et $\frac{\nu}{b^2}$ par $\frac{\nu}{c^2}$, ce qui revient à négliger les produits $\nu\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)$ et $\nu\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)$. Les équations prendront alors la forme

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{k^2}{c^2} \nu \frac{d\eta}{dt} &= \Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{b^2} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{k^2}{c^2} \nu \frac{d\xi}{dt} &= \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz}.\end{aligned}$$

Nous cherchons encore des solutions de la forme

$$(5) \quad \frac{\xi}{L} = \frac{\eta}{M} = \frac{\zeta}{N} = e^{k(lx - my - nz)\sqrt{-1}},$$

dont les parties réelles fourniront la solution physique.

Leur substitution dans nos équations donne

$$(19) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} + l^2\right)L + \left(lm + \frac{ky}{c^2}\sqrt{-1}\right)M + nlN = 0, \\ \left(lm - \frac{ky}{c^2}\sqrt{-1}\right)L + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\omega^2} + m^2\right)M + mnN = 0, \\ nlL + mnM + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\omega^2} + n^2\right)N = 0. \end{cases}$$

Ici la symétrie autour de l'axe Oz a disparu avec $b \neq a$, nous ne pouvons donc plus supposer $m = 0$, et le problème ne se réduit plus à deux dimensions.

La condition de compatibilité de ces trois équations homogènes sera ici

$$(20) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} + l^2 & lm + \frac{ky}{c^2}\sqrt{-1} & nl \\ lm - \frac{ky}{c^2}\sqrt{-1} & \frac{1}{b^2} - \frac{1}{\omega^2} + m^2 & mn \\ nl & mn & \frac{1}{c^2} - \frac{1}{\omega^2} + n^2 \end{vmatrix} = 0,$$

à laquelle nous donnerons encore les deux formes (21) et (22) :

$$(21) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\omega^2} & \frac{\alpha\beta}{\omega^2} + \frac{k\nu\sqrt{-1}}{c^2} & \frac{\gamma\alpha}{\omega^2} \\ \frac{\alpha\beta}{\omega^2} - \frac{k\nu\sqrt{-1}}{c^2} & \frac{1}{b^2} - \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\omega^2} & \frac{\beta\gamma}{\omega^2} \\ \frac{\gamma\alpha}{\omega^2} & \frac{\beta\gamma}{\omega^2} & \frac{1}{c^2} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

à cause de

$$\frac{l}{\alpha} = \frac{m}{\beta} = \frac{n}{\gamma} = \frac{1}{\omega} \quad \text{et} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

(C'est l'équation aux vitesses ω de propagation des deux systèmes d'ondes planes normales à la direction de cosinus α, β, γ .)

$$(22) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - (m^2 + n^2) & lm + \frac{k\nu\sqrt{-1}}{c^2} & nl \\ lm - \frac{k\nu\sqrt{-1}}{c^2} & \frac{1}{b^2} - (n^2 + l^2) & mn \\ nl & mn & \frac{1}{c^2} - (m^2 + n^2) \end{vmatrix} = 0,$$

à cause de

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\omega^2}.$$

(C'est l'équation tangentielle de la surface des ondes, qui n'est plus ici de révolution, et à laquelle doivent être tangents les plans

$$lx + my + nz = 1$$

de ces ondes.)

CHAPITRE II.

ÉQUATION AUX VITESSES ω DE PROPAGATION.

Cette équation (21) peut s'écrire, le coefficient de $\frac{1}{\omega^6}$ étant identiquement nul,

$$(23) \quad \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \frac{1}{\omega^4} - \left[\frac{\beta^2 + \gamma^2}{b^2 c^2} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{c^2 a^2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2 b^2} - \frac{k^2 \nu^2 (\alpha^2 + \beta^2)}{c^4} \right] \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{a^2 b^2} - \frac{k^2 \nu^2}{c^4} \right) = 0.$$

La condition de réalité, où l'on fera jouer à c un rôle à part comme dans tout ce qui précède, sera alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{2}{c^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left[\frac{\alpha^2}{b^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) + \frac{\beta^2}{a^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \right] \\ + \left[\frac{\alpha^2}{b^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) + \frac{\beta^2}{b^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \right]^2 \\ - \frac{4}{a^2 b^2 c^2} \left[\alpha^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) + \beta^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \right] + k^2 v^2 [\dots] \geq 0. \end{aligned}$$

Elle ne contient donc plus que v et les différences $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$.

Ces différences ne peuvent donc pas être quelconques par rapport au coefficient v de dissymétrie.

CHAPITRE III.

CONSÉQUENCES PHYSIQUES.

La condition de compatibilité (20) étant supposée remplie, les équations homogènes (19) fournissent pour L , M , N un système de valeurs proportionnelles. Écrivons ces équations (19) avec $\frac{l}{\alpha} = \frac{m}{\beta} = \frac{n}{\gamma} = \frac{1}{\omega}$:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1-\alpha^2}{\omega^2} \right) L + \left(\frac{\alpha\beta}{\omega^2} + \frac{k\gamma\sqrt{-1}}{c^2} \right) M + \frac{\gamma\alpha}{\omega^2} N &= 0, \\ \left(\alpha\frac{\beta}{\omega^2} - k\gamma\frac{\sqrt{-1}}{c^2} \right) L + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1-\beta^2}{\omega^2} \right) M + \frac{\beta\gamma}{\omega^2} N &= 0, \\ \frac{\gamma\alpha}{\omega^2} L + \frac{\beta\gamma}{\omega^2} M + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1-\gamma^2}{\omega^2} \right) N &= 0. \end{aligned} \right.$$

Multiplions-les par α , β , γ . $\frac{1}{\omega^2}$ disparaît, et il reste

$$\frac{\alpha L}{a^2} + \frac{\beta M}{b^2} + \frac{\gamma N}{c^2} = \frac{k\gamma\sqrt{-1}}{c^2} (\beta L - \alpha M),$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\alpha L + \beta M + \gamma N}{a^2} = \beta M \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \gamma N \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) + \frac{k\gamma}{c^2} \sqrt{-1} (\beta L - \alpha M).$$

C'est la généralisation exacte de la première Partie, et, ce qui est très remarquable, les différences $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ et $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}$, restant petites dans les cas de l'expérience, *il y aura encore quasi-transversalité des vibrations*, qui se feront à très peu près dans le plan de l'onde.

Les valeurs proportionnelles à L, M, N, prises pour la symétrie dans les deux premières équations, et divisées par

$$\frac{\gamma}{\omega^2} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2} \right),$$

seront

$$\begin{aligned} L &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2}} + \frac{k\nu\beta\sqrt{-1}}{c^2 \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2} \right)} = L' + L''\sqrt{-1}, \\ M &= \frac{\beta}{\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2}} - \frac{k\nu\alpha\sqrt{-1}}{c^2 \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2} \right)} = M' + M''\sqrt{-1}, \\ N &= \frac{\omega^2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\alpha^2}{\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2}} + \frac{\beta^2}{\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2}} \right) - \frac{k^2\nu^2\omega^2}{c^4\gamma \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2} \right)}, \end{aligned}$$

où L'' et M'' sont de l'ordre de petitesse de ν .

Alors, en posant

$$\theta = k \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\omega} \right) \sqrt{-1},$$

et désignant par $\Re u$ la partie réelle de l'imaginaire u ,

$$\begin{aligned} \xi &= \Re (L' + L''\sqrt{-1}) (\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta) = L' \cos \theta - L'' \sin \theta, \\ \eta &= \Re (M' + M''\sqrt{-1}) (\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta) = M' \cos \theta - M'' \sin \theta, \\ \zeta &= \Re N (\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta) = N \cos \theta. \end{aligned}$$

Ici les ellipses trajectoires sont l'intersection du plan de l'onde avec le cylindre plus compliqué obtenu par l'élimination de θ entre les deux premières

$$(25) \quad (M''\xi - L''\eta)^2 + (M'\xi - L'\eta)^2 = (L'M'' - M'L'')^2.$$

Dans ces diverses expressions, ω doit, bien entendu, recevoir les deux valeurs racines de l'équation en ω des vitesses.

D'autres conséquences physiques résulteront de la discussion de la surface des ondes au Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

SURFACE DES ONDES.

I. — Propriétés générales.

L'équation tangentielle (22) de la surface des ondes, développée et rendue homogène comme celle du plan de l'onde $lx + my + nz = p$, devient

$$(26) \quad p^4 - p^2[a^2(m^2 + n^2) + b^2(n^2 + l^2) + c^2(l^2 + m^2)] \\ + (l^2 + m^2 + n^2)(b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2) \\ - \frac{a^2b^2}{c^4}k^2v^2p^2[p^2 - c^2(l^2 + m^2)] = 0$$

ou

$$F - \frac{a^2b^2}{c^4}k^2v^2p^2C = 0.$$

$F = 0$ étant l'équation tangentielle de la surface des ondes de Fresnel ⁽¹⁾, et $C = 0$ l'équation tangentielle d'un cercle de centre O et de rayon c dans le plan Oxy .

La surface est inscrite, quel que soit v , dans la développable circonscrite commune à ce cercle et à la surface F de Fresnel.

Une vérification intéressante consiste en ce que, pour $a = b = c$, elle donne, comme celle de la deuxième Partie,

$$a^2(l^2 + m^2 + n^2) = p^2 - \frac{k^2v^2}{2}p^2 \pm akvn p \sqrt{1 + \frac{p^2kv}{4a^2n^2}} \\ = p^2 - \frac{k^2v^2}{2}p^2 \pm akvn p \left(1 + \frac{p^2kv}{8a^2n^2} + \dots\right) \\ = \left(p \pm \frac{akvn}{2}\right)^2 + k^2v^2\left(-\frac{p^2}{2} - \frac{a^2n^2}{4} + \frac{p^3}{8a} + \dots\right),$$

ou, en négligeant le second ordre k^2v^2 , l'équation *tangentielle des deux sphères de rayon a et de centres $\pm a\frac{kv}{2}$ sur Oz , obtenues dans cette hypothèse par M. Boussinesq* ⁽²⁾.

⁽¹⁾ RICHARD, *Thèse*, p. 9, forme (A').

⁽²⁾ II, p. 479, note.

A partir de ce cas limite, $a^2 - c^2$ et $b^2 - c^2$ cessant d'être nuls pour devenir très petits, la surface se déforme, ses deux nappes s'éloignant progressivement de ces deux sphères.

Les distances à l'origine p de leurs plans tangents, si l, m, n sont réduits à être les cosinus directeurs des normales ($l^2 + m^2 + n^2 = 1$), sont les racines de l'équation bicarrée

$$\left(1 - \frac{a^2 b^2}{c^4} k^2 v^2\right) p^4 - \left[a^2 (m^2 + n^2) + b^2 (n^2 + l^2) + c^2 \left(1 - \frac{a^2 b^2}{c^4} k^2 v^2\right) (l^2 + m^2) \right] p^2 + (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) = 0.$$

Nous poserons

$$(27) \quad \begin{cases} a^2 - c^2 = v' k^2 c^2, \\ b^2 - c^2 = v'' k^2 c^2, \end{cases}$$

en introduisant les coefficients très petits v' et v'' , analogues au coefficient v' de la première Partie.

L'écart des deux plans tangents dépend de l'expression sous le radical, laquelle, avec ces notations, devient, au facteur $c^4 k^2$ près,

$$\frac{a^2 b^2}{c^4} n^2 v^2 - k^2 n^2 v' v'' + \frac{k^2}{4} \left[v' (m^2 + n^2) + v'' (n^2 + l^2) + v^2 (l^2 + m^2) \frac{a^2 b^2}{c^4} \right]^2 + k^2 \frac{a^2 b^2}{c^4} v^2 (l^2 v'' + m^2 v') + k^2 \frac{a^2 b^2}{c^4} n^2 v^2 (v' + v'' + v' v'' k^2).$$

Tous les termes sont au moins de l'ordre de v^2 ou de $v' v''$.

Supposons que, pour une valeur donnée de v , les autres coefficients v' et v'' partent de zéro par valeurs d'ordre infinitésimal décroissant jusqu'à celui de v^2 .

Le premier des termes sous le radical sera prépondérant, et celui-ci ne pourra s'annuler : *il n'y aura pas de plans tangents doubles*.

Supposons ensuite que, la grandeur de v' et v'' croissant, ils atteignent l'ordre de v^2 . Tous les termes sont positifs si v' et v'' sont positifs, *et il n'y a pas encore de plans tangents doubles réels*.

Il y en aura dans le seul cas où l'un au moins des coefficients v' et v'' serait négatif et ils formeront alors, au quatrième ordre près, une déve-

loppable circonscrite à la surface et à la conique

$$\left[\frac{a^2 b^2}{c^4} v^2 - k^2 v' v'' + \frac{a^2 b^2}{c^4} k^2 v^2 (v' + v'') \right] n^2 + \frac{a^2 b^2}{c^4} v^2 (v'' l^2 + v' m^2) = 0$$

du plan de l'infini.

Étudions au contraire cette surface en y supposant a, b, c fixes et v variable. Nous pourrions même, vu l'intérêt géométrique de la question, ne pas supposer très petits $a^2 - c^2, b^2 - c^2, v$.

Nous remarquons d'abord que l'échange de a et b (v' et v'') revient à échanger l et m , c'est-à-dire Ox et Oy . Nous pourrions donc toujours supposer $a > b$ par exemple.

C'est ce que nous ferons dans les paragraphes suivants.

II. — Développables circonscrites simples.

L'équation tangentielle (26) de la surface peut s'écrire

$$\begin{aligned} & [p^2 - c^2(l^2 + m^2)] \left[p^2 \left(1 - \frac{a^2 b^2}{c^4} k^2 v^2 \right) - (a^2 m^2 + b^2 l^2) \right] \\ & + n^2 [b^2(c^2 + a^2)l^2 + a^2(b^2 + c^2)m^2 + a^2 b^2 n^2 - (a^2 + b^2)p^2] = 0. \end{aligned}$$

La surface est donc inscrite dans les quatre développables

$$\begin{aligned} (D_1) \quad & \begin{cases} c^2(l^2 + m^2) - p^2 = 0, \\ n = 0; \end{cases} \\ (D_2) \quad & \begin{cases} c^2(l^2 + m^2) - p^2 = 0, \\ b^2(c^2 + a^2)l^2 + a^2(b^2 + c^2)m^2 + a^2 b^2 n^2 - (a^2 + b^2)p^2 = 0; \end{cases} \\ (D_3) \quad & \begin{cases} b^2 l^2 + a^2 m^2 - p^2 \left(1 - \frac{a^2 b^2}{c^4} k^2 v^2 \right) = 0, \\ n = 0; \end{cases} \\ (D_4) \quad & \begin{cases} b^2 l^2 + a^2 m^2 - p^2 \left(1 - \frac{a^2 b^2}{c^4} k^2 v^2 \right) = 0, \\ b^2(c^2 + a^2)l^2 + a^2(b^2 + c^2)m^2 + a^2 b^2 n^2 - (a^2 + b^2)p^2 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

dont les deux premières (D_1) et (D_2) sont indépendantes de v .

(D_1) est un cylindre de révolution ayant pour trace sur Oxy le cercle de centre O et de rayon c .

(D_3) est un cylindre elliptique de même direction ayant pour trace

sur Oxy l'ellipse de demi-axes $\frac{b}{\sqrt{1 - k^2 \nu^2 \frac{a^2 b^2}{c^4}}}$ sur Ox et $\frac{a}{\sqrt{1 - k^2 \nu^2 \frac{a^2 b^2}{c^4}}}$ sur Oy .

Ces deux cylindres, l'un fixe et l'autre dépendant de ν , constituent le contour apparent de la surface sur ce plan, et par suite leurs traces en constituent les sections, sous réserve de singularités d'ordre supérieur.

Il est intéressant d'examiner dans quelles conditions ils se coupent réellement, la nature de cette intersection étant visiblement liée, quoique de façon plus ou moins complexe, à celle des singularités de la surface. Or, la réalité de cette intersection exige que le rayon du cercle soit compris entre les demi-axes de l'ellipse, c'est-à-dire, d'après l'hypothèse reconnue suffisante $a^2 > b^2$,

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{1 - k^2 \nu^2 \frac{a^2 b^2}{c^4}} &< c^2 < \frac{a^2}{1 - k^2 \nu^2 \frac{a^2 b^2}{c^4}}, \\ b^2 - c^2 &< - \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 \nu^2 < a^2 - c^2, \\ \nu'' &< - \frac{a^2 b^2}{c^4} \nu^2 < \nu'. \end{aligned}$$

On voit, comme conséquence très remarquable, que l'un au moins des deux coefficients, ν'' , celui qui correspond au plus petit axe b , doit être négatif, et que le second peut l'être aussi.

Ceci concorde avec le résultat obtenu ci-dessus par l'étude du radical et peut, soit inspirer un choix de vérifications expérimentales, soit, du sens de ces vérifications, faire conclure au signe de ν' et ν'' pour la précision des résultats des Chapitres précédents.

(D₂) peut être représentée par

$$c^2(l^2 + m^2) - p^2 = 0$$

avec

$$a^2(b^2 - c^2)l^2 + b^2(a^2 - c^2)m^2 + a^2b^2n^2 = 0,$$

conique du plan de l'infini resserrée autour de Oz quand $a^2 - c^2$ et $b^2 - c^2$ tendent vers zéro.

(D₄) peut de même être représentée par

$$b^3 l^2 + a^2 m^2 - p^2 \left(1 - k^2 \nu^2 \frac{a^2 b^2}{c^4} \right) = 0$$

avec

$$b^2(c^2 - b^2)l^2 + a^2(c^2 - a^2)m^2 + a^2b^2n^2 - (a^2 + b^2)\frac{a^2b^2}{c^4}k^2v^2p^2 = 0.$$

(D₂) et (D₄) peuvent être représentées, sous forme paramétrique, par

$$(D_2) \quad l = \frac{p}{c} \cos \theta, \quad m = \frac{p}{c} \sin \theta;$$

$$(D_4) \quad bl = p \cos \theta \sqrt{1 - k^2 v^2 \frac{a^2 b^2}{c^4}}, \quad am = p \sin \theta \sqrt{1 - k^2 v^2 \frac{a^2 b^2}{c^4}};$$

d'où la seconde équation déduit $\frac{n}{p}$ en θ .

Achevons le calcul pour (D₂), la plus simple, et indépendante de v :

$$\frac{n^2}{p^2} = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) \sin^2 \theta.$$

Nous savons qu'on peut supposer $a > b$.

Alors : si $c^2 > a^2 > b^2$, $\frac{n}{p}$ est réel quel que soit θ ; si $a^2 > c^2 > b^2$, il y a pour θ des limites données par

$$\tan \theta = \pm \sqrt{-\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}} = \pm \frac{a}{b} \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$$

et annulant n ; si $a^2 > b^2 > c^2$, la développable est tout entière imaginaire.

On peut rapprocher ces résultats de ceux que nous a donnés le rapprochement de (D₁) et (D₃) pour la forme de la surface.

L'arête de rebroussement de la développable s'obtient sans peine sous forme paramétrique. Le plan tangent est en effet

$$(a) \quad ab(x \cos \theta + y \sin \theta) + ckz \sqrt{-v'' a^2 \cos^2 \theta - v' b^2 \sin^2 \theta} - abc = 0,$$

équation à laquelle il suffit d'adjoindre ses deux dérivées par rapport à θ :

$$(b) \quad ab(-x \sin \theta + y \cos \theta) + ckz \frac{(v'' a^2 - v' b^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{-v'' a^2 \cos^2 \theta - v' b^2 \sin^2 \theta}},$$

$$(c) \quad ab(-x \cos \theta - y \sin \theta) + ckz(v'' a^2 - v' b^2) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{-v'' a^2 \cos^2 \theta - v' b^2 \sin^2 \theta}} \right) = 0;$$

d'où

$$\begin{aligned}
 ckz \sqrt{-v'' a^2 \cos^2 \theta - v' b^2 \sin^2 \theta} + (v'' a^2 - v' b^2) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{-v'' a^2 \cos^2 \theta - v' b^2 \sin^2 \theta}} \right) &= abc, \\
 abx &= abc \cos \theta - ckz \cos \theta \sqrt{-v'' a^2 \cos^2 \theta - v' b^2 \sin^2 \theta} + ckz \frac{(v'' a^2 - v' b^2) \sin^2 \theta \cos \theta}{\sqrt{-v'' a^2 \cos^2 \theta - v' b^2 \sin^2 \theta}}, \\
 aby &= abc \sin \theta - ckz \sin \theta \sqrt{-v'' a^2 \cos^2 \theta - v' b^2 \sin^2 \theta} - ckz \frac{(v'' a^2 - v' b^2) \sin \theta \cos^2 \theta}{\sqrt{-v'' a^2 \cos^2 \theta - v' b^2 \sin^2 \theta}}.
 \end{aligned}$$

Les équations tangentielles des traces de la développable sur Oxz et Oyz s'obtiennent par l'élimination respective de m et de l entre les équations (D_2) :

$$(D_2)_1 \quad (b^2 - a^2)c^4 l^2 + a^2 b^2 c^2 n^2 + b^2(a^2 - c^2)p^2 = 0,$$

et de même, par échange de a et b ,

$$(D_2)_2 \quad (a^2 - b^2)c^4 m^2 + a^2 b^2 c^2 n^2 + a^2(b^2 - c^2)p^2 = 0.$$

On voit que le genre et l'espèce de ces coniques dépendent encore des signes des mêmes différences.

Il faut toutefois remarquer que par une telle conique réelle peut passer une développable imaginaire, comme par une courbe imaginaire, dualistique de la développable, peut passer un cône réel.

Cela dit, les trois cas auxquels nous venons d'être conduits donneront :

$c^2 > a^2 > b^2$,	$(D_2)_1$	—	+	—	hyperbole,
	$(D_2)_2$	+	+	—	ellipse réelle;
$a^2 > c^2 > b^2$,	$(D_2)_1$	—	+	+	hyperbole,
	$(D_2)_2$	+	+	—	ellipse réelle;
$a^2 > b^2 > c^2$,	$(D_2)_1$	—	+	+	hyperbole,
	$(D_2)_2$	+	+	+	ellipse imaginaire.

Le contour apparent de la surface sur le plan $y = 0$ est de même nature que pour la surface de notre première Partie, dont il n'y aurait qu'à reprendre les résultats.

III. — Ellipsoïde de référence.

L'équation (26) de notre surface, résolue par rapport à p^2 , donne

$$\begin{aligned}
 (28) \quad 2p^2 \left(1 - \frac{a^2 b^2}{c^4} k^2 v^2 \right) \\
 = a^2(m^2 + n^2) + b^2(n^2 + l^2) + \left(c^2 - \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 \right) (l^2 + m^2) \pm \sqrt{\dots},
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'équation d'un ellipsoïde

$$(29) \quad 2\rho^2 \left(1 - \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 \right) \\ = \left(b^2 + c^2 - \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 \right) l^2 + \left(c^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 \right) m^2 + (a^2 + b^2) n^2,$$

à partir duquel (comme plans tangents) les plans tangents à notre surface sont déterminés par $\pm$ le radical portant sur

$$\left[a^2(m^2 + n^2) + b^2(n^2 + l^2) + c^2(l^2 + m^2) - \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 (l^2 + m^2) \right]^2 \\ - 4 \left(1 - \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 \right) (l^2 + m^2 + n^2) (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2).$$

Mais les termes indépendants de v , transformés par l'identité de Lagrange

$$(l^2 + m^2 + n^2)(b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) \\ \equiv (bcl^2 + cam^2 + abn^2)^2 - \Sigma (c - b)^2 a^2 m^2 n^2,$$

contiennent tous $(b - c)^2$, ou $(c - a)^2$, ou $(a - b)^2$.

Le radical est donc de l'ordre de la plus grande des v , $b - c$, $c - a$, $a - b$, et les plans tangents à notre surface s'écartent des plans tangents à l'ellipsoïde de quantités de cet ordre.

En faisant $v = 0$, on trouve pour la surface de Fresnel l'ellipsoïde plus simple

$$2\rho^2 = (b^2 + c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2 + (a^2 + b^2)n^2.$$

La même idée pourrait être appliquée à la surface plus générale de la troisième Partie; nous n'y reviendrons pas.

Le résultat précédent suggère des hypothèses qui pourraient *conduire à des vérifications expérimentales*.

Cet ellipsoïde pourrait en effet être de révolution, non seulement dans le cas $b = a$ de la première Partie, c'est-à-dire autour de Oz , mais dans deux cas nouveaux :

1° Autour de Ox , si

$$v'' = - \frac{a^2 b^2}{c^4} v^2;$$

2° Autour de Oy , si

$$v' = - \frac{a^2 b^2}{c^4} v^2.$$

Ce sont, pour les deux coefficients de biréfringence ν' et ν'' de cette deuxième Partie, les hypothèses qu'on a rencontrées pour ν' dans la première.

Ce sont aussi les cas limites de la discussion du paragraphe précédent sur (D_1) et (D_2) .

IV. — Quelques plans tangents particuliers.

Le rôle joué dans l'équation de la surface par les trois constantes a, b, c suggère l'idée d'étudier les plans tangents de la forme

$$(I) \quad ax + by + cz - \rho^2 = 0,$$

ρ^2 étant positif ou négatif, mais ρ étant une inconnue du degré 1 d'homogénéité, et

$$(II) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{1}{\sigma} = 0,$$

σ étant une inconnue du degré 0 d'homogénéité.

1° Portons les coordonnées du plan (I) dans l'équation tangentielle, qui devient

$$(30) \quad \left(1 - k^2 \nu^2 \frac{a^2 b^2}{c^4}\right) \rho^8 - \rho^4 \left[3(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2) - \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{c^2} k^2 \nu^2 \right] + 3a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$

et formons la partie principale du radical pour

$$(27) \quad \begin{cases} a^2 = c^2(1 + \nu' k^2), \\ b^2 = c^2(1 + \nu'' k^2). \end{cases}$$

Nous obtenons, comme facteur de c^8 , en dehors des termes en ν ,

$$[(\nu' + \nu'')^2 - 3\nu'\nu'']k^4 + (\nu' + \nu'')\nu'\nu''k^6 + \nu'^2\nu''^2k^8.$$

Ces termes, quand ν' et ν'' partent de zéro, commencent par être négligeables devant le terme en $k^2\nu^2$, qui s'écrit

$$k^2\nu^2 a^2 b^2 c^4 \{ 3 + \dots \}.$$

De plus, la somme et le produit des racines ρ^4 sont positifs. Les quatre valeurs de ρ^2 , et par suite les plans tangents de direction (I), commencent par être réels. Ces plans resteront réels et distincts dans

tous les cas répondant à des phénomènes physiques où v' et v'' n'atteindront pas de valeurs comparables à v .

Il n'y aura donc pas de plans tangents doubles parallèles à cette direction, ce qui est d'accord avec nos résultats généraux.

2^e Passons aux plans tangents (II) donnés par

$$\begin{aligned}
 (31) \quad & \frac{1}{\sigma^4} \left(1 - k^2 v^2 \frac{a^2 b^2}{c^4} \right) \\
 & - \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{1 + v' k^2}{1 + v'' k^2} + 1 + v' k^2 + 1 + v'' k^2 + \frac{1 + v'' k^2}{1 + v' k^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{1 + v' k^2} + \frac{1}{1 + v'' k^2} - \frac{k^2 v^2 a^2 b^2}{c^4} \left(\frac{1}{1 + v' k^2} + \frac{1}{1 + v'' k^2} \right) \right] \\
 & \quad + \left[\frac{1 + v'' k^2}{1 + v' k^2} + \frac{1 + v' k^2}{1 + v'' k^2} + (1 + v' k^2)(1 + v'' k^2) \right] \\
 & \quad \times \left[3 - \frac{a^2 b^2 k^2}{c^2} \left(\frac{v'}{a^2} + \frac{v''}{b^2} \right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Si l'on considère v' et v'' comme au moins du premier ordre, on voit que, dans le coefficient de $\frac{1}{\sigma^2}$, les parties du premier ordre se détruisent et que ce coefficient se réduit à -6 au second ordre près.

Le terme indépendant de $\frac{1}{\sigma^2}$ se réduit de même à $+9$, et l'équation

$$\frac{1}{\sigma^4} - \frac{6}{\sigma^2} + 9 = 0$$

admet comme racines doubles $\pm\sqrt{3}$, ce qui est prévu, car, pour $b = c = a$, l'on doit bien avoir

$$\frac{x + y + z}{a} \mp \sqrt{3} = 0$$

pour vérifier l'équation tangentielle de la sphère

$$a^2(l^2 + m^2 + n^2) = p^2 \quad \text{avec} \quad l = m = n.$$

C'est donc de

$$\frac{1}{\sigma} = \sqrt{3}$$

que les solutions de l'équation complète diffèrent peu.

On peut évaluer, par un calcul assez laborieux, l'ordre de cette différence.

Si v' et v'' sont d'ordre supérieur à v , on peut réduire les racines à

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{3 - k^2 v^2 \pm k v \sqrt{3}}{1 - k^2 v^2}.$$

Si v' et v'' sont de l'ordre de v , ces coefficients modifieront simplement le terme en v au numérateur sans en changer l'ordre.

V. — Plans tangents singuliers.

Recherchons les singularités tangentielles réelles de la surface en essayant d'annuler les dérivées partielles du premier membre de $\varphi = 0$ (26) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial l} = l [& - (b^2 + c^2) p^2 + b^2 c^2 (l^2 + m^2 + n^2) \\ & + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 + \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 p^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial m} = m [& - (c^2 + a^2) p^2 + c^2 a^2 (l^2 + m^2 + n^2) \\ & + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 + \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 p^2], \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = n [- (a^2 + b^2) p^2 + a^2 b^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2],$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial p} = & 2 p^3 - p [a^2 (m^2 + n^2) + b^2 (n^2 + l^2) + c^2 (l^2 + m^2)] \\ & - 2 \frac{a^2 b^2}{c^4} k^2 v^2 p^3 + \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 p^2 (l^2 + m^2). \end{aligned}$$

Les plans tangents par l'origine ($p = 0$) sont imaginaires, comme le montre $\varphi = 0$. Ils donnent d'ailleurs

$$\begin{aligned} l [b^2 c^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2] &= 0 \quad \text{pour} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0, \\ m [c^2 a^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2] &= 0 \quad \text{pour} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0, \\ n [a^2 b^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2] &= 0 \quad \text{pour} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \\ (l^2 + m^2 + n^2) (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) &= 0 \quad \text{pour} \quad \varphi = 0. \end{aligned}$$

1° Si $l^2 + m^2 + n^2 = 0$, ce sont des plans tangents isotropes par l'origine :

a. S'ils vérifient en même temps $b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 = 0$, ils sont bien plans tangents doubles, et déterminés par les valeurs

$$\frac{l^2}{a^2(b^2 - c^2)} = \frac{m^2}{b^2(c^2 - a^2)} = \frac{n^2}{c^2(a^2 - b^2)};$$

b. S'ils ne vérifient pas $b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 = 0$, ils devraient vérifier $l = m = n = 0$.

2° Si $b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 = 0$, ils doivent de même vérifier $l^2 + m^2 + n^2 = 0$, ce sont les précédents.

Cherchons donc des plans tangents $p \neq 0$.

Si nous supposons aussi $n \neq 0$, la condition $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ donne à $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0$ la forme

$$\begin{aligned} 0 &= (c^2 - a^2) l [-p^2 + b^2(l^2 + m^2 + n^2)], \\ 0 &= (c^2 - b^2) m [-p^2 + a^2(l^2 + m^2 + n^2)]. \end{aligned}$$

Il n'y a pas à essayer d'annuler les deux crochets, ce qui, à cause de $a \neq b$, exige $l^2 + m^2 + n^2 = 0$ (plans tangents isotropes déjà étudiés).

Essayons d'abord $l = m = 0$, ce qui, dans $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 2a^2 b^2 n^2 - (a^2 + b^2)p^2 = 0, \\ \varphi &= \frac{-p^4}{4a^2 b^2} \left[(a^2 - b^2)^2 + 4k^2 \frac{a^4 b^4 v^2}{c^2} \right] \end{aligned}$$

et ne s'annulerait que pour une surface particulière, d'ailleurs imaginaire,

$$a^2 - b^2 = 2k \frac{a^2 b^2 v}{c^2} \sqrt{-1}.$$

Annuler l dans l'un et le crochet dans l'autre, ou annuler le crochet dans l'un et m dans l'autre, cela constitue deux cas symétriques, dont il suffit d'examiner le premier.

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= -(a^2 + b^2)p^2 + a^2 b^2 (m^2 + n^2) + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 + \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 p^2 \\ &= a^2 m^2 \left(c^2 - a^2 + \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 \right) + a^2 n^2 \left(b^2 - a^2 + \frac{a^2 b^2}{c^2} k^2 v^2 \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi &= p^4 - p^2[(a^2 + c^2)m^2 + (a^2 + b^2)n^2] \\ &\quad + a^2(c^2m^2 + b^2n^2)(m^2 + n^2) - \frac{a^2b^2}{c^4}k^2v^2p^2(p^2 - c^2m^2) = 0 \\ &= a^2(m^2 + n^2)\frac{a^2b^2}{c^4}k^2v^2[(c^2 - a^2)m^2 - a^2n^2].\end{aligned}$$

$n^2 = -m^2$ donne dans la première $c^2 - a^2 - b^2 + a^2 \neq 0$ à cause de $c^2 - b^2 \neq 0$.

$a^2n^2 = (c^2 - a^2)m^2$ donne dans la première la condition

$$\begin{aligned}(32) \quad (1 + v'k^2)v'k^2 &= \frac{k^2v^2a^2b^2}{c^4}, \\ \frac{l^2}{0} = \frac{m^2}{a^2} = \frac{n^2}{c^2 - a^2} = \frac{m^2 + n^2}{c^2} = \frac{p^2}{a^2c^2}, \\ ay \pm z\sqrt{c^2 - a^2} &= ac, \\ y \pm z\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} &= c, \\ \frac{a}{c}y \pm z\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} &= a, \\ y\sqrt{1 + v'k^2} \pm zk\sqrt{-v'} &= a.\end{aligned}$$

A cette solution doit se joindre la solution symétrique, par échange de a, l avec b, m , exigeant une surface où

$$(33) \quad (1 + v'k^2)v''k^2 = k^2\frac{v^2a^2b^2}{c^4}.$$

Enfin, une surface réunissant les deux conditions (32), (33) exigerait

$$\begin{aligned}(1 + v'k^2)v'' &= (1 + v''k^2)v' = v^2\frac{a^2b^2}{c^4}, \\ k^2v'^2 + v' - v^2\frac{a^2b^2}{c^4} &= 0, \\ v' = v'' &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4k^2v^2\frac{a^2b^2}{c^4}}}{2k^2} \pm \frac{-1 \pm \left(1 + 2\frac{a^2b^2k^2v^2}{c^4} + \dots\right)}{2k^2};\end{aligned}$$

La seule solution physiquement admissible est celle qui, correspondant au signe +, est infiniment petite avec v , savoir :

$$(34) \quad v' = v'' = \frac{a^2b^2}{c^4}v^2 - \dots$$

Mais ce cas a déjà été exclu ($a^2 \neq b^2$).

La condition $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ peut être vérifiée par $n = 0$, mais alors

$$\varphi = \left[p^2 \left(1 - \frac{a^2 b^2 k^2 v^2}{c^4} \right) - (b^2 l^2 + a^2 m^2) \right] [p^2 - c^2 (l^2 + m^2)].$$

Il faut donc annuler l'un ou l'autre de ces deux facteurs.

Le second sera étudié tout à l'heure. L'annulation du premier donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial l} &= l b^2 [-p^2 + c^2 (l^2 + m^2)], \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial m} &= m a^2 [-p^2 + c^2 (l^2 + m^2)]. \end{aligned}$$

Si donc nous supposons ce second facteur $\neq 0$, nous ne trouvons comme solution que le plan $l = m = n = 0$ de l'infini qui est, en effet, un plan singulier de la surface, sans intérêt au point de vue physique.

Étudions en détail les solutions

$$n = 0, \quad p^2 - c^2 (l^2 + m^2) = 0,$$

communes à notre surface, à celle de Fresnel, et au cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon c . Dans quelles conditions ces plans peuvent-ils être singuliers pour notre surface?

Posons, pour le voir,

$$l = \frac{p}{c} \cos \theta, \quad m = \frac{p}{c} \sin \theta,$$

et cherchons à vérifier $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial l} &= \frac{p^3}{c} \cos \theta \left[b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta - c^2 \left(1 - k^2 v^2 \frac{a^2 b^2}{c^4} \right) \right] = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial m} &= \frac{p^3}{c} \sin \theta \left[b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta - c^2 \left(1 - k^2 v^2 \frac{a^2 b^2}{c^4} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons d'abord

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad l = 0 \quad \text{avec} \quad v' = -v^2 \frac{a^2 b^2}{c^4},$$

déjà rencontré dans une étude antérieure, puis

$$\theta = 0 \quad \text{ou} \quad m = 0 \quad \text{avec} \quad v'' = -v^2 \frac{a^2 b^2}{c^4}$$

également rencontré.

Les facteurs $\cos \theta \sin \theta$ étant supposés $\neq 0$, il reste à annuler le second facteur commun aux deux dérivées, qui donne

$$\tan^2 \theta = \frac{b^2 c^2 - c^4 + k^2 a^2 b^2 v^2}{c^4 - a^2 b^2 k^2 v^2 - a^2 c^2} = - \frac{c^4 v'' + a^2 b^2 v^2}{a^2 b^2 v^2 + c^4 v'}.$$

Le cas $b = a$ ($v' = v''$) donne $\tan^2 \theta = -1$, nous ne devons donc pas trouver de solution dans la première Partie.

La réalité de θ exige que $\frac{a^2 b^2}{c^4} v^2$ soit compris entre $-v''$ et $-v'$.

On peut supposer $a > b$, nous l'avons dit.

Alors, la double condition sera

$$(35) \quad -v' < \frac{a^2 b^2}{c^4} v^2 < -v''.$$

Ce sont les conditions trouvées au paragraphe II par la discussion de (D_1) et (D_3) .

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

Il nous reste à généraliser et à compléter les théories précédentes. Nous le ferons en introduisant le système d'ondes le plus général indiqué par M. Boussinesq dans son Mémoire déjà cité ⁽¹⁾ (*Contribution à l'optique cristalline*). Ce système est le suivant :

$$(36) \quad \begin{cases} a\xi'' + f\eta'' + e\zeta'' + 2a'\xi' + f'\eta' + e'\zeta' + (e''\xi' - f''\eta') = \Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ f\xi'' + b\eta'' + d\zeta'' + f'\xi' + 2b'\eta' + d'\zeta' + (f''\xi' - d''\eta') = \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ e\xi'' + d\eta'' + c\zeta'' + e'\xi' + d'\eta' + 2c'\zeta' + (d''\eta' - e''\xi') = \Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

ξ, η, ζ désignent toujours les composantes, suivant Ox, Oy, Oz , du déplacement de la molécule vibrante.

a, b, c sont trois paramètres spécifiques ou propres au milieu, respectivement égaux à $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ des Chapitres précédents.

Δ_2 désigne le paramètre différentiel du second ordre de Lamé, θ la dilatation cubique.

a', b', c', d', e', f' sont six coefficients de résistance caractérisant l'absorption dont l'étude faisait l'objet de ce Mémoire, consacré aux milieux translucides (et non complètement transparents). Ils seront nuls pour nous.

De plus, la nécessité de les réduire à trois (a', b', c') obligeait à un choix d'axes coordonnés laissant les six coefficients a, b, c, d, e, f .

Au contraire, leur annulation, dans notre étude de milieux tous transparents, nous permet un autre choix d'axes annulant d, e, f .

Enfin les coefficients d'', e'', f'' , réduits à zéro dans ce Mémoire

(1) 6^e série, t. VII, 1911, p. 317.

(p. 326) comme étrangers à l'absorption, vont être au contraire essentiels pour nous et concourir, avec a , b , c , à constituer le système le plus général de notre étude.

Ce système va nous fournir, comme ceux des précédents, quatre Chapitres de mêmes titres.

Le complément annoncé, formant un cinquième Chapitre nouveau par rapport aux deux parties précédentes, aura pour objet d'étendre les résultats de cette analyse, où les ondes planes étaient supposées *latéralement indéfinies*, au cas de la réalité, qui est celui des ondes *planes latéralement limitées*, en montrant que les conséquences physiques subsistent.

Nous partons donc des équations

$$(37) \quad \begin{cases} a \xi'' + (e'' \zeta' - f'' \eta') = \Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ b \eta'' + (f'' \xi' - d'' \zeta') = \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ c \zeta'' + (d'' \eta' - e'' \xi') = \Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz}, \end{cases}$$

que nous cherchons à vérifier par des solutions symboliques de forme pendulaire

$$(38) \quad \frac{\xi}{L'} = \frac{\eta}{M'} = \frac{\zeta}{N'} = I e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}} = IE,$$

où, pour abréger, l'exponentielle sera représentée par E .

Les coefficients L , M , N de M . Boussinesq deviennent ici les constantes réelles l , m , n , coefficients de l'équation du plan de l'onde. L' , M' , N' , I sont des constantes imaginaires à déterminer. Toute solution du système sera accompagnée de la solution conjuguée et la somme des deux nous donnera la solution réelle et pendulaire du problème.

Je porte ces expressions dans les équations du mouvement, dont la première devient, après suppression des facteurs IE ,

$$\begin{aligned} & -a k^2 L' + e'' k \sqrt{-1} N' - f'' k \sqrt{-1} M' \\ & = -k^2 (l^2 + m^2 + n^2) L' + k^2 l (l L' + m M' + n N') \end{aligned}$$

ou

$$0 = [-(l^2 + m^2 + n^2) + l^2 + a] L' + \left(l m + \frac{f''}{k} \sqrt{-1} \right) M' + \left(n l - \frac{e''}{k} \sqrt{-1} \right) N'.$$

Ces trois équations peuvent donc s'écrire

$$(39) \quad \begin{cases} \Phi L' + X M' + \Psi N' = 0, \\ \Phi_1 L' + X_1 M' + \Psi_1 N' = 0, \\ \Phi_2 L' + X_2 M' + \Psi_2 N' = 0, \end{cases}$$

si les symboles $\Phi, \dots, \Psi_2$ ont les significations

$$(40) \quad \begin{cases} \Phi = -(l^2 + m^2 + n^2) + l^2 + a \\ \Phi_1 = lm - \nu_2 \sqrt{-1} \\ \Phi_2 = nl + \nu_1 \sqrt{-1} \end{cases} \begin{cases} X = lm + \nu_2 \sqrt{-1} \\ X_1 = -(l^2 + m^2 + n^2) + m^2 + b \\ X_2 = mn - \nu \sqrt{-1} \end{cases} \begin{cases} \Psi = nl - \nu_1 \sqrt{-1}, \\ \Psi_1 = mn + \nu \sqrt{-1}, \\ \Psi_2 = -(l^2 + m^2 + n^2) + n^2 + c \end{cases}$$

avec

$$\frac{d''}{k} = \nu, \quad \frac{e''}{k} = \nu_1, \quad \frac{f''}{k} = \nu_2.$$

Les ν détruisent la symétrie du déterminant de ces neuf polynomes $\Phi, \dots, \Psi_2$, laquelle existait avec $\varphi, \dots, \psi_2$ du Mémoire de M. Boussinesq, et vont, d'une part, compliquer beaucoup les résultats, notamment donner à l'équation de la surface des ondes sa forme la plus générale (Chapitre III), principal objet du présent travail, et renfermant les précédentes ; d'autre part nécessiter, pour le cas des ondes planes latéralement limitées, une analyse un peu différente de celle de M. Boussinesq (Chapitre V).

Les lignes du déterminant, au lieu d'être identiques aux colonnes, en sont respectivement les conjuguées.

La condition de compatibilité des équations linéaires et homogènes s'écrit

$$(41) \quad \begin{vmatrix} \varphi & \chi + \nu_2 \sqrt{-1} & \psi - \nu_1 \sqrt{-1} \\ \chi - \nu_2 \sqrt{-1} & \chi_1 & \psi_1 + \nu \sqrt{-1} \\ \psi + \nu_1 \sqrt{-1} & \psi_1 - \nu \sqrt{-1} & \psi_2 \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$(42) \quad \begin{cases} \Phi = \varphi, & X = \chi + \nu_2 \sqrt{-1}, & \Psi = \psi - \nu_1 \sqrt{-1}, \\ \Phi_1 = \varphi_1 - \nu_2 \sqrt{-1}, & X_1 = \chi_1, & \Psi_1 = \psi_1 + \nu \sqrt{-1}, \\ \quad = \chi - \nu_2 \sqrt{-1}, & & \\ \Phi_2 = \varphi_2 + \nu_1 \sqrt{-1}, & X_2 = \chi_2 - \nu \sqrt{-1}, & \Psi_2 = \psi_2, \\ \quad = \psi + \nu_1 \sqrt{-1}, & \quad = \psi_1 - \nu \sqrt{-1}, & \end{cases}$$

et introduisant les polynomes mêmes $\varphi, \dots, \psi_2$ de M. Boussinesq, et les ν, ν_1, ν_2 qui distinguent notre étude.

En développant, il vient

$$\begin{aligned} 0 = & \varphi \chi_1 \psi_2 - \varphi(\psi_1^2 + \nu^2) - \chi_1(\psi^2 + \nu_1^2) - \psi_2(\chi^2 + \nu_2^2) \\ & + (\psi_1 + \nu\sqrt{-1})(\psi + \nu_1\sqrt{-1})(\chi + \nu_2\sqrt{-1}) \\ & + (\psi_1 - \nu\sqrt{-1})(\psi - \nu_1\sqrt{-1})(\chi - \nu_2\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Les deux dernières lignes contiennent deux expressions imaginaires conjuguées et l'équation se réduit à

$$\begin{aligned} 0 = & (l^2 + m^2 + n^2)(al^2 + bm^2 + cn^2) \\ & - [a(b+c)l^2 + b(c+a)m^2 + c(a+b)n^2] + abc \\ & - [(\nu l + \nu_1 m + \nu_2 n)^2 - (\nu^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2)(l^2 + m^2 + n^2) + a\nu^2 + b\nu_1^2 + c\nu_2^2]. \end{aligned}$$

Pour la simplicité et l'homogénéité des calculs ultérieurs, qui devront d'ailleurs redonner comme cas particulier les résultats des première et deuxième Parties de ce travail, nous allons :

1° Revenir des notations du Mémoire de M. Boussinesq à celles de sa *Théorie analytique de la chaleur*, c'est-à-dire remplacer a, b, c par $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$;

2° Poser

$$\nu = \frac{\partial \alpha_1}{abc}, \quad \nu_1 = \frac{\partial \beta_1}{abc}, \quad \nu_2 = \frac{\partial \gamma_1}{abc} \quad (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1),$$

ce qui revient à considérer les trois coefficients de dissymétrie ν, ν_1, ν_2 comme étant, au facteur $\frac{1}{abc}$ près (introduit pour l'homogénéité), les projections sur les trois axes coordonnés d'un segment δ , de même ordre de petitesse que ν, ν_1, ν_2 , et faisant avec ces axes des angles dont les cosinus sont $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. L'angle de cet *axe de dissymétrie* avec la normale au plan de l'onde, dont nous représenterons les cosinus par α, β, γ , avec

$$l = \frac{\alpha}{\omega}, \quad m = \frac{\beta}{\omega}, \quad n = \frac{\gamma}{\omega},$$

sera donc donné par

$$\cos \theta = \alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1.$$

Alors la condition de compatibilité des équations linéaires devient

$$(43) \quad 0 = (l^2 + m^2 + n^2) \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) - \left[\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{l^2}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \frac{m^2}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{n^2}{c^2} \right] + \frac{1}{a^2 b^2 c^2} - \frac{\delta^2}{a^2 b^2 c^2} \left[(l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1)^2 - (l^2 + m^2 + n^2) + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right].$$

CHAPITRE II.

ÉQUATION AUX VITESSES DE PROPAGATION.

Pour avoir l'équation aux vitesses, je remplace l, m, n par leurs valeurs :

$$l = \frac{\alpha}{\omega}, \quad m = \frac{\beta}{\omega}, \quad n = \frac{\gamma}{\omega},$$

et il vient

$$(44) \quad 0 = \frac{1}{\omega^4} \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) - \frac{1}{a^2 b^2 c^2 \omega^2} [(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2 - \delta^2 \sin^2 \theta] + \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \left[1 - \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right],$$

homogène et de degré -6 puisque a, b, c, δ, ω sont de degré 1 et $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ de degré 0.

Faisons successivement dans cette équation $\omega^2 = a^2, b^2, c^2$.

Pour cela écrivons-la ainsi

$$f(\omega) = \frac{1}{\omega^4} \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) - \frac{1}{\omega^2} \left[\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{\alpha^2}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \frac{\beta^2}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{\gamma^2}{c^2} \right] + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a^2 b^2 c^2} + \delta^2 \left[\frac{\sin^2 \theta}{a^2 b^2 c^2 \omega^2} - \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right].$$

Alors

$$f(a) = \frac{\alpha^2}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) + \frac{\delta^2}{a^2 b^2 c^2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{a^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right]$$

et, par permutations circulaires,

$$f(b) = \frac{\beta^2}{b^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{\delta^2}{a^2 b^2 c^2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{b^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right],$$

$$f(c) = \frac{\gamma^2}{c^2} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) + \frac{\delta^2}{a^2 b^2 c^2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{c^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right].$$

Si l'on suppose $a^2 > b^2 > c^2$, c'est-à-dire $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}$, et δ assez petit pour que les premiers termes donnent leurs signes, on aura

$$f(a) > 0, \quad f(b) < 0, \quad f(c) > 0,$$

et les deux racines ω^2 de l'équation sont séparées par a^2 , b^2 , c^2 , *comme dans le cas de Fresnel*.

Sans avoir un résultat aussi complet, on aura encore $f(b) < 0$, c'est-à-dire les racines ω^2 séparées par b^2 (et, par suite, $\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2}$ de signe contraire pour les deux, ce qui entraînerait la description des ellipses en sens contraire), tant que les éléments du phénomène vérifieront la relation

$$\frac{\delta^2}{a^2 b^2 c^2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{b^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] < \frac{\beta^2}{b^2} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right),$$

c'est-à-dire en particulier dans le cas où

$$\frac{\sin^2 \theta}{b^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) < 0,$$

et, dans le cas où cette expression est > 0 , si

$$\delta^2 < a^2 b^2 c^2 \frac{\frac{\beta^2}{b^2} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)}{\frac{\sin^2 \theta}{b^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right)}.$$

Enfin, d'une manière générale, la condition de réalité s'écrit

$$\delta^4 \sin^4 \theta - 2 \left\{ [(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2] \sin^2 \theta \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) a^2 b^2 c^2 \right\} \delta^2 \\ + [(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2]^2 - 4 a^2 b^2 c^2 \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \geq 0.$$

Il faut donc que δ^2 soit extérieur aux racines de ce trinôme, qui

peuvent être réelles, car pour

$$\partial^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} [(b^2 + c^2)\alpha^2 + (c^2 + a^2)\beta^2 + (a^2 + b^2)\gamma^2] < \frac{1}{\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}}$$

(circonstances effectivement réalisables), l'expression sera bien négative.

Le seul cas de la pratique est celui où il est assez voisin de zéro pour ne pas dépasser la plus petite racine supposée positive.

CHAPITRE III.

CONSÉQUENCES PHYSIQUES.

I. — Résolution symétrique du système d'équations par le déterminant adjoint.

Le phénomène physique est, ici encore, analytiquement traduit par la forme des trajectoires, c'est-à-dire par la résolution des équations linéaires et homogènes (39), que nous venons de rendre compatibles et qui fournissent des valeurs proportionnelles à L' , M' , N' .

Obtenons d'abord ces valeurs sous une forme symétrique utilisant les trois équations (39), dont aucune *a priori* ne joue un rôle à part.

A cet effet, adoptant un moment, pour leur déterminant, les notations classiques du déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ c' & b & a'' \end{vmatrix},$$

nous remarquerons que, dans leur déterminant Δ , les éléments symétriques par rapport à la diagonale sont, non plus égaux, mais imaginaires conjugués : nous désignerons, suivant l'usage, par b_0 la conjuguée de b , et nous aurons alors

$$(39 \text{ bis}) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b'_0 \\ b''_0 & a' & b \\ b' & b_0 & a'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a = \varphi, \\ a' = \chi_1, \\ a'' = \psi_2, \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b = \psi_1 + \nu \sqrt{-1}, \\ b' = \psi + \nu_1 \sqrt{-1}, \\ b'' = \chi + \nu_2 \sqrt{-1}, \end{vmatrix}$$

On sait alors que les solutions du système (39) écrit,

$$\begin{aligned} aL' + b''M' + b'_0N' &= 0, \\ b''_0L' + a'M' + bN' &= 0, \\ b'L' + b_0M' + a''N' &= 0, \end{aligned}$$

sont les mineurs du troisième degré déduits de la matrice

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & \lambda \\ b''_0 & a' & b & \lambda' \\ b' & b_0 & a'' & \lambda'' \end{vmatrix}$$

avec les signes $+$, $-$, $+$, les paramètres λ , λ' , λ'' étant des indéterminées surabondantes. Si nous les prenons égales à l , m , n , nous aurons

$$\begin{aligned} L' &= lA + mB''_0 + nB', \\ M' &= lB'' + mA' + nB_0, \\ N' &= lB'_0 + mB + nA'', \end{aligned}$$

les grandes lettres désignant, suivant l'usage, les mineurs de Δ , pris avec les signes convenables dans le développement de Δ ou les éléments du déterminant adjoint. Mais ici, en remplaçant les éléments de Δ par les notations du présent travail, c'est-à-dire (39 *bis*) par (40) et (42), il vient

$$(39 \text{ ter}) \begin{cases} A = m^2 \left(c - \frac{1}{\omega^2} \right) + n^2 \left(b - \frac{1}{\omega^2} \right) + \left(b - \frac{1}{\omega^2} \right) \left(c - \frac{1}{\omega^2} \right) - v^2, \\ B''_0 = lm \left(\frac{1}{\omega^2} - c \right) - v\gamma_1 - \left[nlv + mnv_1 + \left(-\frac{1}{\omega^2} + n^2 + c \right) v_2 \right] \sqrt{-1}, \\ B' = nl \left(\frac{1}{\omega^2} - b \right) - v_2v + \left[mnv_2 + lm v + \left(-\frac{1}{\omega^2} + m^2 + b \right) v_1 \right] \sqrt{-1}. \end{cases}$$

En formant alors L' , remarquons que

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\omega^2},$$

et que

$$lv + mv_1 + nv_2 = \frac{\alpha v + \beta v_1 + \gamma v_2}{\omega} = \frac{\delta_1}{\omega},$$

δ_1 , étant la projection de l'axe de dissymétrie (de composantes v , v_1 , v_2) sur la normale au plan de l'onde (de cosinus α , β , γ), toujours au facteur $\frac{1}{abc}$ près (Chap. I).

Introduisons en outre les trois coefficients

$$a - \frac{1}{\omega^2} = \nu',$$

$$b - \frac{1}{\omega^2} = \nu'_1,$$

$$c - \frac{1}{\omega^2} = \nu'_2,$$

qui ont des sens analogues à ν' et ν'' de la deuxième Partie. Nous aurons alors

$$\begin{aligned} L' &= l\nu'_1\nu'_2 - \nu \frac{\partial_1}{\omega} + (n\nu_1\nu'_1 - m\nu_2\nu'_2) \sqrt{-1} \\ &= l\nu'_1\nu'_2 - \alpha \frac{\partial\partial_1}{\omega} + \partial(n\beta\nu'_1 - m\gamma\nu'_2) \sqrt{-1} \end{aligned}$$

et, par permutations circulaires, M' et N' , que j'appelle

$$L' = l' + l'_1 \sqrt{-1},$$

$$M' = m' + m'_1 \sqrt{-1},$$

$$N' = n' + n'_1 \sqrt{-1}$$

et, par suite,

$$\xi = (l' + l'_1 \sqrt{-1}) e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}} = L' e^{h\sqrt{-1}},$$

dont on doit prendre la partie réelle

$$\xi = l' \cos \theta - l'_1 \sin \theta,$$

$$\eta = m' \cos \theta - m'_1 \sin \theta,$$

$$\zeta = n' \cos \theta - n'_1 \sin \theta.$$

C'est la forme la plus générale d'une vibration elliptique. Nous n'en poursuivrons pas l'étude : on la particularisera dans les hypothèses fournies par l'expérience. Nous nous bornerons aux remarques suivantes :

I. D'abord, les propriétés du déterminant adjoint $(^1)$ se traduisent par les formules ci-après, qui, pour le cas de $b_0 = b$, $b'_0 = b'$, $b''_0 = b''$, réels, donnent celles qu'on utilise dans l'étude de l'équation en S des

(¹) SALMON, *Algèbre*, p. 45. Gauthier-Villars, 1890.

Journ. de Math. (6^e série), tome X. — Fasc. I, 1914.

quadriques

$$\begin{aligned} A'A'' - BB_0 &= a \quad \Delta = 0, \\ B'B'' - AB_0 &= b \quad \Delta = 0, \\ B'_0 B''_0 - AB &= b_0 \Delta = 0 \end{aligned}$$

et deux autres groupes par permutations.

Alors, en introduisant les modules, puisque A, A', A'' sont réels,

$$\begin{cases} A'A'' = |B|^2 \\ |B'| |B''| = A |B| \end{cases}$$

et les autres qui constituent, entre les modules, les relations mêmes du déterminant symétrique. Alors, les valeurs proportionnelles

$$\frac{L'}{A} = \frac{M'}{B''} = \frac{N'}{B'_0}$$

et leurs conjuguées

$$\frac{L'_0}{A} = \frac{M'_0}{B''_0} = \frac{N'_0}{B'}$$

donnent, en multipliant membre à membre,

$$\frac{|L'|^2}{A} = \frac{|M'|^2}{A'} = \frac{|N'|^2}{A''}$$

ou

$$\frac{L'}{|B'B''|} = \frac{M'}{|B''B|} = \frac{N'}{|BB'|}.$$

II. Les expressions L', M', N' contiennent les deux systèmes de coefficients δ (et sa projection δ_1) et (v', v'_1, v'_2) .

Mais l', m', n' sont composés de deux termes du second ordre, l'un par rapport à (v', v'_1, v'_2) , l'autre par rapport à δ .

Au contraire, l'_1, m'_1, n'_1 , sont composés d'un seul terme produit de δ par un facteur du premier ordre en (v', v'_1, v'_2) . D'où l'interprétation de ces résultats dans deux cas opposés.

Le premier est celui des expériences étudiées dans la première et la deuxième Partie, qu'il contient comme cas particulier. C'est celui où a, b, c sont peu différents et où, par suite, les racines $\frac{1}{\omega^2}$ de l'équation (44) aux vitesses en diffèrent peu. C'est le cas où v', v'_1, v'_2 sont très petits, et même, dans la réalité, d'ordre supérieur à δ . Alors, l', m', n' sont d'ordre 2 et l'_1, m'_1, n'_1 d'ordre supérieur à 2.

Le second, tout à fait nouveau, est celui où les différences de a, b, c entre eux (et par suite avec $\frac{1}{\omega^2}$) seraient finies par rapport à l'axe de dissymétrie δ , supposé du premier ordre, c'est-à-dire où ν', ν'_1, ν'_2 seraient finies.

Alors, l', m', n' sont finies, et l'_1, m'_1, n'_1 du premier ordre.

Pour pousser plus loin l'étude de ces deux cas, nous allons renoncer à la symétrie observée dans ce paragraphe, et prendre par exemple les deux premières équations, isolant ainsi l'axe Oz , ce qui donnera les projections des trajectoires plus facilement sur Oxy , et obtenant

$$\frac{L'}{B'} = \frac{M'}{B_0} = \frac{N'}{A''}.$$

les termes du premier ordre ne disparaîtront plus ici comme dans la résolution symétrique.

II. — Résolution dissymétrique et interprétation physique.

Premier cas. — C'est, comme nous l'avons dit, celui où ν', ν'_1, ν'_2 sont du second ordre par rapport à δ supposé du premier. Mais alors les formules (39 *ter*) donnent par permutation

$$\begin{aligned} A'' &= l^2 \nu'_1 + m^2 \nu' + \nu' \nu'_1 - \nu_2^2, \\ B' &= -n l \nu'_1 - \nu_2 \nu' + \left(m \frac{\partial_1}{\omega} + \nu'_2 \right) \sqrt{-1}, \\ B_0 &= -m n \nu' - \nu_1 \nu_2 - \left(l \frac{\partial_1}{\omega} + \nu'_1 \right) \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

qui ont leurs parties réelles du second ordre. On peut donc prendre, en négligeant le second ordre dans les deux dernières et le quatrième dans la première,

$$\frac{L'}{m \delta_1 \sqrt{-1}} = \frac{M'}{-l \delta_1 \sqrt{-1}} = \frac{N'}{(l^2 \nu'_1 + m^2 \nu' - \nu_2^2) \omega},$$

d'où

$$(45) \quad \begin{cases} \xi = -m \delta_1 \cos \theta, \\ \eta = l \delta_1 \sin \theta, \\ \zeta = (l^2 \nu'_1 + m^2 \nu' - \nu_2^2) \omega \cos \theta, \end{cases}$$

d'où

$$l \xi + m \eta = 0,$$

ou

$$l\tilde{\xi} + m\eta + n\zeta = 0$$

au second ordre près.

Nous retrouvons la *quasi-transversalité des vibrations, qui au second ordre près s'effectuent dans le plan de l'onde et rectilignement.*

Second cas. — Supposons au contraire les différences des a, b, c entre eux (et par suite avec $\frac{1}{\omega^2}$) finies par rapport à l'axe de dissymétrie δ supposé du premier ordre, c'est-à-dire v', v'_1, v'_2 finies.

Ici nous poserons, avec M. Boussinesq [p. 334 du Mémoire, formules (43)],

$$(46) \quad L' = l'(1 + l''\sqrt{-1}), \quad M' = m'(1 + m''\sqrt{-1}), \quad N' = n'(1 + n''\sqrt{-1}),$$

ce qui, comme première approximation, se réduira à

$$(47) \quad L' = l'e^{l''\sqrt{-1}}, \quad M' = m'e^{m''\sqrt{-1}}, \quad N' = n'e^{n''\sqrt{-1}}$$

(car nous avons montré que l'', m'', n'' sont du premier ordre par rapport à δ), les parenthèses contenant les deux premiers termes du développement des exponentielles.

l', m', n' sont donc les modules de L', M', N' , et l'on a, comme nous l'avons montré,

$$\frac{l'}{\sqrt{A}} = \frac{m'}{\sqrt{A'}} = \frac{n'}{\sqrt{A''}}.$$

D'autre part les valeurs proportionnelles $\frac{L'}{B'} = \frac{M'}{B_0} = \frac{N'}{A''}$ ou

$$\frac{l'e^{l''\sqrt{-1}}}{B'} = \frac{m'e^{m''\sqrt{-1}}}{B_0} = \frac{n'e^{n''\sqrt{-1}}}{A''}$$

peuvent s'écrire

$$\frac{l'e^{(l''-n'')\sqrt{-1}}}{B'} = \frac{m'e^{(m''-n'')\sqrt{-1}}}{B_0} = \frac{n'}{A''}.$$

Mais on peut prendre pour ces rapports la valeur 1, puisque les termes du dernier sont réels, et supposer $n'' = 0$, ce qui ne fera qu'un changement de phase pour les mouvements vibratoires. On

prendra donc

$$\begin{aligned} l'(1 + l''\sqrt{-1}) &= B', \\ m'(1 + m''\sqrt{-1}) &= B_0, \\ n' &= A'', \quad n'' = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} l' &= nl \left(\frac{1}{\omega^2} - b \right) = -nlv'_1, \\ m' &= mn \left(\frac{1}{\omega^2} - a \right) = -mnv', \\ n' &= l^2 \left(b - \frac{1}{\omega^2} \right) + m^2 \left(a - \frac{1}{\omega^2} \right) + \left(a - \frac{1}{\omega^2} \right) \left(b - \frac{1}{\omega^2} \right) - v_2^2 \\ &= l^2 v'_1 + m^2 v' + v' v'_1 \quad (\text{en négligeant } v_2^2), \\ l'l'' &= m \frac{\delta_1}{\omega} + v_1 v'_1, \\ m'm'' &= l \frac{\delta_1}{\omega} - v v', \\ n'' &= 0. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement, obtenues, comme nous l'avons déjà dit, en prenant pour les composantes du déplacement les demi-sommes des deux solutions imaginaires conjuguées

$$\xi = l' e^{l''\sqrt{-1}} e^{k(l-tx-my-nz)\sqrt{-1}} = l' e^{l''\sqrt{-1}} e^{\theta\sqrt{-1}} = l' e^{(\theta+l'')\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire

$$(48) \quad \begin{cases} \xi = l' \cos(\theta + l''), \\ \eta = m' \cos(\theta + m''), \\ \zeta = n' \cos\theta. \end{cases}$$

C'est la forme classique de la vibration elliptique dans le plan

$$\begin{vmatrix} \xi & l' \cos l'' & l' \sin l'' \\ \eta & m' \cos m'' & m' \sin m'' \\ \zeta & n' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

que, à notre approximation, nous pouvons et devons réduire à

$$\begin{vmatrix} \xi & l' & l'l'' \\ \eta & m' & m'm'' \\ \zeta & n' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

et sur le cylindre elliptique projetant l'ellipse trajectoire sur le plan

de xy auquel nous avons fait jouer un rôle à part. On peut l'écrire

$$\left(\xi \frac{m''}{l''} - \eta \frac{l''}{m'}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{l'} - \frac{\eta}{m'}\right)^2 = (l'' - m'')^2.$$

Ces formules tomberaient en défaut dans l'hypothèse très particulière où $l'' = m''$, c'est-à-dire où la vibration, dans le plan $\frac{\xi}{l'} = \frac{\eta}{m'}$, serait donnée par

$$(49) \quad \begin{cases} \xi = l' \cos(\theta + l''), \\ \eta = m' \cos(\theta + l''), \\ \zeta = n' \cos \theta. \end{cases}$$

Tout d'abord cette hypothèse est celle où l'on aurait, entre les constantes, la relation

$$\frac{l' l''}{l'} = \frac{m' m''}{m'}$$

ou

$$0 = \left(\frac{n^2}{v_1^2} + \frac{l^2}{v'} + 1 \right) \frac{\partial_1}{\omega} - n v_2 = 0.$$

Elle serait, en particulier, réalisée si l'axe de dissymétrie était situé dans le plan Oxy ($v_2 = 0$) et dans le plan de l'onde ($\delta_1 = 0$), c'est-à-dire sur leur intersection.

En second lieu, le rayon vecteur r de cette ellipse est donné par

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (l'^2 + m'^2) \cos^2(\theta + l'') + n'^2 \cos^2 \theta,$$

et les maxima et minima correspondant aux axes de l'ellipse vérifient la relation

$$0 = r \frac{dr}{d\theta} = -(l'^2 + m'^2) \cos(\theta + l'') \sin(\theta + l'') - n'^2 \cos \theta \sin \theta,$$

ou, à notre approximation, en remplaçant $\cos 2l''$ par 1 et $\sin 2l''$ par $2l''$,

$$0 = (l'^2 + m'^2) (\sin 2\theta + 2l'' \cos 2\theta) + n'^2 \sin 2\theta,$$

$$\tan 2\theta = - \frac{2l''(l'^2 + m'^2)}{l'^2 + m'^2 + n'^2} = \tan(\pi - 2\varepsilon),$$

ε étant, à notre approximation, donné par

$$(50) \quad \varepsilon = \frac{l''(l'^2 + m'^2)}{l'^2 + m'^2 + n'^2},$$

d'où, pour les directions des axes,

$$\begin{aligned} 2\theta &= \pi - 2\varepsilon & \text{et} & & 2\theta &= 2\pi - 2\varepsilon, \\ \theta &= \frac{\pi}{2} - \varepsilon & \text{et} & & \theta &= \pi - \varepsilon, \end{aligned}$$

et, pour les sommets des axes,

$$\begin{aligned} \xi &= l' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon + l''\right) & \text{et} & & \xi &= l' \cos(\pi - \varepsilon + l''), \\ &= l' \sin(\varepsilon - l'') & & & &= -l' \cos(\varepsilon - l''), \\ \eta &= m' \sin(\varepsilon - l'') & \text{et} & & \eta &= -m' \cos(\varepsilon - l''), \\ \zeta &= n' \sin \varepsilon & \text{et} & & \zeta &= -n' \cos \varepsilon, \\ (51) \quad r^2 &= (l'^2 + m'^2) \sin^2(\varepsilon - l'') + n'^2 \sin^2 \varepsilon & \text{et} & & r^2 &= (l'^2 + m'^2) \cos^2(\varepsilon - l'') + n'^2 \cos^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Le second de ces deux axes est fini, mais le premier est du premier ordre. *La vibration elliptique est très voisine d'une vibration rectiligne de direction (l', m', n') et d'amplitude $\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}$.*

En précisant ces valeurs, à notre approximation, on aura

$$\varepsilon - l'' = \frac{-n'^2 l''}{l'^2 + m'^2 + n'^2},$$

et, pour le carré du demi-petit axe,

$$r^2 = \frac{l''^2 n'^2 (l'^2 + m'^2)}{l'^2 + m'^2 + n'^2}.$$

Ayant ainsi examiné l'hypothèse très particulière $l'' = m''$, revenons au cas général $l'' \neq m''$, qui d'ailleurs va se traiter par la même analyse.

Ici, la vibration étant

$$(48) \quad \begin{cases} \xi = l' \cos(\theta + l''), \\ \eta = m' \cos(\theta + m''), \\ \zeta = n' \cos \theta, \end{cases}$$

le rayon vecteur de l'ellipse sera donné par

$$r^2 = l'^2 \cos^2(\theta + l'') + m'^2 \cos^2(\theta + m'') + n'^2 \cos^2 \theta,$$

et les maxima et minima correspondant aux axes de l'ellipse véri-

fieront la relation

$$\begin{aligned} 0 &= r \frac{dr}{d\theta} = -l'^2 \cos(\theta + l'') \sin(\theta + l'') \\ &\quad - m'^2 \cos(\theta + m'') \sin(\theta + m'') - n'^2 \cos \theta \sin \theta, \\ \text{tang } 2\theta &= -\frac{2(l'^2 l'' + m'^2 m'')}{l'^2 + m'^2 + n'^2} = \text{tang}(\pi - 2\varepsilon), \end{aligned}$$

ε étant, à notre approximation, donné par

$$(52) \quad \varepsilon = \frac{l'^2 l'' + m'^2 m''}{l'^2 + m'^2 + n'^2},$$

d'où, pour les directions des axes,

$$\begin{aligned} 2\theta &= \pi - 2\varepsilon & \text{et} & & 2\theta &= 2\pi - 2\varepsilon, \\ \theta &= \frac{\pi}{2} - \varepsilon & \text{et} & & \theta &= \pi - \varepsilon \end{aligned}$$

et, pour les sommets des axes,

$$\begin{aligned} \xi &= l' \sin(\varepsilon - l'') & \text{et} & & \zeta &= -l' \cos(\varepsilon - l''), \\ \eta &= m' \sin(\varepsilon - m'') & \text{et} & & \eta &= -m' \cos(\varepsilon - m''), \\ \zeta &= n' \sin \varepsilon & \text{et} & & \zeta &= -n' \cos \varepsilon, \\ r^2 &= l'^2 \sin^2(\varepsilon - l'') & \text{et} & & r^2 &= l'^2 \cos^2(\varepsilon - l'') \\ &\quad + m'^2 \sin^2(\varepsilon - m'') + n'^2 \sin^2 \varepsilon & & & &\quad + m'^2 \cos^2(\varepsilon - m'') + n'^2 \cos^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Le second de ces axes est fini, mais le premier est du premier ordre. La vibration elliptique est très voisine d'une vibration rectiligne de direction (l', m', n') et d'amplitude $\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}$.

On aura ici, à notre approximation,

$$\begin{aligned} \varepsilon - l'' &= \frac{m'^2(m'' - l'') - n'^2 l''}{l'^2 + m'^2 + n'^2}, \\ \varepsilon - m'' &= \frac{l'^2(l'' - m'') - n'^2 m''}{l'^2 + m'^2 + n'^2} \end{aligned}$$

et, pour le carré du demi-petit axe,

$$\begin{aligned} (53) \quad r^2 &= l'^2(\varepsilon - l'')^2 + m'^2(\varepsilon - m'')^2 + n'^2 \varepsilon^2, \\ &= \frac{1}{l'^2 + m'^2 + n'^2} [n'^2(l'^2 l''^2 + m'^2 m''^2) + l'^2 m'^2(l'' - m'')^2]. \end{aligned}$$

D'autres conséquences physiques résulteront de la discussion de la surface des ondes au Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

SURFACE DES ONDES.

1. — Propriétés générales.

L'équation tangentielle de la surface des ondes n'est autre que la condition de compatibilité mise sous sa dernière forme (43) en l, m, n . Si nous la rendons homogène, en écrivant le plan de l'onde sous la forme $lx + my + nz = p$, elle devient

$$(54) \quad 0 = p^4 - p^2[(b^2 + c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2 + (a^2 + b^2)n^2] \\ + (b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)(l^2 + m^2 + n^2) \\ - \delta^2 p^2 \left[p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) - (l^2 + m^2 + n^2) + (\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2 \right],$$

homogène de degré 4; a, b, c, p, δ de degré 1; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, l, m, n$ de degré 0.

Pour $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \gamma_1 = 1, \delta = ckv$, on retrouve bien l'équation de la seconde Partie (Chap. IV).

Cette équation très générale peut encore s'écrire, comme dans cette seconde Partie,

$$0 = F - \delta^2 p^2 C = 0,$$

$F = 0$ étant l'équation tangentielle de la surface des ondes de Fresnel, et $C = 0$ l'équation tangentielle d'un cercle, dont nous allons fixer les éléments un peu plus loin.

La surface est d'ailleurs circonscrite à la surface de Fresnel le long de sa courbe de contact avec le cône imaginaire de sommet O.

Elle admet encore l'origine pour centre, étant vérifiée par $(-l, -m, -n, -p)$, mais elle n'admet plus les plans coordonnés pour plans de symétrie.

Si l'on considère un plan $lx + my + nz + p = 0$ tangent à la surface de Fresnel et au cercle, on a, pour son point de contact avec notre surface $F - \delta^2 p^2 C = 0$, les coordonnées

$$x = \frac{\frac{\partial F}{\partial l} - \delta^2 p^2 \frac{\partial C}{\partial l}}{\frac{\partial F}{\partial p} - 2\delta^2 p C - \delta^2 p^2 \frac{\partial C}{\partial p}}, \quad y = \dots, \quad z = \dots$$

Quand notre surface varie avec δ , son point de contact avec ce plan décrit donc la droite qui joint les deux points

$$\left(\frac{\partial F}{\partial l}, \frac{\partial F}{\partial m}, \frac{\partial F}{\partial n} \right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{p \frac{\partial C}{\partial l}}{2C + p \frac{\partial C}{\partial p}}, \frac{p \frac{\partial C}{\partial m}}{2C + p \frac{\partial C}{\partial p}}, \frac{p \frac{\partial C}{\partial n}}{2C + p \frac{\partial C}{\partial p}} \right).$$

Revenons au cercle dont l'équation tangentielle est $C = 0$.

Il a pour centre l'origine, son rayon R est donné par

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2},$$

c'est-à-dire est le demi-diamètre de direction $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ dans l'ellipsoïde

$$(E) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ce qui en fournit une construction géométrique simple. Enfin son plan est

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0.$$

Ces résultats, d'ailleurs classiques d'après l'équation

$$C = \frac{p^2}{R^2} - (l^2 + m^2 + n^2) + (\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2 = 0,$$

se vérifient sans peine de la manière suivante :

1° Les plans tangents de direction

$$l = \alpha_1, \quad m = \beta_1, \quad n = \gamma_1$$

sont donnés par la solution double $p^2 = 0$. C'est le plan du cercle.

2° Les plans

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z - R = 0$$

avec

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha' + \beta_1 \beta' + \gamma_1 \gamma' = 0,$$

c'est-à-dire à la distance R de l'origine et perpendiculaires au plan du cercle, vérifient l'équation.

3° Tout plan

$$\lambda(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z - R = 0$$

mené par une tangente au cercle vérifie l'équation quel que soit λ , car

$$1 - [(\lambda\alpha_1 + \alpha') + (\lambda\beta_1 + \beta') + (\lambda\gamma_1 + \gamma')]^2 \\ + [\alpha_1(\lambda\alpha_1 + \alpha') + \beta_1(\lambda\beta_1 + \beta') + \gamma_1(\lambda\gamma_1 + \gamma')]^2 = 1 - \lambda^2 - 1 + \lambda^2 \equiv 0.$$

La surface est donc, quel que soit le coefficient de dissymétrie δ , inscrite dans la développable circonscrite commune à ce cercle C et à la surface F de Fresnel.

Dans les phénomènes physiques, δ étant très petit, elle est voisine de la surface de Fresnel. Si δ varie d'une façon quelconque, elle engendre le faisceau tangentiel défini par F et C.

Une question naturelle à se poser est celle de savoir si le cercle peut être sur la surface de Fresnel, pour vérifier si notre surface peut être circonscrite à celle de Fresnel suivant ce cercle, la développable circonscrite commune ayant alors ce cercle pour courbe de contact.

Or on connaît sur la surface de Fresnel les trois cercles qui font partie de son intersection par les trois plans coordonnés, et qui ont respectivement pour rayons a, b, c . Le plan de l'onde est alors l'un des plans coordonnés, et le rayon $(\alpha'\beta'\gamma')$ varie dans ce plan, par exemple

$$\alpha' = \beta = \gamma = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

(La surface de Fresnel n'admet pas d'autres cercles de centre O, comme il est facile de s'en assurer sur son équation ponctuelle, en la coupant par une sphère $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. On est ramené à des sections cycliques de quadriques, lesquelles ne sont réelles que dans les cas précédents.)

Pour que le rayon du cercle soit égal à l'une des trois longueurs a, b, c , par exemple, il faut qu'on ait

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}$$

ou

$$\frac{\beta^2}{b^2(a^2 - c^2)} = \frac{\gamma^2}{c^2(b^2 - a^2)} = \frac{1 - \alpha^2}{a^2(b^2 - c^2)},$$

ce qui exige $b^2 > a^2 > c^2$.

Et de même pour les autres. *Le rayon correspondant ne peut donc être égal qu'à celui des trois a, b, c qui est compris entre les deux autres*, et la direction du plan de l'onde est alors donnée par les formules précédentes.

C'est ce que nous avons obtenu dans la deuxième Partie avec c .

Quel que soit δ , notre surface admet comme plans tangents ceux qui vérifient à la fois (α) , (β) , (γ) :

$$(\alpha) \quad \alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n = -\frac{p}{\rho}.$$

$$(\beta) \quad p^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) - (l^2 + m^2 + n^2) = 0,$$

$\alpha_1, \rho, \beta_1, \rho, \gamma_1, \rho$ sont les coordonnées du point S où ils coupent l'axe de dissymétrie, ce qui permet d'éliminer $l^2 + m^2 + n^2$ de l'équation de la surface, d'où, en supprimant encore le facteur p^2 ,

$$(\gamma) \quad p^2 - (a^2 + b^2 + c^2)p^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) + a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 \\ + (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right),$$

ou

$$(\gamma) \quad \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) + a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 \\ + p^2 \left[1 - (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] = 0.$$

Ce sont donc les plans tangents communs à deux cônes du second degré, de sommet commun S(α), circonscrits à la sphère (β) et à l'ellipsoïde (γ) qui admet comme plans principaux les plans coordonnés. Comme ces cônes dépendent de ρ , ces plans tangents communs définissent une développable fixe, indépendante de δ , à laquelle sont inscrites toutes nos surfaces quand δ varie.

On simplifie un peu ces équations en y introduisant le rayon R de la sphère (β) donné par

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}.$$

Elles deviennent alors

$$\begin{aligned}
 (\alpha') \quad & \alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n = -p \sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{\alpha_1^2}{a^2} - \frac{\beta_1^2}{b^2} - \frac{\gamma_1^2}{c^2}}, \\
 (\beta') \quad & R^2(l^2 + m^2 + n^2) - p^2 = 0, \\
 (\gamma') \quad & \left(\frac{b^2 c^2}{R^2} + a^2\right) l^2 + \left(\frac{c^2 a^2}{R^2} + b^2\right) m^2 \\
 & + \left(\frac{a^2 b^2}{R^2} + c^2\right) n^2 + p^2 \left(1 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{R^2}\right) = 0.
 \end{aligned}$$

L'ellipsoïde (γ') est réel pour

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{R^2} > 1$$

ou

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} > \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

II. — Quatre modes de génération et deux représentations paramétriques de la surface.

Sur l'équation tangentielle se lisent plusieurs modes de génération de notre surface comme enveloppe de diverses séries de développables, de même qu'au point de vue ponctuel une surface peut être considérée comme le lieu de diverses séries de courbes.

Premier mode de génération. — Écrivons l'équation tangentielle ainsi

$$\begin{aligned}
 0 = (l^2 + m^2 + n^2) [b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 - (a^2 + b^2 + c^2) p^2 + \delta^2 p^2] \\
 + p^2 \left[a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 + p^2 - \delta^2 (\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2 \right. \\
 \left. - \delta^2 p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

La surface est alors l'enveloppe de la développable (au paramètre r) circonscrite à la sphère

$$(55) \quad r^2(l^2 + m^2 + n^2) - p^2 = 0,$$

et à la quadrique

$$\begin{aligned}
 (56) \quad & b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 - (a^2 + b^2 + c^2) p^2 + \delta^2 p^2 \\
 & + r^2 \left[a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 + p^2 \right. \\
 & \left. - \delta^2 (\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2 - \delta^2 p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Quand δ varie de zéro à l'infini, cette quadrique varie de l'ellipsoïde $(b^2c^2 + a^2r^2)l^2 + (c^2a^2 + b^2r^2)m^2 + (a^2b^2 + c^2r^2)n^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - r^2)p^2 = 0$, au couple de points

$$(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2 + p^2 \left[r^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) - 1 \right] = 0.$$

Ce mode de génération est une extension du mode analogue pour la surface de Fresnel ($\delta = 0$), qui ne paraît pas avoir été remarqué, au moyen de la sphère et de l'ellipsoïde que nous venons de former. Cet ellipsoïde est réel si $r^2 < a^2 + b^2 + c^2$, c'est-à-dire si le rayon de la sphère est inférieur à la diagonale du parallélépipède rectangle circonscrit à l'ellipsoïde

$$(E) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

qui donne la surface de Fresnel par la transformation apsidale. Ces deux ellipsoïdes ont les mêmes directions d'axes.

On remarquera que, dans tous ces modes de génération, si $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, r représente la distance de l'origine au plan tangent à la surface.

Deuxième mode de génération de la surface, comme enveloppe des cônes circonscrits, de quatrième classe, ayant pour sommets les points de l'axe $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ de dissymétrie :

Un tel sommet $(\alpha_1 \rho, \beta_1 \rho, \gamma_1 \rho)$ a pour équation tangentielle

$$(57) \quad \alpha_1 \rho l + \beta_1 \rho m + \gamma_1 \rho n + p = 0,$$

ce qui, en remplaçant $\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n$ par $-\frac{p}{\rho}$, donne pour deuxième surface, définissant le cône variable avec ρ ,

$$(58) \quad f = (l^2 + m^2 + n^2) [b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2 - (a^2 + b^2 + c^2)p^2 + \delta^2p^2] + p^2 \left[a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 + p^2 - \delta^2\frac{p^2}{\rho^2} - \delta^2p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] = 0.$$

Cette deuxième surface admet comme plans de symétrie les trois plans coordonnés, ce qui n'arrivait pas pour la surface des ondes, par suite de la disparition des termes $(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2$. C'est là l'intérêt

de ce deuxième mode de génération, qui condense en quelque sorte la dissymétrie dans le sommet de ces cônes.

Pour $\delta = 0$, elle devient la surface de Fresnel indépendante de ρ , qui définit ses propres cônes circonscrits de sommets alignés sur la direction quelconque $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ issue de son centre.

Pour $\delta \neq 0$ fixe, quand cette surface varie avec ρ , les points de contact M, M', ... des plans tangents parallèles à une même direction (l, m, n) , p variant seul, sont donnés par

$$\frac{x}{\frac{\partial f}{\partial l}} = \frac{y}{\frac{\partial f}{\partial m}} = \frac{z}{\frac{\partial f}{\partial n}} = \frac{t}{\frac{\partial f}{\partial p}},$$

c'est-à-dire sont alignés sur un même rayon issu de l'origine, ρ n'entrant que dans $\frac{df}{dp}$.

Mais, $\frac{df}{dp}$ dépendant aussi de l, m, n , le rapport $\frac{OM}{OM'}$ varie avec la direction du plan tangent et la surface ne reste pas homothétique à elle-même.

Elle varie, à partir de la surface de Fresnel, avec δ et ρ , comme notre surface des ondes, mais plus simplement, puisqu'elle conserve les trois symétries par rapport aux trois plans coordonnés.

Elle est inscrite dans les deux développables circonscrites d'une part à la surface de Fresnel, et d'autre part à la sphère

$$(59) \quad l^2 + m^2 + n^2 - \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) p^2 = 0,$$

et à l'origine, ce dernier cône étant compté deux fois, c'est-à-dire sa courbe de contact étant celle de la surface elle-même de Fresnel.

Troisième mode de génération, résultant du rapprochement des deux premiers, et fournissant une *représentation paramétrique de la surface*.

D'après les deux modes de génération précédents, notre surface admet comme plans tangents tous ceux qui, dépendant des deux paramètres r et ρ , vérifient les relations

$$(60) \quad (l^2 + m^2 + n^2) = \frac{p^2}{r^2}$$

et

$$(61) \quad \alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n = -\frac{p}{\rho},$$

$$(62) \quad b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - \partial^2) p^2 \\ + r^2 \left\{ a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 + p^2 \left[1 - \partial^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) - \partial^2 \frac{p^2}{\rho^2} \right] \right\} = 0.$$

Si l'on résolvait ces trois équations par rapport à $\frac{l}{\rho}, \frac{m}{\rho}, \frac{n}{\rho}$ en fonctions des deux paramètres r et ρ , on aurait une représentation paramétrique, non pas du point, mais du plan tangent de la surface, les deux paramètres ayant la signification géométrique définie à propos des deux premiers modes de génération : r est la distance du plan tangent à l'origine, ρ est la distance de l'origine au point où il rencontre l'axe de dissymétrie optique.

Pour la surface de Fresnel, M. Darboux a donné une représentation paramétrique ⁽¹⁾ où l'un des paramètres α est notre r^2 , l'autre β étant le carré du rayon qui va de l'origine au point de contact du plan tangent considéré. Pour la résolution de ses équations par rapport aux coordonnées ponctuelles et tangentielles, il introduit deux nouvelles variables α', β' .

Nous allons effectuer ici la résolution par rapport à nos coordonnées tangentielles $\frac{l}{\rho}, \frac{m}{\rho}, \frac{n}{\rho}$, en introduisant une variable auxiliaire σ , de degré 1 d'homogénéité comme les autres, définie par

$$a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 = \frac{\sigma^2}{r^2} p^2,$$

qui ramène la troisième équation à

$$(63) \quad b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 \\ = p^2 \left\{ a^2 + b^2 + c^2 - \partial^2 + \sigma^2 + r^2 \left[1 - \partial^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} + \frac{1}{\rho^2} \right) \right] \right\} \\ = p^2 \theta(\sigma, \rho, r),$$

en désignant par θ la fonction des variables σ, ρ, r représentée par l'accolade et qui est du deuxième degré d'homogénéité.

(¹) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4^e Partie, 2^e fascicule, p. 469-470.

Ces deux équations, jointes à $l^2 + m^2 + n^2 = \frac{\rho^2}{r^2}$ et linéaires en l^2 , m^2 , n^2 , se résolvent par les formules

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b^2 c^2 & c^2 a^2 & a^2 b^2 \end{vmatrix} = (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)$$

(de degré 6 d'homogénéité),

$$\Delta \frac{l^2}{\rho^2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2} & 1 & 1 \\ \frac{\sigma^2}{r^2} & b^2 & c^2 \\ \theta & c^2 a^2 & a^2 b^2 \end{vmatrix} = \frac{a^2(b^2 - c^2) - a^2 \sigma^2(b^2 - c^2)}{r^2} + \theta(c^2 - b^2)$$

$$= (b^2 - c^2) \left[\frac{a^2(b^2 + c^2 - \sigma^2)}{r^2} - \theta \right].$$

Les deux membres sont bien du degré 4 d'homogénéité. On a ainsi les formules de résolution

$$(64) \quad \begin{cases} \frac{l}{\rho} = \pm \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}} \sqrt{\frac{a^2(b^2 + c^2 - \sigma^2)}{r^2} - \theta(\sigma, \rho, r)}, \\ \frac{m}{\rho} = \dots\dots\dots, \\ \frac{n}{\rho} = \dots\dots\dots, \end{cases}$$

qui, portées dans la première relation linéaire

$$\alpha_1 \frac{l}{\rho} + \beta_1 \frac{m}{\rho} + \gamma_1 \frac{n}{\rho} = -\frac{1}{\rho},$$

donnent la condition

$$(65) \quad \begin{aligned} & \alpha_1 \sqrt{b^2 - c^2} \sqrt{\frac{a^2(b^2 + c^2 - \sigma^2)}{r^2} - \theta} \\ & + \beta_1 \sqrt{c^2 - a^2} \sqrt{\frac{b^2(c^2 + a^2 - \sigma^2)}{r^2} - \theta} \\ & + \gamma_1 \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{\frac{c^2(a^2 + b^2 - \sigma^2)}{r^2} - \theta} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho}, \end{aligned}$$

entre les paramètres σ , ρ , r , dont deux restent bien par suite indépendants pour la représentation de $\frac{l}{\rho}$, $\frac{m}{\rho}$, $\frac{n}{\rho}$. Cette condition remplace,

dans une certaine mesure, les relations surabondantes de M. Darboux et sa fonction auxiliaire f .

La signification géométrique de ces trois paramètres surabondants est la suivante :

Les développables $\rho = \text{const.}$ sont les cônes circonscrits à notre surface des divers points de l'axe de dissymétrie optique.

Les développables $r = \text{const.}$ sont circonscrites à notre surface et à des sphères variables de centre O.

Les développables $\sigma = \text{const.}$ sont circonscrites à notre surface et à des ellipsoïdes homothétiques à

$$(E) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Quand δ se réduit à zéro et notre surface à celle de Fresnel, ρ disparaît de la fonction θ , qui se réduit à

$$\theta = a^2 + b^2 + c^2 + \sigma^2 + r^2$$

et ne figure plus que dans la première relation linéaire, dès lors inutile comme la condition qu'elle a fournie. On a ainsi la représentation paramétrique tangentielle de la surface de Fresnel

$$\frac{l}{p} = \pm \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}} \sqrt{\frac{a^2(b^2 + c^2 - \sigma^2)}{r^2} - a^2 - b^2 - c^2 - \sigma^2 - r^2},$$

d'où l'on pourrait déduire celle de M. Darboux [p. 470, (25), et p. 469].

Quatrième mode de génération et deuxième représentation paramétrique de la surface :

Au lieu du paramètre σ , introduisons un paramètre variable τ , encore de degré 1, défini cette fois par

$$(66) \quad b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 = \tau^2 p^2,$$

qui ramène alors la troisième équation à

$$(67) \quad r^2(a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2) = -\tau^2 p^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - \delta^2)p^2 - p^2 r^2 \left[1 - \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) - \frac{\delta^2}{\rho^2} \right]$$

ou

$$\begin{aligned} a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 &= p^2 \left[\frac{a^2 + b^2 + c^2 - \delta^2 - \tau^2}{r^2} - 1 + \delta^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] \\ &= p^2 \varpi(\tau, \rho, r), \end{aligned}$$

en désignant par ϖ la fonction des variables τ, ρ, r représentée par l'accolade, et qui est cette fois du degré zéro d'homogénéité.

Ces deux équations, jointes à (60) $l^2 + m^2 + n^2 = \frac{p^2}{r^2}$, et linéaires en l^2, m^2, n^2 , se résolvent par les formules suivantes, où Δ est le même qu'au troisième mode,

$$\Delta \frac{l^2}{p^2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2} & 1 & 1 \\ \varpi & b^2 & c^2 \\ \tau^2 & c^2 a^2 & a^2 b^2 \end{vmatrix} = a^2 \frac{b^2 - c^2}{r^2} - a^2 \varpi(b^2 - c^2) + \tau^2(c^2 - b^2) \\ = (b^2 - c^2) \left(a^2 \frac{b^2 + c^2}{r^2} - a^2 \varpi - \tau^2 \right).$$

Les deux membres sont bien du degré 4 d'homogénéité. On a ainsi les formules de résolution

$$(68) \quad \begin{cases} \frac{l}{p} = \pm \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}} \sqrt{a^2 \frac{b^2 + c^2}{r^2} - \tau^2 - a^2 \varpi(\tau, \rho, r)}, \\ \frac{m}{p} = \dots\dots\dots, \\ \frac{n}{p} = \dots\dots\dots, \end{cases}$$

qui, portées dans la première relation linéaire

$$\frac{\alpha_1 l}{p} + \beta_1 \frac{m}{p} + \gamma_1 \frac{n}{p} = -\frac{1}{\rho},$$

donnent la condition

$$(69) \quad \alpha_1 \sqrt{b^2 - c^2} \sqrt{a^2 \frac{b^2 + c^2}{r^2} - \tau^2 - a^2 \varpi} \\ + \beta_1 \sqrt{c^2 - a^2} \sqrt{b^2 \frac{c^2 + a^2}{r^2} - \tau^2 - b^2 \varpi} \\ + \gamma_1 \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{c^2 \frac{a^2 + b^2}{r^2} - \tau^2 - c^2 \varpi} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho},$$

entre les paramètres τ, ρ, v , dont deux restent bien par suite indépendants pour la représentation de $\frac{l}{p}, \frac{m}{p}, \frac{n}{p}$.

La signification géométrique de ces trois paramètres surabondants est la suivante.

Les développables $\tau = \text{const.}$ sont circonscrites à notre surface et à des ellipsoïdes homothétiques à

$$\frac{x^2}{b^2 c^2} + \frac{y^2}{b^2 a^2} + \frac{z^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{(abc)^2}.$$

ayant pour plans principaux les plans coordonnés.

Les développables $\rho = \text{const.}$ et $r = \text{const.}$ sont les mêmes que dans le troisième mode.

Quand δ se réduit à zéro et notre surface à celle de Fresnel, ρ disparaît de la fonction ϖ , qui se réduit à

$$\varpi = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - \tau^2}{r^2} - 1,$$

et ne figure plus que dans la première relation linéaire, dès lors inutile comme la condition qu'elle a fournie.

On a ainsi la représentation paramétrique tangentielle de la surface de Fresnel

$$\begin{aligned} \frac{l}{p} &= \pm \frac{a}{\sqrt{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}} \sqrt{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right)(\tau^2 - a^2)}, \\ \frac{m}{p} &= \dots\dots\dots, \\ \frac{n}{p} &= \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

qui ne diffère pas essentiellement de celle de la Thèse de M. Richard (p. 89).

III. — Contours apparents de la surface.

1° Sur les plans coordonnés : il suffit d'en prendre un, sur le plan des xy , les autres s'en déduisant par permutation; c'est la trace du cylindre circonscrit parallèle à Oz ;

2° Sur le plan perpendiculaire à l'axe de dissymétrie optique $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

1° *Cylindre circonscrit parallèle à Oz .* — Il suffit de faire $n = 0$ dans l'équation tangentielle : on aura celle de la trace du cylindre sur

le plan des xy . Il vient ainsi

$$0 = p^4 - p^2[(b^2 c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2] + c^2(b^2 l^2 + a^2 m^2)(l^2 + m^2) \\ - \delta^2 p^2 \left[p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) - (l^2 + m^2) + (\alpha_1 l + \beta_1 m)^2 \right]$$

qui, pour $\delta = 0$, donne bien

$$0 = [p^2 - c^2(l^2 + m^2)][p^2 - (a^2 m^2 + b^2 l^2)],$$

c'est-à-dire le cercle et l'ellipse de section de la surface de Fresnel par ce plan qui est pour elle un plan de symétrie.

Cette courbe de quatrième classe admet l'origine pour centre, mais n'admet pas les axes Ox et Oy pour axes de symétrie.

Elle admet comme tangentes, quel que soit δ , les quatre systèmes de quatre tangentes communes aux quatre couples de coniques

$$(69 \text{ bis}) \quad \begin{cases} c^2(l^2 + m^2) - p^2 = 0, \\ p = 0; \end{cases}$$

$$(70) \quad \begin{cases} c^2(l^2 + m^2) - p^2 = 0, \\ p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) - (l^2 + m^2) + (\alpha_1 l + \beta_1 m)^2 = 0; \end{cases}$$

$$(71) \quad \begin{cases} b^2 l^2 + a^2 m^2 - p^2 = 0, \\ p = 0; \end{cases}$$

$$(72) \quad \begin{cases} b^2 l^2 + a^2 m^2 - p^2 = 0, \\ p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) - (l^2 + m^2) + (\alpha_1 l + \beta_1 m)^2 = 0. \end{cases}$$

Les équations (70) peuvent d'ailleurs être remplacées par

$$(70 \text{ bis}) \quad \begin{cases} c^2(l^2 + m^2) - p^2 = 0, \\ p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} - \frac{1}{c^2} \right) + (\alpha_1 l + \beta_1 m)^2 = 0, \end{cases}$$

dont la seconde représente le système de deux points

$$\alpha_1 l + \beta_1 m \pm p \sqrt{-\frac{\alpha_1^2}{a^2} - \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{1 - \gamma_1^2}{c^2}}.$$

Ces quatre tangentes communes sont issues de ces deux points au cercle représenté par la première de ces deux équations.

La seconde des équations (72) représente l'ellipse projection du cercle C sur le plan des xy .

2° *Cylindre circonscrit parallèle à l'axe de dissymétrie optique* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ donnant le contour apparent sur le plan perpendiculaire. Ses équations tangentielles sont

$$\begin{aligned} \alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n &= 0, \\ 0 &= p^4 - p^2[(b^2 + c^2)l^2 + (c^2 + a^2)n^2 + (a^2 + b^2)n^2] \\ &\quad + (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2)(l^2 + m^2 + n^2), \\ (73) \quad &- \delta^2 p^2 \left[p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) - (l^2 + m^2 + n^2) \right], \end{aligned}$$

dont la seconde est celle d'une surface (Σ) , inscrite dans ce cylindre (et, par suite, le définissant), qui présente sur notre surface des ondes l'avantage d'admettre les trois plans coordonnés comme plans de symétrie, par disparition du carré $(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2$ qui détruisait la symétrie.

Cette surface est très remarquable et se prête à une étude plus facile que notre surface des ondes, dont elle constitue une sorte d'approximation et dont elle indique la forme générale, au moins dans la direction $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

Étude de la surface (Σ) . — On peut d'abord en donner les deux représentations paramétriques que nous avons indiquées, ρ disparaissant, et avec ρ la condition surabondante.

On a, pour la première,

$$(74) \quad \theta = a^2 + b^2 + c^2 - \delta^2 + \sigma^2 + r^2 \left[1 - \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right].$$

$$(75) \quad \begin{cases} \frac{l}{p} = \pm \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}} \sqrt{\frac{a^2(b^2 + c^2 - \sigma^2)}{r^2} - \theta(\sigma, r)}, \\ \frac{m}{p} = \dots\dots\dots, \\ \frac{n}{p} = \dots\dots\dots, \end{cases}$$

aux paramètres r et σ ; et, pour la seconde,

$$(76) \quad \varpi = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - \delta^2 - \tau^2}{r^2} - 1 + \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right),$$

$$(77) \quad \frac{l}{p} = \pm \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}} \sqrt{a^2 \frac{b^2 + c^2}{r^2} - \tau^2 - a^2 \varpi(\tau, r)}$$

aux paramètres r et τ .

La seconde revêt une forme assez intéressante

$$(78) \quad \frac{l}{p} = \pm \frac{a}{\sqrt{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}} \\ \times \sqrt{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right)(\tau^2 - a^2) + \delta^2 \left[\frac{1}{r^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right]}$$

qui, pour la surface de Fresnel ($\delta = 0$), redonne celle que nous avons obtenue et rapprochée d'un résultat de M. Richard.

On peut ensuite en chercher les plans tangents singuliers en annulant les quatre dérivées partielles

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial p} = p \left\{ 2p^2 - [(b^2 + c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2 + (a^2 + b^2)n^2] \right. \\ \left. + \delta^2(l^2 + m^2 + n^2) - 2\delta^2 p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) \right\}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial l} = [-(b^2 + c^2)p^2 + b^2 c^2(l^2 + m^2 + n^2) \\ + (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) + \delta^2 p^2] l$$

et

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial m}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial n}$$

par permutations circulaires de a, b, c et l, m, n .

1° Cherchons d'abord des plans tangents singuliers par l'origine ($p = 0$ annulant $\frac{df}{dp}$), ce qui empêche qu'on ait alors à la fois $l = m = n = 0$, et exige $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ s'il s'agit de solutions réelles.

a. Alors supposons d'abord $lmn \neq 0$. $\frac{df}{dl} = \frac{df}{dm} = \frac{df}{dn} = 0$ donnent

$$b^2 c^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 = 0, \\ c^2 a^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 = 0, \\ a^2 b^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 = 0,$$

système impossible si a^2, b^2, c^2 sont différents, ce qui est notre cas général.

b. Essayons ensuite $m = n = p = 0, l \neq 0$, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial p} \equiv 0,$$

$\frac{df}{dl} = 0$ se réduit à $l \{ 2b^2 c^2 l^2 \} = 0$; donc impossibilité encore, et de même pour $n = l = p = 0$ et $l = m = p = 0$.

c. Essayons enfin $lm \neq 0$, $n = p = 0$, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial p} \equiv 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} = 0 & \quad \text{donne} \quad b^2 c^2 (l^2 + m^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial m} = 0 & \quad \text{donne} \quad c^2 a^2 (l^2 + m^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 = 0, \end{aligned}$$

impossible en solutions réelles, et de même avec $l = 0$ ou $m = 0$.

2° Cherchons en second lieu des plans tangents doubles ne passant pas par l'origine ($p \neq 0$).

a. Supposons d'abord $lmn \neq 0$. Alors les quatre équations

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

s'écrivent

$$\begin{aligned} b^2 c^2 (l^2 + m^2 + n^2) + (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) + p^2 [-(b^2 + c^2) + \delta^2] &= 0, \\ c^2 a^2 (l^2 + m^2 + n^2) + (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) + p^2 [-(c^2 + a^2) + \delta^2] &= 0, \\ a^2 b^2 (l^2 + m^2 + n^2) + (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) + p^2 [-(a^2 + b^2) + \delta^2] &= 0, \\ a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - \delta^2) (l^2 + m^2 + n^2) &+ 2 p^2 \left[1 - 2 \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

et leur déterminant, par rapport aux quatre combinaisons des inconnues

$$(a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2), \quad (l^2 + m^2 + n^2), \quad (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2), \quad p^2,$$

se réduit à

$$-(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2), \quad \neq 0,$$

dans notre cas général; il est donc indépendant de δ , ce qui est assez remarquable. On aurait donc $p = 0$, ce qui exclut ce cas.

b. Essayons ensuite $m = n = 0$ ($lp \neq 0$), qui rend $\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial f}{\partial n} \equiv 0$.

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} = 0 & \quad \text{donne} \quad + 2 b^2 c^2 l^2 - p^2 (b^2 + c^2 - \delta^2) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial p} = 0 & \quad \text{donne} \quad - (b^2 + c^2 - \delta^2) l^2 + 2 p^2 \left[1 - \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] = 0,\end{aligned}$$

ce qui exige qu'on ait

$$4 b^2 c^2 \left[1 - \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] - (b^2 + c^2 - \delta^2)^2 = 0$$

ou

$$- (b^2 - c^2)^2 + 2 \delta^2 \left[b^2 + c^2 - 2 b^2 c^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] - \delta^4 = 0.$$

Ceci n'a rien d'absolument impossible *a priori*, même dans les hypothèses physiques, car δ , comme nous l'avons vu, peut être de l'ordre de petitesse de $b^2 - c^2$. Cela revient, avec les notations de la deuxième Partie, à supposer ν de l'ordre de ν'' .

Nous avons dit toutefois que les phénomènes connus conduisaient à supposer plutôt ν'' d'ordre supérieur à ν , c'est-à-dire $b^2 - c^2$ d'ordre supérieur à δ , auquel cas le terme principal de la condition ci-dessus deviendrait le second et entraînerait la conséquence

$$\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) (\beta_1^2 - \gamma_1^2) = 0.$$

C'est un cône de directions à donner à l'axe de dissymétrie pour réaliser cette singularité.

En revenant à l'hypothèse la plus générale sur a, b, c, δ , on voit que la présence des trois couples de plans tangents singuliers parallèles à Oyz, Ozx, Oxy exigerait qu'on eût

$$\begin{aligned}- (b^2 - c^2)^2 + 2 \delta^2 \left[b^2 + c^2 - 2 b^2 c^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] - \delta^4 &= 0, \\ - (c^2 - a^2)^2 + 2 \delta^2 \left[c^2 + a^2 - 2 c^2 a^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] - \delta^4 &= 0, \\ - (a^2 - b^2)^2 + 2 \delta^2 \left[a^2 + b^2 - 2 a^2 b^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] - \delta^4 &= 0.\end{aligned}$$

Ceci exige l'égalité du quotient

$$\frac{-(c^2 - a^2)^2 + (a^2 - b^2)^2}{(c^2 - b^2) \left[1 - 2 a^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right]}$$

et des deux qu'on en déduit par permutations circulaires.

On devrait donc avoir

$$\frac{1 - \frac{b^2 + c^2}{2a^2}}{\frac{1}{2a^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)} = \frac{1 - \frac{c^2 + a^2}{2b^2}}{\frac{1}{2b^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)} = \frac{1 - \frac{a^2 + b^2}{2c^2}}{\frac{1}{2c^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{1 - 2a^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)} &= \frac{2b^2 - c^2 - a^2}{1 - 2b^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)} \\ &= \frac{3(a^2 - b^2)}{2(b^2 - a^2) \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)} = -\frac{3}{2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)} \end{aligned}$$

relation qui, étant symétrique, fournit la valeur commune des trois rapports.

Il vient donc

$$0 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) - 3(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2),$$

ce qui est un cône symétrique et, par suite, donne une condition unique.

Une autre est fournie par le résultant de deux des équations en δ , qui suffit, comme il est facile de s'en assurer, et qui donne un autre cône assez compliqué dont je ne m'arrête pas à écrire l'équation.

Il faudra donc prendre pour l'axe de dissymétrie une génératrice commune à ces deux cônes, et pour valeur du coefficient δ de dissymétrie la racine commune aux trois équations bicarrées.

c. Essayons enfin $n = 0$ (avec $lmp \neq 0$) qui rend $\frac{df}{dn} = 0$.

Alors $\frac{df}{dl} = \frac{df}{dm} = \frac{df}{dp} = 0$ donnent

$$\begin{aligned} b^2 c^2 (l^2 + m^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 - p^2 (b^2 + c^2 - \delta^2) &= 0, \\ c^2 a^2 (l^2 + m^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 - p^2 (c^2 + a^2 - \delta^2) &= 0, \\ -(b^2 + c^2)l^2 - (c^2 + a^2)m^2 + \delta^2(l^2 + m^2) - 2 \left[\delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) - 1 \right] p^2 &= 0, \end{aligned}$$

qui admettent, comme déterminant à annuler par rapport à l^2, m^2, p^2 ,

$$= \begin{vmatrix} 2b^2c^2 & c^2(a^2 + b^2) & b^2 + c^2 - \delta^2 \\ c^2(a^2 + b^2) & 2c^2a^2 & c^2 + a^2 - \delta^2 \\ b^2 + c^2 - \delta^2 & c^2 + a^2 - \delta^2 & 2 \left[1 - \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] \end{vmatrix}.$$

On vérifie que les termes indépendants de δ s'annulent ainsi que les termes en δ^4 et il reste, au facteur $2c^2\delta^2$ près,

$$0 = (a^2 - b^2)^2 \left[1 - c^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] = 0.$$

Ces plans tangents doubles existeront donc, parallèles à Oz , et donnés par les solutions l, m, p des équations linéaires dès lors compatibles, si l'axe de dissymétrie optique vérifie la relation

$$0 = \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}{c^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) = 0,$$

c'est-à-dire est dans l'un des deux plans

$$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \alpha_1^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \beta_1^2 = 0$$

qui sont deux plans cycliques de l'ellipsoïde

$$(E) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

En faisant les deux permutations circulaires consécutives, on voit que, pour l'existence de cette catégorie de plans tangents doubles, *il suffit que l'axe de perturbation optique soit dans l'un des plans cycliques de l'ellipsoïde.*

d. Le plan $l = m = n = 0$, $p \neq 0$, c'est-à-dire le plan de l'infini, donne $\frac{df}{dl} = \frac{df}{dm} = \frac{df}{dn} = 0$, mais $\frac{df}{dp} = 0$ devient

$$1 - \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) = 0.$$

Il faudrait, pour qu'il fût singulier (ce qui n'a d'ailleurs pas d'intérêt au point de vue physique), que l'axe de dissymétrie δ fût égal à la longueur du diamètre de l'ellipsoïde $\frac{a^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1$, qui a sa propre direction, *c'est-à-dire que l'extrémité de cet axe fût un point de l'ellipsoïde.*

Mais ce cas est impossible physiquement, comme donnant une racine ω^2 infinie de l'équation aux vitesses.

IV. — Équation différentielle des lignes de courbure.

Appliquons l'équation (16) (p. 240 de M. Darboux) ⁽¹⁾ au cas où $u = l$, $v = m$, $w = n$, $p = 1$, $h = \alpha = \frac{1}{r}$. Elle devient ⁽¹⁾ (β étant σ ou τ suivant le mode de représentation choisi, où α et β sont les paramètres des courbes coordonnées)

$$\begin{vmatrix} l & \frac{\partial l}{\partial \alpha} & \frac{\partial l}{\partial \beta} & d \frac{\partial l}{\partial \alpha} & d \frac{\partial l}{\partial \beta} \\ m & \frac{\partial m}{\partial \alpha} & \frac{\partial m}{\partial \beta} & d \frac{\partial m}{\partial \alpha} & d \frac{\partial m}{\partial \beta} \\ n & \frac{\partial n}{\partial \alpha} & \frac{\partial n}{\partial \beta} & d \frac{\partial n}{\partial \alpha} & d \frac{\partial n}{\partial \beta} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(79) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial l}{\partial \beta} & d \frac{\partial l}{\partial \alpha} & d \frac{\partial l}{\partial \beta} \\ \frac{\partial m}{\partial \beta} & d \frac{\partial m}{\partial \alpha} & d \frac{\partial m}{\partial \beta} \\ \frac{\partial n}{\partial \beta} & d \frac{\partial n}{\partial \alpha} & d \frac{\partial n}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0.$$

Par exemple, pour le premier mode,

$$l^2 = \frac{1}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} \left[a^2(b^2 + c^2 - \beta^2)\alpha^2 - \theta \left(\sigma, \rho, \frac{1}{\alpha} \right) \right],$$

$$\theta = a^2 + b^2 + c^2 - \delta^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha^2} \left[1 - \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) \right],$$

avec la condition

$$\alpha_1 \sqrt{b^2 - c^2} \sqrt{a^2(b^2 + c^2 - \beta^2)\alpha^2 - \theta} + \beta_1 \sqrt{c^2 - a^2} \sqrt{b^2(c^2 + a^2 - \beta^2)\alpha^2 - \theta} \\ + \gamma_1 \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{c^2(a^2 + b^2 - \beta^2)\alpha^2 - \theta} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{\rho},$$

$$\Delta = (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2).$$

Ces résultats se simplifient pour la surface de contour apparent parallèle à l'axe de dissymétrie.

⁽¹⁾ *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I.

Je prends le deuxième mode de représentation $(\tau = \beta, \frac{1}{r} = \alpha)$ à cause de sa forme plus symétrique

$$l^2 = \frac{a^2}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} \left\{ \alpha^2 \beta^2 - \frac{\beta^2}{a^2} + 1 + \delta^2 \left[\alpha^2 - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] \right\},$$

qu'on peut écrire

$$l^2 = A_0 + A_1 \alpha^2 + A_2 \beta^2 + A_3 \alpha^2 \beta^2,$$

d'où

$$l \frac{\partial l}{\partial \alpha} = A_1 \alpha + A_3 \alpha \beta^2, \quad l \frac{\partial l}{\partial \beta} = A_2 \beta + A_3 \alpha^2 \beta,$$

$$l d \frac{\partial l}{\partial \alpha} + \frac{\partial l}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial l}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial l}{\partial \beta} d\beta \right) = (A_1 + A_3 \beta^2) d\alpha + 2 A_3 \alpha \beta d\beta.$$

Et, par échange de α et β , A_1 et A_2 ,

$$l^3 d \frac{\partial l}{\partial \beta} = (A_2 + A_3 \alpha^2) (A_0 + A_1 \alpha^2) d\beta + \alpha \beta d\alpha (A_0 A_3 - A_1 A_2 + A_3 l^2).$$

Alors l'équation différentielle des lignes de courbure, écrite lignes en colonnes, sera

$$\begin{vmatrix} l^2 \frac{\partial l}{\partial \beta} & m^3 \frac{\partial m}{\partial \beta} & n^3 \frac{\partial n}{\partial \beta} \\ l^3 d \frac{\partial l}{\partial \alpha} & m^3 d \frac{\partial m}{\partial \alpha} & n^3 d \frac{\partial n}{\partial \alpha} \\ l^3 d \frac{\partial l}{\partial \beta} & m^3 d \frac{\partial m}{\partial \beta} & n^3 d \frac{\partial n}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(80) \quad \begin{vmatrix} l^3 \beta (A_2 \beta + A_3 \alpha^2) \\ (A_1 + A_3 \beta^2) (A_0 + A_2 \beta^2) d\alpha + \alpha \beta d\beta [A_0 A_3 - A_1 A_2 + A_3 l^2] & \dots \\ (A_2 + A_3 \alpha^2) (A_0 + A_1 \alpha^2) d\beta + \alpha \beta d\alpha [A_0 A_3 - A_1 A_2 + A_3 l^2] & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

les autres colonnes se déduisant de la première par permutation de l , m , n , A , B , C ,

Le facteur commun $\beta = 0$ donne une solution $\tau = 0$ imaginaire à écarter.

V. — Plans tangents singuliers.

Reprenons l'équation tangentielle de la surface $f = F - \delta^2 p^2 C = 0$ et cherchons les plans tangents singuliers par les équations telles que

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 0 = \frac{\partial F}{\partial l} - \delta^2 \frac{\partial}{\partial l} (p^2 C) = 0.$$

Les dérivées $\frac{\partial F}{\partial l}$ ont été calculées pour la même étude faite sur la surface (Σ) de contour apparent parallèle à l'axe de dissymétrie optique

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial l} (p^2 C) = \frac{1}{2} p^2 \frac{\partial C}{\partial l} = p^2 [-l + \alpha_1 (\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)]$$

et $\frac{\partial}{\partial m}$ et $\frac{\partial}{\partial n}$ par permutations circulaires

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 C) = p C + p^3 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right).$$

I. Cherchons d'abord des plans tangents doubles par l'origine ($p = 0$). Les équations se réduisent alors à celles que nous avons obtenues pour la surface de contour apparent parallèle à l'axe de dissymétrie optique, et les conclusions sont les mêmes.

II. Cherchons en second lieu des plans tangents doubles ne passant pas par l'origine ($p \neq 0$).

1° Essayons d'abord $m = n = 0$, $lp \neq 0$ (ou les autres analogues par permutations).

Ici nous n'avons plus $\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial f}{\partial n} = 0$; mais comme $\frac{\partial F}{\partial m} = \frac{\partial F}{\partial n} = 0$, il reste

$$\alpha_1 \beta_1 = 0;$$

$$\alpha_1 \gamma_1 = 0.$$

Si $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, l'axe de dissymétrie coïnciderait avec l'un des axes $Oxyz$, c'est l'étude de la deuxième Partie. Si $\alpha_1 = 0$, c'est l'hypothèse (β) plus loin.

2° Essayons ensuite $n = 0$, $lmp \neq 0$.

Alors $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ exige qu'on ait $\gamma_1 (\alpha_1 l + \beta_1 m) = 0$.

α . La solution

$$\frac{l}{\beta_1} = \frac{m}{-\alpha_1} = \frac{n}{0} = \frac{p}{1},$$

annulant la parenthèse, ramène à la surface de contour apparent, en faisant disparaître $\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n$, dans le cas (c). Il faudrait donc d'abord, comme on l'a obtenu là, que l'axe de dissymétrie optique fût dans l'un des plans cycliques de l'ellipsoïde, et ensuite que les équations linéaires, alors compatibles, fussent vérifiées par les valeurs

ci-dessus de l, m, n, p , ce qui entraîne entre les données a, b, c et l'axe de dissymétrie $\delta(\alpha, \beta, \gamma)$ des conditions que je ne m'arrête pas à écrire.

β . L'hypothèse $\gamma_1 = 0$, où l'axe de dissymétrie serait dans l'un des plans coordonnés $Oxyz$, ne simplifie pas considérablement les calculs; je ne la traite pas, on la déduirait comme cas particulier de ce que nous allons dire sous un numéro suivant (4°).

3° Le plan $l = m = n = 0, p \neq 0$, c'est-à-dire le plan de l'infini, donne

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial f}{\partial n} = 0.$$

Mais $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$ devient encore

$$1 - \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) = 0,$$

l'extrémité de l'axe de dissymétrie doit être sur l'ellipsoïde.

Nous avons remarqué que c'était physiquement impossible.

4° Enfin le cas général $lmnp \neq 0$ redonne les équations du cas 2° (α) du contour apparent, mais embarrassées de termes en $(\alpha, l + \beta, m + \gamma, n)$ qui en compliquent considérablement la discussion. Elles s'écrivent ainsi

$$0 = l \{ - (b^2 + c^2)p^2 + b^2 c^2 (l^2 + m^2 + n^2) + (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) - \delta^2 p^2 [-l + \alpha_1(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)] \} = 0,$$

deux autres obtenues par permutation circulaire de (l, m, n) (α, β, γ) et enfin la quatrième

$$0 = \left\{ 2p^2 - [(b^2 + c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2 + (a^2 + b^2)n^2] - 2\delta^2 p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) + \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) - \delta^2 (\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2 \right\}.$$

Cette discussion pourra être utilement faite le jour où l'expérience aura montré, entre les constantes, des relations qui la simplifient.

Je vais seulement montrer comment elle pourrait être abordée dans le cas où, δ étant considéré comme infiniment petit, on étudierait les singularités de cette surface comme voisine de celle de Fresnel.

Écrivons pour un moment ces équations

$$f_i - \delta^2 \varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Appelons $(l, m, n, 1)$ une solution des $f_i = 0$, c'est-à-dire un plan tangent singulier de la surface de Fresnel. Appelons

$$(l + \delta^2 l_1, m + \delta^2 m_1, n + \delta^2 n_1, 1)$$

une solution des $f_i - \delta^2 \varphi_i = 0$, c'est-à-dire un plan tangent singulier de notre surface.

Alors le développement de Taylor, limité au premier terme, de l'équation

$$f_i - \delta^2 \varphi_i = 0,$$

donne

$$f_i(l, m, n, 1) + \delta^2 \left(l_1 \frac{\partial f_i}{\partial l} + m_1 \frac{\partial f_i}{\partial m} + n_1 \frac{\partial f_i}{\partial n} \right) - \delta^2 \varphi_i(l, m, n) = 0,$$

ou, puisque l, m, n sont des solutions de $f_i = 0$,

$$l_1 \frac{\partial f_i}{\partial l} + m_1 \frac{\partial f_i}{\partial m} + n_1 \frac{\partial f_i}{\partial n} - \varphi_i(l, m, n) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

S'il y a des plans tangents doubles, les termes correctifs l, m, n, l_1, m_1, n_1 devront être racines de ces *quatre* équations, ce qui donne une condition de compatibilité

$$(81) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial l} & \frac{\partial f_1}{\partial m} & \frac{\partial f_1}{\partial n} & \varphi_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial l} & \frac{\partial f_2}{\partial m} & \frac{\partial f_2}{\partial n} & \varphi_2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial l} & \frac{\partial f_3}{\partial m} & \frac{\partial f_3}{\partial n} & \varphi_3 \\ \frac{\partial f_4}{\partial l} & \frac{\partial f_4}{\partial m} & \frac{\partial f_4}{\partial n} & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Par exemple, en prenant le plan tangent singulier qui, avec les notations actuelles appliquées aux formules de la page 20 de M. Richard, est

$$l = \frac{\sqrt{-1}}{c} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - a^2}}, \quad m = \frac{\sqrt{-1}}{c} \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{b^2 - a^2}} \quad (n = 0, p = 1).$$

$$\begin{aligned} f_1 &= [-(b^2 + c^2) + b^2 c^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2] l = l g_1, \\ f_2 &= [-(c^2 + a^2) + c^2 a^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2] m = m g_2, \\ f_3 &= [-(a^2 + b^2) + a^2 b^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2] n, \\ f_4 &= 2 - [(b^2 + c^2) l^2 + (c^2 + a^2) m^2 + (a^2 + b^2) n^2]. \end{aligned}$$

La troisième colonne du déterminant (81) se réduit à son troisième terme $\neq 0$, et le déterminant à son mineur

$$(82) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial l} & \frac{\partial f_1}{\partial m} & \varphi_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial l} & \frac{\partial f_2}{\partial m} & \varphi_2 \\ \frac{\partial f_4}{\partial l} & \frac{\partial f_4}{\partial m} & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial l} &= g_1 + l \frac{\partial g_1}{\partial l}, & \frac{\partial f_1}{\partial m} &= l \frac{\partial g_1}{\partial m}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial l} &= + m \frac{\partial g_2}{\partial l}, & \frac{\partial f_2}{\partial m} &= g_2 + m \frac{\partial g_2}{\partial m}, \\ \frac{\partial f_4}{\partial l} &= -2(b^2 + c^2)l, & \frac{\partial f_4}{\partial m} &= -2(c^2 + a^2)m. \end{aligned}$$

Mais ici

$$\begin{aligned} g_1 &= -(b^2 + c^2) + b^2 + c^2 = 0, \\ g_2 &= -(c^2 + a^2) + a^2 + c^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} l \frac{\partial g_1}{\partial l} & l \frac{\partial g_1}{\partial m} & \varphi_1 \\ m \frac{\partial g_2}{\partial l} & m \frac{\partial g_2}{\partial m} & \varphi_2 \\ \frac{\partial f_4}{\partial l} & \frac{\partial f_4}{\partial m} & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial l} &= 4b^2c^2l, & \frac{\partial g_1}{\partial m} &= 2c^2(a^2 + b^2)m, \\ \frac{\partial g_2}{\partial l} &= 2c^2(a^2 + b^2)l, & \frac{\partial g_2}{\partial m} &= 4c^2a^2m. \end{aligned}$$

La condition s'écrit donc ainsi :

$$\begin{vmatrix} 2b^2c^2l & c^2(a^2 + b^2)l & -l(\beta_1^2 + \gamma_1^2) + m\alpha_1\beta_1 \\ c^2(a^2 + b^2)m & 2c^2a^2m & -m(\alpha_1^2 + \gamma_1^2) + l\alpha_1\beta_1 \\ -(b^2 + c^2) & -(c^2 + a^2) & 2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) - \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}{c^2} + (\alpha_1l + \beta_1m)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On divisera la première ligne par l , la deuxième par m .

Les coefficients des éléments de la dernière colonne sont respectivement, en divisant par $c^4(a^2 - b^2)$,

$$\frac{c^2 - a^2}{c^2}, \quad \frac{b^2 - c^2}{c^2}, \quad -(a^2 - b^2).$$

Le coefficient de γ_1^2 disparaissant, *on voit que le cône*, sur lequel doit se trouver l'axe de dissymétrie pour que le plan tangent singulier existe, *se réduit à deux plans passant par O z.*

CHAPITRE V.

GAS DES ONDES PLANES LATÉRALEMENT LIMITÉES.

En nous reportant au paragraphe IV (n° 19) du Mémoire de M. Boussinesq (p. 335) (1), nous voyons que le rayon lumineux, supposé latéralement limité pour rentrer dans le cas de la réalité, mais assez large pour ne pas présenter de diffraction sensible, se prêter à l'étude précédente, pourvu que $L'I$, $M'I$, $N'I$ subissent trois corrections *imaginaires* ε , ε_1 , ε_2 , de l'ordre des dérivées partielles $\frac{dI}{dx}$, $\frac{dI}{dy}$, $\frac{dI}{dz}$, I étant maintenant une fonction lentement variable de x , y , z , dont les dérivées secondes seraient encore beaucoup plus petites que ces dérivées premières. Ce sont donc les expressions

$$\frac{\xi}{L'I + \varepsilon} = \frac{\eta}{M'I + \varepsilon_1} = \frac{\zeta}{N'I + \varepsilon_2} = e^{k(l^2 - lx - my - nz)\sqrt{-1}} = E,$$

que nous substituons dans les mêmes équations du mouvement. Dans ces expressions, L' , M' , N' conservent leurs valeurs constantes du cas des ondes planes latéralement indéfinies.

Les termes εE , $\varepsilon_1 E$, $\varepsilon_2 E$ donneront, d'après le calcul du Chapitre I, les produits de E par

$$\Phi\varepsilon + X\varepsilon_1 + \Psi\varepsilon_2, \quad \Phi_1\varepsilon + X_1\varepsilon_1 + \Psi_1\varepsilon_2, \quad \Phi_2\varepsilon + X_2\varepsilon_1 + \Psi_2\varepsilon_2.$$

En effet, ε , ε_1 , ε_2 étant déjà de l'ordre de petitesse des dérivées premières de I , les dérivations de ε , ε_1 , ε_2 par rapport à x , y , z n'introduiraient que des termes de l'ordre supérieur de petitesse des dérivées secondes de I .

Dans les autres termes, la dérivation par rapport à x du produit $L'IE$ le multipliera par

$$-kl\sqrt{-1} + \frac{1}{I} \frac{dI}{dx} = -k\sqrt{-1} \left(l + \frac{1}{KI} \frac{dI}{dx} \sqrt{-1} \right).$$

(1) *Journal de Mathématiques*, 6^e série, t. VII, 1911.

Cette dérivation reviendra donc à donner à l un accroissement qu'on peut représenter par

$$\partial l = \frac{1}{KI} \frac{dI}{dx} \sqrt{-1}.$$

Mais, les dérivées partielles $\frac{dI}{dx}$, $\frac{dI}{dy}$, $\frac{dI}{dz}$ étant petites, et chacune d'elles n'éprouvant des changements comparables à sa valeur qu'après un grand nombre de longueurs d'onde, leurs propres dérivées seront d'ordre supérieur de petitesse, et elles-mêmes pourront être traitées comme des constantes dans notre calcul. On pourra d'ailleurs traiter

$$\partial l = \frac{1}{KI} \frac{dI}{dx} \sqrt{-1}, \quad \partial m = \frac{1}{KI} \frac{dI}{dy} \sqrt{-1}, \quad \partial n = \frac{1}{KI} \frac{dI}{dz} \sqrt{-1},$$

en raison de la petitesse de $\frac{dI}{dx}$, $\frac{dI}{dy}$, $\frac{dI}{dz}$, comme de véritables différentielles, et, dans les résultats de la substitution que nous effectuons, les neuf polynômes Φ , ..., Ψ_2 seront accrus de leurs différentielles totales $\partial\Phi$, ..., $\partial\Psi_2$. Ces résultats fourniront donc les trois équations

$$\begin{aligned} \Phi \varepsilon + X \varepsilon_1 + \Psi \varepsilon_2 + L'I(\Phi + \partial\Phi) + M'I(X + \partial X) + N'I(\Psi + \partial\Psi) &= 0, \\ \Phi_1 \varepsilon + X_1 \varepsilon_1 + \Psi_1 \varepsilon_2 + L'I(\Phi_1 + \partial\Phi_1) + M'I(X_1 + \partial X_1) + N'I(\Psi_1 + \partial\Psi_1) &= 0, \\ \Phi_2 \varepsilon + X_2 \varepsilon_1 + \Psi_2 \varepsilon_2 + L'I(\Phi_2 + \partial\Phi_2) + M'I(X_2 + \partial X_2) + N'I(\Psi_2 + \partial\Psi_2) &= 0. \end{aligned}$$

Appelons λ' , μ' , ν' les trois multiplicateurs, définis à un facteur près et fonctions de l , m , n , qui vérifient le système homogène

$$\begin{aligned} \lambda'\Phi + \mu'\Phi_1 + \nu'\Phi_2 &= 0, \\ \lambda'X + \mu'X_1 + \nu'X_2 &= 0, \\ \lambda'\Psi + \mu'\Psi_1 + \nu'\Psi_2 &= 0, \end{aligned}$$

compatible à cause de la condition

$$\begin{vmatrix} \Phi & \Phi_1 & \Phi_2 \\ X & X_1 & X_2 \\ \Psi & \Psi_1 & \Psi_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou $f(a, b, c, l, m, n) = 0$, que nous supposons vérifiée, et qui n'est autre que la condition (41) du Chapitre I (troisième Partie), les lignes étant échangées avec les colonnes. Il en résulte aussi que pour λ' , μ' , ν' on peut prendre les expressions imaginaires conjuguées de L' , M' , N' , d'après une remarque faite à la fin du Chapitre I.

Alors, en multipliant par λ' , μ' , ν' les équations et les ajoutant, on

obtient, après suppression du facteur I,

$$(\lambda' \partial \Phi + \mu' \partial \Phi_1 + \nu' \partial \Phi_2) L' + (\lambda' \partial X + \mu' \partial X_1 + \nu' \partial X_2) M' \\ + (\lambda' \partial \Psi + \mu' \partial \Psi_1 + \nu' \partial \Psi_2) N' = 0.$$

Dans cette équation, on a

$$\partial \Phi = \frac{d\Phi}{dl} \partial l + \frac{d\Phi}{dm} \partial m + \frac{d\Phi}{dn} \partial n,$$

.....

Elle devient donc

$$\left[\left(\lambda' \frac{d\Phi}{dl} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dl} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dl} \right) \partial l \right. \\ \left. + \left(\lambda' \frac{d\Phi}{dm} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dm} \right) \partial m + \left(\lambda' \frac{d\Phi}{dn} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dn} \right) \partial n \right] L' \\ + \left[\left(\lambda' \frac{dX}{dl} + \mu' \frac{dX_1}{dl} + \nu' \frac{dX_2}{dl} \right) \partial l \right. \\ \left. + \left(\lambda' \frac{dX}{dm} + \mu' \frac{dX_1}{dm} + \nu' \frac{dX_2}{dm} \right) \partial m + \left(\lambda' \frac{dX}{dn} + \mu' \frac{dX_1}{dn} + \nu' \frac{dX_2}{dn} \right) \partial n \right] M' \\ + \left[\left(\lambda' \frac{d\Psi}{dl} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dl} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dl} \right) \partial l \right. \\ \left. + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dm} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dm} \right) \partial m + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dn} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dn} \right) \partial n \right] N' = 0$$

avec

$$\partial l = \frac{\sqrt{-1}}{KI} \frac{dI}{dx}, \quad \partial m = \frac{\sqrt{-1}}{KI} \frac{dI}{dy}, \quad \partial n = \frac{\sqrt{-1}}{KI} \frac{dI}{dz}$$

ou, en ordonnant par rapport à ces dérivées, c'est-à-dire en colonnes,

$$\left[\left(\lambda' \frac{d\Phi}{dl} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dl} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dl} \right) L' \right. \\ \left. + \left(\lambda' \frac{dX}{dl} + \mu' \frac{dX_1}{dl} + \nu' \frac{dX_2}{dl} \right) M' + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dl} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dl} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dl} \right) N' \right] \frac{dI}{dx} \\ + \left[\left(\lambda' \frac{d\Phi}{dm} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dm} \right) L' \right. \\ \left. + \left(\lambda' \frac{dX}{dm} + \mu' \frac{dX_1}{dm} + \nu' \frac{dX_2}{dm} \right) M' + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dm} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dm} \right) N' \right] \frac{dI}{dy} \\ + \left[\left(\lambda' \frac{d\Phi}{dn} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dn} \right) L' \right. \\ \left. + \left(\lambda' \frac{dX}{dn} + \mu' \frac{dX_1}{dn} + \nu' \frac{dX_2}{dn} \right) M' + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dn} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dn} \right) N' \right] \frac{dI}{dz} = 0$$

ou enfin

$$P \frac{dI}{dx} + Q \frac{dI}{dy} + R \frac{dI}{dz} = 0,$$

P, Q, R représentant les trois crochets.

Mais entre les neuf polynomes Φ , ..., Ψ_2 nous avons établi la relation

$$f(a, b, c, l, m, n) = 0,$$

qui n'est autre que l'équation tangentielle de la surface des ondes, et dont la différentielle totale serait

$$\frac{df}{dl} dl + \frac{df}{dm} dm + \frac{df}{dn} dn = 0.$$

Or, je dis qu'on a précisément,

$$\frac{\frac{df}{dl}}{P} = \frac{\frac{df}{dm}}{Q} = \frac{\frac{df}{dn}}{R}.$$

En effet, pour effectuer cette différentiation, il est inutile de former explicitement F : il suffit de différentier totalement les trois équations linéaires et homogènes dont $F = 0$ exprime la compatibilité. Il s'agit ici de différentielles effectives et non plus symboliques, et il vient

$$\begin{aligned} \Phi dL' + X dM' + \Psi dN' + L' d\Phi + M' dX + N' d\Psi &= 0, \\ \Phi_1 dL' + X_1 dM' + \Psi_1 dN' + L' d\Phi_1 + M' dX_1 + N' d\Psi_1 &= 0, \\ \Phi_2 dL' + X_2 dM' + \Psi_2 dN' + L' d\Phi_2 + M' dX_2 + N' d\Psi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations, multipliées par λ' , μ' , ν' , définies plus haut et ajoutées, donnent, par évanouissement des trois premières colonnes,

$$\begin{aligned} (\lambda' d\Phi + \mu' d\Phi_1 + \nu' d\Phi_2) L' \\ + (\lambda' dX + \mu' dX_1 + \nu' dX_2) M' + (\lambda' d\Psi + \mu' d\Psi_1 + \nu' d\Psi_2) N' &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$d\Phi = \frac{d\Phi}{dl} dl + \frac{d\Phi}{dm} dm + \frac{d\Phi}{dn} dn,$$

.....

Cette équation devient donc

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(\lambda' \frac{d\Phi}{dt} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dt} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dt} \right) L' \right. \\
 & \quad \left. + \left(\lambda' \frac{dX}{dt} + \mu' \frac{dX_1}{dt} + \nu' \frac{dX_2}{dt} \right) M' + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dt} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dt} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dt} \right) N' \right] dt \\
 & + \left[\left(\lambda' \frac{d\Phi}{dm} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dm} \right) L' \right. \\
 & \quad \left. + \left(\lambda' \frac{dX}{dm} + \mu' \frac{dX_1}{dm} + \nu' \frac{dX_2}{dm} \right) M' + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dm} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dm} \right) N' \right] dm \\
 & + \left[\left(\lambda' \frac{d\Phi}{dn} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dn} \right) L' \right. \\
 & \quad \left. + \left(\lambda' \frac{dX}{dn} + \mu' \frac{dX_1}{dn} + \nu' \frac{dX_2}{dn} \right) M' + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dn} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dn} \right) N' \right] dn = 0,
 \end{aligned}$$

ou enfin

$$P dl + Q dm + R dn = 0$$

comme nous l'avions annoncé, c'est-à-dire

$$\frac{df}{dl} = \frac{df}{dm} = \frac{df}{dn}.$$

Or le point de contact (x, y, z) du plan de l'onde avec son enveloppe est précisément donné, sur l'équation tangentielle, par

$$\frac{x}{\frac{df}{dl}} = \frac{y}{\frac{df}{dm}} = \frac{z}{\frac{df}{dn}},$$

ou

$$\frac{x}{P} = \frac{y}{Q} = \frac{z}{R}.$$

Si nous considérons par suite un élément de chemin $(\partial x, \partial y, \partial z)$ à partir de l'origine le long du rayon vecteur de ce point de contact, nous aurons

$$\frac{\partial x}{P} = \frac{\partial y}{Q} = \frac{\partial z}{R},$$

et, sur cet élément, l'équation

$$P \frac{dI}{dx} + Q \frac{dI}{dy} + R \frac{dI}{dz} = 0$$

deviendra

$$\frac{dI}{dx} \partial x + \frac{dI}{dy} \partial y + \frac{dI}{dz} \partial z = 0 \quad (\partial I = 0).$$

C'est l'équation (57) de la page 339 du Mémoire de M. Bousinesq.

Donc, quelle que soit la manière graduelle dont varie la fonction I d'un point à l'autre d'une même onde plane, cette fonction ne variera pas le long du rayon vecteur joignant le centre de la surface des ondes au point de contact de cette surface avec l'onde plane, et c'est suivant ce rayon vecteur que se *transmettra l'amplitude du mouvement* : c'est la propriété caractéristique du *rayon correspondant de lumière parallèle*.

Nous avons donc étendu, au cas général qui nous occupe, malgré la présence des trois coefficients ν, ν_1, ν_2 (représentant un ordre de phénomènes analogue à la polarisation rotatoire magnétique), la conclusion de ce Mémoire :

Les équations du mouvement n'astreignent le coefficient I d'amplitude qu'à rester invariable le long de chaque rayon lumineux (rayon vecteur du point de contact du plan de l'onde avec son enveloppe, la surface des ondes).

