

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. GEVREY

Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique

Journal de mathématiques pures et appliquées 6^e série, tome 9 (1913), p. 305-471.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1913_6_9_305_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les équations aux dérivées partielles du type
parabolique;*

Par M. GEVREY.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude des équations aux dérivées partielles du type parabolique, *linéaires et non linéaires*, soit au point de vue de la *résolution des problèmes aux limites*, soit au point de vue de la *nature des solutions* ⁽¹⁾.

La plus simple des équations du type parabolique est l'équation de la chaleur

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y},$$

ou, dans le cas de plus de deux variables,

$$(1') \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

étudiées longuement par Fourier dans ses beaux travaux sur la Phy-

⁽¹⁾ Les principaux résultats de ce travail ont fait l'objet de plusieurs Communications à l'Académie des Sciences : 20 février 1911, t. 151; 6 juin 1911, t. 152; 24 juin 1912, t. 154; 28 octobre 1912, t. 155; 17 février 1913, t. 156.

sique mathématique ⁽¹⁾. Poisson ⁽²⁾, Laplace se sont eux aussi occupés des problèmes de la chaleur, en se plaçant toujours au point de vue du calcul de la solution dans chacun des problèmes posés par la Physique. A une époque plus rapprochée, Schaeffli ⁽³⁾, Betti sont revenus sur ces questions, et plus récemment encore M. Appell ⁽⁴⁾ a consacré à l'équation (1) un remarquable Mémoire. Enfin l'équation (1') a été étudiée par divers auteurs ⁽⁵⁾ en utilisant les méthodes introduites dans ce genre de recherches par Poincaré, dans son célèbre *Mémoire sur les équations de la Physique mathématique*.

Mais les équations générales du type parabolique n'avaient pas été envisagées en elles-mêmes, si ce n'est au point de vue, plutôt géométrique, du problème de Cauchy et de l'intégration effective, lorsque, en 1907 et en 1908, MM. Holmgren et Levi ⁽⁶⁾ publièrent, presque simultanément, des travaux sur l'équation (1), s'inspirant des théories modernes relatives aux équations intégrales : là comme ailleurs, cet instrument analytique a fait preuve de sa fécondité et de sa souplesse.

La Physique mathématique avait posé, relativement à l'équation (1), un type de problème, se rapprochant du problème de Dirichlet, et qui a conduit tout naturellement à une classe de problèmes aux limites, se résolvant par des méthodes analogues à celles dont on fait usage dans la théorie des équations elliptiques et hyperboliques. C'est à cette question qu'est consacré le remarquable Mémoire de M. Levi, qui étudie dans cet esprit, d'une façon très complète, l'équation (1), ainsi que l'équation à second membre

$$(2) \quad \delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y).$$

(1) FOURIER, *Œuvres*, publiées par M. Darboux, t. I et II.

(2) POISSON, *Théorie mathématique de la chaleur*, Paris, 1835.

(3) *Journal de Crelle*, t. 72.

(4) *Journal de Liouville*, 1892.

(5) MM. Le Roy, Stekloff, Zaremba, Lauricell, etc. Citons aussi les deux Chapitres que M. Volterra a consacrés à l'équation de la chaleur dans ses *Leçons de Stockholm* (1906), et dont la lecture est fort suggestive.

(6) HOLMGREN, *Arkiv för Matematik*, Bd III et IV (1907-1908). — E.-E. LEVI, *Annali di Matematica* (1908). J'aurai souvent occasion de citer ce Mémoire, dont la lecture m'a donné l'idée de mes recherches.

Les *caractéristiques* de cette équation sont les droites $y = \text{const.}$ Dans tout ce qui suit, nous appellerons *contour* (C) un contour formé d'un segment $A_1 A_2$ de caractéristique, pouvant d'ailleurs se réduire à zéro, et de deux arcs $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, situés au-dessus de $A_1 A_2$, ne se coupant pas, et rencontrés respectivement en un seul point par les caractéristiques qui les coupent; les équations de ces arcs de courbe, que nous appellerons C_1 et C_2 (voir *fig. 1*), sont donc de la forme

$$x = X_1(y), \quad x = X_2(y).$$

Nous désignerons également sous le nom de *solution régulière* d'une équation aux dérivées partielles, toute solution continue, ainsi que celles de ses dérivées qui figurent dans l'équation.

Cela posé, le problème aux limites *type* relatif à l'équation (2) est le suivant : déterminer une solution z de cette équation, régulière entre les arcs C_1 et C_2 , connaissant les valeurs qu'elle prend sur le contour (C). Si nous appelons d'une façon générale S la région située entre les arcs C_1 et C_2 et au-dessus de $A_1 A_2$, z sera régulière dans S et continue sur (C). Étant donné un point $P(x, y)$ de S, la valeur de z en ce point ne dépend que des données sur la portion (C_y) de (C) qui est au-dessous de la caractéristique d'ordonnée y . On peut donc dire, en quelque sorte, que le type parabolique participe à la fois du type hyperbolique et du type elliptique, puisque sur une courbe *ouverte* on se donne la valeur de z *seul*. L'angle des droites caractéristiques du type hyperbolique est devenu égal à 180° et il continue ainsi à embrasser les données dont dépend la valeur de la solution en son sommet (devenu indéterminé), mais, dans le passage, la connaissance des valeurs prises par $\frac{\partial z}{\partial x}$ est devenue inutile.

Quoi qu'il en soit, l'emploi d'une *solution fondamentale*, qui est ici ⁽¹⁾

$$U(\Pi, P) = U(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \eta}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4(y - \eta)}}$$

conduit à la *formule fondamentale* (§ 1) et à la représentation de la solution par des intégrales (§ 2) : en écrivant que ces intégrales pren-

(1) Dans tout ce travail nous désignerons toujours par la lettre U une solution fondamentale et nous écrirons toujours les premiers, dans son expression symbolique, les variables ou le point relatif à l'équation *adjointe*.

nent au bord les valeurs données, on obtient les équations intégrales qui permettent de résoudre la question. Au moyen de celles-ci on peut d'ailleurs former une *fonction de Green* permettant, grâce à la formule fondamentale, d'obtenir par une même formule, la solution de tout problème aux limites concernant un contour donné.

Cette façon de procéder est absolument classique et en, ce qui concerne l'équation de la chaleur, nous ne pouvons mieux faire, comme complément à ce que nous disons au début du premier Chapitre, que de renvoyer le lecteur au Mémoire de M. Levi, et à l'excellent Chapitre que M. Goursat a consacré à ces questions dans le Tome III de son *Traité d'Analyse* ⁽¹⁾.

Il existe pour l'équation (2) une intégrale tout à fait analogue au potentiel de simple couche : c'est la fonction

$$z = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_\gamma} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

qui est solution de l'équation (1), S_γ désignant le domaine limité par (C_γ) et la caractéristique d'ordonnée γ . Si nous remplaçons dans cette intégrale la solution fondamentale par la fonction de Green, nous avons la solution nulle sur (C) .

Tout ceci étant rappelé, on voit donc que le chemin était tout tracé pour la résolution des problèmes aux limites relatifs à des équations plus générales, suivant la méthode si féconde créée par M. Picard dans son fameux Mémoire *Sur les équations aux dérivées partielles* (*Journal de Liouville*, 1890).

I. Dans un premier Chapitre j'approfondis l'étude des solutions des deux équations (1) et (2) *en vue des applications du Chapitre suivant*. Puisque notre objet est de former la solution des équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}) \quad & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + cz + f, \\ (\mathcal{E}_1) \quad & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \\ (\mathcal{E}_2) \quad & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \end{aligned}$$

(1) Toutes les fois que nous renverrons à ce Mémoire ou à cet Ouvrage, nous les désignerons simplement par le nom de l'auteur.

et cela par le moyen d'approximations successives, il nous faut envisager l'allure de la dérivée $\frac{\partial z}{\partial x}$ au bord, pour les équations $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_1)$, et aussi de la dérivée $\frac{\partial z}{\partial y}$, pour l'équation $(\mathcal{C}_2)$.

Je commence par faire cette étude pour l'équation (1) : je forme tout d'abord la fonction de Green, et cela en supposant simplement que les deux fonctions X_1 et X_2 satisfassent à la condition

$$(\Gamma) \quad |X_i(y) - X_i(y')| < K |y - y'|^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Le contour (C) peut donc n'avoir aucune existence matérielle, puisque les fonctions X_i peuvent ne pas admettre de dérivée. Ce point de vue peut évidemment prêter à la critique et d'autant plus que, si l'on suppose que X_1 et X_2 admettent une dérivée première, le changement de variable

$$(V) \quad x' = \frac{l[x - X_1(y)]}{X_2(y) - X_1(y)}$$

transforme les équations $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ en équations de même forme, et le contour (C) en un contour rectangulaire porté par les droites A_1, A_2 et $x' = 0$, $x' = l$. Or précisément l'étude des dérivées au bord est particulièrement simple dans le cas d'un contour rectangulaire.

Malgré cela, il m'a semblé que le point de vue purement théorique ne saurait être exclu, sous le prétexte qu'il s'agit d'équations utilisées en Physique mathématique et qu'on pouvait envisager ces questions en elles-mêmes, puisqu'aussi bien on se plaçait à ce point de vue dans d'autres théories plus éloignées des applications.

Parcilleusement j'ai toujours cherché à faire le moins d'hypothèses que possible sur les coefficients et les données : ceci peut d'ailleurs éviter des discussions spéciales, au cas où ces fonctions présenteraient en certains points des particularités qu'une méthode moins subtile aurait éliminées.

Au reste, comme le contour rectangulaire simplifie beaucoup de questions, je lui ai consacré une Note spéciale à la fin du Mémoire : tout ce qui concerne plus spécialement les contours satisfaisant à la condition (Γ) a été marqué par un astérisque et le lecteur qui ne s'intéresse pas à ce point de vue pourra le passer sans inconvénient.

Dans le premier Chapitre j'étudie également les conditions les plus simples qu'on puisse donner, bien qu'assez larges [*conditions (A)* § 9] pour que les dérivées $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial Z}{\partial y}$ de la fonction Z existent et vérifient l'équation (2). Enfin, comme l'a fait M. Pétrini pour le potentiel ⁽¹⁾ je donne une extension du symbole

$$\delta Z \equiv \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

n'exigeant pour la fonction $f(x, y)$ qu'un certain genre de continuité.

Quand f est simplement intégrable, Z satisfait à des conditions d'accroissements analogues à celles qu'a étudiées M. Dini dans le cas du potentiel ⁽²⁾.

II. Dans le second Chapitre je m'occupe de la *résolution des problèmes aux limites* et plus particulièrement du problème type cité plus haut, l'équation donnée étant (c), (c₁) ou (c₂).

Il y a plusieurs manières d'envisager la question pour l'équation (c). On peut tout d'abord, par un changement de fonction inconnue, faire disparaître le coefficient a . C'est ce qu'a fait M. H. Block dans un Mémoire paru dans les *Arkiv de Stockholm* (Bd. VI) et qui venait d'être imprimé au moment où j'ai publié une première Note. J'ignorais complètement ce travail, développement d'une Note communiquée quelques mois avant. Effectivement, le cas où $a = 0$ est d'une grande simplicité et c'est par ce cas que j'avais débuté dans mes recherches l'année précédente. Mais, outre qu'il exige l'existence des deux dérivées premières du coefficient de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dans l'équation primitive, il ne se prête pas à la généralisation dans le cas de plusieurs variables, et il ne peut servir à préparer l'étude des équations (c₁) ou (c₂).

Si l'on ne fait sur les coefficients d'autre hypothèse que la condition (A), la solution de l'équation (c) sera donnée par le moyen d'une équation *intégrale-différentielle* (§ 19), résoluble par approximations successives ⁽³⁾.

⁽¹⁾ *Journal de Liouville*, 1909; *Acta mathematica*, t. XXXI.

⁽²⁾ *Acta mathematica*, t. XXV.

⁽³⁾ Ordinairement dans ces approximations, on suppose l'existence, *au bord*

Si la dérivée $\frac{\partial a}{\partial x}$ du coefficient a existe, on peut transformer l'équation précédente en *équation intégrale* ordinaire (§ 25), suivant le procédé de M. Picard ⁽¹⁾, et l'on n'a pas alors d'autre hypothèse à faire sur les données, que celle de la continuité. On peut alors démontrer sur les *séries de solutions* un théorème tout à fait analogue à celui qui a été établi par M. Picard pour le type elliptique et par M. Levi pour l'équation de la chaleur (§ 25), et appliquer ce théorème au cas où le contour (C) *présente des singularités* (§ 26).

La résolution de l'équation intégral-différentielle dont nous parlions plus haut a préparé la voie pour l'étude de l'équation ($\mathcal{C}_1$), f étant supposée lipschitzienne en z et $\frac{\partial z}{\partial x}$. Jusqu'ici, la seule hypothèse faite sur le contour est la condition (Γ).

Plus délicate est la résolution de l'équation ($\mathcal{C}_2$), soit

$$r = f(x, y, z, p, q), \quad f'_q > 0.$$

En effet, pour la résoudre par approximations successives, nous la mettrons sous la forme $\delta z = \varphi(x, y, z, p, q)$. Or, en vertu des équations mêmes qui constituent la chaîne et qui sont de la forme (2), les dérivées r et q présentent les mêmes singularités au bord. Mais ici q est engagée dans le second membre. J'ai résolu la difficulté par la *méthode des accroissements*, basée sur les études faites dans le premier Chapitre. J'ai naturellement cherché à faire le moins d'hypothèses que possible sur f et je l'ai simplement supposée pourvue d'un certain nombre de dérivées (§ 31). La question est assez analogue à la résolution de l'équation elliptique

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

mise sous la forme

$$r + t = \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t)$$

et qui a été faite par M. Bernstein *dans le cas analytique* seulement.

La fin du Chapitre concerne l'extension au cas de plusieurs variables des problèmes traités jusqu'ici.

même, des dérivées qui figurent dans les seconds membres des équations d'approximation. Cette condition n'est pas indispensable et j'ai indiqué très sommairement comment on pouvait s'en passer.

⁽¹⁾ *Rendiconti di Palermo* et *Annales de l'École Normale*, 1906.

III. Les solutions régulières de l'équation de la chaleur sont analytiques par rapport à x ; relativement à y elles sont d'une certaine espèce de fonctions, que j'ai appelées *fonctions* $\mathfrak{E}$ (voir § 52) et qui ont fourni à M. Holmgren matière à des résultats remarquables sur le *prolongement* des solutions de l'équation de la Chaleur.

M. Levi avait démontré que, si f est *analytique en* x , dans une région $\mathfrak{A}$, toute solution régulière de l'équation (2) est aussi analytique en x dans $\mathfrak{A}$. J'ai étendu ce résultat à l'équation (3), quand les coefficients sont analytiques en x , et aux équations (3₁) et (3₂), quand f est analytique en x, z, p, q .

L'*analyticité par rapport à* y n'est pas aussi directe : $\mathfrak{F} = 0$ désignant l'une des équations (3), (3₁), (3₂), si $\mathfrak{F}$ est analytique en y, z, p, q et si z prend des valeurs analytiques sur deux segments C_1 et C_2 parallèles à Oy , z sera analytique en y sur tout segment de caractéristique limité par C_1 et C_2 . Une propriété analogue a lieu pour l'*analyticité par rapport à l'ensemble des variables* x, y, C_1 et C_2 pouvant être cette fois des arcs analytiques.

Je me suis proposé également de voir si les fonctions d'espèce $\mathfrak{E}$ ne jouaient pas, *par rapport à* y , le même rôle que les fonctions *analytiques, par rapport à* x . En d'autres termes, si les coefficients de l'équation (3) sont *fonctions* $\mathfrak{E}$ en y , en sera-t-il de même de toute solution régulière? La réponse est affirmative et vraie également pour l'équation

$$(E) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f,$$

b gardant un signe constant. De plus, si les coefficients de cette équation sont fonctions $\mathfrak{E}$ par rapport à l'ensemble (x, y) (voir § 52), toute solution régulière prend sur une courbe d'équation $x = X(y)$, X étant une fonction $\mathfrak{E}$, des valeurs définissant une fonction $\mathfrak{E}$ de y . Nous appelons une telle courbe, *courbe* $\mathfrak{E}$.

Enfin, le *problème du prolongement* (§ 57) m'a conduit au résultat suivant : la condition nécessaire et suffisante, pour qu'une solution z de (E), régulière dans un domaine limité en partie par une courbe $\mathfrak{E}$, soit prolongeable au delà de cette courbe, est que les valeurs prises par z sur cette courbe constituent une fonction de y qui soit d'espèce $\mathfrak{E}$: nous supposons ici les coefficients de (E) d'espèce $\mathfrak{E}$ par rapport à l'en-

semble (x, y) . Si la courbe est un segment vertical, il suffit qu'ils soient d'espèce $\mathfrak{K}$ en y .

Ces résultats sont basés sur la résolution du *problème de Cauchy*, dans le cas où la frontière est un segment vertical : la solution se calcule par approximations successives en partant de la formule

$$Z_0(x, y) = \int_0^x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p} d\xi,$$

qui donne la solution de l'équation (2) nulle sur Oy , ainsi que sa dérivée par rapport à x .

J'étudie enfin le cas où les coefficients sont analytiques en y (problème de Cauchy et problème du prolongement) et, après quelques autres considérations relatives au prolongement, je termine le Chapitre en montrant que le problème qui consiste à déterminer une solution de l'équation de la chaleur, analytique en x et y , et prenant sur deux courbes sécantes des valeurs analytiques, est un problème *en général impossible*, contrairement à ce qui a lieu pour un grand nombre d'autres équations.

IV. Appelons *équations singulières* les équations du type (E), telles que le coefficient b s'annule avec ou sans changement de signe dans la région où l'on veut former une solution de l'équation. Suivant que la *ligne singulière*, le long de laquelle b s'annule, est quelconque (sans tangentes caractéristiques cependant) ou est une caractéristique, nous aurons les deux types suivants (en posant $\varepsilon = \pm 1$) :

$$\begin{aligned} (\bar{C}) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} &= cz + f, & \text{type simple } (\bar{e}) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} &= 0, \\ (\bar{C}') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} &= cz + f, & \text{type simple } (\bar{e}') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Il est facile de former une *solution fondamentale* de l'équation $(\bar{e})$ valable dans tout le plan. Le nombre entier p étant pair, les problèmes aux limites relatifs à l'équation (1) se résolvent également pour l'équation $(\bar{e})$, et par suite $(\bar{C})$, par des méthodes analogues, même si le contour qui porte les données traverse l'axe des y , ou bien en comprend un ou plusieurs segments. Mais si p est impair, la solution de $(\bar{e})$

est déterminée *au-dessus* du contour qui porte les données, dans la région qui est à *droite* de Oy , et *au-dessous* dans la région qui est à *gauche*. Pour avoir une solution régulière dans un domaine traversé par Oy , il faut examiner si deux solutions, déterminées dans deux régions admettant l'axe des y comme frontière commune, *peuvent se raccorder*, c'est-à-dire prendre, ainsi que leurs dérivées premières, la même valeur sur Oy . On reconnaît alors que la solution de ce problème revient à celle d'une *équation de Fredholm de première espèce* et ceci permet de montrer que les noyaux de la forme

$$\frac{\varepsilon}{|x-s|^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1),$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et peut ou non changer de signe pour $s = x$, sont des *noyaux fermés*.

Quant à l'équation $(\bar{e}')$, il est aisé de former sa solution fondamentale et de montrer que si une solution, régulière au voisinage de Ox , se réduit sur Ox à une fonction continue, celle-ci ne peut être que *linéaire*. Quand p est impair et $\varepsilon = -1$, la disposition des contours portant les données permet de résoudre, pour un contour fermé coupant Ox , un *véritable problème de Dirichlet*. Si p est pair, on peut avoir une solution régulière à l'intérieur d'un contour coupant Ox , mais les valeurs de la solution d'un côté de Ox ne dépendent pas des valeurs prises de l'autre côté.

Les résultats du Chapitre III peuvent être étendus à ces équations singulières. Nous avons traité le cas de l'équation $(\bar{c})$ avec $a = c = 0$ (problème du prolongement et problème de Cauchy). Pour les autres, nous avons simplement indiqué les résultats qui se déduisent de ceux que nous avons démontrés (*voir* § 74).

V. Dans le dernier Chapitre, nous avons appliqué la méthode de M. Hadamard⁽¹⁾ à la *formation de la solution fondamentale* des équations linéaires complètes à deux et trois variables : le procédé réussit quel que soit le nombre des variables, pour toutes les équations qui se

(¹) *Comptes rendus*, 1^{er} mai 1911.

ramènent à la forme

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + cz$$

et permet aisément la résolution des problèmes aux limites.

La solution fondamentale des équations ($\bar{c}$) se calcule également par cette méthode, et ceci permet de former l'équation intégrale relative au problème du raccordement dans le cas général.

CHAPITRE I.

SUR LES PROBLÈMES RELATIFS À L'ÉQUATION DE LA CHALEUR.

Nous allons tout d'abord rappeler brièvement certains résultats acquis relativement à l'équation

$$(1) \quad \partial z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y),$$

$f(x, y)$ étant une fonction que nous supposons tout d'abord continue.

1. FORMULE FONDAMENTALE. — Envisageons les deux équations

$$\partial z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \partial_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

dont la seconde est l'équation *adjointe* de la première. La *solution fondamentale* relative à ces deux équations est

$$U(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \eta}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4(y - \eta)}},$$

solution de $\partial z = 0$ en x, y et de $\partial_1 u = 0$ en ξ, η .

Soit z une solution *régulière* de l'équation (1) : nous la supposons donc continue ainsi que $\frac{\partial z}{\partial y}$; $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ le seront également. Envisageons un contour (C) (voir Introduction, p. 307), formé par un segment de caractéristique $A_1 A_2$ et deux arcs $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ comme il a été expliqué (fig. 1), et soit $M_1 M_2$ un segment caractéristique coupant ces deux arcs et contenant un point $P(x, y)$. Appliquons la formule de Riemann à l'intégrale

$$\int \int \{ u [\delta z - f(\xi, \eta)] - z \delta_1 u \} d\xi d\eta,$$

étendue au domaine limité par (C) et une caractéristique $M'_1 M'_2$ voisine et au-dessous de $M_1 M_2$. Si, dans cette intégrale, u est solution de $\delta_1 u = 0$ et z solution de $\delta z = f$, on a

$$(2) \quad \int_{M'_1 M'_2} u z d\xi = \int_{M'_1 A_1 A_2 M'_2} u z d\xi + \left(u \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) d\eta - \int \int u f d\xi d\eta.$$

Si nous remplaçons u par la solution fondamentale, il vient, en faisant tendre $M'_1 M'_2$ vers $M_1 M_2$, la *formule fondamentale* (1)

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & 2\sqrt{\pi} z(x, y) \\ (\beta) \quad & \sqrt{\pi} z(x, y) \\ (\gamma) \quad & 0 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} &= \int_{(C, y)} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} z d\xi + \left[\frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{x-\xi}{2(y-\eta)} \right] d\eta \Bigg\} \\ &- \int \int_{S_y} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \right.$$

S_y désignant, comme nous l'avons dit, le domaine limité par (C) et la caractéristique d'ordonnée y . On suppose : dans la formule (α), P intérieur à S ; dans (β), P sur (C); dans (γ), P extérieur.

La formule suppose également z *régulière à l'intérieur de S* , z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ *continues sur (C)*. Pour que la formule (β) soit exacte, il faut de

(1) GOURSAT, t. III, p. 310. — LEVI, p. 203. — La lecture du Chapitre de M. Goursat, déjà cité dans l'Introduction, sera très utile pour aider à bien comprendre les pages qui vont suivre : voir en particulier les nos 542, 543, 544, 545 et 547. Voir aussi le début du Mémoire de M. Levi.

plus qu'on ait (*voir* la Note à la fin du § 5)

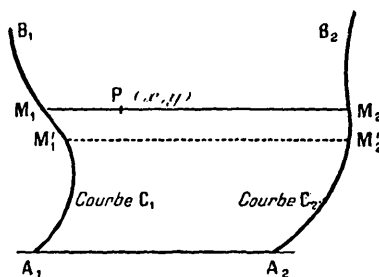
$$(3) \quad \lim_{y'=y} \frac{X_i(y) - X_i(y')}{\sqrt{y - y'}} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

et que l'intégrale

$$(4) \quad \int_{y'}^y \frac{X_i(y) - X_i(\eta)}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[X_i(y) - X_i(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} \varphi(\eta) d\eta$$

ait un sens. Enfin nous avons une intégrale curviligne en $d\xi$ qui nous

Fig. 1.



oblige aussi à quelque hypothèse sur les fonctions X_1 et X_2 : nous les supposons *continues et à variation bornée*, c'est-à-dire que les arcs C_1 et C_2 sont *rectifiables*.

Nous serons amenés plus loin à modifier un peu ces conditions.

I. — Étude des solutions de l'équation $\delta z = 0$.

L'étude que nous allons faire dans tout le premier Chapitre sert de préparation à la résolution des problèmes posés dans le second.

2. INTÉGRALES REMARQUABLES. — Posons

$$V(\xi, \eta; x, y) = \frac{x - \xi}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4(y - \eta)}} = -2 \frac{\partial U}{\partial x} = 2 \frac{\partial U}{\partial \xi}.$$

Nous voyons, dans la formule fondamentale, apparaître des intégrales de la forme

$$\delta_0(x, y) = \int_{AM} U(\xi, \eta; x, y) \varphi(\eta) d\eta, \quad \delta(x, y) = \int_{AM} V(\xi, \eta; x, y) \varphi(\eta) d\eta :$$

AM désigne un arc de courbe dont l'extrémité A est fixe et a pour ordonnée y_1 , l'autre extrémité ayant pour ordonnée y ; soit $x = X(y)$ son équation ⁽¹⁾; φ est une fonction continue. Étudions les propriétés de ces intégrales. L'intégrale s_0 , *uniformément convergente* ⁽²⁾, est *continue* en tout point, *même sur AM*. Quant à s , elle est certainement *continue en tout point non situé sur la courbe* et il est facile d'en obtenir une limitation valable dans toute la bande $\mathfrak{B}$ du plan, définie par $y_1 \leq y \leq y_2$, $\varphi(\eta)$ étant continue dans l'intervalle (y_1, y_2) , avec $|\varphi| < \Phi$.

Remarquons tout d'abord que l'intégrale

$$I = \int_{y_1}^y \frac{X(y) - X(\eta)}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x - X(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} \varphi(\eta) d\eta,$$

a un sens pour $x = X(y)$, d'après une hypothèse antérieure [intégrale (4)] : nous la supposons continue en x, y , même pour $x = X(y)$ ⁽³⁾, de telle sorte qu'on ait dans $\mathfrak{B}$ ⁽⁴⁾

$$|I| < (L)\Phi.$$

Ceci n'exige nullement que $X(y)$ soit à variation bornée et nous pouvons supprimer cette hypothèse, *en conservant cependant la condition* (3).

Nous pouvons écrire alors,

$$\begin{aligned} s &= \int_{y_1}^y \frac{x - X(\eta)}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x - X(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} \varphi(\eta) dy \\ &= I + \int_{y_1}^y \frac{x - X(y)}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x - X(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} \varphi(\eta) d\eta = I + \int_{y_1}^{y'} + \int_{y'}^y, \end{aligned}$$

(1) En somme nous supprimons ici les indices 1 et 2, AM désignant l'arc A_1M_1 ou l'arc A_2M_2 .

(2) GOURSAT, t. III, p. 173.

(3) Ceci aura lieu sous des hypothèses très larges, par exemple si

$$\int_{y_1}^y \frac{|X(y) - X(\eta)|}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} d\eta$$

a un sens.

(4) Dans tout le cours de ce Mémoire, nous désignerons, *d'une façon générique*, par (L) ou (K), *tout coefficient numérique* essentiellement fini, dont la valeur pourra d'ailleurs différer d'une formule à une autre.

en désignant par y' l'ordonnée du point de l'arc AM, *le plus rapproché de M*, et tel que

$$(5) \quad |X(y) - X(y')| = \frac{1}{2} |x - X(y)|.$$

Si ce point n'existe pas, la décomposition de l'intégrale est inutile et ce que nous dirons de $\int_{y'}^y$ s'appliquera à $\int_{y_1}^y$. Or

$$\left| \int_{y_1}^{y'} \right| < \Phi |x - X(y)| \int_{y_1}^{y'} \frac{d\eta}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} < 2\Phi \frac{x - X(y)}{\sqrt{y - y'}} = 4\Phi \frac{|X(y) - X(y')|}{\sqrt{y - y'}},$$

et d'après (3) ceci tend vers zéro avec $y - y'$. D'autre part, quand η appartient à l'intervalle (y', y) , on a certainement

$$(5') \quad e^{-\frac{[x - X(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} < e^{-\frac{[x - X(y)]^2}{16(y - \eta)}},$$

$$\left| \int_{y'}^y \right| < \Phi \int_{y'}^y \frac{x - X(y)}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x - X(y)]^2}{16(y - \eta)}} d\eta < 4\Phi \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds = 4\sqrt{\pi}\Phi,$$

en utilisant le changement de variable défini par

$$[x - X(y)]^2 = 16s(y - \eta).$$

On a donc, dans la bande $\mathfrak{B}$,

$$(6) \quad |\mathfrak{J}| < (L)\Phi.$$

La dérivée de $\mathfrak{z}_0$ par rapport à x est en tout point non situé sur la courbe égale à $-\frac{1}{2}\mathfrak{z}$.

Quant à la dérivée de $\mathfrak{z}$, elle s'écrit

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} = \int_{y_1}^y \frac{1}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[x - X(\eta)]^2}{4(y - \eta)}} \left\{ 1 - \frac{[x - X(\eta)]^2}{2(y - \eta)} \right\} \varphi(\eta) d\eta.$$

Le même procédé de décomposition que nous avons utilisé plus haut conduit à la limitation

$$(6') \quad \left| \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} \right| < \frac{(L)\Phi}{|x - X(y)|}.$$

Nous voyons donc que $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}$ devient en général infinie sur la courbe.

Cependant $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}$ se ramène facilement à des intégrales $\mathfrak{z}_0$ et $\mathfrak{z}$ quand X

et φ sont dérivables. En effet

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} = -2 \int_{y_1}^y \frac{\partial U[X(\eta), \eta; x, y]}{\partial y} \varphi(\eta) d\eta;$$

or

$$\frac{dU[X(\eta), \eta; x, y]}{d\eta} = \frac{V}{2} X'(\eta) - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

D'où, en substituant la valeur de $\frac{\partial U}{\partial y}$ fournie par cette équation dans l'intégrale et intégrant par parties,

$$(7) \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} = -2 \int_{y_1}^y U \varphi'(\eta) d\eta - \int_{y_1}^y V X'(\eta) \varphi(\eta) d\eta - 2 \varphi(y_1) U[X(y_1), y_1; x, y].$$

Cette méthode s'applique à toutes les dérivées de $\mathfrak{z}$, si φ admet des dérivées successives, et permet d'avoir leurs limites sur l'arc AM.

Formule de discontinuité. — Quand le point P traverse la courbe AC en un point P_0 , l'intégrale $\mathfrak{z}$ subit une *discontinuité* traduite par la formule

$$\lim_{P \rightarrow P_0} (\mathfrak{z}_P - \mathfrak{z}_{P_0}) = \pm 2\sqrt{\pi} \varphi_{P_0},$$

le signe étant + ou — suivant que P tend vers P_0 à droite ou à gauche de l'arc de courbe.

Cette formule, analogue à la formule de discontinuité du potentiel de double couche, a été démontrée par MM. Holmgren et Levi sous certaines conditions relatives à X et φ . Nous allons en donner une démonstration très rapide. Nous pouvons représenter, dans tout intervalle fini i contenant la valeur y_0 ordonnée de P_0 , la fonction continue $\varphi(y)$ par un polynôme $\bar{\varphi}(y)$, de telle façon qu'on ait

$$|\varphi(y) - \bar{\varphi}(y)| < \varepsilon;$$

on peut même supposer $\varphi(y_0) = \bar{\varphi}(y_0)$. Or la fonction $\bar{\varphi}$ vérifie l'équation $\partial \bar{\mathfrak{z}} = -\frac{d\bar{\varphi}}{dy}$. Par suite, étant donné un contour (C) dont l'arc AM constituerait le bord droit, en appliquant la formule (α)

ou (γ) , puis la formule (β) , à cette solution et retranchant, il vient

$$\left. \begin{array}{l} 2\sqrt{\pi} \\ \text{ou} \\ 0 \end{array} \right\} \bar{\varphi}_P - \sqrt{\pi} \varphi_{P_0} = \frac{1}{2} \int_{AM} V_P \bar{\varphi}(\eta) d\eta - \frac{1}{2} \int_{AP_0} V_{P_0} \bar{\varphi}(\eta) d\eta + \dots$$

Quand P tend vers P_0 , le premier membre tend vers $\pm \sqrt{\pi} \varphi(\gamma_0)$ et les termes non écrits dans le deuxième membre tendent vers zéro. Or le second membre peut s'écrire

$$\frac{1}{2} (\beta_P - \beta_{P_0}) + \frac{1}{2} \int_{AP} V_P (\bar{\varphi} - \varphi) d\eta - \frac{1}{2} \int_{AP_0} V_{P_0} (\bar{\varphi} - \varphi) d\eta + \dots$$

Les deux intégrales sont en valeur absolue inférieures à $(L)\varepsilon$. Par suite ε étant donné, on pourra toujours choisir ε , puis prendre P suffisamment voisin de P_0 , pour qu'on ait

$$|\beta_P - \beta_{P_0} \mp 2\sqrt{\pi} \varphi_{P_0}| < \varepsilon',$$

ce qui démontre la formule que nous avons en vue.

Ici X est supposé vérifier toutes les conditions données pour l'établissement de la formule fondamentale. Mais il est aisé de voir que nous pouvons supprimer la condition que X soit à variation bornée. En effet, cette condition est relative à l'existence de l'intégrale

$$\int_{AM} U(\xi, \eta; x, y) \varphi(\eta) d\xi.$$

Mais, pour écrire cette intégrale, nous pouvons supposer que l'arc $AM'M$ a été remplacé par un arc $AM''M$ intérieur à (C) , ayant mêmes extrémités et tel que cette intégrale curviligne ait un sens; il faudra alors adjoindre au second membre de la formule fondamentale l'intégrale double $\int \int_{\sigma} \frac{\partial U}{\partial \gamma} \varphi d\xi d\eta$ étendue à l'aire σ comprise entre $AM'M$ et $AM''M$. Il est facile de voir que cette intégrale a un sens et est continue quand P et M varient, à la condition que P ne vienne pas à l'intérieur de σ . Les conclusions énoncées plus haut subsistent donc.

Quand le point P tend vers A , la limitation que nous avons donnée plus haut montre que, si φ est nul en A , β tend vers zéro.

La formule fondamentale met également en évidence les solutions

de $\delta z = 0$, de la forme (x_1 et x_2 étant les abscisses de A_1 et A_2 , y_1 leur ordonnée)

$$\mathfrak{K}(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{y - y_1}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-y_1)}} \psi(\xi) d\xi,$$

qui, lorsque y tend vers y_1 et x vers x_0 , tendent vers $2\sqrt{\pi}\psi(x_0)$ si x_0 est intérieur à l'intervalle (x_1, x_2) , vers 0, si x_0 est extérieur à cet intervalle (*formule de Poisson*, GOURSAT, n° 543) ⁽¹⁾. Ceci permet de n'envisager que les intégrales de l'équation (1) s'annulant sur $A_1 A_2$, car toute autre en diffère par une intégrale $\mathfrak{K}$.

3. PROBLÈMES AUX LIMITES. — L'emploi des intégrales $\mathfrak{z}_0$ et $\mathfrak{z}$ permet de déterminer la solution (unique : l'unicité sera étudiée plus loin) de $\delta z = 0$, s'annulant sur $A_1 A_2$ et satisfaisant sur chacun des arcs C_1 , C_2 à une relation de la forme

$$\lambda(y) \frac{\partial z}{\partial x} + \mu(y) z = F(y),$$

λ , μ , F étant continues. Il suffit pour cela de représenter cette intégrale par une somme de deux fonctions $\mathfrak{z}_0$ ou $\mathfrak{z}$, relative à chacun des arcs, et d'écrire que, quand P tend vers un point du contour, les valeurs limites de z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ vérifient la relation donnée : on obtient ainsi un système de deux équations intégrales de deuxième espèce qui déterminent les deux fonctions φ (GOURSAT, n° 547). Pour la résolution de ce système, nous renverrons au Mémoire de M. Lévi ⁽²⁾, en remarquant toutefois que, pour établir la convergence des séries qui représentent les solutions, il n'est pas nécessaire de supposer X_1 et X_2 lipschitziennes. Sans doute, la condition que nous avons imposée à ces deux fonctions, à savoir que l'intégrale (4) ait un sens ⁽³⁾, n'est

(1) Si x_0 est égal à x_1 ou x_2 , c'est-à-dire si le point (x, y) tend vers une des extrémités du segment $A_1 A_2$, la limite $\mathfrak{K}$ dépend du chemin suivi : par exemple, elle est $\sqrt{\pi}\psi(x_1)$ si $\frac{x-x_1}{\sqrt{y-y_1}}$ tend vers zéro [cf. la condition (3), M_1 et M_2 jouant alors le rôle des points A_1 et A_2].

(2) E.-E. LÉVI, *loc. cit.*, p. 214.

(3) Ou même la condition que $\int_{\gamma'}^{\gamma} \frac{|X(\gamma) - X(\eta)|}{(\gamma - \eta)^2}$ ait un sens.

pas suffisamment précise, car il est nécessaire de connaître la façon dont cette intégrale tend vers 0 quand y' tend vers y . La plus simple des hypothèses qu'on puisse satisfaire est qu'on ait

$$(F) \quad |X_i(y) - X_i(\eta)| \leq K |y, \eta|^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Alors l'intégrale (4) sera d'ordre infinitésimal $\frac{\alpha}{2}$ par rapport à $y - y'$, ce qui assurera la convergence des séries : la marche à suivre est identique à celle qu'a suivie M. Levi. *Dans ce qui va suivre, sauf mention spéciale, nous ferons l'hypothèse (F).*

Ce qui précède suppose que les points A_1 et A_2 ne coïncident pas. Si ces points sont confondus, un examen particulier devient nécessaire. Il en est de même si en certains points isolés du contour la condition (F) cesse d'être vérifiée. Dans ces deux cas on trouve la solution comme limite d'une suite de solutions régulières. Pour cela on utilise les deux propriétés suivantes : 1° une solution de $\partial_z = 0$, régulière à l'intérieur de (C) et continue sur (C), ne peut dépasser les valeurs extrêmes qu'elle atteint sur (C); 2° si une série de solutions de $\partial_z = 0$ converge uniformément sur (C) elle converge uniformément en tout point intérieur à (C) et y représente une solution; nous reviendrons plus loin sur ces deux propositions en les généralisant (1).

4. FONCTION DE GREEN. — Dans les problèmes aux limites relatifs à l'équation $\partial_z u = 0$, le contour C, au lieu d'être ouvert vers le haut, doit être ouvert vers le bas. Proposons-nous, par exemple, de déterminer, par le moyen d'équations intégrales la fonction $H(\xi, \eta; x, y)$, solution de $\partial_z u = 0$ en ξ, η , s'annulant sur M, M_2 et prenant sur M, A_1 et $M_2 A_2$ les mêmes valeurs que U. La fonction

$$G(\Pi, P) = G(\xi, \eta; x, y) = U(\xi, \eta; x, y) - H(\xi, \eta; x, y)$$

qui dépend des deux points $P(x, y)$ et $\Pi(\xi, \eta)$ est la *fonction de Green*. On démontre qu'elle est la solution de $\partial_z u = 0$ en ξ, η et

(1) Nous avons admis implicitement jusqu'ici que le contour (C) était tout entier à distance finie. Mais on peut supposer que, par exemple, $A_2 B_2$ s'éloigne indéfiniment : on obtient alors une solution qui, ainsi que sa dérivée, croît comme e^{Kx^2} ($K > 0$) si la valeur donnée sur la demi-droite $A_1 \infty$ admet ce mode de croissance (voir GOURSAT, n° 545).

de $\delta z = 0$ en x, y . Elle s'annule quand Π (ou P) est sur C_1 ou C_2 , se comporte au voisinage de P (ou de Π) comme la *solution fondamentale* U et est *positive* dans S .

En remplaçant u par G dans la formule (2), il vient, par le même procédé qui nous a donné la formule fondamentale, pour un point intérieur $P(x, y)$,

$$(F) \quad 2\sqrt{\pi} z(x, y) = - \int_{M_1 \Lambda_1 + \Lambda_2 M_2} z(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta + \int_{\Lambda_1 \Lambda_2} G z(\xi, \eta) d\xi \\ - \iint_{S_y} G(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Nous obtenons ainsi la solution de $\delta z = f$ prenant des valeurs données sur (C) par une formule qui peut servir pour un contour déterminé, quelles que soient les données. Cette formule prouve que la solution, si elle existe (et nous en sommes assurés quand $f = 0$), est *unique*. Mais ceci suppose l'existence de $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ au bord. Nous reviendrons dans un instant sur ce point (voir § 3) et nous reparlerons plus loin de cette formule dans l'étude de l'équation $\delta z = f$.

Tout d'abord, occupons-nous de la formation effective de G et envisageons-la comme solution de $\delta_1 u = 0$ en ξ, η . La fonction H peut se mettre sous la forme

$$\Pi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^y V[\xi, \eta; X_1(s), s] \varphi_1(s; x, y) ds \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^y V[\xi, \eta; X_2(s), s] \varphi_2(s; x, y) ds,$$

φ_1 et φ_2 étant solutions du système suivant, obtenu en faisant tendre Π vers C_1 et C_2 ,

$$U[X_1(s), s; x, y] = -\varphi_1(s; x, y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_s^y V[X_1(s), s; X_1(t), t] \varphi_1 dt \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_s^y V[X_1(s), s; X_2(t), t] \varphi_2 dt$$

et une autre équation analogue.

Il est clair, d'après cela, que H (et par suite G) admettra, quels que soient Π et P à l'intérieur de S , des dérivées de tous ordres en ξ, η et x, y qui seront solutions de $\delta_1 u = 0$ en ξ, η et de $\delta z = 0$ en x, y . On obtiendra les premières en dérivant V dans la formule donnant H

et les secondes en dérivant φ_1 et φ_2 . Si X_1 et X_2 sont dérivables, la dérivation en ξ, η sera possible même si Π est au bord, quand P est dans S , d'après ce que nous avons vu à la fin du paragraphe 2, formule (7). Dans les mêmes conditions (Π au bord, P dans S), si X_1 et X_2 satisfont à (Γ) , la dérivation en (x, y) sera possible également. Nous obtiendrions des conclusions analogues en intervertissant le rôle des points P et Π .

Étudions, par exemple, la dérivée $\frac{\partial G}{\partial x}$ qui joue un rôle important dans la solution des problèmes aux limites. La dérivée $\frac{\partial H}{\partial x}$ est donnée par la formule

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^y X[\xi, \eta; X_1(s), s] \frac{\partial \varphi_1(s; x, y)}{\partial x} ds + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^y V[\xi, \eta; X_2(s), s] \frac{\partial \varphi_2(s; x, y)}{\partial x} ds,$$

et, si nous posons $\frac{\partial \varphi_1(s; x, y)}{\partial x} = \bar{\varphi}_1(s)$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \bar{\varphi}_2(s)$ et

$$2\sqrt{\pi} V_{ij}(s, t) = V[X_i(s), s; X_j(t), t] \quad (i, j = 1, 2),$$

$\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ seront déterminées par les deux équations

$$(8) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} V[X_1(s), s; x, y] \\ \quad = -\bar{\varphi}_1(s) + \int_s^y V_{11}(s, t) \bar{\varphi}_1(t) dt + \int_s^y V_{12}(s, t) \bar{\varphi}_2(t) dt, \\ -\frac{1}{2} V[X_2(s), s; x, y] \\ \quad = \bar{\varphi}_2(s) + \int_s^y V_{21}(s, t) \bar{\varphi}_1(t) dt + \int_s^y V_{22}(s, t) \bar{\varphi}_2(t) dt. \end{cases}$$

Or si nous voulions former la solution de $\delta_1 u = 0$ nulle pour $\eta = y$ et prenant au bord la valeur $-\frac{1}{2} V[X(\eta), \eta; x, y] = \frac{\partial}{\partial x} V[X(\eta), y; x, y]$, nous aurions à écrire précisément les équations qui déterminent $\frac{\partial H}{\partial x}$.

Il résulte de là que $\frac{\partial G}{\partial x}$, qui est égale à $\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}$, s'annule quand le point Π est sur C_1 ou C_2 et P à l'intérieur de S , et ceci est vrai pour toutes les dérivées de G en (x, y) , ce qui était d'ailleurs facile à prévoir puisque G est nul au bord, quel que soit P dans l'aire S . Il résulte de

la symétrie de la fonction de Green que *toutes les dérivées en* (ξ, η) *sont également nulles quand* P *est sur* C_1 *ou* C_2 *et* Π *à l'intérieur.*

4* Proposons-nous maintenant d'obtenir une limitation de $\frac{\partial G}{\partial x}$ valable quels que soient P et Π à l'intérieur ou au bord (¹). Pour cela, envisageons les deux séries qui vont représenter $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$: en opérant la résolution des équations (8) par approximations successives, nous pouvons écrire

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \theta'_0 + \theta'_1 + \theta'_2 + \dots, \quad \bar{\varphi}_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \theta''_0 + \theta''_1 + \theta''_2 + \dots,$$

les θ étant fonctions de x , y et s : par suite nous obtiendrons $\frac{\partial H}{\partial x}$ sous forme de série également

$$\frac{\partial H}{\partial x} = h_0 + h_1 + h_2 + \dots$$

or θ'_0 , θ''_0 et h_0 ont pour expression

$$\begin{aligned} \theta'_0 &= \frac{1}{2} V[X_1(s), s; x, y], & \theta''_0 &= -\frac{1}{2} V[X_2(s), s; x, y]. \\ (9) \quad h_0 &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^y V[\xi, \eta; X_1(s), s] V[X_1(s), s; x, y] ds \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^y V[\xi, \eta; X_2(s), s] V[X_2(s), s; x, y] ds. \end{aligned}$$

Voyons maintenant les termes suivants. De l'inégalité (7) résulte que

$$|V_{ij}| < \frac{L}{|s - \iota|^{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

car cette inégalité, qui a lieu pour $i = j$, est vraie *a fortiori* pour $i \neq j$, à la condition que les points A_1 et A_2 ne coïncident pas. Par consé-

(¹) Conformément à ce que nous avons dit dans l'introduction, nous marquons d'un astérisque les paragraphes concernant les calculs qui se simplifient notablement dans le cas d'un contour rectangulaire : le lecteur trouvera ces calculs dans la Note placée à la fin du Mémoire.

En ce qui concerne la fonction de Green, on pourrait lui appliquer, dans le plan, une méthode analogue à celle que nous avons employée dans l'espace (§ 39-40), pour limiter les intégrales où elle figure.

quent, les θ' et θ'' seront majorés par les quantités 0 données par

$$\theta_p(s) = \lambda \int_s^y \frac{\theta_{p-1}(t)}{|t-s|^{1-\frac{\alpha}{2}}} dt,$$

λ étant un coefficient numérique égal à 2 L. Or, nous avons

$$\theta'_1 = \frac{1}{2} \int_s^y V_{11}(s, t) V[X_1(t), t; x, y] dt - \frac{1}{2} \int_s^y V_{12}(s, t) V[X_2(t), t; x, y] dt$$

et une formule analogue pour θ''_1 .

Ouvrons ici une parenthèse. Nous avons, dans le paragraphe 2, envisagé les intégrales de la forme

$$\mathfrak{z}(x, y) = \int_{y_1}^y V[X(t), t; x, y] \psi(t) dt$$

et nous avons vu que, si Ψ est le maximum de ψ dans l'intervalle (y_1, y_2) on peut déterminer un nombre (L) tel que

$$(6) \quad \mathfrak{z}(x, y) < (L) \Psi \quad \text{pour} \quad y_1 \leq y \leq y_2.$$

Supposons maintenant que ψ soit de la forme

$$\psi(y) = \frac{\psi_1(y)}{(y - y_1)^\beta}, \quad |\psi| < \Psi_1, \quad 0 < \beta < 1,$$

$\psi_1(y)$ étant une fonction bornée, continue dans l'intervalle (y_1, y_2) sauf peut-être pour la valeur y_1 . Appelons $\mathfrak{z}^{(1)}$ l'intégrale $\mathfrak{z}$ relative à cette nouvelle fonction et décomposons l'intervalle d'intégration (y_1, y) en deux intervalles *égaux*. Dans le premier de ces intervalles nous prendrons, comme limitation de V, $\frac{(L)}{y - y_1}$ et, dans le second, nous appliquerons la formule (6) en prenant comme limitation de ψ , $\frac{\Psi_1}{\left(\frac{y - y_1}{2}\right)^\beta}$; il vient alors

$$\mathfrak{z}^{(1)} = \int_{y_1}^{\frac{y+y_1}{2}} + \int_{\frac{y+y_1}{2}}^y < (L) \frac{\Psi_1}{y_1 - y} \int_{y_1}^{\frac{y+y_1}{2}} \frac{dt}{(t-y)^\beta} + (L) \frac{\Psi_1}{(y - y_1)^\beta} < (L) \frac{\Psi_1}{(y - y_1)^\beta}.$$

Cela posé, remarquons que θ'_1 est une intégrale du type $\mathfrak{z}^{(1)}$,

avec $\beta = 1 - \frac{\alpha}{2}$. De même pour θ'_1 . Par suite, nous pouvons poser

$$\theta_1(s) = \frac{\mu}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

μ étant une constante qui dépend de y_2 et y_1 . On déduit de là

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \mu \lambda \int_s^y \frac{dt}{(y-t)^{1-\frac{\alpha}{2}}(t-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} = \mu B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) (y-s)^{\alpha-1} \\ &= \frac{\mu \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \frac{\lambda \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) (y-s)^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\alpha)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \mu \lambda^2 B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \int_s^y \frac{dt}{(y-t)^{1-\alpha}(t-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \\ &= \mu \lambda^2 B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) B\left(\frac{\alpha}{2}, \alpha\right) (y-s)^{\frac{3\alpha}{2}-1} \\ &= \frac{\mu \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \frac{\left[\lambda \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) (y-s)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^2}{\Gamma\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} \end{aligned}$$

et, d'une manière générale,

$$\theta_p = \frac{\mu \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \frac{\left[\lambda \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) (y-s)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^{p-1}}{\Gamma\left(\frac{p\alpha}{2}\right)}.$$

Donc

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots = \frac{\sigma}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

σ étant une série convergente. Il résulte des calculs précédents que nous pouvons écrire

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \theta'_0 + \frac{\bar{\theta}_1}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \theta''_0 + \frac{\bar{\theta}_2}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

$\bar{\theta}_1$ et $\bar{\theta}_2$ étant des fonctions toujours *bornées, continues en x, y, s , sauf peut-être pour $x = X_i(y), y = s$.*

Nous avons donc, en définitive, h_0 étant donné par la formule (9),

$$(10) \quad \frac{\partial H}{\partial x} = h_0 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^y V[\xi, \eta; X_1(s), s] \frac{\bar{\theta}_1}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^y V[\xi, \eta; X_2(s), s] \frac{\bar{\theta}_2}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

et, par suite, d'après ce que nous avons vu plus haut sur les intégrales du type $z^{(1)}$

$$(11) \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{2} V(\xi, \eta; x, y) - h_0 - \frac{\gamma_1}{(y-\eta)^{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

g_1 étant une fonction continue, sauf quand P et Π tendent vers un même point de C_1 ou de C_2 , mais bornée quels que soient P ou Π à l'intérieur de S ou au bord.

La détermination de G comme solution de $\partial z = 0$ nous aurait conduits également à la formule

$$(12) \quad \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} V(\xi, \eta; x, y) - h_0 - \frac{\gamma_1}{(y-\eta)^{1-\frac{\alpha}{2}}},$$

γ_1 jouissant des mêmes propriétés que g_1 .

Quant à G , puisqu'elle est positive, il est clair qu'on pourra l'écrire

$$(13) \quad G = gU(\xi, \eta; x, y) \quad 0 \leq g \leq 1,$$

g étant une fonction bornée, nulle quand l'un des deux points est sur C_1 ou C_2 , continue sauf si P et Π tendent vers un même point de C_1 ou de C_2 .

Remarquons enfin que nous pouvons former une fonction analogue à la fonction de Green, quand on se donne sur C_i la valeur de z ou celle de $\frac{\partial z}{\partial x}$ ou bien encore une relation de la forme $l_i(y) \frac{\partial z}{\partial x} + m_i(y) z = \gamma_i(y)$. On détermine alors la fonction de Green par la condition que γ_i seul

subsiste dans les intégrales ⁽¹⁾ et l'on sera ramené à calculer une solution satisfaisant sur C_i à une relation de même forme que z . Nous ne nous étendrons pas sur ce sujet qui ne présente pas de difficultés.

§. REMARQUES SUR L'EXISTENCE DES DÉRIVÉES AU VOISINAGE DU CONTOUR.

— Soient $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$, $\Phi(x)$ les valeurs données sur C_1 , C_2 , A_1 , A_2 (fig. 1). Posons

$$\bar{z}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{y-y_1}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-y_1)}} \Phi_0(\xi) d\xi;$$

dans cette intégrale y_1 est l'ordonnée de A_1 , A_2 , a_1 et a_2 sont tels que $a_1 < x_1 < x_2 < a_2$, x_1 et x_2 étant les abscisses des points A_1 et A_2 et $\Phi_0(\xi)$ est une fonction continue dans l'intervalle (a_1, a_2) coïncidant avec $\Phi(x)$ dans l'intervalle (x_1, x_2) ⁽²⁾. Ainsi que nous l'avons dit plus haut, si l'on pose

$$z = z_1 + \bar{z},$$

z_1 sera la solution de $\partial z = 0$ s'annulant sur A_1 , A_2 et se réduisant sur C_1 , C_2 à des fonctions continues données, nulles en A_1 et A_2 et nous pourrons la représenter par la somme de deux intégrales du type §.

Or, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} &= \frac{-1}{4\sqrt{\pi}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{x-\xi}{(y-y_1)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-y_1)}} \Phi_0(\xi) d\xi \end{aligned}$$

et le changement de variable $x - \xi = 2s\sqrt{y-y_1}$ montre immédiatement que $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ devient infini sur A_1 , A_2 comme $\frac{1}{\sqrt{y-y_1}}$. La dérivée $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ s'étudie de même et l'on peut donc écrire

$$(14) \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\zeta}{\sqrt{y-y_1}}, \quad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2} = \frac{\zeta'}{y-y_1},$$

⁽¹⁾ Dans un problème de ce genre il convient de faire l'hypothèse que X_i soit dérivable, afin de n'avoir, dans la formule fondamentale, que des intégrales portant sur la variable η .

⁽²⁾ On peut supposer $a_1 = -\infty$, $a_2 = +\infty$.

ζ et ζ' étant bornées et continues (et même, il est facile de voir que ζ tend vers zéro quand y tend vers y_1).

Si $\Phi'(x)$ existe, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ tend vers cette valeur en tout point appartenant au segment $A_1 A_2$; il est d'ailleurs aisé de le vérifier par une intégration par parties immédiate. Dans le cas intermédiaire où l'on a sur $A_1 A_2$ $|\Phi(x) - \Phi(\xi)| < K|x - \xi|^\beta$ il suffit de remplacer, dans l'intégrale $\bar{z}$, $\bar{\Phi}_0(\xi)$ par $[\Phi_0(\xi) - \Phi_0(x)] + \Phi_0(x)$; $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ se décompose alors en deux autres intégrales : à la première on applique le changement de variable indiqué plus haut, la seconde est nulle si $a_1 = -\infty$ et $a_2 = +\infty$ et l'on voit aisément que, dans ce cas (1),

$$(14') \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\zeta}{(y - y_1)^{\frac{1-\beta}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2} = \frac{\zeta}{(y - y_1)^{\frac{1-\beta}{2}}}.$$

§*. Passons maintenant à $\frac{\partial z_1}{\partial x}$. D'après ce que nous avons vu plus haut [formule (6')], cette dérivée peut, dans le cas de simple continuité des données, se mettre sous la forme

$$(15) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\zeta_1}{PM_1} + \frac{\zeta_2}{PM_2},$$

ζ_1 et ζ_2 étant bornées dans S , bord compris, et continues en tout point intérieur. Proposons-nous maintenant de chercher dans quel cas $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ est continue, même au bord.

Pour étudier $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, il sera commode ici de mettre z_1 sous la forme

$$z_1 = \int_{y_1}^y U[X_1(\eta), \eta; x, y] \varphi_1(\eta) d\eta + \int_{y_1}^y U[X_2(\eta), \eta; x, y] \varphi_2(\eta) d\eta,$$

car $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ est alors représenté par une somme de deux intégrales du type 3 et l'on a, sur C_i par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x} = & -\sqrt{\pi} \varphi_1(y) - \frac{1}{2} \int_{y_1}^y V[X_1(\eta), \eta; X_1(y), y] \varphi_1 d\eta \\ & - \frac{1}{2} \int_{y_1}^y V[X_2(\eta), \eta; X_1(\eta), \eta] \varphi_2 d\eta. \end{aligned}$$

(1) Si Φ' existe et satisfait à la même condition que nous supposons ici pour Φ , dans les relations (14') il faut remplacer $\bar{z}$ par $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ ou β par $1 + \beta$ (voir § 7).

Cette façon de calculer z_1 , qui est celle qu'avait indiquée M. Holmgren, est avantageuse ici à cause du calcul de la dérivée, mais elle conduit à un système d'équations intégrales de première espèce⁽¹⁾

$$(16) \quad \begin{cases} F_1(y) = \int_{y_1}^y U_{11}(\eta, y) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_{y_1}^y U_{21}(\eta, y) \varphi_2(\eta) d\eta, \\ F_2(y) = \int_{y_1}^y U_{12}(\eta, y) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_{y_1}^y U_{22}(\eta, y) \varphi_2(\eta) d\eta. \end{cases}$$

en posant

$$(17) \quad \begin{cases} F_i = \Phi_i(y) - \bar{z}[X_i(y), y], & U_{ij}(\eta, y) = U[X_i(\eta), \eta; X_j(y), y] \\ & (i, j = 1, 2), \end{cases}$$

Ce système se ramène au système d'équations intégrales de deuxième espèce (*voir* HOLMGREN, *loc. cit.*) :

$$(16 \text{ bis}) \quad \begin{cases} f'_1(y) = \pi \varphi_1(y) + \int_{y_1}^y \bar{U}_{11}(\eta, y) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_{y_1}^y \bar{U}_{21}(\eta, y) \varphi_2(\eta) d\eta, \\ f'_2(y) = \pi \varphi_2(y) + \int_{y_1}^y \bar{U}_{12}(\eta, y) \varphi_1(\eta) d\eta + \int_{y_1}^y \bar{U}_{22}(\eta, y) \varphi_2(\eta) d\eta, \end{cases}$$

en posant

$$f'_i(y) = \frac{d}{dy} \int_{y_1}^y \frac{F_i(s) ds}{\sqrt{y-s}}, \quad \bar{U}_{ij} = \frac{d}{dy} \int_{\eta}^y \frac{ds}{\sqrt{(y-s)(s-\eta)}} e^{-\frac{[X_i(s)-X_j(\eta)]^2}{4(s-\eta)}}.$$

Il faut que les fonctions f'_i , U_{ij} existent. Or on a, par un procédé bien connu,

$$(17') \quad f'_i(y) = \frac{F_i(y)}{\sqrt{y-y_1}} - \frac{1}{2} \int_{y_1}^y \frac{F_i(s) - F_i(y)}{(y-s)^{\frac{3}{2}}} ds.$$

Si nous voulons que $\frac{\partial z}{\partial x}$ soit continue en tous les points de (C) même

(1) Nous reprenons ici, sous des hypothèses plus générales, le calcul de M. Holmgren (*Arkiv för Matematik*, Bd III, 1907).

Cette représentation de z_1 est commode quand on donne les valeurs de $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ sur C_1 et C_2 : si leur module est inférieur à $M_1 y^\beta$, on voit aisément qu'on peut écrire dans S, bord compris,

$$|z_1| < (L) M_1 B\left(\frac{1}{2}, \beta + 1\right) y^{\beta + \frac{1}{2}},$$

B étant la fonction eulérienne.

en A_i ($i = 1, 2$), il faudra que $\frac{\partial \bar{z}_i}{\partial x}$ soit nul en ces points, puisque $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ est égal en ces points à $\Phi'(x_i)$, qui doit être la valeur de $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$. Il sera donc nécessaire que $\varphi_1(y_1) = \varphi_2(y_1) = 0$, ce qui exigera tout d'abord que $\frac{F_i(y)}{\sqrt{y-y_1}}$ tende vers zéro avec $y-y_1$. D'après la formule (17), il suffira donc que $\frac{\Phi_i(y) - \Phi_i(y_1)}{\sqrt{y-y_1}}$ et $\frac{\bar{z}[X_i(y), y] - \bar{z}(x_i, y_1)}{\sqrt{y-y_1}}$ tendent vers zéro avec $y-y_1$. Nous supposons donc ces deux conditions vérifiées : la seconde le sera certainement si $\Phi'(x)$ existe ⁽¹⁾. Enfin il faudra également que l'intégrale de (17') ait un sens et tende vers zéro avec $y-y_1$: d'après la formule (17) nous sommes conduits à faire cette hypothèse, pour $\int_{y_1}^y \frac{\Phi_i(s) - \Phi_i(y)}{(y-s)^{\frac{3}{2}}}$ et, d'autre part, nous avons

$$\bar{z}[X_i(y), y] - \bar{z}[X_i(s), s] = [X_i(y) - X_i(s)] \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \right)' + (y-s) \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \right)',$$

$\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \right)'$ et $\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \right)'$ désignant les valeurs des dérivées de $\bar{z}$ en un point intermédiaire (x', y') , $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ est partout continu. $X_i(y) - X_i(s)$ est de l'ordre de $(y-s)^{\frac{1+\alpha}{2}}$. Quant à $\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \right)' = \left(\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2} \right)'$ d'après ce que nous avons vu plus haut, elle est de la forme $\frac{\zeta}{\sqrt{y'-y_1}}$ lorsque $\Phi'(x)$ existe, ζ tendant vers zéro avec $y-y_1$. Il résulte de là que l'intégrale

$$\int_{y_1}^y \frac{\bar{z}[X_i(y), y] - \bar{z}[X_i(s), s]}{(y-s)^{\frac{3}{2}}} ds$$

a un sens et est continue pour $y \geq y_1$: elle tend vers zéro quand y tend vers y_1 .

Passons maintenant à $\bar{U}_{ij}$; quand $i \neq j$, cette dérivée existe et est continue pour y et $\eta \geq y_1$. Pour $i = j$, nous l'écrivons en supprimant l'indice,

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ii} = \bar{U} = & -e^{-\frac{[X(y)-X(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} \frac{d}{dy} \int_{y_1}^y \frac{ds}{\sqrt{(y-s)(s-\eta)}} \\ & + \frac{1}{2} \int_{y_1}^y \frac{ds}{(y-s)^{\frac{3}{2}} \sqrt{s-\eta}} \left\{ e^{-\frac{[X(y)-X(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} - e^{-\frac{[X(s)-X(\eta)]^2}{4(s-\eta)}} \right\}. \end{aligned}$$

(1) On le vérifierait en écrivant, dans $\bar{z}$, $\Phi_0(\xi) = \Phi_0(x_i) + (\xi - x_i)[\Phi'_0(x_i) + \varepsilon_i]$, ε_i tendant vers zéro avec $\xi - x_i$.

La première intégrale étant égale à π , le premier terme s'évanouit. Dans la deuxième intégrale, le crochet est en valeur absolue inférieur à

$$\Lambda \left\{ \frac{[X(y) - X(\eta)]^2}{y - \eta} - \frac{[X(s) - X(\eta)]^2}{s - \eta} \right\},$$

A restant fini. Cette différence s'écrit

$$\frac{[X(s) - X(\eta)]^2(s - y)}{(y - \eta)(s - \eta)} + \frac{y - \eta}{1} [X(y) - X(s)] [X(y) - X(\eta) + X(s) - X(\eta)],$$

et, en utilisant la condition (Γ), nous voyons que cette expression est inférieure en valeur absolue à

$$\frac{K^2}{y - \eta} \left\{ (s - \eta)^\alpha (y - s) + (y - s)^{\frac{1+\alpha}{2}} \left[(y - \eta)^{\frac{1+\alpha}{2}} + (s - \eta)^{\frac{1+\alpha}{2}} \right] \right\}.$$

On en déduit sans peine que la deuxième intégrale a un sens et est de l'ordre de $\frac{1}{(y - \eta)^{1-\alpha}}$. On peut donc écrire

$$U_{ij} = \frac{u_{ij}}{(y - \eta)^{1-\alpha}},$$

u_{ij} étant bornée, continue pour y et $\eta > y_1$. Il résulte de là que la résolution du système (16 bis) s'effectue sans difficulté : φ_1 et φ_2 sont continues et nulles pour $y = y_1$, si l'intégrale $\int_{y_1}^y \frac{\Phi_i(y) - \Phi_i(s)}{(y - s)^2}$ a un sens, si, ainsi que $\frac{\Phi_i(y) - \Phi_i(y_1)}{\sqrt{y - y_1}}$, elle tend vers zéro avec $y - y_1$, et si $\Phi'(x)$ admet une dérivée continue. Et, dans ces conditions, $\frac{\partial z}{\partial x}$ existe et est continue sur le bord, même aux points A_1 et A_2 (1).

(1) Lorsque Φ_i admet, par rapport à y , un accroissement d'ordre $\frac{1+\beta}{2}$ et Φ' , par rapport à x , un accroissement d'ordre β' (β et $\beta' < 1$), on voit sans peine que $|f'_i(y)| < (L)(y - y_1)^{\frac{\gamma}{2}}$, γ étant le plus petit des nombres α , β et β' , et, par suite, M' étant le maximum de $|\Phi(x)|$,

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| < (L)(y - y_1)^{\frac{\gamma}{2}}, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < (L)(y - y_1)^{\frac{\gamma}{2}} + M',$$

$\frac{\gamma}{2}$ sera remplacé par un nombre $> \frac{1}{2}$, si Φ'_i et $\Phi''(x)$ existent et admettent des accroissements d'ordre non nul. Si Φ n'est que continu, on a $\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < \frac{(L)}{\sqrt{y - y_1}}$.

6. Quant à $\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}$, la plus simple hypothèse qu'on puisse faire, pour être assuré de son existence au bord, est que X_1 et X_2 admettent une dérivée première ainsi que Φ_1 et Φ_2 et que Φ admette des dérivées première et seconde.

Tout d'abord, dans ces conditions, la dérivée $\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}$, qui est égale à $\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2}$, tend vers $\psi''(x)$ en tout point de A_1, A_2 : une double intégration par parties le montre immédiatement. De plus, $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ existe au bord et il est facile d'avoir, par un autre procédé que plus haut, ses valeurs sur C_1 et C_2 au moyen d'équations intégrales. Si, en effet, on dérive la formule (α) par rapport à x , puis qu'on fasse tendre le point P vers C_1 puis vers C_2 , on obtient facilement, en utilisant la formule de transformation de $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, un système de deux équations intégrales de deuxième espèce, qui déterminent $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ sur chaque bord (¹).

Quand à la dérivée $\frac{\partial z_1}{\partial y}$, si elle existe sur C_i , elle est évidemment donnée par l'équation

$$(18) \quad F'_i(y) = \frac{\partial z_1}{\partial x} X'_i(y) + \frac{\partial z_1}{\partial y}.$$

Ceci ne prouve pas que $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ tende vers la valeur ainsi déterminée, mais on peut le vérifier aisément. En effet, la valeur limite de $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ (qui est égale à $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$), si elle existe, est solution du système d'équa-

(¹) Ce procédé ne pourrait être utilisé avec les hypothèses que nous avons faites plus haut sur X_1 et X_2 , car il suppose l'existence des intégrales curvilignes en $d\xi$. Dans le cas où C_1 et C_2 sont rectifiables, il peut s'appliquer en supposant que les données au bord admettent, pour un accroissement de y , un accroissement d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$. Nous nous bornerons ici à signaler cette méthode, sans entrer dans les détails de calcul. Disons aussi que le système d'équations intégrales peut être remplacé par deux équations relatives à chaque courbe C_i respectivement, en supprimant les termes en $\frac{\partial z}{\partial x}$ relatifs à l'autre bord par l'emploi de deux fonctions de Green.

tions intégrales obtenu en appliquant la formule (β) à la solution $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ de $\delta z = 0$ et en l'écrivant successivement pour les bords droit et gauche. Or, on retrouve sans peine, en remplaçant dans ce système $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ par la valeur tirée de (18), le système qui est vérifié par $\frac{\partial z_1}{\partial x}$.

Il est clair que, si nous voulons que z soit *régulière dans S, bords compris*, l'équation $\delta z = 0$ devra être vérifiée en A_1 et A_2 . Or, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont données en ces points par les équations

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_i = \Phi''(x_i), \quad \Phi'_i(y_1) = \Phi'(x_i) X'_i(y_1) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_i \quad (i = 1, 2).$$

Il faut donc que

$$(19) \quad \Phi''(x_i) - \Phi'(x_i) X'_i(y_1) - \Phi'_i(y_1) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Cette condition est aussi *suffisante* : en effet, $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ devra être la solution de $\delta z = 0$ prenant sur C_i la valeur fournie par l'équation (18), et comme

$$F_i(y) = \Phi_i(y) - \bar{z}[X_i(y), y],$$

on voit immédiatement que, en vertu de (17), $F_i(y_1) = 0$, ce qui assure bien la continuité de $\frac{\partial z}{\partial y}$ dans S , bords compris.

6*. Nous avons cherché plus haut des conditions *suffisantes* pour l'existence de $\frac{\partial z}{\partial x}$ au bord. D'autre part, quand on ne fait pas d'autres hypothèses que la continuité des données, nous avons indiqué [formules (14) et (15)] quelle était l'allure de $\frac{\partial z}{\partial x}$. Mais il existe des *cas intermédiaires*. Si, par exemple, Φ_1 et Φ_2 admettent, relativement à y , des accroissements d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ et si, à partir des valeurs x_1 et x_2 , $\Phi(x)$ admet un accroissement d'ordre inférieur à 1, la formule (15) doit être remplacée par la suivante

$$(20) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\xi_1}{M_1 P^\beta} + \frac{\xi_2}{P M_2} \quad (0 < \beta < 1).$$

Il est préférable de ne pas nous étendre trop longtemps sur ces considérations : bornons-nous à dire que, pour établir la formule (20), il suffirait d'envisager le système d'équations intégrales de deuxième espèce auquel conduit la représentation de z par des fonctions s .

Quand X_1 et X_2 sont dérivables, la démonstration est plus aisée et le lecteur pourra la reconstituer en remarquant que, si φ admet par rapport à y un accroissement d'ordre non nul, autrement dit si l'on a (condition de Lipschitz généralisée avec $0 < \gamma < 1$)

$$(21) \quad |\varphi(y) - \varphi(s)| < (L) |y - s|^\gamma, \quad \text{c'est-à-dire} \quad |\Delta\varphi| < (L) \Delta y^\gamma,$$

l'intégrale s correspondante peut s'écrire ($X = X_1$ ou X_2)

$$s = \varphi(y) \int_{y_1}^y V[X(s), s; x, y] ds + \int_{y_1}^y V[\varphi(s) - \varphi(y)] ds,$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_1}^y V ds + \int_{y_1}^y \frac{\partial V}{\partial x} [\varphi(s) - \varphi(y)] ds.$$

Le premier terme se transforme par la formule (7), le deuxième est continu dans tout le plan si $\gamma > \frac{1}{2}$ et, si $\gamma < \frac{1}{2}$, il est inférieur en valeur absolue à $\frac{L}{|x - X(y)|^{1-2\gamma}}$, comme on le verrait immédiatement par le même procédé qui nous a servi à calculer la limitation de s (1).

Or, si l'on représente z_i par la somme de deux intégrales du type s , les deux fonctions φ correspondantes vérifient l'inégalité (21), avec $\gamma < \frac{1}{2}$ si $\Delta\Phi_i$ est d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ et si $\Delta\Phi$ est d'ordre inférieur à un , et $\gamma > \frac{1}{2}$ si $\Delta\Phi_i$ est d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$ et si $\Phi'(x)$ existe, $\Delta\Phi'$ étant d'ordre inférieur à un (2).

Toutes ces questions pourraient également se traiter en utilisant la fonction de Green, et leur étude est particulièrement simple dans le

(1) Si $\lim_{y' \rightarrow y} \frac{\varphi(y) - \varphi(y')}{\sqrt{y - y'}} = \text{zéro}$, le deuxième terme est une intégrale d'un type analogue à s .

(2) Ceci n'exige pas d'ailleurs que X_i soit dérivable : il suffit que la condition (I) soit vérifiée. Nous n'avons pas reproduit ici les calculs relatifs au cas général, mais nous les avons indiqués dans le cas du contour rectangulaire.

cas d'un contour rectangulaire. (*Voir la Note relative à ce sujet pour les démonstrations.*)

7. ACCROISSEMENTS D'UNE SOLUTION. — Au cours de ce Mémoire ⁽¹⁾, l'étude des *accroissements d'une solution* pour un accroissement de x ou de y jouera un rôle capital. Il est clair que ces accroissements seront du premier ordre pour tout point *intérieur* à S . Mais il est très important d'avoir des formules qui soient valables *quel que soit le point choisi, même au bord*.

Envisageons tout d'abord la fonction $\bar{z}$ (§ 5) et supposons $y_1 = 0$: $\bar{z}$ tend vers $\Phi(x)$ quand y tend vers zéro, mais la différence $\bar{z}(x, y) - \Phi(x)$ n'a pas en général un ordre infinitésimal différent de zéro en y . Si, pour deux valeurs x et ξ de l'intervalle (x_1, x_2) , on a

$$|\Phi(x) - \Phi(\xi)| < K_1 |x - \xi|^\beta,$$

hypothèse déjà faite plus haut, nous écrirons de nouveau (*cf.* § 5)

$$\bar{z} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Phi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, 0; x, y) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} U[\Phi_0(\xi) - \Phi_0(x)] d\xi.$$

Le premier terme est égal à $\Phi(x)$, le second tend vers zéro comme $y^{\frac{\beta}{2}}$. Par suite, $\bar{z} - \Phi(x)$ est d'ordre $\frac{\beta}{2}$ en y .

On pourra alors écrire, dans toute région finie du demi-plan supérieur,

$$(21') \quad |\bar{z}(x, y+k) - \bar{z}(x, y)| < (L)K_1 k^{\frac{\beta}{2}}.$$

En effet, nous verrons plus loin (§ 18) qu'une solution de l'équation $\delta z = 0$ régulière dans une région $\mathcal{A}$ ne peut admettre ni maximum positif, ni minimum négatif. Si donc Φ_0 est choisi tel que $\bar{z}$ soit nul à l'infini, son module maximum sera atteint sur Ox . Mais $\bar{z}(x, y+k) - \bar{z}(x)$ est aussi une solution nulle à l'infini; donc son module est inférieur au maximum de $|\bar{z}(x, k) - \bar{z}(x, 0)|$, donc inférieur à $(L)K_1 k^{\frac{\beta}{2}}$.

(1) Du moins pour tout ce qui concerne l'équation $r = f(x, y, z, p, q)$. Les paragraphes 7, 14 et 15 ne seront utiles que pour cette équation seulement.

Le même raisonnement montre que

$$|\bar{z}(x+h, y) - \bar{z}(x, y)| < (L)K_1 h^\beta.$$

Enfin, si $\Phi'(x)$ existe sur A , A_2 et admet un accroissement d'ordre β , dans l'inégalité (21') il faut remplacer β par $1 + \beta$ ou $\bar{z}$ par $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ (Cf. § 5).

7*. Conservant toujours la même hypothèse que plus haut sur Φ , supposons que Φ_1 et Φ_2 admettent par rapport à y un accroissement d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$. D'après ce que nous avons dit au paragraphe 6*, si nous représentons $\mathfrak{z}$, par la somme de deux intégrales telles que

$$\mathfrak{z}(x, y) = \int_0^y V[X(s), s; x, y] \varphi(s) ds,$$

φ admettra un accroissement d'ordre $\frac{\gamma}{2}$, ($\gamma < 1$). Nous écrirons alors, P et M ayant pour ordonnée $y^{(1)}$, pour abscisses x et $X(y)$,

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_P - \mathfrak{z}_M &= \varphi(y) \Delta \int_0^y V ds + \Delta \int_0^{y'} V[\varphi(s) - \varphi(y)] ds \\ &+ \int_{y'}^y V_P[\varphi(s) - \varphi(y)] ds - \int_{y'}^y V_M[\varphi(s) - \varphi(y)] ds, \end{aligned}$$

avec $y - y' = \overline{MP}^2$. Si X est dérivable, le premier terme est de l'ordre de $MP = h$ puisque $\int_0^y V ds$ admet une dérivée de chaque côté de la courbe [formule (7) ou dérivation de la formule (α) appliquée à $z = 1$].

Le deuxième terme se transforme par la formule des accroissements finis ce qui, en remarquant que $\left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| < \frac{(L)}{(y-s)^{\frac{3}{2}}}$, donne une limitation de la forme

$$(L)h \int_0^{y'} \frac{ds}{(y-s)^{\frac{3-\gamma}{2}}} < (L) \frac{h}{(y-y')^{\frac{1-\gamma}{2}}} = (L)h\gamma.$$

Voyons le troisième terme : pour les valeurs de h inférieures à une limite fixe, on aura certainement $|X(y) - X(y')| < \frac{h}{2}$ [cf. formule (5)]. Alors le troisième terme, se limitant comme dans la formule (5'),

(¹) $\mathfrak{z}_M$ désigne ici la valeur limite de $\mathfrak{z}(x, y)$ quand le point (x, y) tend vers M d'un certain côté de la courbe.

est comparable à

$$\int_{y'}^y \frac{h}{(y-s)^{\frac{3-\gamma}{2}}} e^{-\frac{h^2}{16(y-s)}},$$

ce qui est de l'ordre de h^γ . Le quatrième est d'ordre $\alpha + \gamma$. Au total, on a (ce qui n'exigerait pas d'ailleurs la dérivabilité de X)

$$\Delta s < (L)h^\gamma.$$

Si nous considérons alors la fonction $s(x+h, y) - s(x, y)$ solution de $\delta z = 0$, nulle à l'infini et sur Λx , admettant sur ΛB la limitation que nous venons de donner, elle l'admettra également dans tout le demi-plan supérieur.

Il résulte de là que (*Cf.* le 1^o de la Note additionnelle)

$$|z_1(x+h, y) - z_1(x, y)| < (L)h^\gamma.$$

Passons maintenant à l'accroissement de z_1 relativement à y . Chacune des intégrales, dont la somme représente z_1 , prend sur la courbe correspondante des valeurs dont l'ordre d'accroissement est $\frac{\gamma}{2}$.

Remarquons tout d'abord que $s(x, 0) = 0$, et $s(x, k) < (L)k^{\frac{\gamma}{2}}$, car $|\varphi| < (L)y^{\frac{\gamma}{2}}$. Cela posé, faisons subir à la courbe ΛB la translation MP et soit $P''(x+h, y+k)$ le point de l'arc ainsi obtenu qui a pour ordonnée $y+k$. La fonction $s(x+h, y+k) - s(x, y)$ est une solution de $\delta z = 0$ nulle à l'infini et prenant sur ΛB et sur Λx des valeurs dont le module est inférieur à $(L)k^{\frac{\gamma}{2}}$. Donc (voir *fig. 2*)

$$|s(x+h, y+k) - s(x, y)| < (L)k^{\frac{\gamma}{2}},$$

mais on a

$$\delta_{P'} - \delta_P = \delta_{P'} - \delta_{P''} + \delta_{P''} - \delta_P,$$

$$|\delta_{P'} - \delta_{P''}| < (L)h^\gamma, \quad h < Kk^{\frac{1+\alpha}{2}}, \quad [\text{condition } (\Gamma)].$$

Donc

$$|\delta_{P'} - \delta_P| < (L)k^{\gamma \frac{1+\alpha}{2}} + (L)k^{\frac{\gamma}{2}} < (L)k^{\frac{\gamma}{2}},$$

et, par suite,

$$|z_1(x, y+k) - z_1(x, y)| < (L)k^{\frac{\gamma}{2}}.$$

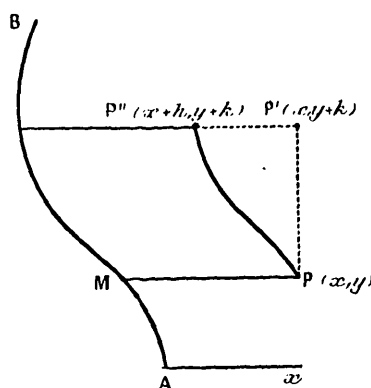
Il résulte en définitive de toute cette étude que, si les données $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$, admettent des accroissements d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ et $\Phi(x)$ un accroissement d'ordre non nul, on peut déterminer un nombre $\gamma < 1$, tel que les inégalités

$$(21'') \quad |z(x+h, y) - z(x, y)| < (L)h^\gamma, \quad |z(x, y+k) - z(x, y)| < (L)k^{\frac{\gamma}{2}}$$

aient lieu pour tous les points de S , bords compris.

Si l'accroissement de Φ_i est d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$ et si $\Phi'(x)$

Fig. 2.



existe et admet un accroissement d'ordre non nul, $\frac{\partial z}{\partial x}$ existe au bord et l'on a

$$(21''') \quad |z(x, y+k) - z(x, y)| < (L)k^\gamma \quad \left(\frac{1}{2} < \gamma < 1\right).$$

Envisageons maintenant $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x}$: $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ a déjà été étudié. Quant à la dérivée $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, nous pouvons la considérer comme une solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) des valeurs données. Celles-ci s'obtiennent aisément en représentant z , par des intégrales $\mathfrak{J}$ et en utilisant la formule (7) : on voit alors que, si X'_i , Φ'_i , $\Phi''(x)$ existent, satisfont à la condition (19) et admettent des accroissements d'ordre non nul, la valeur de $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ sur C_i est une fonction de y admettant un accroissement

d'ordre $> \frac{1}{2}$ et elle est nulle sur $A_1 A_2$ ('). D'où les accroissements de $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Conservons toujours les mêmes hypothèses sur les données et le contour. Alors $\frac{\partial z}{\partial y}$ sera la solution de $\delta z = 0$ prenant au bord les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Sur } C_i \quad & \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_i = \Phi'_i(y) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_i X'_i(y); \\ \text{Sur } A_1 A_2 \quad & \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_0 = \Phi''(x). \end{aligned}$$

Ces valeurs admettent des accroissements d'ordre non nul et nous pourrions écrire pour $\frac{\partial z}{\partial y}$ les inégalités (21'') ou (21''').

Il résulte de cette analyse que, si $\Phi'_i(y)$, $\Phi'(x)$, $\Phi''(x)$, $X'_i(y)$ *existent et admettent des accroissements d'ordre non nul*, en tout point de S , bord compris, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ existent, et l'on pourra déterminer un nombre $\gamma < 1$ tel que, pour un accroissement donné de y , on ait, Δy étant la valeur absolue de cet accroissement,

$$|\Delta z| < (L) \Delta y, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial x} \right| < (L) \Delta y^{\gamma + \frac{1}{2}}, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial y} \right| < (L) \Delta y^{\gamma},$$

Si $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ existe dans S , bords compris, la deuxième inégalité doit être remplacée par $\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < (L) \Delta y$, et l'on peut écrire, en définitive [voir la démonstration spéciale au *contour rectangulaire*, formule (3')],

$$(22) \quad |\Delta z| < (L) \Delta y, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial x} \right| < (L) \Delta y^{\beta + \gamma}, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial y} \right| < (L) \Delta y^{\gamma},$$

en appelant β le plus petit des deux nombres $\frac{1}{2}$ et $1 - \gamma$.

Remarquons que tout ce que nous venons de dire s'appliquerait à la solution de $\delta z = \varphi(x)$ prenant sur (C) les valeurs données, au cas où φ satisfait aux mêmes conditions que Φ . Cette solution s'obtient, en effet, en ajoutant à une intégrale régulière quelconque ζ de $\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = \varphi(x)$

(¹) $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y}$ peut même exister au bord. Voir la Note sur le contour rectangulaire.

la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les mêmes valeurs que $z - \zeta$: ces valeurs jouissent des mêmes propriétés d'accroissement que les valeurs données. Donc la solution z vérifie les inégalités (22).

II. — Étude des solutions de l'équation $\delta z = f(x, y)$.

8. LA FONCTION $Z(x, y)$ SOLUTION DE $\delta z = f$. — Dans la formule fondamentale (α), les intégrales curvilignes qui figurent au second membre sont solutions de $\delta z = 0$; z étant solution de $\delta z = f$, il est donc à prévoir que la fonction

$$(23) \quad Z(x, y) = - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} U_P f dS$$

sera solution de l'équation $\delta z = f$ (1).

Des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi ont été données par M. Levi. Nous allons chercher des conditions plus larges. Mais tout d'abord M. Levi remarque (p. 229 sqq.) que Z est un cas particulier des intégrales de la forme

$$(23') \quad I_{pq} = \iint_{S_y} \frac{(x-\xi)^p}{(y-\eta)^q} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f d\xi d\eta$$

et le changement de variable $\xi - x = 2\sqrt{s}t$, $y - \eta = t$ montre que ces intégrales ont un sens si $p+1 > 0$ et $r = p - 2q + 3 > 0$, f étant une fonction *intégrable*.

Si F est le maximum de $|f|$ dans S et y_1 l'ordonnée de A, A_2 , on a

$$(24) \quad I_{pq} \leq \frac{2^{p+2}}{r} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) F(y-y_1)^{\frac{r}{2}}, \quad \text{donc} \quad Z < F(y-y_1).$$

Si f satisfait à une limitation de la forme $|f| < F_1(y-y_1)^\gamma$, on a

$$(24') \quad I_{pq} \leq 2^{p+1} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) B\left(\frac{r}{2}, \gamma+1\right) F_1(y-y_1)^{\gamma+\frac{r}{2}}, \quad \text{donc} \quad Z < \frac{F(y-y_1)^{\gamma+1}}{\gamma+1},$$

Γ et B étant les fonctions eulériennes.

(1) U_P désigne ici la fonction $U(\Pi, P)$ dans laquelle P est fixe, Π étant le point par rapport auquel se fait l'intégration.

Nous concluons de là que $\frac{\partial Z}{\partial x}$ sera donnée par la formule de Leibniz, car l'intégrale

$$\int \int_{S_{y-1}} \frac{x-\xi}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

est uniformément convergente quand ε tend vers zéro (ici on a $p=1$, $q=\frac{3}{2}$; le raisonnement serait le même pour toute dérivée de I_{pq} , qui serait de la forme $I_{p'q'}$ avec $p' > 0$). On en déduit que

$$(24'') \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } |f| < F, & \frac{\partial Z}{\partial x} < \frac{4}{\sqrt{\pi}} F (y-y_1)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{si } |f| < F_1 (y-y_1)^\gamma, & \frac{\partial Z}{\partial x} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} B\left(\frac{1}{2}, \gamma+1\right) F_1 (y-y_1)^{\gamma+\frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

Mais nous ne pouvons opérer de cette façon pour $\frac{\partial Z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$; la singularité de la fonction à intégrer, pour $\xi=x$, $\eta=y$, empêche la formule de Leibniz de s'appliquer, car la quantité appelée plus haut r serait alors nulle.

Citons tout d'abord un cas très simple où $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ se calcule aisément: supposons que f admette une dérivée par rapport à x . On peut alors effectuer la transformation

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi} \frac{\partial Z}{\partial x} &= - \int \int \frac{\partial U}{\partial x} f d\xi d\eta \\ &= \int \int \frac{\partial U}{\partial \xi} f d\xi d\eta = \int_{M_1 A_1 + A_2 M_2} U f d\eta - \int \int_{S_y} U \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Or, ceci peut être dérivé par rapport à x :

$$2\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \int_{M_1 A_1 + A_2 M_2} \frac{\partial U}{\partial x} f d\eta - \int \int_{S_y} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi d\eta.$$

Revenons maintenant au cas général: nous pouvons alors isoler le point P du reste de l'aire par un petit rectangle R tel que *mabn* (fig. 3). L'intégrale Z sera donc décomposée en deux autres, Z' et Z'', étendues aux domaines $S_y - R$ et R. Pour la première, la formule de dérivation sous le signe $\int$ s'applique évidemment. Pour calculer la dérivée de Z''

posons

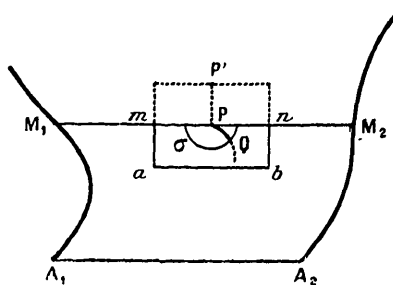
$$f(\xi, \eta) = \psi(\xi) + \varphi(\xi, \eta),$$

$\psi(\xi)$ étant une fonction de ξ que nous choisissons ainsi :

$$\psi(\xi) = f(\xi, \gamma), \quad \text{donc} \quad \dot{\varphi}(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) - f(\xi, \gamma),$$

de telle sorte que $\varphi(\xi, \eta)$ tend vers zéro quand η tend vers γ . Dans

Fig. 3.



ces conditions nous avons à dériver les deux intégrales

$$-2\sqrt{\pi}Z_1 = \int_R U \psi(\xi) d\xi d\eta, \quad -2\sqrt{\pi}Z_2 = \int_R U \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

en posant $Z = Z' + Z_1 + Z_2$; or, la fonction

$$\Psi(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \int_{\xi_0'}^{\xi'} \psi(\xi'') d\xi''$$

est solution de l'équation $\delta z = \psi(\xi)$. Si nous remplaçons z par Ψ dans la formule (α) appliquée au contour $ma bn$, il vient

$$Z_1 = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_R U \psi d\xi d\eta = \Re(x, \gamma) + \Psi(x),$$

$\Re$ étant une solution de $\delta z = 0$, mise sous forme d'une somme d'intégrales indéfiniment dérivables en x et γ pour tout point P intérieur à R : donc $\frac{\partial Z_1}{\partial \gamma}$ existe (ainsi que $\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2}$) et l'on a $\delta Z_1 = \psi(x)$.

Il nous reste donc à prendre la dérivée de $\int_R U \varphi d\xi d\eta$. Si nous donnons à γ un accroissement $\overline{PP'} = \Delta\gamma > 0$, l'aire du rectangle subit

un accroissement ΔR et l'on a

$$(25) \quad \frac{1}{\Delta y} \Delta \int \int_R = \frac{1}{\Delta y} \int \int_{\Delta R} U_{P'} \varphi \, d\xi \, d\eta + \int \int_R \frac{U_{P'} - U_P}{PP'} \varphi \, d\xi \, d\eta.$$

Or, d'après la formule (24), nous avons (ici $y - y_1 = \Delta y$)

$$|Z| < F \Delta y \quad \text{si} \quad |f| \leq F.$$

Par conséquent, dans le deuxième membre de (25), l'intégrale $\int \int_{\Delta R}$ est en valeur absolue inférieure à $2\sqrt{\pi} \mu \Delta y$, μ étant le maximum de φ dans ΔR . Or μ tend vers zéro avec Δy , et par suite $\frac{1}{\Delta y} \int \int_{\Delta R}$ tend aussi vers zéro. Il n'y a donc pas, dans la dérivée cherchée, de terme relatif à l'accroissement de l'aire, et nous devons calculer simplement la limite du dernier terme de la formule (25).

Or, si dans l'intégrale $\zeta = \int \int_R U_{P'} \varphi \, d\xi \, d\eta$ nous considérons R comme fixe et P' comme variable au-dessus de mn , nous obtenons une fonction de l'ordonnée y' de P' , dont la dérivée est continue et donnée par la règle de Leibniz, sauf peut-être quand P' vient en P .

Soit alors σ un petit cercle de rayon ε et de centre P et envisageons l'intégrale

$$\zeta_\varepsilon = \int \int_{R-\sigma} U_{P'} \varphi \, d\xi \, d\eta.$$

Si nous montrons que la dérivée de ζ_ε , qui est donnée par la formule de Leibniz, même si P' est en P , est, quel que soit P' , uniformément convergente quand ε tend vers zéro, il en résultera que

$$-2\sqrt{\pi} \frac{\partial Z_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int \int_R U \varphi \, d\xi \, d\eta = \int \int_R \frac{\partial U}{\partial y} \varphi \, d\xi \, d\eta.$$

Il nous suffit donc d'examiner si $\int \int_\sigma \frac{\partial U}{\partial y'} \varphi \, ds$ tend uniformément vers zéro. Ceci s'écrit

$$\int_{y-\varepsilon}^{y'} \frac{d\eta}{(y' - \eta)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{x + \sqrt{\varepsilon^2 - (y' - \eta)^2}} e^{-\frac{(x' - \xi)^2}{4(y' - \eta)}} \left[\frac{(x - \xi)^2}{4(y' - \eta)} - \frac{1}{2} \right] \varphi \, d\xi,$$

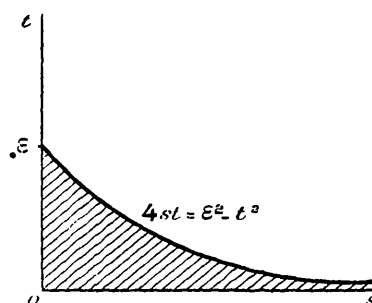
en n'envisageant que la partie relative au quadrant situé à droite, ce qui nous suffit.

Le changement de variable $y = \eta = t$, $\xi = x = 2\sqrt{st}$ nous donne, en posant $y' = y = k$,

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\sqrt{t}}{(k+t)^{\frac{3}{2}}} dt \int_0^{\frac{\varepsilon^2-t^2}{4t}} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} \left(\frac{st}{t+k} - \frac{1}{2} \right) \varphi ds,$$

intégrale étendue à l'aire ombrée ci-après comprise entre sot et un

Fig. 4.



arc de l'hyperbole $4st = \varepsilon^2 - t^2$; soit $t = \gamma(s)$ l'équation de cette branche. Notre intégrale peut s'écrire

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds \int_0^{\gamma(s)} \frac{\sqrt{t}}{(k+t)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{st}{t+k} - \frac{1}{2} \right) \varphi dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s} \sqrt{s} ds \int_0^{\gamma(s)} \left(\frac{t}{k+t} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{\varphi dt}{t} - \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{2\sqrt{s}} ds \int_0^{\gamma(s)} \left(\frac{t}{k+t} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\varphi dt}{t}. \end{aligned}$$

Or, si nous envisageons l'intégrale $\int_0^{\gamma(s)} \frac{\varphi dt}{t}$, dans laquelle s est constant, elle s'écrit avec les variables primitives

$$\int_{\eta_Q} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\eta}{y' - \eta} = \int_{\eta_Q} \frac{f(\xi, \eta) - f(\xi, y')}{y' - \eta} d\eta,$$

intégrale curviligne prise le long d'un arc de parabole d'axe vertical et de sommet P, Q étant un point du petit cercle. Si ces intégrales ont un sens pour tous les points Q voisins de P, et si, quand Q tend vers P, elles tendent vers zéro *uniformément*, quelle que soit la parabole, les deux intégrales en dt qui figurent dans I tendront vers zéro uniformément avec ε , puisque $\frac{t}{k+t}$ est un facteur monotone et plus petit que un . C'est précisément ce résultat que nous voulions obtenir.

Nous avons supposé $\Delta y > 0$. Si $\Delta y < 0$, un calcul analogue nous donne les mêmes conclusions.

Si maintenant nous voulons calculer $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, il n'y a aucune difficulté,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_2}{\partial x^2},$$

le premier terme se calcule par la formule de Leibniz, le point (x, y) n'étant pas dans l'aire correspondante; le second terme a déjà été étudié, et le troisième se calcule comme le premier; car l'intégrale obtenue n'est autre que celle que nous venons d'étudier, pour $k = 0$. Ici le cas est analogue à celui du potentiel car, quand x varie, l'aire d'intégration reste fixe.

Nous avons donc en définitive

$$\delta Z = \delta Z' + \delta Z_1 + \delta Z_2;$$

or

$$\delta Z' = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{S-R} \delta U f(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0,$$

$$\delta Z_1 = \psi(x) = f(x, y), \quad \delta Z_2 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_R \delta U \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0.$$

Donc

$$\delta Z = f(x, y).$$

Il est à remarquer que les calculs que nous venons de faire ne supposent nullement f continue en x, y . En outre de la condition d'intégrabilité, nous avons simplement supposé que $f(\xi, \eta) - f(\xi, y)$ tend vers zéro quand η tend vers y , le point (ξ, η) étant voisin de (x, y) . C'est ce que nous exprimons en disant que $f(\xi, \eta)$ est, *dans le voisinage de P, continue par rapport à η pour la valeur $\eta = y$* . Cette condition peut être réalisée sans que f soit continue par rapport à ξ, η pour $\xi = x, \eta = y$. Mais ce *second mode de continuité*, qui entraîne le premier (1), peut avoir lieu sans que l'intégrale $\int_{PQ}$ ait un

(1) En effet, le premier mode de continuité se traduit par les inégalités

$$|x - \xi| < \alpha, \quad |y - \eta| < \alpha, \quad |f(\xi, \eta) - f(\xi, y)| < \varepsilon,$$

et le second par

$$|x - \xi| < \alpha, \quad |y - \eta| < \alpha, \quad |f(\xi, \eta) - f(x, y)| < \varepsilon',$$

et, cette dernière inégalité ayant lieu pour $\eta = y$, il est clair qu'elle entraîne $|f(\xi, \eta) - f(\xi, y)| < 2\varepsilon'$.

sens. S'il en est ainsi, nous poserons

$$f(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + f(x, y),$$

φ sera nul au point P. Nous formerons encore deux intégrales Z_1 et Z_2 , en considérant $f(x, y)$ comme une constante : il nous suffira, par exemple, de prendre, au lieu de Ψ , la fonction $-f\eta$. L'étude de Z_2 se fera par la même marche que plus haut, mais il s'introduira des intégrales de la forme

$$\int_{PQ} \frac{f(\xi, \eta) - f(x, y)}{y - \eta} d\eta,$$

que nous supposerons uniformément convergentes. Dans ces conditions Z sera encore solution de $\delta z = f$.

Nous pouvons enfin envisager un *troisième mode de continuité*, analogue au premier, le rôle des lettres ξ et η étant interverti. Nous supposons alors que $f(\xi, \eta) - f(x, \eta)$ tende vers zéro, quand ξ tend vers x , dans le voisinage de P. Cette fois nous poserons

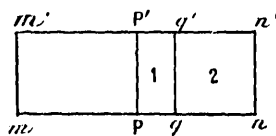
$$f(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + \chi(\eta), \quad \chi(\eta) = f(x, \eta),$$

φ tend vers zéro quand ξ tend vers x . Nous formerons Z_1 en partant de la fonction

$$-\int_{\eta_0}^{\eta} \chi(\eta') d\eta'.$$

Quant à Z_2 , sa dérivée s'étudiera toujours par le même procédé; mais ici il se présentera une *différence* en ce qui concerne l'*accroissement* ΔR de l'*aire* du rectangle.

Fig. 5.



Pour démontrer que $\frac{1}{\Delta y} \int \int_{\Delta R}$ tend vers zéro avec Δy , il nous suffit d'envisager la portion $Pnn'P'$. Partageons cette aire en deux (fig. 5) par la verticale qq' d'abscisse $x + \varepsilon$, ε tendant vers 0 avec $\Delta y = k$.

Nous avons ainsi décomposé $\int \int_{\Delta_R}$ en deux parties $\int \int_1$ et $\int \int_2$; or

$$\left| \int \int_1 \right| < k \mu,$$

μ étant le maximum de φ , qui tend vers zéro avec k . Donc $\frac{1}{k} \int \int_1$ tend vers zéro. Posant $Pn = \alpha$, le changement de variables déjà plusieurs fois employé nous donne

$$\left| \int \int_2 \right| < \Phi \int_0^k dt \int_{\frac{\varepsilon^2}{t}}^{\frac{\alpha^2}{t}} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds \quad (\Phi > |\varphi|),$$

or la fonction $\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}$ étant toujours décroissante, elle est, dans l'intégrale, inférieure à $\frac{\sqrt{t}}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{t}}$. Donc

$$\left| \int \int_2 \right| < \Phi \int_0^k \frac{\alpha^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon \sqrt{t}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{t}} dt = \Phi (\alpha^2 - \varepsilon^2) \int_0^{\frac{k}{\varepsilon^2}} \frac{e^{-\frac{1}{\theta}}}{\sqrt{\theta}} d\theta \quad (t = \varepsilon^2 \theta).$$

Si ε est choisi de telle sorte que $\frac{k}{\varepsilon^2}$ tende vers zéro avec k , cette intégrale tend vers zéro avec k . Il n'y a donc pas, dans la dérivée $\frac{\partial Z_2}{\partial y}$, de terme relatif à l'accroissement de l'aire.

Poursuivant l'étude de cette dérivée, on rencontre des intégrales curvilignes qui sont cette fois de la forme

$$\int_{PQ} \frac{f(\xi, \eta) - f(x, y)}{y - \eta} d\eta.$$

9. LES CONDITIONS (A). — En résumé pour que la fonction $Z(x, y)$ admette en un point $P(x, y)$ des dérivées $\frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, vérifiant la relation

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial Z}{\partial y} = f(x, y),$$

il suffit que $f(x, y)$ satisfasse, en outre de la condition d'intégrabilité dans S_y , à l'un des groupes de conditions suivantes :

A₁. — $f(\xi, \eta)$ est continue pour $\xi = x$, $\eta = y$, et, si l'on consi-

dère les paraboles (p) d'axe vertical et de sommet P, l'intégrale curviligne

$$I_1 = \int_{PQ} \frac{f(\xi, \eta) - f(x, y)}{y - \eta} d\eta,$$

prise le long de (p) est *uniformément convergente* pour tout point Q voisin de P, c'est-à-dire quelle que soit (p) .

A_2 . — $f(\xi, \eta)$ est, dans le voisinage de P, continue par rapport à ξ , pour $\xi = x$, et l'on a la même condition que plus haut pour l'intégrale

$$I_2 = \int_{PQ} \frac{f(\xi, \eta) - f(x, y)}{y - \eta} d\eta.$$

A_3 . — $f(\xi, \eta)$ est, dans le voisinage de P, continue par rapport à η , pour $\eta = y$, et l'on a encore la même condition pour l'intégrale

$$I_3 = \int_{PQ} \frac{f(\xi, \eta) - f(\xi, y)}{y - \eta} d\eta.$$

Nous appellerons conditions (A) un quelconque de ces groupes $(^1)$. Ces conditions seront réalisées par exemple si au voisinage de P on a

$$|f(\xi, \eta) - f(\xi, y)| < K |y - \eta|^\gamma \quad \text{ou} \quad |f(\xi, \eta) - f(x, y)| < K |x - \xi|^\gamma,$$

avec $0 < \gamma \leq 1$: les intégrales I_3 ou I_2 convergent alors uniformément. D'ailleurs dans ces deux cas, qui seront très importants pour nous, les dérivées de l'intégrale Z_2 se calculent immédiatement par la formule de Leibniz, car $\frac{\partial Z_2}{\partial y}$ est une intégrale du type I_{pq} [formule (23')] avec $r > 0$, et nous avons dit, à propos de $\frac{\partial Z}{\partial x}$, que ces intégrales étaient uniformément convergentes.

(¹) Le produit de deux fonctions vérifiant une même condition A la vérifiera également : si, par exemple, f et y satisfont à A_2 , en écrivant

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) - f(x, \eta) \varphi(x, \eta) \\ = \varphi(\xi, \eta) [f(\xi, \eta) - f(x, \eta)] + f(x, \eta) [\varphi(\xi, \eta) - \varphi(x, \eta)], \end{aligned}$$

on voit immédiatement que $f\varphi$ satisfait aussi à la condition A_2 .

Enfin les conditions (A) seraient vérifiées aussi dans le cas où les seconds membres des inégalités précédentes seraient $K|\xi|^\gamma|y-\eta|^{-1-\gamma}$ ou un terme analogue en $x-\xi$, et aussi dans le cas où

$$|f(\xi, \eta) - f(x, y)| < K|x-\xi|^\gamma + K'|y-\eta|^{\gamma'};$$

$\frac{\partial Z_2}{\partial y}$ se décompose alors en une somme d'intégrales I_{pq} . Il serait facile de donner encore d'autres conditions particulières.

Un cas très important qui réalise manifestement aussi les conditions (A) est celui où $f(x, y)$ admet une dérivée par rapport à x ou à y . Nous avons déjà rencontré un de ces cas au début du paragraphe 8.

Au reste, nous allons examiner de plus près le calcul effectif des dérivées de la fonction Z .

10. CALCUL DES DÉRIVÉES DE LA FONCTION Z . — Quand $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe dans S , $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ est donnée par la formule déjà citée

$$2\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \int_{(C_y)} \frac{\partial U}{\partial x} f(\xi, \eta) d\eta - \int \int_{S_y} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi d\eta.$$

Supposons maintenant que f admette une dérivée par rapport à y dans S . On peut conclure de ce que nous avons vu plus haut (§ 8) que

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_{y-\varepsilon}} U f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon=0} \int \int_{S_{y-\varepsilon}} \frac{\partial U}{\partial y} f d\xi d\eta.$$

Transformons cette dernière intégrale (1) (voir fig. 1) en utilisant

$$\frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\int \int_{S_{y-\varepsilon}} = \int_{M'_1 A_1 A_2 M'_2 M'_1} U f(\xi, \eta) d\xi + \int \int_{S_{y-\varepsilon}} U \frac{\partial f}{\partial \eta} d\xi d\eta.$$

(1) Il est entendu que, lorsque nous écrivons dans une formule la lettre U , simplement, cela signifie $U[\xi, \eta; x, y]$.

D'où, en utilisant la formule de Poisson (§ 2), quand ε tend vers 0.

$$(26) \quad 2\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = - \int_{(c,y)} U f(\xi, \eta) d\xi - \int \int_{s_y} U \frac{\partial f}{\partial \eta} d\xi d\eta + 2\sqrt{\pi} f(x, y).$$

Supposons maintenant, plus généralement, que les *conditions* (A_3) soient vérifiées. Nous pourrions écrire

$$2\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \int_{s_y} U f(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int \int_{s_y} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} [f(\xi, \eta) - f(\xi, y)] d\xi d\eta.$$

Or, dans la première intégrale, $f(\xi, y)$ a une dérivée nulle par rapport à η . D'où, d'après la formule (26),

$$(26') \quad 2\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = - \int_{(c,y)} U f(\xi, y) d\xi - \int \int_{s_y} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} [f(\xi, \eta) - f(\xi, y)] d\xi d\eta + 2\sqrt{\pi} f(x, y).$$

Un raisonnement analogue appliqué *au cas* (A_2) donnerait

$$(26'') \quad 2\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \int_{(c,y)} \frac{\partial U}{\partial x} f(x, \eta) d\eta - \int \int_{s_y} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} [f(\xi, \eta) - f(x, \eta)] d\xi d\eta.$$

Si, enfin, f satisfait aux *conditions* (A_1) , la formule s'écrit

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= -f(x, y) \int_{(c,y)} U d\xi \\ &\quad - \int \int_{s_y} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} [f(\xi, \eta) - f(x, y)] d\xi d\eta + 2\sqrt{\pi} f(x, y) \\ &= f(x, y) \int_{(c,y)} \frac{\partial U}{\partial x} d\eta - \int \int_{s_y} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} [f(\xi, \eta) - f(x, y)] d\xi d\eta. \end{aligned}$$

L'identité de ces deux formules résulte d'ailleurs de la formule (α) appliquée au cas où z est une constante $(^1)$.

11. RETOUR SUR LES PROBLÈMES AUX LIMITES. — *Dans tout ce qui va suivre nous allons supposer l'ordonnée y_1 de $A_1 A_2$ (fig. 1) nulle.*

(¹) Ces formules peuvent aussi s'établir en calculant les dérivées de la fonction Z_1 utilisée au paragraphe 8, mais la marche suivie ici est plus rapide.

Si f satisfait aux conditions (A), et (C) à la condition (I'), l'intégrale

$$Z_0(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} G(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

est solution de $\delta z = f$, puisque $G = U - H$ et que H est solution régulière de $\delta z = 0$ en tout point (x, y) intérieur à S .

Cela posé, remarquons qu'il existe certainement une solution de $\delta z = f$ s'annulant sur (C), car il suffit pour l'obtenir d'ajouter à $Z(x, y)$ la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les mêmes valeurs que $-Z$. Or, si nous appliquons à cette solution la formule (F) du paragraphe 4, nous voyons qu'elle coïncide précisément avec Z_0 .

Le raisonnement précédent nous montre que nous avons deux moyens d'obtenir la solution de $\delta z = f$ prenant sur (C) des valeurs données : 1° former la fonction de Green et appliquer la formule (F); 2° ajouter à la fonction Z la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les valeurs données plus les valeurs prises par la fonction $-Z$, cette solution étant formée par le moyen d'équations intégrales. La première méthode peut être préférable si le contour a toujours la même forme, en particulier si c'est un contour rectangulaire, c'est-à-dire si les arcs A_1B_1 et A_2B_2 se réduisent à deux verticales.

Remarquons enfin que, si les fonctions X_i et Φ_i sont dérivables et si Φ admet des dérivées première et seconde, on peut toujours ramener les valeurs données à zéro; il suffit pour cela de poser

$$(27) \quad z = \zeta + \Phi(x) + \frac{(x - X_1)\bar{\Phi}_1 - (x - X_2)\bar{\Phi}_2}{X_2 - X_1}, \quad \bar{\Phi}_i = \Phi_i(y) - \Phi[X_i(y)].$$

Solutions régulières au bord. -- Si l'on veut obtenir une solution régulière dans S , bord compris, nous aurons évidemment la condition nécessaire [(cf. formule (19)]:

$$(28) \quad \Phi''(x_i) - \Phi'(x_i)X'_i(0) - \Phi'_i(0) = f(x_i, 0).$$

Cette condition est aussi *suffisante*. En effet, supposons que, pour éviter toute difficulté aux points A_1 et A_2 , nous ayons calculé l'intégrale Z pour une aire débordant un peu l'aire S à droite et à gauche. Nous appliquerons alors la deuxième méthode indiquée plus haut : la solution de $\delta z = 0$ que nous devons former correspondra à des

données aux limites $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \Phi$, telles que $\bar{\Phi}_i(\gamma) = \Phi_i(\gamma) - Z[X_i(\gamma), \gamma]$ et qui devront satisfaire à la relation (19).

Or, en tous les points de $\Lambda_1, \Lambda_2, Z, \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ sont nuls et $\frac{\partial Z}{\partial y} = f(x, 0)$: cela résulte en effet des formules du paragraphe précédent. Donc

$$\bar{\Phi}'_i(0) = \bar{\Phi}'_i(0) - f(x_i, 0).$$

En portant dans la relation (19), on trouve la formule (28) que nous voulions établir.

Autres problèmes aux limites. — Au sujet des problèmes aux limites, nous avons dit qu'on pourrait former une fonction de Green, si l'on se donnait d'une façon générale, sur C_i ,

$$l_i(\gamma) \frac{\partial z}{\partial x} + m_i(\gamma) z = \chi_i(\gamma),$$

et $z = \Phi(x)$ sur Λ_1, Λ_2 . Ce que nous avons dit au paragraphe 3 prouve que la solution existe. La formule (F) (§ 4) appliquée à la fonction de Green formée pour ce problème aux limites prouve, par le même raisonnement que plus haut, que cette solution est *unique*.

Il existe un cas particulier où la solution n'est pas unique: c'est celui où l'on se donne $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur (C) ⁽¹⁾; z sur Λ_1, Λ_2 n'est alors déterminé qu'à une constante près et la solution dépend linéairement d'une fonction de x, y , qui est $\int_{\Lambda_1, \Lambda_2} G d\xi$.

12. LIMITATION D'UNE SOLUTION DE $\delta z = f$ ET DE SA DÉRIVÉE PAR RAPPORT À x . — Posons $z = z_0 + Z_0$, z_0 étant la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les valeurs données: si M est le module maximum de celles-ci, on a donc $|z_0| < M$ (§ 18). Z_0 est la solution nulle sur (C), soit

$$Z_0(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} G(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta = Z(x, y) - Z_1(x, y).$$

(¹) Toutes les fois que l'on ne se donne pas à la fois $\frac{\partial z}{\partial x}$ seul sur C_1 et C_2 , on ne peut connaître $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur Λ_1, Λ_2 sans connaître en même temps z , à cause des conditions de raccordement en Λ_1 et Λ_2 .

D'après la formule (13) Z_0 admettra la même limitation que Z , soit

$$(29) \quad |Z_0| < \frac{F\gamma^{\gamma+1}}{\gamma+1}, \quad \text{si} \quad |f| < F\gamma^{\gamma} \quad (\gamma > -1).$$

Envisageons maintenant la dérivée. En tout point $P(x, y)$ intérieur à S nous avons évidemment

$$\frac{\partial Z_0}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{s_y} \frac{\partial G}{\partial x} f d\xi d\eta = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Z_1}{\partial x}.$$

Il est aisé de voir que si, d'une façon générale, f est telle que l'intégrale $\frac{\partial Z(x, y)}{\partial x}$ est une fonction continue de x, y même au bord, il en est de même de $\frac{\partial Z_1}{\partial x}$. Si, en effet, nous explicitons $\frac{\partial H}{\partial x}$ au moyen de la formule (10), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_1}{\partial x} &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{s_y} \frac{\partial H}{\partial x} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^y d\eta \int_{X_1(\eta)}^{X_2(\eta)} f(\xi, \eta) d\xi \\ &\quad \times \int_0^y V[\xi, \eta; X_1(s), s] \left\{ V[X_1(s), s; x, y] + \frac{\bar{\theta}_1}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \right\} ds \\ &\quad + \text{un terme de même forme contenant } X_2. \end{aligned}$$

Or cette intégrale triple se transforme ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_1}{\partial x} &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^y \left\{ V[X_1(s), s; x, y] + \frac{\bar{\theta}_1}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \right\} ds \\ &\quad \times \int_0^s d\eta \int_{X_1(\eta)}^{X_2(\eta)} V[\xi, \eta; X_1(s), s] f(\xi, \eta) d\xi \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^y \left\{ V[X_1(s), s; x, y] + \frac{\bar{\theta}_1}{(y-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \right\} \frac{\partial Z[X_1(s), s]}{\partial x} ds; \end{aligned}$$

ceci se décompose en une intégrale s qui définit une fonction continue en tout point de S , *bord compris*, et une autre intégrale jouissant de la même propriété puisque $\bar{\theta}_1$ est continue [sauf peut-être pour $x = X_1(y)$ et $s = y$] et bornée. Même conclusion pour le terme de l'intégrale, contenant X_2 .

Si maintenant f est une fonction intégrable satisfaisant à la limitation $|f| < F\gamma^\gamma$, il résulte de la formule trouvée, et des limitations (6) des intégrales 3 et (24'') de $\frac{\partial Z}{\partial x}$, que

$$(29') \quad \left| \frac{\partial Z_0}{\partial x} \right| < (L) \text{FB} \left(\frac{1}{2}, \gamma + 1 \right) \gamma^{\gamma + \frac{1}{2}} \left[(L') + B \left(\frac{\alpha}{2}, \gamma + \frac{3}{2} \right) \gamma^{\frac{\alpha}{2}} \right] \\ < (L) \text{FB} \left(\frac{1}{2}, \gamma + 1 \right) \gamma^{\gamma + \frac{1}{2}},$$

(L) dépendant de α et de l'ordonnée maxima qu'on veut atteindre.

Il y a d'ailleurs avantage à réunir les deux limitations de Z_0 et $\frac{\partial Z_0}{\partial x}$ en une seule, qui aura alors la forme (29').

Si maintenant, nous envisageons une solution de $\delta z = f$ prenant au bord des valeurs données, telles que $\frac{\partial z}{\partial x}$ existe sur (C), nous pourrions écrire, en utilisant pour $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ la note de la fin du § 5*,

$$(29'') \quad |z| < M + \frac{F\gamma^{\gamma+1}}{\gamma+1}, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < M' + (L)\gamma^\beta,$$

M' étant le maximum de $|\Phi'(x)|$ et β étant un nombre compris entre 0 et 1 qui dépend des accroissements de Φ_i , de Φ' et de X_i (1).

13. ÉTUDE DES ACCROISSEMENTS DE Z ET $\frac{\partial Z}{\partial x}$ QUAND f EST SUPPOSÉE SIMPLEMENT INTÉGRABLE. — Il nous sera utile dans la suite de savoir comment se comportent Z et $\frac{\partial Z}{\partial x}$ quand f satisfait simplement à la

(1) Considérons enfin la solution $\delta z = f$, telle que $\frac{\partial z}{\partial x}$ soit nul sur (C); il suffira pour l'avoir d'ajouter à la fonction Z la solution $\bar{z}$ de $\delta z = 0$, telle que, sur (C), $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial x}$; or $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ étant solution de $\delta z = 0$, limitée par ses valeurs extrêmes au bord, admettra donc la même limitation que $\frac{\partial Z}{\partial x}$. On pourra donc écrire

$$\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < (L') \text{FB} \left(\frac{1}{2}, \gamma + 1 \right) \gamma^{\gamma + \frac{1}{2}}.$$

D'où la limitation d'une solution dont on donne la dérivée sur C_i (voir la première Note du § 5*).

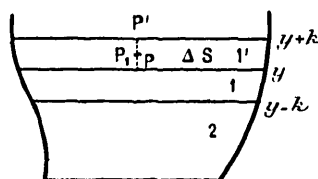
Dans le cas du contour rectangulaire tous les résultats du paragraphe 12 s'établissent au moyen des formules données dans la Note [voir la formule (1'').

condition d'intégrabilité. La dérivée $\frac{\partial Z}{\partial y}$ n'existe pas en général; proposons-nous de chercher, quand on donne à y un accroissement k , de quel ordre sera l'accroissement de Z . Nous pouvons toujours supposer k positif; nous avons alors (voir fig. 6)

$$Z(x, y+k) - Z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\iint_{s+\Delta s} U_p f dS - \iint_s U_p f dS \right).$$

Partageons le domaine S en deux autres par la caractéristique d'or-

Fig. 6.



donnée $y-k$. Les intégrales du second membre peuvent s'écrire

$$(30) \quad \iint_{s+\Delta s} - \iint_s = \iint_{1+1'} U_p f dS - \iint_1 U_p f dS + \iint_2 (U_p - U_p) f dS;$$

or [voir formules (24), § 8]

$$\left| \iint_{1+1'} + \iint_1 \right| < 6\sqrt{\pi} F k, \quad \iint_2 = k \iint_2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{P_1} f dS,$$

nous avons étudié une intégrale analogue à cette dernière au paragraphe 8; le changement de variable utilisé donne

$$\iint_2 < 2 F k \int_k^{y+k} \frac{dt}{t} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} \left| s - \frac{1}{2} \right| ds < 2\sqrt{\pi} F k \mathcal{L} \left(1 + \frac{y}{k} \right),$$

nous obtenons donc un accroissement d'ordre < 1 :

$$|Z(x, y+k) - Z(x, y)| < F k \left[3 + \mathcal{L} \left(1 + \frac{y}{k} \right) \right] < \mu F k |k| \quad (1),$$

μ étant une constante dépendant de l'aire d'intégration.

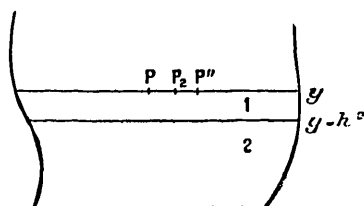
(1) Cette dernière limitation ne s'applique pas évidemment au cas où $y=0$, car alors l'accroissement est $< Fk$. Il en est de même si k est $> y$, les deux intégrales de la première formule étant limitées en fonction linéaire de k .

Envisageons maintenant $\frac{\partial Z}{\partial x}$ qui n'admet pas de dérivées en général : étudions la différence

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x+h, y) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \iint_S (V_{1''} - V_1) f dS,$$

Partageons S en deux parties par la caractéristique d'ordonnée $y-h^2$,

Fig. 6 bis.



puis écrivons (voir fig. 6 bis)

$$\iint_S (V_{1''} - V_1) f dS = \iint_1 V_{1''} f dS - \iint_1 V_1 f dS + \iint_2 (V_{1''} - V_1) f dS.$$

Les deux premières intégrales sont, en valeur absolue, inférieures à $8Fh$. La seconde est égale à

$$h \iint_2 \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{P_2} f dS = -2h \iint_2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{P_2} f dS,$$

et, toujours par la même méthode, nous obtenons comme limitation de cette intégrale

$$4Fh \int_{h^2}^y \frac{dt}{t} \int_0^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} \left| s - \frac{1}{2} \right| ds = 4\sqrt{\pi} Fh \varrho \frac{y}{h^2}.$$

Il vient donc en définitive encore un accroissement d'ordre < 1 :

$$\left| \frac{\partial Z}{\partial x}(x+h, y) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y) \right| < Fh \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} + \varrho \frac{y}{h^2} \right) < \mu' Fh | \varrho h |.$$

Il est à remarquer que les deux méthodes que nous venons d'employer s'appliquent d'une façon générale à l'étude des accroissements, relativement à x ou à y , des intégrales de la forme I_{pq} , dont nous

avons déjà parlé. On trouve aisément

$$|\Delta_x I_{pq}| < \begin{cases} \mu_{pq} F |\Delta x|^r & (r < 1), \\ \mu_{pq} F |\Delta x|^r |\Delta x| & (r = 1), \end{cases} \quad (r = p - 2q + 3 > 0),$$

$$|\Delta_y I_{pq}| < \begin{cases} \mu'_{pq} F |\Delta y|^{\frac{r}{2}}, & (r < 2), \\ \mu'_{pq} F |\Delta y|^{\frac{r}{2}} |\Delta y| & (r = 2). \end{cases}$$

En particulier, en ce qui concerne $\frac{\partial Z}{\partial x}$,

$$\left| \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y + k) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y) \right| < \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} + 4 \right) F k^{\frac{1}{2}}.$$

14. ACCROISSEMENTS DE $\frac{\partial Z}{\partial y}$ ET $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$. — La méthode que nous venons de suivre permet également de calculer les accroissements de $\frac{\partial Z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ quand ces dérivées existent. Supposons que nous ayons, par exemple,

$$|f(\xi, \eta) - f(\xi, \gamma)| < K |\gamma - \eta|^r,$$

$\frac{\partial Z}{\partial y}$ est donné par la formule, déduite de (26') grâce à $\partial Z = f$,

$$(31) \quad 2\sqrt{\pi} \frac{\partial Z}{\partial y} = - \int_{(C_y)} U f(\xi, \gamma) d\xi - \int \int_{S_y} \frac{\partial U}{\partial y} [f(\xi, \eta) - f(\xi, \gamma)] d\xi d\eta.$$

Étudions l'accroissement de cette dérivée quand y subit un accroissement $y' - y = k$ et posons

$$f(\xi, \gamma) = \bar{f}, \quad f(\xi, \gamma') = \bar{f}', \quad U(\xi, \eta; x, \gamma') = U'.$$

En décomposant l'aire comme dans la figure 6, nous écrivons de la façon suivante l'accroissement de l'intégrale double

$$(32) \quad \Delta \int \int_{S_y} = \int \int_{1+1'} \frac{\partial U'}{\partial y'} (f - \bar{f}') dS - \int \int_1 \frac{\partial U}{\partial y} (f - \bar{f}) dS \\ + \int \int_2 \Delta \frac{\partial U}{\partial y} (f - \bar{f}) dS - \int \int_2 \frac{\partial U'}{\partial y'} (\bar{f}' - \bar{f}) dS.$$

Il suffit de calculer $\frac{\partial U}{\partial y}$ et $\Delta \frac{\partial U}{\partial y} = k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{P_1}$ pour voir [toujours avec le

même changement de variables] que les trois premières intégrales sont limitées par $(L)Kk^\gamma$. Il suffit pour cela de remarquer que, si y_1 est l'ordonnée de P_1 , on a

$$|f - \bar{f}| < K(y - \eta)^\gamma < K(y_1 - \eta)^\gamma,$$

Laissant de côté la quatrième intégrale, formons l'accroissement de l'intégrale simple

$$(32') \quad \Delta \int_{(C_y)} = \int_{(1)+(1')} U' \bar{f}' d\xi - \int_{(1)} U \bar{f} d\xi + \int_{(2)} (U' - U) \bar{f} d\xi + \int_{(2)} U' (\bar{f}' - \bar{f}),$$

les numéros (1), (1'), (2) désignant respectivement l'ensemble des bords droit et gauche des aires 1 et 1', et le contour (C_{y-k}) . Si X'_i existe, les deux premières intégrales sont $< (L)k^{\frac{1}{2}}$, et sont nulles si $X'_i = 0$. Quant à la dernière, il suffit de remarquer que $\frac{\partial U'}{\partial y'} = -\frac{\partial U'}{\partial \eta}$, pour voir qu'elle se détruit avec la quatrième intégrale de (32).

Il ne nous reste donc plus à étudier que la troisième intégrale de (32'). Comme pour les deux premières, ce qui, dans cette intégrale, concerne les arcs C_1 et C_2 , s'évanouit dans le cas d'un contour rectangulaire et est, dans le cas général, limité par $(L)k^{\frac{1}{2}}$: il suffirait d'appliquer la formule des accroissements finis pour le voir immédiatement, en remarquant que $\left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| < \frac{(L)}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}}$. Pour les applications que nous rencontrerons, $f(\xi, 0)$ sera nul et l'on aura donc $|f(\xi, y)| < Ky^\gamma$. Alors, la limitation sera $(L)Kk^{\frac{1}{2}}$.

Il nous reste enfin, si $k < y$ (avec $y < y_1 < y'$),

$$\begin{aligned} (32'') \quad \left| \int_{\Lambda_1}^{A_2} (U' - U) f(\xi, y) d\xi \right| &< Kk y^\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y_1}}}{y_1^{\frac{3}{2}}} \left| \frac{(x-\xi)^2}{4y_1} - \frac{1}{2} \right| d\xi \\ &< 2Kk \frac{y^\gamma}{y_1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \left| s^2 - \frac{1}{2} \right| ds \\ &= (L)K \left(\frac{k}{y_1} \right)^{1-\gamma} \left(\frac{y}{y_1} \right)^\gamma k^\gamma < (L)Kk^\gamma. \end{aligned}$$

Si $k > y$, cette transformation est inutile, l'intégrale elle-même étant $(L)Ky^\gamma < (L)Kk^\gamma$ (1). Dans les conditions où nous sommes placés,

(1) Si $f(\xi, 0)$ n'est pas nul, on écrit $f(\xi, y) = [f(\xi, y) - f(\xi, 0)] + f(\xi, 0)$ et l'on est alors amené à faire une hypothèse sur l'accroissement de $f(\xi, 0)$, d'après ce qui a été vu sur l'intégrale $\bar{z}$ (§ 7).

l'accroissement de $\frac{\partial Z}{\partial y}$ par rapport à y est donc d'ordre γ , si $\gamma < \frac{1}{2}$, et d'ordre au moins égal à $\frac{1}{2}$, si $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ ⁽¹⁾.

Quant à l'accroissement de $\frac{\partial Z}{\partial x}$, nous avons vu qu'il est d'ordre $\frac{1}{2}$, quand on ne fait aucune hypothèse sur f . D'autre part la formule (31) est dérivable par rapport à x , même au bord, si $\gamma > \frac{1}{2}$ [en supposant $f(\xi, 0) = 0$] ⁽²⁾ : donc $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ existe. Dans le cas intermédiaire $\gamma < \frac{1}{2}$, une méthode tout à fait semblable à celle que nous venons d'employer montre que l'accroissement de $\frac{\partial Z}{\partial x}$ est d'ordre $\gamma + \frac{1}{2}$.

En ce qui concerne l'accroissement de $\frac{\partial Z}{\partial y}$ par rapport à x , lorsque f en possède un, on l'étudierait par une analyse analogue : nous en parlons dans la Note sur le contour rectangulaire.

15. — APPLICATION AUX PROBLÈMES AUX LIMITES. — Nous avons déjà envisagé dans le paragraphe 7, au point de vue de l'étude des accroissements, l'équation $\delta z = \varphi(x)$, dont les solutions satisfont aux inégalités (22) dans les conditions indiquées. Considérons maintenant la solution Z_0 , nulle sur (C) , de l'équation $\delta z = f(x, y)$ avec ($\gamma' < 1$)

$$(33) \quad |f(x, y+k) - f(x, y)| < K k^{\gamma'}, \quad f(x, 0) = 0;$$

nous la formerons en ajoutant à Z la solution z_0 de l'équation $\delta z = 0$, s'annulant sur A, A_2 et prenant sur C_i la valeur $-Z[X_i(y), y]$. Si X'_i existe et admet un accroissement d'ordre non nul, nous serons placés, pour z_0 , dans les conditions que nous avons supposées vérifiées dans le paragraphe 7 pour établir les formules (22) ⁽³⁾. En utilisant alors les résultats du paragraphe précédent, ainsi que les formules (24') et (24'') du paragraphe 8, nous pouvons donc énoncer, pour $Z_0 = Z + z_0$, la propriété suivante : *Si f est nul sur Ox et si f et X'_i*

(1) Nous entendons par là l'accroissement dans S , *bord compris*. A l'intérieur de S , il est sûrement d'ordre γ , car les intégrales curvilignes sont dérivables.

(2) Sinon, il faut supposer l'existence de $f'(\xi, 0)$.

(3) Et dans ce cas les coefficients (L) des formules (22) appliquées à z_0 contiendront le nombre K en facteur.

admettent, par rapport à y , un accroissement d'ordre non nul, on peut déterminer un nombre $\gamma \leq \gamma'$ tel que les conditions (33) entraînent

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{lll} |\Delta Z_0| < (L)K \Delta y, & \left| \Delta \frac{\partial Z_0}{\partial x} \right| < (L)K \Delta y^{\gamma+\beta}, & \left| \Delta \frac{\partial Z_0}{\partial y} \right| < (L)K \Delta y^\gamma, \\ |Z_0| < (L)K y^{\gamma+1}, & \left| \frac{\partial Z_0}{\partial x} \right| < (L)K y^{\gamma+\frac{1}{2}}, & \left| \frac{\partial Z_0}{\partial y} \right| < (L)K y^\gamma. \end{array} \right.$$

Ces inégalités diffèrent des inégalités (22) en ce que le nombre K , qui figure dans (33), figure aussi dans (34) : β est toujours le plus petit des nombres $\frac{1}{2}$ et $1 - \gamma$. Le nombre $\gamma < 1$ que nous venons d'introduire est *inférieur ou égal* à l'ordre réel d'accroissement γ' de f . *Il lui est certainement égal si le contour est rectangulaire.* Ceci tient aux trois premiers termes de la formule (32') (1). Dans le cas général, il est cependant possible que γ soit réellement l'ordre d'accroissement de f , mais pour le voir il faudrait utiliser la fonction de Green. D'ailleurs, ceci nous importe assez peu. Ce dont nous sommes certains, c'est qu'on peut choisir γ tel que les formules (34) soient vraies *pour toutes les fonctions f admettant un accroissement d'ordre supérieur ou égal à γ : K seul variera pour toutes ces fonctions.*

16. EXTENSION DU SYMBOLE δZ QUAND LES CONDITIONS (A) NE SONT PAS RÉALISÉES (2). — Quand la fonction f ne satisfait pas aux conditions (A), les deux termes de δZ n'existent pas, en général. On peut cependant, d'une manière analogue à ce qui a été fait pour le potentiel (PETRINI, *Journal de Liouville*, 1909, et *Acta mathematica*, 1907), donner une extension du symbole δz , en posant

$$\delta'Z = \lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \left[\frac{\partial Z}{\partial x}(x+h, y) - \frac{\partial Z}{\partial x}(x, y) \right] - \frac{1}{k} [Z(x, y+k) - Z(x, y)] \right\}.$$

(1) Ce terme a, en effet, un accroissement d'ordre $\frac{1}{2}$, mais peut-être d'un ordre supérieur. Si le contour est rectangulaire, il s'évanouit. L'emploi de la fonction de Green permettrait peut-être de combiner cette intégrale avec celles qui proviennent de la fonction H .

(2) Ce paragraphe constitue une analyse à part, dont la lecture n'est nullement nécessaire pour la suite.

Voyons dans quelles conditions *cette limite existera et sera égale à $f(x, y)$* . Nous supposons f continue au sens des conditions (A_2) ou (A_3) , puisque la continuité au sens de la condition (A_1) entraîne les deux autres.

Supposons par exemple que, dans le voisinage de P , $f(\xi, \eta) - f(\xi, y)$ tende vers zéro, quand η tend vers y . Nous isolons P par un rectangle où cette propriété a lieu. Suivant la même marche qu'au paragraphe 8, nous décomposerons Z en trois parties :

$$Z = Z' + Z_1 + Z_2, \quad \delta' Z' = \delta Z' = 0, \quad \delta' Z_1 = \delta Z_1 = f(x, y).$$

Il nous reste donc à former le symbole $\delta' Z$ pour la fonction

$$Z_2 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_R U_P \varphi dS, \quad \varphi = f(\xi, \eta) - f(\xi, y),$$

et à chercher dans quelles conditions il est égal à zéro.

Étudions tout d'abord le second terme de la parenthèse : nous donnons à y un accroissement $k > 0$, et nous avons, comme au paragraphe 8 (*fig. 7*),

$$(35) \quad \frac{1}{k} [Z_2(P') - Z_2(P)] \\ = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k} \int \int_{1+1'} U_{P'} \varphi dS - \frac{1}{k} \int \int_1 U_P \varphi dS + \int \int_2 \frac{U_{P'} - U_P}{PP'} \varphi dS \right).$$

D'après un raisonnement déjà fait, lorsque k tend vers zéro, les deux premiers termes du second membre de l'égalité précédente tendent vers zéro, puisque φ tend vers zéro. Quant au dernier terme, qui représente le rapport incrémental de l'intégrale $\int \int_2 U_P \varphi dS$ supposée étendue à l'aire fixe 2, nous pouvons lui appliquer la formule de Taylor :

$$(36) \quad \int \int_2 \frac{U_{P'} - U_P}{PP'} \varphi dS \\ = \int \int_2 \frac{\partial U_P}{\partial y} \varphi dS + \frac{k}{2} \int \int_2 \frac{e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4(y_1-\eta)^2}}}{4(y_1-\eta)^{\frac{5}{2}}} \left[3 - 3 \frac{(x-\xi)^2}{y_1-\eta} + \frac{(x-\xi)^4}{4(y_1-\eta)^2} \right] \varphi dS$$

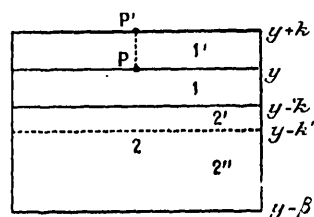
avec $y < y_1 < y + k$. Pour étudier le dernier terme, partageons l'aire 2

en deux parties par la caractéristique d'ordonnée $y - k'$ ($k' > k$). Le changement de variable $\xi - x = 2 \sqrt{s(y - \eta)}$ montre que

$$\left| \frac{k}{2} \int \int_{2'} \right| < k \Phi' \int_{y-k'}^{y-k} \frac{d\eta}{(y_1 - \eta)^2} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} \left| s^2 - 2s + \frac{3}{4} \right| ds \\ < L \Phi' \left(\frac{k}{y_1 - y + k} - \frac{k}{y_1 - y + k'} \right),$$

Φ' étant le maximum de $|\varphi|$ et L un coefficient numérique. Or, quand k tend vers zéro, Φ' tend vers zéro et les deux termes de la parenthèse

Fig. 7.



restent finis. Donc, la partie relative à $2'$ tend vers zéro avec k .

Nous avons de même, Φ'' étant le maximum de $|\varphi|$ dans $2''$,

$$\left| \frac{k}{2} \int \int_{2''} \right| < L \Phi'' k \int_{y-\beta}^{y-k'} \frac{d\eta}{(y_1 - \eta)^2} = L \Phi'' \left(\frac{1}{\frac{y_1 - y}{k} + \frac{k'}{k}} - \frac{k}{y_1 - y + \beta} \right).$$

Si k' est infiniment petit d'ordre inférieur à celui de k , $\frac{k'}{k}$ tend vers l'infini et l'expression envisagée tend vers zéro (puisque $y_1 - y < k$).

En définitive, le dernier terme de l'égalité (36) tend vers zéro avec k . Laissant de côté le premier pour le moment, passons à l'étude de l'accroissement de $\frac{\partial Z_2}{\partial x}$, que nous écrivons (fig. 8)

$$(37) \quad \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{h} \int_{\bar{1}} V_{P''} \varphi dS - \frac{1}{h} \int_{\bar{1}} V_P \varphi dS + \int \int_{\bar{2}} \frac{V_{P''} - V_P}{PP''} \varphi dS \right),$$

les deux parties $\bar{1}$ et $\bar{2}$ étant séparées par la caractéristique d'ordonnée $y - h^2$.

Si nous nous reportons à ce qui a été fait au paragraphe 8, nous

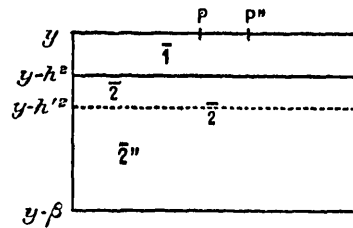
voyons que les deux premiers termes tendent vers zéro, puisque le maximum de $|\varphi|$ dans $\bar{1}$ tend vers zéro.

Quant au dernier terme, il s'écrit

$$(38) \quad \int \int_{\bar{2}} \frac{V_{P''} - V_P}{PP''} \varphi dS \\ = \int \int_{\bar{2}} \frac{\partial V}{\partial x} \varphi dS + \frac{h}{2} \int \int_{\bar{2}} \frac{e^{-\frac{(x_1 - \xi)^2}{4(y - \eta)}}}{(y - \eta)^{\frac{5}{2}}} (x_1 - \xi) \left[\frac{(x_1 - \xi)^2}{4(y - \eta)} - \frac{3}{2} \right] \varphi dS,$$

avec $x < x_1 < x + h$. Nous envisagerons encore dans l'aire $\bar{2}$ les deux

Fig. 8.



parties $\bar{2}'$ et $\bar{2}''$ séparées par la caractéristique d'ordonnée $y - h'^2$ (dans la figure 8, au-dessus de $y - h'^2$, lire $\bar{2}'$ au lieu de $\bar{2}$). En posant, dans le dernier terme de la formule précédente,

$$\xi - x_1 = 2\sqrt{s(y - \eta)},$$

il vient

$$\left| \frac{h}{2} \int \int_{\bar{2}} \right| < 2h\Phi \int_{y-h'^2}^{y-h^2} \frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty e^{-s} \left| s - \frac{3}{2} \right| ds < L\Phi' \left(1 - \frac{h}{h'} \right),$$

et ceci tend vers zéro quand h et h' tendent vers zéro, puisque Φ' tend vers zéro.

De même

$$\left| \frac{h}{2} \int \int_{\bar{2}''} \right| < L\Phi' h \int_{y-\beta}^{y-h^2} \frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} = 2L\Phi' \left(\frac{h}{h'} - \frac{h}{\sqrt{\beta}} \right).$$

Si h' est choisi de telle sorte que $\frac{h}{h'}$ tende vers zéro, ceci tend encore vers zéro.

En définitive, nous voyons que, au sens où nous avons pris le sym-

bole δ' , nous aurons

$$(38') \quad \delta' Z_2 = \lim_{h=0} \lim_{k=0} \left(\int \int_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \varphi \, dS - \int \int_2 \frac{\partial U}{\partial y} \varphi \, dS \right)$$

puisque tous les autres termes étudiés tendent vers zéro. Comme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

il reste

$$\int \int_{\sigma} \frac{\partial U}{\partial y} \varphi \, dS = \int \int_{\sigma} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)} - \frac{1}{2} \right] \varphi \, d\xi \, d\eta,$$

σ étant l'aire comprise entre $y - k$ et $y - h^2$. Or, si $|\varphi| < \Phi$,

$$\left| \int \int_{\sigma} \right| < L'' \Phi \int_{h^2}^k \frac{dt}{t} = L'' \Phi \left| \log \frac{k}{h^2} \right|,$$

ainsi que le changement de variables usuel le montre immédiatement; et ceci est la seule limitation que nous puissions donner si nous ignorons la façon dont Φ tend vers zéro avec h et k . Il nous faut donc supposer que $\frac{k}{h^2}$ reste fini et non nul. Alors $\int \int_{\sigma}$ tend vers zéro et $\delta' Z_2 = 0$. D'où $\delta' z = f$.

Étudions maintenant le cas de la continuité par rapport à ξ : dans le voisinage de P , $f(\xi, \eta) - f(x, \eta)$ tend vers zéro. Nous formons encore

$$\frac{1}{k} [Z_2(x, y+k) - Z_2(x, y)]$$

que nous écrivons sous la forme (35) en posant, cette fois,

$$f(\xi, \eta) - f(x, \eta) = \varphi(\xi, \eta).$$

Pour démontrer que les deux premiers termes du second membre de cette formule sont infiniment petits avec k , nous n'avons qu'à reproduire le raisonnement du paragraphe 8. Il nous reste donc à envisager le terme $\int \int_2 \frac{U_{P'} - U_P}{PP'} \, dS$ que nous mettrons ici encore sous la forme (36). Dans cette formule le dernier terme est en valeur absolue

inférieur à

$$(39) \quad k\Phi' \int_{\gamma-\beta}^{\gamma-k} \frac{d\eta}{(\gamma_1-\eta)^2} \int_0^{\frac{\varepsilon^2}{\gamma_1-\eta}} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} \left| s^2 - 3s + \frac{3}{4} \right| ds \\ + k\Phi'' \int_{\gamma-\beta}^{\gamma-k} \frac{d\eta}{(\gamma_1-\eta)^2} \int_{\frac{\varepsilon^2}{\gamma_1-\eta}}^{\frac{\alpha^2}{\gamma_1-\eta}} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} \left| s^2 - 3s + \frac{3}{4} \right| ds$$

en désignant par 2α la plus grande des distances de P aux côtés verticaux du rectangle, par 2ε le demi-côté horizontal d'un rectangle intérieur contenant P, que nous ferons tendre vers zéro avec k (*cf.* § 8, *fig.* 5), par Φ' et Φ'' les valeurs maxima de $|\varphi|$ dans les deux domaines d'intégration.

Le premier terme de cette expression admet comme limite supérieure

$$k\Phi' \int_{\gamma-\beta}^{\gamma-k} \frac{d\eta}{(\gamma_1-\eta)^2} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} \left| s^2 - 3s + \frac{3}{4} \right| ds$$

et nous avons vu plus haut que ceci est infiniment petit avec k , quand Φ' l'est aussi.

Pour étudier le second terme de (39), remarquons que l'on peut toujours déterminer un nombre H tel que, s_0 et s_1 étant deux valeurs quelconques appartenant à l'intervalle $(0, \infty)$, on ait

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} \left| s^2 - 3s + \frac{3}{4} \right| ds < H \int_{s_0}^{s_1} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds.$$

Dès lors, le second terme de (39) sera inférieur à

$$k\Phi'' \int_{\gamma-\beta}^{\gamma-k} \frac{d\eta}{(\gamma_1-\eta)^2} \int_{\frac{\varepsilon^2}{\gamma_1-\eta}}^{\frac{\alpha^2}{\gamma_1-\eta}} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds < (\alpha^2 - \varepsilon^2) \Phi'' \frac{k}{\varepsilon} \int_{\gamma-\beta}^{\gamma-k} \frac{e^{-\frac{\varepsilon^2}{\gamma_1-\eta}}}{(\gamma_1-\eta)^{\frac{5}{2}}} d\eta,$$

en remarquant que $\frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}$ décroît constamment. En posant $\gamma_1 - \eta = \varepsilon^2 \theta$, nous obtenons comme limitation

$$(\alpha^2 - \varepsilon^2) \Phi'' \frac{k}{\varepsilon^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{\theta}}}{\theta^{\frac{5}{2}}} d\theta,$$

et, si $\frac{k}{\varepsilon^{\frac{5}{2}}}$, est infiniment petit, ceci tend vers zéro.

Si nous passons maintenant à l'étude de

$$\frac{1}{h} \left[\frac{\partial Z_2}{\partial x} (x+h, y) - \frac{\partial Z_2}{\partial x} (x, y) \right],$$

nous le décomposerons encore par la formule (37), dans laquelle les deux premiers termes tendent vers zéro, et le troisième se met sous la forme (38). Dans cette dernière expression on traite le terme $\frac{h}{2} \iint_{\bar{z}}$ par la méthode que nous venons d'employer à l'instant, et qui montre aussi aisément qu'il tend vers zéro avec h .

Avec ce genre de continuité, nous sommes donc encore conduits à l'équation (38') qui nous donne les mêmes conclusions.

En définitive, nous avons obtenu le résultat suivant : *quand la fonction $f(\xi, \eta)$ est continue au sens des conditions (A_1) ou (A_2) ou (A_3) , le symbole $\delta'Z$ a un sens et est égal à $f(x, y)$, si k est du deuxième ordre par rapport à h .*

Si, par conséquent, dans une région $\mathcal{R}$, f satisfait aux conditions (A_1) ⁽¹⁾, sauf en un certain nombre de points ou sur certaines lignes, où seule la continuité subsiste, nous pouvons déterminer dans cette région des solutions régulières de l'équation, sauf aux points envisagés où les dérivées cesseront d'exister, mais satisferont néanmoins à la relation $\delta z = f$, *leurs parties infinies se détruisant*. En effet, étant donné un tel point P_0 , les symboles δz et $\delta' z$ coïncident dans le voisinage de ce point, et, comme $\delta' z$ est continu dans $\mathcal{R}$, $\delta' z_{P_0}$ est donc la limite de δz_P quand P tend vers P_0 .

(1) Nous disons ici *aux conditions (A_1)* , parce que, si l'on veut avoir ce que nous avons appelé une solution régulière de l'équation, il faut que f soit continue en x, y . Mais il est évident que, si l'on ne se préoccupe que de l'existence des dérivées en chaque point, ce que nous disons dans la suite du paragraphe est également vrai dans le cas des conditions (A_2) ou (A_3) .

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES AUX LIMITES POUR LES ÉQUATIONS
DU TYPE PARABOLIQUE.

I. — L'équation linéaire à deux variables du type parabolique.

L'équation linéaire à deux variables du type parabolique peut se mettre sous la forme

$$(E) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

a, b, c, f étant des *fonctions continues* de x, y , dans une région $\mathfrak{A}$. La première hypothèse qui s'impose est de supposer que b a un *signe constant*, car nous avons vu que, dans le cas où $a = c = 0$ et $b = \pm 1$, la disposition du contour portant les données des problèmes aux limites changeait suivant que b était égal à $+1$ ou à -1 .

17. FORME CANONIQUE. — Faisons dans (E) le changement de variables défini par

$$x' = x'(x, y), \quad y' = \pm y.$$

Il vient

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} + \left(\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} + a \frac{\partial x'}{\partial x} + b \frac{\partial x'}{\partial y}\right) \frac{\partial z}{\partial x'} \pm b \frac{\partial z}{\partial y'} + cz + f = 0.$$

Nous prendrons le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que b sera négatif ou positif, et nous déterminerons x' par la condition

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 = |b|, \quad x' = \int |b|^{\frac{1}{2}} dx.$$

Nous supposons, pour la possibilité de ce changement de variable et de l'inversion qui en résulte, que b admet dans $\mathfrak{A}$ des dérivées du premier ordre continues et qu'il ne s'annule jamais.

Nous obtenons ainsi le type canonique suivant, que nous utiliserons

dans les calculs

$$(c) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + c z + f,$$

en supprimant maintenant les accents ⁽¹⁾. a, c, f sont supposés *continus* dans la région envisagée.

Cas de réduction à des formes plus simples. — Si nous posons $z = uv$, l'équation (c) devient (cf. H. BLOCK cité dans l'Introd.)

$$v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(-2 \frac{\partial v}{\partial x} + av \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + cv \right) u + f.$$

Nous voyons donc que, en déterminant v par l'équation

$$(40) \quad 2 \frac{\partial v}{\partial x} = av, \quad v = e^{\int \frac{a}{2} dx},$$

nous pouvons *faire disparaître le terme en $\frac{\partial u}{\partial x}$* . Ceci suppose que u admet *des dérivées partielles du premier ordre* en chaque point de $\mathfrak{A}$. Chaque fois que la chose sera possible, il conviendra d'effectuer cette réduction, car la forme ainsi trouvée ($a = 0$) est, comme nous le verrons, *très commode pour les calculs d'approximations successives*. Mais ce n'est pas elle que nous utiliserons dans la théorie générale, car elle ne se prête pas aux généralisations que nous avons en vue.

Ayant annulé le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial x}$, peut-on faire disparaître également, par un choix convenable de v , le terme en u , de manière à obtenir la forme $\delta u = f$? Il suffit pour cela que l'on ait

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + cv = 0,$$

ce qui s'écrit, en tenant compte de l'équation (40),

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{a^2}{4} - c \right) v;$$

(¹) Lorsque b est fonction de y seul, il est plus simple d'effectuer le changement de variable $y' = -\int \frac{dy}{b}$.

on a donc

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{a}{2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{a^2}{4} - c.$$

D'où la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - a \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial y} - 2 \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

qui sera réalisée en particulier si a est constant et c fonction de y . On posera dans ce cas

$$v = e^{\frac{ax}{2} - \frac{a^2 y}{4} - \int c dy},$$

d'où la réduction immédiate de l'équation (E) à la forme $\delta z = f$, si $a = \text{const.}$, b et $c = \text{fonctions de } y$.

18. PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE (E'). — Dans l'équation

$$(E') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

supposons que a, b, c soient, dans une région $\mathcal{R}$, située tout entière à distance finie, des fonctions continues. Nous allons montrer dans quels cas toute solution, *régulière* dans une région $\mathcal{R}$, ne peut admettre à l'intérieur de $\mathcal{R}$, ni *maximum positif*, ni *minimum négatif*; suivant les cas, il conviendra d'ailleurs d'apporter quelques précisions au sujet du sens des mots *maximum* et *minimum*. Nous allons nous inspirer pour cela des méthodes suivies par M. Picard dans l'étude du type elliptique.

Dans le cas particulier où c est négatif dans $\mathcal{R}$, l'impossibilité d'un maximum positif, *propre* ou *impropre*, est immédiate : dans l'hypothèse contraire, on aurait, en effet, au point envisagé

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad cz < 0,$$

et l'équation (E') ne pourrait être vérifiée. De même, un minimum négatif ne peut avoir lieu, la solution $-z$ ayant alors un maximum positif.

La remarque précédente est vraie quel que soit b . Nous pouvons

même lui donner une forme plus précise : si en un point $P(x_0, y_0)$, b est négatif ou nul et c négatif, z ne peut prendre une valeur positive supérieure ou égale (ou une valeur négative inférieure ou égale) aux valeurs prises aux points voisins de P pour lesquels $y \leq y_0$; en d'autres termes, il ne peut y avoir de maximum positif (ou de minimum négatif) propre ou impropre, *relativement aux points d'ordonnée inférieure ou égale à celle de P* . Et, en effet, dans l'hypothèse contraire, on aurait en P

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad b \frac{\partial z}{\partial y} \leq 0, \quad cz < 0.$$

Si b est positif ou nul, on obtient des propriétés analogues pour la région où $y \geq y_0$.

Les résultats précédents montrent que, si c est négatif et $b \leq 0$ dans la région $\mathcal{A}$, à l'intérieur d'un contour (C) ⁽¹⁾ situé dans $\mathcal{A}$ une solution z de (E') satisfait en P à l'inégalité $-M' < z_p < M$, $-M'$ et M désignant la valeur minimum négative et la valeur maximum positive de z sur la partie du contour située *au-dessous* de la caractéristique passant par P .

De là résulte, avec les hypothèses faites sur b et c , *l'unicité* d'une solution régulière de (E) prenant des valeurs données sur (C) , toute solution régulière de (E) qui s'annule sur (C) étant nulle à l'intérieur. Mais ceci est vrai quel que soit c , à la condition de supposer *b négatif et non nul quand c est positif ou nul*. En effet, la substitution $z = u e^{K(y-y_0)}$ donne une équation en u de même forme que (E') , mais dans laquelle le coefficient c est remplacé par $bK + c$; on peut donc choisir K de telle façon que $bK + c$ soit négatif dans $\mathcal{A}$: d'où l'unicité de u et par suite de z .

Il est facile d'avoir, quand c peut être ≥ 0 , une *limitation de z à l'intérieur de (C)* .

Si, en effet, y_1 est l'ordonnée de la caractéristique inférieure de (C) , on a certainement $-M' e^{K(y_0-y_1)} < u_p < M e^{K(y_0-y_1)}$. Donc

$$-M' e^{K(y_0-y_1)} < z_p < M e^{K(y_0-y_1)},$$

puisque $z_p = u_p$.

(1) Dans ce paragraphe, le sens du mot contour (C) peut être étendu : il suffit que (C) soit continu, simple et tel qu'il forme, avec toute caractéristique qui le coupe, un ou plusieurs contours continus fermés sans point double.

Ceci nous montre que la propriété, établie plus haut, sur l'impossibilité d'un maximum positif aux points où c est négatif, est vraie également si c est nul, mais reste ≤ 0 dans le voisinage. Mais, cette fois, le mot maximum est pris au sens propre et b doit être supposé négatif et non nul. En effet, si l'on applique l'inégalité précédente à un petit contour (C) contenant P, le nombre K peut être pris aussi petit qu'on le veut, ce qui montre que z_p est $\leq M$, et, par suite, qu'un maximum positif propre est impossible.

Il résulte de ce que nous venons de voir que, si b est négatif, une solution régulière prenant des valeurs positives sur un contour (C) ne peut devenir négative à l'intérieur de (C), mais elle peut fort bien s'y annuler. Dans le cas où $c \equiv 0$, il existe une propriété plus précise : en un point P on a $m \leq z_p \leq M$, M et m étant le maximum et le minimum de z sur la portion de (C) située au-dessous de la caractéristique passant par P. Ceci résulte de ce que $M - z$ et $z - m$ sont solutions et prennent sur le contour des valeurs positives ou nulles.

Nous allons dorénavant, dans ce Chapitre, supposer b essentiellement négatif. Nous reviendrons plus tard sur le cas où b peut s'annuler. Nous avons montré l'unicité de toute solution régulière de l'équation (E) prenant des valeurs données sur (C) : nous allons former cette solution après avoir ramené l'équation à la forme (c).

19. L'ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE DU PROBLÈME AUX LIMITES. — Soit donc l'équation (c) : en lui appliquant la formule (F) du paragraphe 4, nous avons

$$(41) \quad 2\sqrt{\pi} z(x, y) = - \int_{M_1 A_1 + A_2 M_2} z(\xi, \eta) \frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta + \int_{A_1 A_2} G z d\xi \\ - \int \int_{S_y} \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} + c(\xi, \eta) z(\xi, \eta) + f(\xi, \eta) \right] G d\xi d\eta,$$

ce qui peut s'écrire

$$(e) \quad z(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z(\xi, \eta)}{\partial \xi} + c(\xi, \eta) z(\xi, \eta) \right] G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta + \zeta(x, y),$$

$\zeta(x, y)$ étant la solution de $\partial z = f$ répondant aux conditions aux

limites données : z égal à $\Phi_1(y)$ et $\Phi_2(y)$ sur C_1 et C_2 , à $\Phi(x)$ sur A_1, A_2 (nous supposons l'ordonnée de A_1, A_2 nulle).

Nous voyons donc que la solution cherchée satisfait à une *équation intégrro-différentielle* d'un type facile à résoudre, car une des limites de l'intégrale est variable. Une fois la solution formée, il suffira, d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe 9, que $a \frac{\partial z}{\partial x} + cz$ et f satisfassent aux conditions (A) en tout point intérieur à S.

Supposons que a, c, f vérifient ces conditions. Il résulte de l'équation (41) que z a la forme

$$z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{s_y} \left(a \frac{\partial z}{\partial \xi} + cz + f \right) U_P d\xi d\eta + \psi(x, y),$$

où ψ admet des dérivées en tout point P intérieur à S : l'intégrale $\int \int_{s_y}$ n'est autre qu'une fonction Z [formule (23), § 8] et par suite, en ce point P, il résulte de l'étude des accroissements de Z et $\frac{\partial Z}{\partial x}$ (§ 13), que z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ satisfont aux conditions (A). Il en est donc de même de $a \frac{\partial z}{\partial x} + cz$ et, par conséquent, z vérifie bien l'équation (c).

Pour calculer la solution de l'équation (c), nous procéderons par *approximations successives*, en posant

$$z = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \\ z_0 = \zeta(x, y), \quad \dots, \quad z_n = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_s \left(a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + cz_{n-1} \right) G d\xi d\eta.$$

Faisons ici l'hypothèse que les données $\Phi_1(y), \Phi_2(y)$, sur C_1 et C_2 , admettent en y des *accroissements d'ordre non nul*. Si cet ordre est supérieur à $\frac{1}{2}$, et si $\Phi'(x)$ est continue (§ 5-6), ζ et $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ sont continus sur (C). Si Φ n'a pas de dérivée, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ existe sur C_1 et C_2 , et, d'une façon générale, on a dans S, bords compris (voir la Note à la fin du § 5 ou bien la Note sur le contour rectangulaire),

$$(42) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\bar{\zeta}}{\sqrt{y}},$$

$\bar{\zeta}$ étant bornée et continue. Le second terme de la suite d'approximations est

$$z_1 = - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} \left(a \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + c \zeta \right) G \, d\xi \, d\eta,$$

qui, d'après les propriétés des intégrales $I_{0\frac{1}{2}}$ et la forme de la fonction G [formule (13)]

$$G(\xi, \eta; x, y) = g \, U(\xi, \eta; x, y),$$

est une fonction continue dans S , et d'ailleurs s'annule sur (C) .

L'intégrale

$$\int \int_{S_y} \left(a \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + c \zeta \right) V \, d\xi \, d\eta$$

est également continue dans S , bord compris : d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe 12, il en est de même de la dérivée $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, qui est donnée en tout point de S ou de (C) par la formule

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} \left(a \frac{\partial \zeta}{\partial x} + c \zeta \right) \frac{\partial G}{\partial x} \, d\xi \, d\eta.$$

19*. Ce que nous venons de dire montre que z_1 et $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ sont bornés et continus dans S , bord compris. Voyons si cette conclusion subsiste au cas où les accroissements de Φ_1 et Φ_2 sont d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$. Il faut alors modifier la formule (42) et l'écrire [formule (20), § 6*]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\zeta_1}{|x - X_1(y)|^\beta} + \frac{\zeta_2}{|x - X_2(y)|^\beta} + \frac{\bar{\zeta}}{\sqrt{y}}.$$

Il est manifeste que z_1 sera continu dans S et s'annulera sur (C) : il suffit de l'écrire pour s'en convaincre. Quant à $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, si nous y remplaçons $\frac{\partial G}{\partial x}$ par sa valeur, nous savons qu'il nous suffit, pour étudier ce

terme dans S et sur (C), d'envisager les intégrales obtenues en remplaçant $\frac{\partial G}{\partial x}$ par V, soit par exemple

$$I = \int \int \frac{\zeta_1(\xi, \eta)}{|\xi - X_1(\eta)|^\beta} V(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta.$$

Cette intégrale aura évidemment un sens tant que P ne viendra pas sur C₁. Voyons ce que nous obtiendrons en faisant $x = X_1(y)$: il vient

$$\bar{I} = \int \int \frac{\zeta_1}{|\xi - X_1(\eta)|^\beta} \frac{X_1(y) - \xi}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(X_1(y) - \xi)^2}{4(y - \eta)}} d\xi d\eta.$$

Or

$$|X_1(y) - \xi| \leq |X_1(y) - X_1(\eta)| + |\xi - X_1(\eta)|.$$

D'où, en tenant compte de la condition (Γ) imposée au contour (C),

$$|\bar{I}| < \int \int \frac{K d\xi d\eta}{|\xi - X_1(y)|^\beta |y - \eta|^{1-\frac{\alpha}{2}}} + \int \int \frac{|\xi - X_1(\eta)|^{1-\beta}}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(X_1(y) - \xi)^2}{4(y - \eta)}} d\xi d\eta.$$

La première intégrale a évidemment un sens. Dans la seconde nous avons (1)

$$|\xi - X_1(\eta)|^{1-\beta} \leq |X_1(y) - X_1(\eta)|^{1-\beta} + |\xi - X_1(y)|^{1-\beta},$$

et l'on voit que cette intégrale est plus petite qu'une somme de deux intégrales du type I_{pq} qui ont un sens toutes les deux.

Mais, si nous voyons ainsi que $\bar{I}$ a un sens, il ne s'ensuit pas que I soit une fonction continue en tout point du bord. Pour le voir il suffirait de montrer que cette intégrale est uniformément convergente. Pour ne pas allonger cette analyse, nous ne donnerons pas le détail de la démonstration. Pour établir ce point il conviendrait d'effectuer une

(1) En effet, si λ est un nombre inférieur ou égal à un, a et b deux nombres positifs, $a \geq b$, on a, en utilisant la formule des accroissements finis,

$$(a + b)^\lambda = a^\lambda \left(1 + \frac{b}{a}\right)^\lambda \leq a^\lambda \left(1 + \frac{\lambda b}{a}\right) \leq a^\lambda \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^\lambda\right] = a^\lambda b^\lambda;$$

si λ est > 1 on peut écrire $(a + b)^\lambda < 2^\lambda (a^\lambda + b^\lambda)$ (cf. LEVI, *loc. cit.*, p. 235).

décomposition de l'aire d'intégration par la caractéristique d'ordonnée y' définie comme au paragraphe 2, formule (5).

20. Il résulte en définitive des considérations précédentes que si Φ_1 et Φ_2 admettent des accroissements d'ordre non nul, z_1 et $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ sont des fonctions bornées et continues en tout point de S , bord compris et z_1 s'annule sur (C) .

La suite des approximations se poursuit alors aisément. Soit, en tout point de S ou de (C) ,

$$\begin{aligned} |a| &< A, & |c| &< C, \\ |z_1| &< M, & \left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| &< M. \end{aligned}$$

Nous pourrions alors écrire, en utilisant les résultats du paragraphe 12,

$$\begin{aligned} |z_2| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial z_2}{\partial x} \right| &< LM (A + C) B\left(\frac{1}{2}, 1\right) y^{\frac{1}{2}} = M \frac{L(A + C)\sqrt{\pi y}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}, \\ |z_3| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial z_3}{\partial x} \right| &< ML^2(A + C)^2 B\left(\frac{1}{2}, 1\right) B\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) y = M \frac{[L(A + C)\sqrt{\pi y}]^2}{\Gamma(2)}, \end{aligned}$$

et, d'une manière générale ⁽¹⁾, z_n étant d'ailleurs nul sur (C) ,

$$|z_n| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| < M \frac{[L(A + C)\sqrt{\pi y}]^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont ainsi représentés par deux séries absolument et uniformément convergentes de fonctions continues à l'intérieur de S , et même au bord en ce qui concerne z . D'après ce que nous avons dit plus haut, z est donc bien la solution cherchée, prenant sur (C) les valeurs données, car nous savons d'autre part que cette solution est unique.

⁽¹⁾ Il est à peine besoin de faire remarquer combien plus simple est toute cette étude quand $a = 0$. On obtient alors, sans faire d'autre hypothèse sur les données que celles de la continuité, une série de comparaison entière en y .

21. EXAMEN DES HYPOTHÈSES SUR LES COEFFICIENTS, LE CONTOUR ET LES DONNÉES. — Dans ce qui précède nous avons supposé *que le contour satisfaisait à la condition* (I), *que* Φ_1 *et* Φ_2 *admettaient des accroissements d'ordre non nul, et que les coefficients de l'équation vérifiaient les conditions* (A) *à l'intérieur de* S.

Dans le cas où X_1 et X_2 sont *dérivables*, le changement de variable

$$(V) \quad x' = \frac{l[x - X_1(y)]}{X_2(y) - X_1(y)}$$

dont nous avons déjà parlé dans l'Introduction, ramène l'équation (E) à une équation de même forme et le contour à un *contour rectangulaire* porté par les droites $x' = 0$, $x' = l$, $y = 0$.

Nous pourrions alors profiter des facilités qui s'offrent dans ce cas (*voir* la formation de la fonction de Green dans la Note).

Voyons maintenant dans quel cas on peut intégrer l'équation sans faire sur les données d'autre hypothèse que *celle de la continuité*.

Nous avons dit que, dans ce cas, $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ peut se mettre sous la forme [*cf.* formule (15) § 3*]

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\xi_1}{x - X_1(y)} + \frac{\xi_2}{x - X_2(y)} + \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{y}}.$$

Si nous voulons que z , et $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ soient *bornés dans* S, *contour compris*, il nous faudra faire quelque hypothèse sur la valeur du coefficient a au voisinage de C_1 et C_2 . Il est à remarquer que, si nous supposons que a soit une fonction *continue et monotone* de x dans un intervalle arbitrairement petit ayant pour borne l'abscisse x_0 d'un point de C_1 ou C_2 , les deux intégrales

$$I = \int \int a \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}} G \, dS, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = \int \int a \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}} \frac{\partial G}{\partial x} \, ds,$$

ont un sens et restent bornées en tout point intérieur à S. On le voit

aisément en remarquant que $\int_{x_0}^x \frac{\partial \xi}{\partial x} \, d\bar{\xi} = \xi - \xi_0$.

Or, quand une intégrale $\int_{x_0}^x \varphi(x) dx$ a un sens, quelle que soit la nature de φ pour $x = x_0$, l'intégrale $\int_{x_0}^x f \varphi dx$ a aussi un sens, si f est monotone et continue au voisinage de $x = x_0$, et sa valeur absolue est inférieure à $F \left| \int_{x_0}^x \varphi(x) dx \right|$, F étant le maximum de $|f|$ dans l'intervalle (x_0, x) . On déduit aisément de là que I est une fonction bornée et continue dans S , bords compris. Quant à la dérivée $\frac{\partial I}{\partial x}$, elle est continue à l'intérieur de S , mais ne reste pas bornée quand P tend vers le bord : il faudrait donc étudier ce qui se passe dans ce cas. Nous nous bornerons à signaler simplement cette analyse qui donnerait sans doute pour $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ une limitation de la forme

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| < \frac{L_1 \gamma^{\frac{1}{2}}}{|x - X_1(y)|} + \frac{L_2 \gamma^{\frac{1}{2}}}{|x - X_2(y)|},$$

d'où l'on déduirait aisément de proche en proche que les séries $\sum z_n$ et $\sum \frac{\partial z_n}{\partial x}$ convergent uniformément dans toute région intérieure à S , la série $\sum z_n$ convergeant aussi sur le contour.

Donc, même avec l'hypothèse de la simple continuité des données, il semble qu'on puisse former la solution.

Lorsque $\frac{\partial a}{\partial x}$ existe dans S , la détermination de cette solution se simplifie, ainsi que nous allons le voir.

22. RÉSOLUTION DU PROBLÈME AUX LIMITES PAR LE MOYEN D'UNE ÉQUATION INTÉGRALE ORDINAIRE. — Reprenons l'équation

$$z(x, y) = - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} \left(a \frac{\partial z}{\partial \xi} + cz \right) G d\xi d\eta + \zeta(x, y).$$

Désignons par $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ les domaines limités respectivement par

$M'_1 A_1 A_2 M'_2$ et $M_1 M'_1 M'_2 M_2$ (fig. 1). Nous posons donc

$$(43) \quad \begin{aligned} \iint \alpha \frac{\partial z}{\partial \xi} G \, dS &= \iint_{\Gamma'} + \iint_1, \\ \iint_1 &= - \iint_1 z \frac{\partial \alpha G}{\partial \xi} \, dS + \int_{M'_1 A_1 + A_2 M'_2} \alpha G z \, d\eta. \end{aligned}$$

L'intégrale curviligne est nulle puisque G est nul au bord. Si $M'_1 M'_2$ tend vers $M_1 M_2$, $\iint_{\Gamma'}$ tend vers zéro et $\iint z \frac{\partial \alpha G}{\partial \xi} \, dS$ tend vers

$$\iint_{S_y} z \frac{\partial \alpha G}{\partial \xi} \, ds.$$

Cette intégrale est, d'après le paragraphe 12, une fonction continue de (x, y) . Nous obtenons donc en définitive l'équation intégrale

$$(e') \quad z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} \left[\frac{\partial \alpha(\xi, \eta) G}{\partial \xi} - \alpha(\xi, \eta) G \right] z(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta + \zeta(x, y).$$

Nous parlerons plus loin de sa résolution. Pour l'instant, supposons que nous ayons une fonction *continue*, solution de l'équation (e') : vérifie-t-elle l'équation (e) avec les conditions aux limites données ? Une démonstration est nécessaire, car nous avons admis, dans (43), que $\iint_{\Gamma'}$ tendait vers zéro et il faudrait le justifier : or z n'est pas dérivable au bord. Aussi, au lieu de remonter de l'équation (e') à l'équation (e), nous allons passer directement de (e') à l'équation (e).

Tout d'abord, z prend bien au bord les valeurs données, c'est-à-dire que l'intégrale double de (e') est alors nulle. En effet, d'après le raisonnement que nous avons donné dans le paragraphe 4, on voit que $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ est nul quand P est au bord et Π dans S . Par suite, si l'on isole C_1 et C_2 du reste de l'aire par deux bandes très étroites, les intégrales doubles étendues à ces deux bandes seront très petites, d'après la formule (12) (§ 4*), et l'intégrale étendue au reste sera nulle : donc l'intégrale totale doit être nulle.

Montrons maintenant que l'équation (e) est vérifiée par z en tout point $P(x, y)$ intérieur à S . Tout d'abord, nous allons établir que z admet pour un accroissement h de x , un accroissement d'ordre inférieur à un . Soit en effet un petit rectangle R , contenant le

point $P(x, y)$ ainsi que le point $P'(x+h, y)$. Nous avons $G = U - H$, H étant déterminée comme solution de $\delta z = 0$: soit $\mathfrak{K}_1$ la partie du noyau de l'équation (e') relative à U , $\mathfrak{K}_2$ la partie relative à $-H$, $\mathfrak{K}$ le noyau total. Posons $z = z' + \zeta$, donc

$$(44) \quad z' = \iint_S \mathfrak{K} z \, dS = \iint_R \mathfrak{K}_1 z \, dS + \iint_R \mathfrak{K}_2 z \, dS + \iint_{S-R} \mathfrak{K} z \, dS,$$

H et $\frac{\partial H}{\partial \xi}$ admettent en (x, y) des dérivées de tous ordres à l'intérieur de S ; la seconde intégrale est donc dérivable par rapport à x ; la troisième aussi, puisque le domaine d'intégration ne contient pas le point (x, y) . Quant à la première, nous avons vu au paragraphe 15 qu'elle admettait un accroissement d'ordre voisin de un . Enfin $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ existe à l'intérieur de S . Donc z a bien la propriété énoncée.

Mais alors, puisque a satisfait aux conditions (A), $\frac{\partial z}{\partial x}$ existe en tout point intérieur à S , car la première intégrale de la formule (44) admet une dérivée par rapport à x ; les autres également. Nous pouvons alors effectuer la transformation

$$\begin{aligned} \iint_R \mathfrak{K}_1 z \, dS &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_R \left(\frac{\partial a U}{\partial \xi} - c U \right) z \, dS \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \iint_R \left(a \frac{\partial z}{\partial \xi} + c z \right) U \, dS + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int a U z \, d\eta. \end{aligned}$$

Remplaçant le premier terme de z' par sa nouvelle expression, nous pouvons maintenant calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$, dont nous avons démontré l'existence, par la formule de Leibniz, et la formule ainsi obtenue permet de voir, par la même analyse, que, si c satisfait à la condition (A₂), $\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}$ existe dans S . On s'assurerait de même de l'existence de $\frac{\partial z'}{\partial y}$, et l'on aurait des démonstrations analogues, à l'aide des formules du paragraphe 15, si c satisfaisait aux conditions (A₁) ou (A₃).

Si maintenant nous formons $\delta z = \delta z' + \delta \zeta$, tous les termes de $\delta z'$ sont nuls, sauf celui qui provient de la première intégrale du second membre de (44), et qui est égal à $a \frac{\partial z}{\partial x} + c z$. D'autre part $\delta \zeta = f$. Donc, en tout point intérieur à S ,

$$\delta z = a \frac{\partial z}{\partial x} + c z + f. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

25. Revenons maintenant à la *résolution* de l'équation (c'). Opérant toujours par approximations successives, nous poserons

$$(45) \quad z_0 = \zeta, \quad \dots, \quad z_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} \left(\frac{\partial a G}{\partial \xi} - c G \right) z_{n-1} d\xi d\eta.$$

L'emploi de la formule (12) permet, sans aucune difficulté, de déterminer une série majorante, qui, à cause du terme $\frac{\gamma_1}{(y-\eta)^{1-\frac{\alpha}{2}}}$, est

de la forme $\sum \frac{(N_1 \frac{\alpha}{2})''}{\Gamma(1 + \frac{n\alpha}{2})}$. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant.

Auparavant, il convient de résumer les hypothèses faites dans le présent paragraphe : *a* admet une dérivée bornée et intégrable en tout point de S , bord compris; les coefficients a , c et f sont continus dans S , bornés au bord, et satisfont aux conditions (A) à l'intérieur; les données sont continues; le contour satisfait à la condition (Γ). Il va sans dire que la continuité des coefficients en x , y ne sert qu'à assurer la régularité de la solution, au sens où nous l'avons entendu. Si a , c , f n'étaient pas continus, toutes les autres conditions étant vérifiées, z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ seraient continus dans S , mais $\frac{\partial z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ne le seraient pas, bien qu'existant en chaque point.

La *limitation des dérivées de z* se déduirait aisément du raisonnement que nous avons fait plus haut et qui permet de calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ au moyen de la fonction z elle-même par une sorte d'itération. On trouverait ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\zeta_1}{x - X_1(y)} + \frac{\zeta_2}{x - X_2(y)} + \frac{\zeta_3}{\sqrt{y}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\zeta'_1}{[x - X_1(y)]^2} + \frac{\zeta'_2}{[x - X_2(y)]^2} + \frac{\zeta'_3}{\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

Mais, quoi qu'il en soit de l'allure de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ vers les bords, il est manifeste que, dans toute région complètement intérieure à S , z , $\frac{\partial z}{\partial x}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ seront limités en fonction linéaire de la valeur absolue maxima M des données sur le contour. Si $lM + n$ est la forme de cette limitation, le coefficient n ne dépend que de f .

24. REMARQUES SUR L'EMPLOI DE LA FONCTION DE GREEN. — La *fonction de Green* permet de ramener la résolution du problème aux limites que nous nous sommes proposé à celle d'une équation intégrale ou intégral-différentielle. Mais son emploi n'est nullement indispensable et serait même *inutile*, dans certains cas où l'on voudrait se borner à *démontrer l'existence de la solution*.

Nous avons dit plus haut comment, en utilisant la formule (12), on pouvait trouver une série majorante pour z , entière en $y^{\frac{\alpha}{2}}$. En réalité il existe une série de comparaison qui ne dépend pas de α , c'est-à-dire du contour. Il y a en effet une façon très simple d'étudier les intégrales de la forme $\int \int_{S_y} \frac{\partial G}{\partial \xi} f d\xi d\eta$, sans s'appuyer sur les calculs de limitation du paragraphe 4*. Pour ne pas trop allonger cette étude, nous ne donnerons ce procédé que dans l'espace : il s'appliquerait ici sans modification essentielle.

Pour le moment, nous allons voir comment on peut majorer les approximations sans utiliser la fonction de Green. Dans la relation (45) qui donne z_n , posons dans le second membre

$$\int \int_{S_y} = \int \int_{S'_y} + \int \int_{S_y - S'_y},$$

S'_y désignant le domaine limité par un contour (C') très voisin de (C) . On a (1)

$$\int \int_{S'_y} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S'_y} \left(a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + c z_{n-1} \right) G dS + \int_{(C'_y)} a z_{n-1} G d\eta.$$

Si (C') tend vers (C) , la dernière intégrale s'évanouit, le premier

(1) En admettant l'existence de $\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}$ à l'intérieur de S : ce qui suit montrera que l'existence de cette dérivée est assurée de proche en proche.

membre tend vers $\int \int_{s_y}$: donc la première intégrale du second membre tend aussi vers cette limite; c'est-à-dire que

$$\int \int_{s_y} \left(a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + c z_{n-1} \right) G d\xi d\eta$$

a un sens. Donc, en tout point P (x, y) intérieur à S, z_n est solution de

$$\delta z_n = a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + c z_{n-1},$$

et nous savons d'ailleurs que z_n s'annule sur (C). Nous pouvons donc écrire

$$(46) \quad z_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{s_y} \left(\frac{\partial a U}{\partial \xi} - c U \right) z_{n-1} d\xi d\eta - \bar{z}_n,$$

$\bar{z}_n$ étant la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les mêmes valeurs que l'intégrale. Il suffit alors de se reporter au raisonnement du paragraphe 20, pour voir de proche en proche que z_n est majoré par le terme $\frac{(N\gamma^{\frac{1}{2}})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

Nous voyons donc, d'après cela, que, pour démontrer l'existence de la solution sans se servir de la fonction de Green, il suffirait de faire une suite d'approximations de la forme (46), ce qui donnerait, par sommation, l'équation

$$z = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{s_y} \left(\frac{\partial a U}{\partial \xi} - c U \right) z d\xi d\eta - \bar{z},$$

d'où l'on passerait directement à l'équation (e'), comme dans le paragraphe précédent.

Il est clair que, au point de vue de la résolution effective d'un problème aux limites, un tel procédé serait fort incommode, puisque, à chaque approximation, il faudrait résoudre un nouveau problème aux limites pour l'équation $\delta z = 0$. Au contraire, quand nous nous placerons au point de vue d'un théorème d'existence, nous aurons parfois avantage à nous passer de la fonction de Green.

25. THÉORÈME SUR LES SÉRIES DE SOLUTIONS. — Soit un *contour continu simple* $\mathfrak{C}$ (courbe de M. Jordan), ouvert du côté des y positifs, coupé en un nombre pair de points par les caractéristiques, de façon à former avec toute caractéristique qui le coupe *un ou plusieurs contours continus fermés sans points multiples*, limités supérieurement par cette caractéristique. Tout point intérieur à l'un de ces contours relatifs à la caractéristique d'ordonnée maxima sera dit *intérieur à* $\mathfrak{C}$.

Envisageons une série

$$(47) \quad z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

de fonctions, dont les termes sont solutions de l'équation

$$(\mathcal{C}') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + c z,$$

en tout point *intérieur* à $\mathfrak{C}$, et qui *converge uniformément* sur $\mathfrak{C}$. Pour $n > N$, on aura donc sur $\mathfrak{C}$, quel que soit p ,

$$|z_n + z_{n+1} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Or la somme $z_n + \dots + z_{n+p}$ est solution de l'équation $(\mathcal{C}')$ à l'intérieur de $\mathfrak{C}$ et, d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe 18, en tout point intérieur à Γ , on aura

$$(48) \quad |z_n + z_{n+1} + \dots + z_{n+p}| < K\varepsilon,$$

K étant un nombre fixe dépendant des coefficients et des dimensions du contour. Or, étant donnée une région $\mathfrak{A}$ *intérieure* à $\mathfrak{C}$, nous pourrions tracer un contour (C) contenant $\mathfrak{A}$ à son intérieur, et sur lequel l'inégalité (48) sera vérifiée. D'après ce que nous avons dit plus haut, en tout point de $\mathfrak{A}$ nous pourrions écrire

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} + \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z_{n+p}}{\partial x} \right| < K_1 \varepsilon,$$

K_1 étant un nouveau coefficient indépendant de n et de p . On aura une inégalité analogue pour les dérivées en y et pour la dérivée seconde en x . Par suite les séries formées par les dérivées en question des termes de la série (47) convergeront uniformément dans $\mathfrak{A}$ et la série (47) représentera dans cette région une solution de l'équation $(\mathcal{C}')$. Nous pouvons donc en définitive énoncer le théorème sui-

vant : étant donné un contour Γ , de l'espèce définie plus haut, *si une série de solutions de l'équation (C') converge uniformément sur Γ , elle converge uniformément dans toute région intérieure et y représente une solution de l'équation (1)*.

Il va sans dire que ce théorème s'applique également à l'équation (E'), § 18, si b garde un signe constant, sans s'annuler.

26. APPLICATION DU THÉORÈME PRÉCÉDENT AU CAS OU LE CONTOUR PRÉSENTE DES SINGULARITÉS ⁽²⁾. — Étant donné un contour (C), il peut se faire que, en certains points isolés, la condition (F) cesse d'être vérifiée, ou bien encore que le segment de caractéristique inférieur se réduise à zéro, c'est-à-dire que A_1 et A_2 coïncident. Les méthodes précédentes alors ne s'appliquent plus. L'ingénieuse méthode indiquée par M. Lévi dans l'étude de l'équation de la chaleur, peut s'étendre à l'équation (C) et permet de tourner la difficulté.

Remarquons tout d'abord que, si les coefficients vérifient les conditions (A) un peu au delà de S, il est toujours possible de former une intégrale particulière de l'équation (C) régulière dans S et sur (C). Il suffit, par exemple, de prendre la solution de l'équation

$$(49) \quad z_0(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{S_y} \left(a \frac{\partial z_0}{\partial \xi} + c z_0 + f \right) U(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta,$$

S' étant un domaine limité par un contour (C'), bien régulier et contenant S. z_0 prend sur le contour donné des valeurs continues et la résolution de l'équation (C) se ramène, par le procédé classique, à celle de l'équation (C') sans terme indépendant : il suffit d'ajouter à z_0 la solution de l'équation (C') prenant au bord les valeurs données, plus les valeurs prises par $-z_0$. On peut même, en ajoutant au second membre de l'équation (49) la solution de $\partial z = 0$ prenant sur A_1, A_2 les valeurs données, obtenir une fonction z_0 y prenant également ces valeurs et avoir ainsi à déterminer une solution de l'équation (C') nulle sur A_1, A_2 (en supposant S' limité inférieurement par A_1, A_2).

Cela posé, si les points A_1 et A_2 coïncident, ou bien si la condi-

⁽¹⁾ Ce théorème est démontré ici avec les hypothèses faites dans le paragraphe 23; on pourrait sans doute le démontrer en supposant simplement que a et c satisfassent aux conditions (A).

⁽²⁾ En ce qui concerne les singularités possibles des coefficients, on pourrait introduire des considérations analogues à celles qui terminent le paragraphe 16.

tion (Γ) cesse d'être vérifiée en A_1 et A_2 , voyons comment on peut obtenir la solution de $(\mathcal{C})$ nulle sur $A_1 A_2$ et prenant sur C_1 et C_2 les valeurs $\Phi_1(\gamma)$, $\Phi_2(\gamma)$ nulles en A_1 et A_2 . Soit $A_1^{(n)} A_2^{(n)}$ une caractéristique coupant C_1 et C_2 en $A_1^{(n)} A_2^{(n)}$ et tendant vers $A_1 A_2$ quand n tend vers l'infini; soit z_n la solution de $(\mathcal{C})$ égale à Φ_1 et Φ_2 sur C_1 et C_2 et se réduisant sur $A_1^{(n)} A_2^{(n)}$ à la fonction linéaire se raccordant avec Φ_1 et Φ_2 en $A_1^{(n)}$ et $A_2^{(n)}$. Les fonctions z_n convergent uniformément vers une fonction limite car, pour toute région $\mathcal{R}$ intérieure à S , on peut choisir n assez grand pour que $|\Phi_1|$ et $|\Phi_2|$ soient inférieurs à ε au-dessous de $A_1^{(n)}$ et $A_2^{(n)}$, et que $A_1^{(n)} A_2^{(n)}$ soit située au-dessous de $\mathcal{R}$; et, dans ces conditions, $|z_{n+p} - z_n|$, qui est nul sur $A_1^{(n)} B_1$, $A_2^{(n)} B_2$ (fig. 1) et inférieur à 2ε sur $A_1^{(n)} A_2^{(n)}$, sera également inférieur à 2ε dans $\mathcal{R}$, quel que soit p , ce qui démontre la proposition. La fonction limite z est, d'après le paragraphe précédent, la solution de $(\mathcal{C}')$ qui prend sur C_1 et C_2 les valeurs données et s'annule sur $A_1 A_2$: c'est donc la fonction cherchée.

Passons maintenant au cas où la condition (Γ) n'est plus vérifiée en un point $M(x_0, y_0)$ de C_1 ou de C_2 ; on partagera (C) en deux contours (C') et (C'') : la caractéristique issue de M limite (C') supérieurement et (C'') inférieurement. Soit $x_0 y_0$ un point de cette caractéristique: si nous déterminons la solution de l'équation $(\mathcal{C})$ dans la région $S_{y-\varepsilon}$, elle sera inférieure en valeur absolue à un nombre fixe quel que soit ε . Donc, si nous envisageons un contour $(\bar{C})$ bien régulier, intérieur à (C') et contenant (x_0, y_0) à son intérieur, et par suite enveloppant un demi-cercle de centre (x_0, y_0) , les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, qui sont limitées en fonction des valeurs de z sur $(\bar{C})$ (voir § 25), resteront bornées dans ce demi-cercle: la formule des accroissements finis montre alors que la différence des valeurs de z en deux points quelconques intérieurs au demi-cercle tend vers zéro avec le rayon de celui-ci, ce qui prouve que $z(x, y)$ a une limite quand le point (x, y) tend vers le point (x_0, y_0) . Cette fonction limite est évidemment continue pour $y = y_0$, et nous sommes ramenés pour le contour (C'') au problème précédent ⁽¹⁾.

(1) Ces considérations permettent également la résolution des problèmes aux limites pour tout contour pouvant être décomposé en une succession de contours (C) .

27. AUTRES PROBLÈMES AUX LIMITES. — Les problèmes aux limites dans lesquels on se donnerait la relation

$$(50) \quad l_i(y) \frac{\partial z}{\partial y} + m_i(y) z = \chi_i(y)$$

sur C_i , et z ou $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur A_1, A_2 , peuvent être ramenés, par l'usage d'une *fonction de Green*, à l'étude d'une équation *intégrale* ou *intégrale-différentielle*; mais il est à remarquer que, si l'on veut obtenir la forme intégrale, la fonction inconnue sera engagée dans une intégrale double et une intégrale simple.

Nous ne nous occuperons pas de la résolution de ces équations : il est à peine besoin de faire remarquer que le point de vue auquel nous nous sommes placés dans le paragraphe 24 fournirait un moyen expéditif de démontrer l'existence de la solution et d'établir la rapidité de convergence des approximations, sans déterminer la fonction de Green.

Sauf dans le cas où l'on se donne partout sur (C) la valeur de $\frac{\partial z}{\partial x}$, la solution est *unique*, si on la suppose continue, ainsi que sa dérivée par rapport à x , même sur (C) [tout au moins sur les portions de (C) où la condition aux limites fait intervenir $\frac{\partial z}{\partial x}$]. En effet, son existence ayant été démontrée, il suffit d'établir que l'équation intégrale homogène obtenue en supposant $z(x, 0) \equiv 0$ et $\chi_i(y) \equiv 0$ n'admet pas de solution bornée non identiquement nulle, ce qui se voit facilement par le procédé d'itération habituellement employé dans ce genre de questions.

II. — Les équations non linéaires à deux variables.

Nous distinguerons deux cas, suivant que l'équation est ou n'est pas linéaire en $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dans le premier cas, l'équation, qui peut alors s'écrire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

b gardant un signe constant, se ramène par un changement de

variables, à la forme

$$(C_1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{ou} \quad \delta z = f(x, y, z, p).$$

Dans le second cas, nous supposons l'équation mise sous la forme

$$(C_2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{ou} \quad r = f(x, y, z, p, q).$$

28. L'ÉQUATION $\delta z = f(x, y, z, p)$. — Nous ferons sur f les hypothèses suivantes : quand le point (x, y) est dans une région $\mathcal{R}$, et que $|z|$ et $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ sont inférieurs respectivement à deux nombres N et N' , f est une fonction *continue de x, y* , satisfaisant aux conditions (A), et *lipschitzienne en z, p* , c'est-à-dire que

$$(51) \quad |f(x, y, z', p') - f(x, y, z, p)| < C|z' - z| + A|p' - p|.$$

Nous cherchons à déterminer une solution de cette équation, régulière à l'intérieur d'un contour (C) situé dans $\mathcal{R}$ et *satisfaisant à la condition* (Γ), prenant une succession continue de valeurs sur (C), $\frac{\partial z}{\partial x}$ étant supposée également continue sur (C).

Unicité de la solution. — Pour démontrer l'unicité d'une telle solution, envisageons la différence $z_1 - z_2$ de deux solutions qui prendraient les mêmes valeurs sur (C) : c'est la solution, nulle sur (C), de l'équation

$$\delta z = \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y) = f(x, y, z_1, p_1) - f(x, y, z_2, p_2).$$

Si nous nous reportons aux formules (29') du paragraphe 12 (avec $\gamma = 0$), nous pouvons donner à la solution en question et à sa dérivée par rapport à x la même limitation et écrire, Φ étant le maximum de φ ,

$$(52) \quad |z_1 - z_2| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial(z_1 - z_2)}{\partial x}\right| < L\Phi B\left(\frac{1}{2}, 1\right)y^{\frac{1}{2}},$$

en supposant que la caractéristique inférieure de (C) soit Ox , cas auquel on peut toujours être ramené. Il résulte alors des formules (51) et (52) que l'on a

$$|\varphi| < L(A + C)\Phi B\left(\frac{1}{2}, 1\right)y^{\frac{1}{2}}.$$

D'où, d'après la formule (29'),

$$|z_1 - z_2| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial(z_1 - z_2)}{\partial x} \right| < \Phi L^2(A + C) B\left(\frac{1}{2}, 1\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \gamma \\ = \frac{\Phi}{A + C} \frac{[L(A + C)\sqrt{\pi}]^2}{\Gamma(2)}.$$

On trouverait ainsi de proche en proche

$$|z_1 - z_2| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial(z_1 - z_2)}{\partial x} \right| < \frac{\Phi}{A + C} \frac{[L(A + C)\sqrt{\pi}]^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)},$$

quel que soit n et, comme ce terme tend vers zéro quand n tend vers l'infini, on a $z_1 \equiv z_2$, ce que nous voulions établir (1).

Équation fonctionnelle du problème. — Elle est évidemment

$$z = - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}\right) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta + \zeta(x, y),$$

ζ étant la solution de $\partial z = 0$ prenant sur (C) les valeurs données. Si nous avons obtenu une solution de cette équation continue, ainsi que sa dérivée, dans S, bord compris, elle vérifiera l'équation aux dérivées partielles. Il suffit, pour le voir, de reproduire un raisonnement tout à fait analogue à celui du paragraphe 19, en tenant compte de la condition (51).

Existence de la solution. — On trouve cette solution par approximations successives, comme limite d'une suite de fonctions $z_0, z_1, \dots, z_n, \dots$; z_0 étant égal à ζ et z_n étant la solution de l'équation

$$(53) \quad \partial z_n = f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1})$$

satisfaisant aux conditions aux limites. Si donc les valeurs de $|z_n|$ et $|p_n|$ restent inférieures respectivement à N et N', on pourra pour-

(1) La démonstration eût été immédiate, si l'on s'était borné à supposer l'existence des dérivées $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial p}$.

suivre les approximations et écrire

$$|z_{n+1} - z_n| < \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} \left[A \left| \frac{\partial(z_n - z_{n+1})}{\partial \xi} \right| + C |z_n - z_{n-1}| \right] |G| d\xi d\eta,$$

ce qui montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty} (z_{n+1} - z_n)$ admettra comme série majorante la série majorante qu'on trouverait en déterminant, par la méthode du paragraphe 20, la solution de l'équation

$$\partial z = A \frac{\partial z}{\partial \varphi} + Cz$$

prenant sur (C) les valeurs données.

On peut d'ailleurs présenter ce calcul sous une forme légèrement différente et écrire, en partant d'une fonction z_0 arbitraire,

$$\partial z_1 = f(x, y, z_0, p_0),$$

z_1 prenant sur (C) les valeurs données, puis

$$(53') \quad \begin{cases} \partial \zeta_1 = f(x, y, z_1, p_1) - f(x, y, z_0, p_0) & [\zeta_1 \text{ nul sur (C)}], & z_2 = z_1 + \zeta_1, \\ \partial \zeta_2 = f(x, y, z_2, p_2) - f(x, y, z_1, p_1) & [\zeta_2 \text{ nul sur (C)}], & z_3 = z_2 + \zeta_2, \end{cases}$$

et ainsi de suite, ce qui nous donne z sous forme de série (1)

$$z = z_1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n + \dots$$

Il faut maintenant nous assurer que les valeurs de z_n et $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ ne sortent pas des intervalles $(-N, +N)$ et $(-N', +N')$. Si cela a lieu pour le rang $n-1$, z_n , qui est la solution de l'équation (53) prenant sur (C) les valeurs données, satisfera aux limitations [formules (29'')]]

$$|z_n| < M + F\gamma, \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| < M' + \lambda\gamma\beta,$$

F étant le maximum de $|f|$ dans le champ de variation de ses arguments, et λ un nombre dépendant de F (linéairement) et des données, M le module maximum des données, M' le module maximum de

(1) Cette série serait ici majorée par celle qui proviendrait de la résolution de l'équation

$$\partial z = Ap + Cz + F.$$

$\Phi'(x) [\Phi = z(x, 0)]$. Il faudra donc que l'on ait

$$M + Fy < N, \quad M' + \lambda y^\beta < N',$$

$$y < \frac{N - M}{F}, \quad y < \left(\frac{N' - M'}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\beta}};$$

y devra donc être inférieur à la plus petite de ces deux limitations, soit l . Dans ces conditions, on pourra effectuer le calcul d'approximations dans une *bande horizontale de hauteur l* . Il est possible d'ailleurs que, au cours du calcul, on constate l'existence de la solution dans une région beaucoup plus étendue.

Hypothèses sur les données. — Celles-ci se dégagent d'elles-mêmes de l'analyse qui précède : il suffit tout d'abord que les données soient telles que la solution de $\delta z = 0$, qui correspond aux mêmes conditions aux limites, admette une *dérivée* par rapport à x aux points du contour (C). Nous savons que cela est réalisé si $\Phi'(x)$ existe et si $\Phi_i(y)$ admet par rapport à y un accroissement d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$. Enfin pour appliquer les formules (29'') nous supposons aussi que $\Phi'(x)$ admette un accroissement d'ordre non nul.

Cas particuliers. — Lorsqu'on pourra ramener les données à zéro, il y aura évidemment avantage à le faire, puisqu'il suffira de résoudre les équations successives

$$z_n = - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{s_y} f\left(\xi, \eta, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}\right) G d\xi d\eta.$$

Nous avons vu que cette transformation était possible quand $X_1, X_2, \Phi_1, \Phi_2, \Phi'$ sont dérivables [formule (27), § 11]. Il conviendra alors, dans ce cas, d'effectuer le changement de variables (V) qui transforme (C) en un contour rectangulaire, afin de profiter des facilités de calcul qu'on rencontre dans ce cas.

Autres problèmes aux limites. — Les autres problèmes aux limites, que nous avons indiqués dans l'étude de l'équation linéaire, peuvent également être résolus ici par les mêmes méthodes que nous venons d'employer. Supposons, par exemple, que l'on donne z sur A_1, A_2 et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur C, et C_2 : nous déterminerons successivement les

solutions des équations (53) satisfaisant à ces conditions, ou bien nous partirons d'une telle fonction z_1 , solution de $\delta z_1 = f(x, y, z_0, p_0)$ et nous déterminerons les solutions z_n des équations (53'), nulles sur A_1, A_2 et ayant leur dérivée nulle sur C_1 et C_2 . On voit aisément (cf. les notes des § 5* et 12) que les fonctions z_n et $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ resteront dans les limites fixées, si y vérifie des inégalités de la forme

$$M + L y^{\beta + \frac{1}{2}} < N, \quad M' + L' F y^\beta < N',$$

et l'on obtiendra ainsi la hauteur de la bande dans laquelle on sera assuré de l'existence de la solution.

29. L'ÉQUATION $r = f(x, y, z, p, q)$. FORME NORMALE. — Envisageons maintenant l'équation ($\mathcal{E}_2$). Nous supposons tout d'abord que f est, dans une région $\mathcal{A}$ du plan, une *fonction continue de x et y* , les valeurs de z, p, q restant comprises dans un intervalle $(-N, +N)$, et que, dans ces conditions, f admet *des dérivées continues par rapport à z, p, q , $\frac{\partial f}{\partial q}$ étant essentiellement positive* (ou du moins gardant un signe constant qu'on peut toujours rendre positif).

Dans ces conditions, il ne peut exister deux solutions régulières z_1 et z_2 prenant sur un contour (C) des valeurs données, car on aurait alors

$$(54) \quad r_1 - r_2 = (p_1 - p_2) \frac{\partial f(x, y, z', p', q')}{\partial p'} + (q_1 - q_2) \frac{\partial f}{\partial q'} + (z_1 - z_2) \frac{\partial f}{\partial z'},$$

z', p', q' étant des fonctions intermédiaires entre z_1 et z_2, p_1 et p_2, q_1 et q_2 ; cette équation en $z_1 - z_2$ admettrait donc une solution nulle sur (C), le coefficient de la dérivée par rapport à y étant positif; nous savons que cela est impossible.

Proposons-nous donc de déterminer la solution dont on donne les valeurs sur (C); il faudra supposer cette solution *régulière, même sur (C)*, puisque z, p, q sont engagés dans la fonction f , et il conviendra tout d'abord que les valeurs données, et celles de $\Phi(x)$ (¹),

(¹) $\Phi(x)$ est la valeur donnée sur A_1, A_2 , caractéristique inférieure de (C) que nous supposons placée sur Ox ; nous employons toujours les mêmes notations pour les données et le contour (voir § 5).

appartiennent à l'intervalle $(-N, +N)$. Il faudra de plus que l'on puisse *calculer les valeurs de* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *sur* Ox , c'est-à-dire que l'équation

$$(55) \quad \Phi''(x) = f[x, 0, \Phi(x), \Phi'(x), \theta(x)], \quad \left[\theta(x) = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{y=0} \right]$$

définisse une fonction $\theta(x)$ comprise entre $-N$ et $+N$; cette fonction, si elle existe, sera unique, d'après ce que nous avons dit plus haut. Ses valeurs aux points A_1 et A_2 sont d'ailleurs données par la relation

$$\Phi'_i(0) = \Phi'(x_i) X'_i(0) + \theta(x_i) \quad (i = 1, 2),$$

et il faudra que ces deux valeurs vérifient l'équation (55).

Nous aurons également, relativement à f , d'autres conditions suffisantes, que la suite du calcul indiquera. Mais, avant de procéder à la recherche de notre solution, il convient de mettre l'équation sous une autre forme, à savoir

$$(C'_2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = \psi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{ou} \quad \partial z = \psi(x, y, z, p, q).$$

Nous verrons plus loin que la dérivée $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ doit pouvoir être rendue telle qu'elle s'annule sur la caractéristique inférieure Ox du contour (C) . Voyons donc comment, dans les cas les plus généraux, nous pourrions transformer l'équation (C_2) en une équation (C'_2) satisfaisant à cette condition. Faisons le changement de variable

$$(56) \quad \bar{x} = \int \sqrt{f'_q[x, 0, \Phi(x), \Phi'(x), \theta(x)]} dx \quad (f'_q > 0),$$

θ étant la fonction définie par la relation (55). L'équation (C_2) devient

$$[\varphi(x)]^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varphi'(x) \frac{\partial z}{\partial x} = f\left[x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x} \varphi(x), \frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

$\varphi(x)$ désignant le radical de la formule (56). Posant

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \bar{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \bar{p},$$

nous pouvons écrire cette équation

$$(\mathcal{C}'_2) \quad \bar{r} - q = \frac{f(x, y, z, \bar{p}, q)}{\varphi^2} - q - \frac{\bar{p}\varphi'}{\varphi^2} = \psi(\bar{x}, y, z, \bar{p}, q);$$

donc

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{f'_q(x, y, z, \bar{p}, q) - f'_q[x, o, \Phi(x), \Phi'(x), \theta(x)]}{f'_q[x, o, \Phi(x), \Phi'(x), \theta(x)]}.$$

Soit m le minimum de $|f'_q| = \varphi^2$, $\mathfrak{N}$ le maximum de φ : supposons que, dans le champ de variation de ses arguments, $\frac{\partial f}{\partial q}$ soit une fonction lipschitzienne de y, z, p, q , c'est-à-dire que

$$\left| \Delta \frac{\partial f}{\partial q} \right| < F_2[|\Delta y| + |\Delta z| + |\Delta p| + |\Delta q|].$$

Dans ces conditions, en posant $\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{dx} \varphi(x) = \bar{\Phi}' \varphi$, $\bar{\Phi}'$ sera la valeur de $\bar{p}$ sur Ox et nous pourrons écrire

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial q} \right| < \frac{F_2}{m} [y + |z - \Phi| + \mathfrak{N} |\bar{p} - \bar{\Phi}'| + |q - \theta|];$$

et cette expression s'annule bien sur Ox .

Le changement de variable utilisé ayant transformé l'équation $(\mathcal{C}_2)$ en l'équation $(\mathcal{C}'_2)$, la relation (55) vérifiée par la fonction θ , valeur de q sur Ox , se transformera dans la relation

$$(57) \quad \bar{\Phi}''(\bar{x}) = \theta - \psi[\bar{x}, o, \Phi(\bar{x}), \bar{\Phi}'(\bar{x}), \theta].$$

Nous pouvons maintenant supprimer la notation $\bar{x}$ et envisager l'équation

$$(\mathcal{C}'_2) \quad \delta z = \psi(x, y, z, p, q), \quad (|z|, |p|, |q| < N),$$

z prenant sur Ox la valeur $\Phi(x)$, sur C_i la valeur $\Phi_i(y)$ ($i = 1, 2$) avec

$$(58) \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial q} \right| < \frac{F_2}{m} (y + |z - \Phi| + \mathfrak{N} |p - \Phi'| + |q - \theta|) \leq \Psi';$$

θ étant la fonction de x définie par la relation

$$(57') \quad \Phi''(x) - \theta = \psi[x, o, \Phi(x), \Phi'(x), \theta].$$

C'est la forme $(\mathcal{C}'_2)$ ainsi définie, que nous appelons *forme normale*.

30. DÉTERMINATION DE LA SOLUTION. — Nous utiliserons, comme toujours, la méthode si féconde des approximations successives, en partant de la fonction z_1 , prenant sur (C) les valeurs données et solution de l'équation

$$(59) \quad \delta z_1 = \psi[x, y, \Phi(x), \Phi'(x), \theta(x)],$$

$\theta(x)$ étant la fonction définie par la relation (57').

Puis nous poursuivrons les approximations de la façon suivante

$$(60) \quad \begin{cases} \delta \zeta_1 = \psi(x, y, z_1, p_1, q_1) - \psi(x, y, \Phi, \Phi', \theta), & z_2 = z_1 + \zeta_1, \\ \delta \zeta_2 = \psi(x, y, z_2, p_2, q_2) - \psi(x, y, z_1, p_1, q_1), & z_3 = z_2 + \zeta_2, \end{cases}$$

et ainsi de suite, les ζ étant nuls sur (C), de sorte que la fonction

$$z_n = z_1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{n-1}$$

sera la solution de l'équation

$$\delta z_n = \psi(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})$$

prenant sur (C) les valeurs données.

Ce qui constitue *la difficulté* de ces approximations c'est la présence, dans le *second membre de l'équation*

$$\delta z_n = \psi(x, y, z_n, p_n, q_n) - \psi(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}),$$

c'est-à-dire

$$(61) \quad \delta z_n = \psi\left(x, y, z_{n-1} + \zeta_{n-1}, p_{n-1} + \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial x}, q_{n-1} + \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial y}\right) - \psi(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}),$$

de la dérivée $\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial y}$ de la fonction donnée par l'équation précédente. Il nous faudra donc établir la convergence de la série $\sum \frac{\partial \zeta_n}{\partial y}$ et, par conséquent, donner une *limitation de* $\frac{\partial \zeta_n}{\partial y}$. Nous savons le faire, mais en utilisant les *accroissements du second membre* de l'équation (61), ce qui exige que nous nous servions des *accroissements des dérivées* $\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial y}$ elles-mêmes.

Pour simplifier les notations, nous allons appeler ψ_n le second membre

de l'équation (61) et poser

$$\frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial x} = \varpi_{n-1}, \quad \frac{\partial \zeta_{n-1}}{\partial y} = \chi_{n-1}.$$

Nous allons former l'accroissement de ψ_n quand y subit un accroissement Δy , et par suite z_{n-1} , ζ_{n-1} , ..., des accroissements correspondants Δz_{n-1} , $\Delta \zeta_{n-1}$, ... Nous aurons donc à appliquer la formule des accroissements finis à une fonction ψ_n de *sept* variables $y, z, p, q, \zeta, \varpi, \chi$, *en supprimant les indices*. Désignons par $y', z', \dots$, des quantités comprises entre les valeurs extrêmes de $y, z, \dots$, puis posons

$$\psi^{(1)} = \psi(x, y', z', p', q'), \quad \psi^{(2)} = \psi(x, y', z' + \zeta', p' + \varpi', q' + \chi').$$

Nous aurons alors

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= \Delta y \left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial y'} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial y'} \right) + \Delta z \left(\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z'} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z'} \right) + \Delta p \left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial p'} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial p'} \right) \\ &+ \Delta q \left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial q'} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial q'} \right) + \Delta \zeta \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \zeta'} + \Delta \varpi \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \varpi'} + \Delta \chi \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial \chi'}. \end{aligned}$$

Nous supposons que les arguments des fonctions ψ restent toujours dans le champ de variation que nous avons défini : dans ces conditions, soit Ψ' le module maximum de $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ [formule (58)], Ψ , le module maximum de $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial p}$, et faisons l'hypothèse que $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$, $\frac{\partial \psi}{\partial p}$, $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ soient *lipschitziennes* en z, p, q , c'est-à-dire que, pour un accroissement Δ' de ces quantités, l'accroissement correspondant des quatre dérivées soit inférieur en valeur absolue à

$$\Psi_2(|\Delta' z| + |\Delta' p| + |\Delta' q|).$$

Nous pourrions alors écrire, en désignant par $[\zeta]$, $[\varpi]$, $[\chi]$ le module maximum de ζ , ϖ , χ , dans l'intervalle Δy , et en rétablissant les indices,

$$\begin{aligned} (62) \quad |\Delta \psi_n| &< \Psi_1(|\Delta \zeta_{n-1}| + |\Delta \varpi_{n-1}|) + \Psi' |\Delta \chi_{n-1}| \\ &+ \Psi_2\{[\zeta_{n-1}] + [\varpi_{n-1}] + [\chi_{n-1}]\} \\ &\times \{|\Delta y| + |\Delta z_{n-1}| + |\Delta p_{n-1}| + |\Delta q_{n-1}|\}. \end{aligned}$$

Cela posé, étudions les termes successifs de la chaîne d'approximations. Nous partons de la fonction z_1 , qui est donnée par l'équation (59) •

laquelle est de la forme $\delta z = \varphi(x)$, (voir § 7*). Supposons que les conditions énoncées dans le paragraphe 7* concernant les données, le contour et le second membre de l'équation soient ici réalisées. Nous pourrons alors appliquer les formules (22), en supposant $\Delta y > 0$,

$$(62') \quad |\Delta z_1| < L \Delta y, \quad \left| \Delta \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| < L \Delta y^{\gamma+\beta}, \quad \left| \Delta \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| < L \Delta y^\gamma,$$

γ étant < 1 et β étant le plus petit des nombres $\frac{1}{2}$ et $1-\gamma$. Si nous désignons par h la hauteur de la bande dans laquelle nous calculerons la solution, nous aurons donc, en remarquant que, d'après la relation (57'), $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ se réduit sur Ox , à la fonction $\theta(x)$,

$$(62'') \quad |z_1 - \Phi(x)| < Lh, \quad |p_1 - \Phi'(x)| < Lh^{\gamma+\beta}, \quad |q_1 - \theta(x)| < Lh^\gamma.$$

Nous pouvons alors appliquer à ψ_1 , second membre de la première équation (60), la formule (62), en posant $n = 1$ et

$$(63) \quad z_0 = \Phi, \quad p_0 = \Phi', \quad q_0 = \theta, \quad \zeta_0 = z_1 - z_0, \quad \varpi_0 = p_1 - p_0, \quad \chi_0 = q_1 - q_0,$$

d'où il résulte que $\Delta \zeta_0$, $\Delta \varpi_0$ et $\Delta \chi_0$ sont égaux respectivement à Δz_1 , Δp_1 , Δq_1 , puisque z_0 , p_0 , q_0 sont indépendants de y .

Nous voyons alors que ψ_1 , qui d'ailleurs s'annule sur Ox , admet, relativement à y , un accroissement d'ordre γ , soit

$$|\Delta \psi_1| < K_1 \Delta y^\gamma.$$

Par suite, d'après les formules (34) du paragraphe 15,

$$(64) \quad \begin{cases} |\Delta \zeta_1| < \mu K_1 \Delta y, & |\Delta \varpi_1| < \mu K_1 \Delta y^{\gamma+\beta}, & |\Delta \chi_1| < \mu K_1 \Delta y^\gamma, \\ |\zeta_1| < \mu K_1 h^{\gamma+1}, & |\varpi_1| < \mu K_1 h^{\gamma+\frac{1}{2}}, & |\chi_1| < \mu K_1 h^\gamma, \end{cases}$$

μ étant un coefficient qui ne dépend que des données et du contour : nous pouvons en effet toujours choisir γ tel qu'il soit le même dans les formules (62') et (64).

Supposons que, d'une manière générale, ψ_{n-1} soit nul sur Ox et que l'on ait

$$|\Delta \psi_{n-1}| < K_{n-1} \Delta y^\gamma$$

et que, de même, les inégalités (64) soient vérifiées pour l'indice $n-1$, c'est-à-dire

$$|\Delta \zeta_{n-1}| < \mu K_{n-1} \Delta y, \quad \dots; \quad |\zeta_{n-1}| < \mu K_n h^{\gamma+1}, \quad \dots$$

Nous pouvons alors écrire

$$(65) \quad z_{n-1} = z_1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{n-2}, \quad S_{n-2} = K_1 + K_2 + \dots + K_{n-2},$$

$$(66) \quad \begin{cases} |z_{n-1} - z_1| < \mu S_{n-2} h^{\gamma+1}, & |p_{n-1} - p_1| < \mu S_{n-2} h^{\gamma+\frac{1}{2}}, \\ |q_{n-1} - q_1| < \mu S_{n-2} h^{\gamma}. \end{cases}$$

Nous aurons d'après les inégalités (62') et (66)

$$\begin{aligned} |\Delta z_{n-1}| &< (L + \mu S_{n-2}) \Delta y, & |\Delta p_{n-1}| &< (L + \mu S_{n-2}) \Delta y^{\gamma+\beta}, \\ |\Delta q_{n-1}| &< (L + \mu S_{n-2}) \Delta y^{\gamma}. \end{aligned}$$

Par suite, d'après la formule (62), $\Delta \psi_n$ sera d'ordre γ et l'on pourra écrire

$$|\Delta \psi_n| < K_n \Delta y^{\gamma},$$

en posant (et en se rappelant comment est choisi β)

$$(67) \quad \frac{K_n}{K_{n-1}} = 2\mu \Psi_1 \Delta y^{\beta} + \Psi'_1 \mu + \mu \Psi_2 h^{\gamma} (1 + h^{\frac{1}{2}} + h) \\ \times [\Delta y^{\beta} + (L + \mu S_{n-2}) (2 \Delta y^{\beta} + 1)].$$

Alors les inégalités (64) seront vérifiées pour l'indice n avec le même exposant γ (voir § 15) et si l'expression (67) est inférieure à 1, la série ΣK_n sera convergente et, par suite, les séries $\Sigma \zeta_n$, $\Sigma \varpi_n$, $\Sigma \chi_n$ le seront également. Il faut donc pouvoir déterminer une limite supérieure de cette expression qui soit égale à un nombre $\rho < 1$: remarquons que, dans ces conditions, on aura

$$S_{n-2} < \frac{K_1}{1-\rho},$$

par suite, d'après les formules (62''), (65) et (66),

$$(68) \quad |z - \Phi(x)| < |z_1 - \Phi(x)| + |\zeta_1 + \zeta_2 + \dots| < Lh + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^{\gamma+1}.$$

De même

$$(68') \quad |p - \Phi'(x)| < Lh^{\gamma+\beta} + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^{\gamma+\frac{1}{2}}, \quad |q - \theta(x)| < Lh^{\gamma} + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^{\gamma}.$$

Par conséquent, d'après la formule (58), nous pouvons écrire

$$\Psi' = \frac{F_2}{m} \left[h + L(h + \mathfrak{N} h^{\gamma+\beta} + h^\gamma) + \frac{\mu K_1}{1-\rho} (h^{\gamma+1} + \mathfrak{N} h^{\gamma+\frac{1}{2}} + h) \right].$$

En portant cette valeur de Ψ' dans le second membre de (67) et remarquant que $\Delta y < h$, nous aurons donc une limite supérieure de $\frac{K_n}{K_{n-1}}$ et notre objet sera réalisé si cette limite est égale à ρ , car on voit alors, de proche en proche, que $\frac{K_n}{K_{n-1}}$ est $< \rho$ (*voir* la note de la page suivante). Nous obtenons ainsi une relation de la forme

$$(69) \quad \rho = \frac{\mathfrak{A} h^\gamma}{1-\rho} + \mathfrak{B} h^\beta + \mathfrak{C} h^\gamma \quad (\rho < 1),$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ étant des polynomes en h .

Or ceci est une équation du second degré qui admet certainement une racine inférieure à 1 si h est assez petit, puisque, pour $h = 0$, elle admet les racines 0 et 1 et que le produit des racines est positif : il y a donc une racine positive infiniment petite avec h .

D'une façon plus précise, on voit que cette équation admet deux racines comprises entre 0 et 1, si

$$\mathfrak{B} h^\beta + \mathfrak{C} h^\gamma < 1 \quad \text{et} \quad (\mathfrak{B} h^\beta + \mathfrak{C} h^\gamma - 1)^2 - 4 \mathfrak{A} h^\gamma \geq 0.$$

Ceci nous donnera pour h une valeur maximum h_1 .

Il nous faut maintenant écrire que les valeurs z_n , p_n , q_n restent comprises entre $-N$ et $+N$, ce qui, en vertu des formules (68) et (68'), s'écrit, en désignant par M , M' , Θ les modules maximum de Φ , Φ' , θ qui doivent être inférieurs à N ,

$$(70) \quad \begin{cases} M + Lh + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^{\gamma+1} < N, \\ M' + Lh^{\gamma+\beta} + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^{\gamma+\frac{1}{2}} < N, \\ \Theta + Lh^\gamma + \frac{\mu K_1}{1-\rho} h^\gamma < N. \end{cases}$$

On devra donc prendre une valeur de ρ , racine de l'équation (69) et satisfaisant à ces inégalités. Or celles-ci sont vérifiées pour $h = 0$,

$\rho = 0$; par suite, nous trouverons certainement ainsi pour h une seconde limite supérieure h_2 (¹).

Nous prendrons pour h la plus petite des valeurs h_1 et h_2 .

La convergence absolue et uniforme des séries $z_1 + \Sigma \zeta_n$, $p_1 + \Sigma \varpi_n$, $q_1 + \Sigma \chi_n$, dont les termes sont évidemment des fonctions continues, a lieu alors dans la bande de hauteur h , et nous obtenons ainsi une fonction z , limite des fonctions z_n , qui est la solution cherchée. Le problème est donc résolu.

51. RAPPEL DES HYPOTHÈSES DANS LESQUELLES LA MÉTHODE S'APPLIQUE. — Énumérons ces hypothèses, en remarquant que toutes les hypothèses que nous avons faites dans le paragraphe précédent *sur la fonction ψ* sont également vérifiées *pour la fonction f* .

Fonction $f(x, y, z, p, q)$: continue pour (x, y) dans une région $\mathfrak{A}$, $|z|, |p|, |q|$ inférieurs à N ; elle admet, dans ces conditions, les dérivées f'_y, f'_z, f'_p, f'_q , la dernière étant essentiellement positive (ou négative); ces quatre dérivées satisfont à la condition de Lipschitz en z, p, q , et la dérivée f'_q y satisfait également par rapport à y [il suffirait même, comme on le verrait aisément en envisageant Ψ' , que $|\Delta f'_q| < (L) \Delta y^\alpha$, $\alpha < 1$].

Contour : X_1 et X_2 admettent une dérivée première dont l'accroissement est d'ordre non nul.

Données : Φ'_i, Φ', Φ'' existent et admettent des accroissements d'ordre non nul; $|\Phi'_i|, |\Phi|, |\Phi'|$ sont inférieurs à N ; z et ses dérivées étant

(¹) Il est aisé de voir que, quand bien même les deux valeurs de ρ vérifieraient les inégalités (70), on peut toujours choisir la plus petite ρ' pour majorer la série des K_n . En effet, si la racine ρ' majore les rapports successifs $\frac{K_n}{K_{n-1}}$ jusqu'à une certaine valeur de n , elle majore le rapport suivant, d'après la façon même dont on a obtenu l'équation (69). Or $\frac{K_2}{K_1}$ est inférieur à $\mathfrak{A} h^\gamma + \mathfrak{B} h^\beta + \mathfrak{C} h^\gamma < \rho'$; d'où la conclusion de proche en proche.

connus en A_1 et A_2 (Cf. § 11), on a

$$\Phi''(x_i) = f[x_i, 0, \Phi(x_i), \Phi'(x_i), \Phi'_i(0) - \Phi'(x_i)X'_i(0)].$$

Enfin l'équation

$$\Phi''(x) = f[x, 0, \Phi(x), \Phi'(x), \theta]$$

définit une fonction θ , comprise entre $-N$ et $+N$, et admettant, pour un accroissement de x , un accroissement d'ordre non nul.

32. REMARQUES SUR LA MÉTHODE EMPLOYÉE (1). — I. Au cas où la seconde limitation h_2 de h serait *notablement inférieure* à la première h_1 , il peut arriver qu'on obtienne par une autre voie une limitation h'_2 supérieure à h_2 . En effet z_n est la solution de

$$\partial z_n = \psi(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}),$$

prenant les valeurs données sur (C) : z_n peut donc se limiter en fonction de l'accroissement du second membre pour un accroissement Δy ,

$$|\Delta \psi(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})| < \Psi_1[\Delta y + |\Delta z_{n-1}| + |\Delta p_{n-1}|] + \Psi' \Delta q_{n-1}.$$

On peut alors déterminer une limite supérieure de l'accroissement de chaque second membre, en fonction de celle qui est relative à l'équation précédente et avoir ainsi une limite supérieure de z_n, p_n, q_n permettant d'obtenir, à l'aide des inégalités $|z_n|, |p_n|, |q_n| < N$, une bande plus étendue.

II. Au sujet du *changement de variables* utilisé, remarquons qu'il est *biunivoque* puisque $\frac{dx}{dx} > 0$. Mais il est des cas où l'on peut utiliser un *changement de variables plus simple*, et par suite facilitant le calcul.

Si, en effet, nous nous reportons à la formule (67) et si nous n'explicitons pas Ψ' , nous pourrions déterminer ρ par une équation de la forme

$$\rho = \frac{\alpha_1 h \gamma}{1 - \rho} + \alpha_2 h \beta + \alpha_3 h \gamma + \Psi' \mu.$$

(1) Ces remarques ne sont pas des remarques *essentielles*.

qui admettra deux racines comprises entre 0 et 1, si, le discriminant étant positif, on a de plus

$$4h^2\beta + 2h\gamma + \Psi'\mu < 1.$$

Ceci exige que Ψ' soit inférieur à $\frac{1}{\mu}$. Les conditions $|z_n|, |p_n|, |q_n| < N$ donneraient aussi des inégalités relatives à Ψ' : on voit sans peine que, si Ψ' est inférieur à $\frac{N-M}{\mu}$, $\frac{N-M'}{\mu}$ et $\frac{N-\Theta}{\mu}$, le calcul de la solution sera possible.

Soit $\frac{1}{\mu'}$ la plus petite des limitations ainsi trouvées, nous allons voir que, dans certains cas, le simple changement de variables $\bar{x} = \lambda x$, appliqué à l'équation ($\mathcal{C}_2$) permet d'arriver au résultat. L'équation proposée devient en effet

$$\bar{r} - q = \frac{f(\bar{x}, y, z, \lambda \bar{p}, q)}{\lambda^2} - q = \psi(\bar{x}, y, z, \bar{p}, q).$$

Or

$$\psi'_q = \frac{f'_q}{\lambda^2}, \quad \text{donc} \quad -\frac{1}{\mu'} < \frac{f'_q}{\lambda^2} - 1 < \frac{1}{\mu}.$$

Soient B et b les valeurs extrêmes de f'_q : λ doit être tel que

$$B < \lambda^2 \left(1 + \frac{1}{\mu'}\right), \quad b > \lambda^2 \left(1 - \frac{1}{\mu'}\right).$$

Si $\mu' \leq 1$, la seconde inégalité est vérifiée et la première donne une limite inférieure de λ . Si $\mu' > 1$, on doit avoir

$$\frac{B}{1 + \frac{1}{\mu'}} < \lambda^2 < \frac{b}{1 + \frac{1}{\mu'}},$$

ceci exige

$$\mu' < \frac{B+b}{B-b},$$

ce qui a lieu d'ailleurs si $\mu' \leq 1$. En définitive *si cette inégalité a lieu*, on peut se passer du changement de variable primitivement indiqué.

III. Nous avons supposé que, dans la suite d'approximations, nous

partions des fonctions z_0, p_0, q_0 définies par les formules (63). Il est clair que cette hypothèse n'est pas indispensable et qu'il suffirait que z_0, p_0, q_0 soient égaux en A_1 et A_2 aux valeurs connues de z, p, q et que, sur $Ox, f(x, 0, z_0, p_0, q_0)$ admette un accroissement d'ordre non nul.

Mais alors le second membre des équations en ζ ne serait nul sur Ox qu'à partir de la *troisième* approximation.

33. AUTRE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LA SOLUTION. — Dans la méthode que nous avons employée, nous avons fait jouer à la variable y le rôle principal, en faisant intervenir les accroissements des fonctions utilisées. Nous pourrions également faire jouer ce rôle à la variable x . Ici encore (voir la note sur le contour rectangulaire), il faudra que les fonctions ψ_n s'annulent sur Oy comme une puissance de y . Supposons que nous ayons démontré pour ζ_{n-1} , des inégalités de la forme

$$(71) \quad |\Delta \zeta_{n-1}| < \mu K_{n-1} \Delta x, \quad |\Delta \varpi_{n-1}| < \mu K_{n-1} \Delta x, \quad |\Delta \chi_{n-1}| < \mu K_{n-1} \Delta x^{\gamma},$$

$$(72) \quad |\zeta_{n-1}| < \mu K_{n-1} y^{1+\frac{\gamma}{2}}, \quad |\varpi_{n-1}| < \mu K_{n-1} y^{\frac{1+\gamma}{2}}, \quad |\chi_{n-1}| < \mu K_{n-1} y^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Il résulte de là que ψ_n s'annule sur Ox comme $y^{\frac{\gamma}{2}}$.

En formant $\Delta \psi_n$ absolument par la même méthode que dans le paragraphe 30, la lettre Δ désignant ici un accroissement par rapport à x , nous pourrions déterminer un nombre K_n tel que les inégalités (71) aient lieu pour l'indice $n-1$. La détermination de la région de convergence se fait par une méthode analogue à celle du paragraphe 30.

L'application de cette méthode nous conduit aux mêmes conditions que la première relativement aux données et au contour. Pour f , les hypothèses sont les suivantes : $f(x, y, z, p, q)$ admet des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$ lipschitziennes en z, p, q , la dérivée $\frac{\partial f}{\partial q}$ admettant en outre un accroissement d'ordre non nul relativement à y (à cause de Ψ').

34. CONTOUR RECTANGULAIRE. — On peut toujours ramener le cas général à celui d'un contour rectangulaire par le changement de variable

$$(V) \quad x' = \frac{l(x - X_1)}{X_2 - X_1}.$$

Mais la formule

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = l \frac{\partial z(x', y)}{\partial x'} \frac{X_1 X_2' - X_2 X_1'}{(X_2 - X_1)^2} + \frac{\partial z(x', y)}{\partial y} \frac{l}{X_2 - X_1}$$

nous montre que, si nous substituons cette valeur à q dans f , la fonction ainsi obtenue *n'admettra de dérivée par rapport à y que si X_1'' et X_2'' existent*. C'est pourquoi nous n'avons pas démontré les formules (34) du paragraphe 15, qui trouvent leur emploi dans la *première méthode*, uniquement dans le cas d'un contour rectangulaire.

Dans la *deuxième méthode*, au contraire, qui n'exige relativement à y que la condition $|f_q| < (L) \Delta y^\alpha$, on peut faire le changement de variable (V). Aussi nous n'avons démontré les formules d'accroissement par rapport à x , qui conduisent aux inégalités (71) et (72), que dans le cas d'un *contour rectangulaire* (voir la note).

III. — Équations du type parabolique à plus de deux variables.

Dans cette dernière section, nous allons indiquer rapidement comment on peut étendre les recherches précédentes aux *équations à $n + 1$ variables*

$$\begin{aligned} \partial z &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + cz + f, \\ \partial z &= f\left(x_i, y, z, \frac{\partial z}{\partial x_i}\right). \end{aligned}$$

Pour simplifier l'exposition, nous allons nous placer dans le cas de *trois variables*.

33. RAPPEL DE RÉSULTATS ANTÉRIEUREMENT OBTENUS. — Envisageons l'équation

$$\partial z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x_1, x_2, y),$$

dont l'étude a été faite par M. Levi. Les *plans caractéristiques* sont ici les plans horizontaux $y = \text{const.}$

La solution fondamentale est

$$U(\Pi, P) = U(\xi_1, \xi_2, \eta; x_1, x_2, y) = \frac{1}{y - \eta} e^{-\frac{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}{4(y - \eta)}},$$

solution en x_1, x_2, y de l'équation proposée et en ξ_1, ξ_2, η de l'équation adjointe

$$\partial_1 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Envisageons une surface Σ , coupée par des plans caractéristiques suivant des courbes *fermées, sans points doubles*, admettant en chaque point un plan tangent, *jamais horizontal*, et une courbure totale *finie et continue*. Limitons inférieurement cette surface par une section horizontale S_0 , que nous pouvons supposer dans le plan des x_1, x_2 . Appelons *surface* (S) l'ensemble formé par la surface donnée et la section S_0 . Soient V_y le volume limité par la surface (S) et par le plan caractéristique d'ordonnée $y > 0$, Γ_y la section par ce plan, Σ_y la portion de Σ située au-dessous de ce plan, S_y l'ensemble de Σ , et de S_0 .

Appliquons alors la formule de Green au volume $V_{y-\varepsilon}$ et à l'intégrale

$$\begin{aligned} (1) \quad & \iint\limits_{V_{y-\varepsilon}} [u \partial z(\xi_1, \xi_2, \eta) - z \partial_1 u(\xi_1, \xi_2, \eta)] d\xi_1 d\xi_2 d\eta \\ &= - \iint\limits_{S_{y-\varepsilon}} \left(u \frac{\partial z}{\partial \xi_1} - z \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) d\xi_2 d\eta + \left(u \frac{\partial z}{\partial \xi_2} - z \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) d\eta d\xi_1 - z u d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \iint\limits_{V_{y-\varepsilon}} u f(\xi_1, \xi_2, \eta) d\xi_1 d\xi_2 d\eta, \end{aligned}$$

les intégrales de surface étant prises sur le côté intérieur. Remplaçons u par U , puis faisons tendre ε vers zéro; il vient, en désignant par σ l'arc de courbe de la section Γ_η et n la normale *intérieure* à cette courbe

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{P intérieur : } 4\pi \\ \text{P sur } \Sigma : 2\pi \\ \text{P extérieur : } 0 \end{array} \right\} z(x_1, x_2, y) &= - \iint\limits_{S_y} \left(U \frac{\partial z}{\partial n} - z \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma d\eta - U z d\xi_1 d\xi_2 \\ &\quad - \iiint\limits_{V_y} U f(\xi_1, \xi_2, \eta) dV. \end{aligned}$$

36. LES INTÉGRALES $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}, \mathfrak{K}$. — Nous obtenons ici des intégrales $\mathfrak{A}_0$,

s, x qui sont, en appelant μ un point de Σ et en posant

$$r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2,$$

$$s_0 = \iint_{\Sigma_y} U(\mu, P) \varphi(\sigma, \eta) d\sigma d\eta, \quad s = \iint_{\Sigma_y} V(\mu, P) \varphi d\sigma d\eta,$$

$$V = \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial r} \cos(r, n),$$

r désignant le rayon vecteur partant du point $P(x_1, x_2, y)$. (Nous verrons x plus loin.) Les intégrales s_0 et s sont continues en tout point de l'espace, sauf peut-être sur Σ . En ce qui concerne s_0 , il est facile d'en donner une limitation partout valable. Si, en effet, on compte l'arc σ sur chaque courbe Γ à partir du point où r est minimum, comme la courbure de Γ est toujours finie, on a $r > \mu\sigma$, μ étant indépendant de Γ . Ceci est valable, même si r devient nul. Il résulte de là que, $\bar{\Phi}(\eta)$ étant le module maximum de $\varphi(\sigma, \eta)$ quand σ varie,

$$|s_0| < \int_0^y \frac{\bar{\Phi}(\eta) d\eta}{y - \eta} \int_0^\infty e^{-\frac{\mu\sigma}{y - \eta}} d\sigma.$$

et ceci est une intégrale $I_{0,1}$ qui est de l'ordre de $\sqrt{y}$. On en conclut que s est uniformément convergente (voir GOURSAT, p. 173) et, par suite, est continue, même sur Σ .

Quant à s , on pourra en trouver une limitation par le procédé suivant : il suffit d'étudier le cas où la plus courte distance r_1 de P à Γ_y est inférieure au rayon de courbure minimum des courbes Γ . On décomposera alors l'intégrale double en deux autres, en partageant Σ en deux parties par un plan caractéristique, tel que pour la partie supérieure on ait toujours $r > \frac{r_1}{2}$. En remarquant que

$$d\sigma \cos(r, n) = r d\theta \quad [\theta = (\widehat{r, r_1})]$$

et que, sur la partie supérieure de Σ , on peut déterminer deux membres positifs finis λ et μ tels que

$$\frac{r_1}{2} + \lambda\theta < r < r_1 + \mu\theta,$$

on arrivera sans peine à établir une limitation de la forme

$$(2) \quad |s| < (L)\Phi,$$

valable dans tout domaine fini.

Il résulte de ce qui précède, par le même raisonnement que dans le plan, que $\mathfrak{s}$ est *discontinue* sur Σ , la *formule de discontinuité* étant

$$\lim_{p \rightarrow m} (\mathfrak{s}_p - \mathfrak{s}_m) = \pm 4\pi \varphi(m) + \int \int_{\Sigma_y} V(\mu, m) \varphi(\mu) d\sigma d\eta,$$

m étant, ainsi que μ , un point de Σ et $\varphi(\mu) = \varphi(\sigma, \eta)$.

L'intégrale double de cette formule se limite aisément, en remarquant que, si θ et r_1 sont, pour chaque courbe Γ , l'angle et le rayon vecteur issu de m désignés plus haut et σ l'arc correspondant à θ , on a certainement, λ, μ, ν étant encore des nombres positifs,

$$\lambda\theta < r < \sigma + r_1, \quad \sigma < \mu\theta, \quad r_1 < \nu(y - \eta),$$

la dernière inégalité tenant à ce fait que le lieu du pied de r_1 est normal à Γ_y au point m , et que par suite $\frac{r_1}{y - \eta}$ tend vers $\cotang(\widehat{N, Oy})$ quand η tend vers y , N étant la normale à Γ_y . Donc

$$\lambda\theta < r < \mu\theta + \nu(y - \eta).$$

Il résulte de là, en utilisant la formule $d\sigma \cos(r, n) = r d\theta$, qu'on peut écrire

$$(2') \quad \left| \int \int_{\Sigma_y} V(\mu, m) \varphi(\sigma, \eta) d\sigma d\eta \right| < (L) \Phi B\left(\frac{1}{2}, \gamma + 1\right) y^{\gamma + \frac{1}{2}}.$$

Si nous posons maintenant

$$\mathfrak{X} = \int \int_{S_0} \frac{1}{y} e^{-\frac{r^2}{4y}} \psi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$\mathfrak{X}$ tend vers $4\pi\psi(P_0)$ quand le point P tend vers un point P_0 intérieur à S_0 . On déduit de là, quand $f = 0$, le calcul de la solution prenant sur (S) des valeurs données en posant

$$z = \bar{z} + z_1,$$

$\bar{z}$ étant exprimé par une intégrale $\mathfrak{X}$ et z_1 par une intégrale $\mathfrak{s}$, portant sur une fonction φ déterminée par une équation intégrale de première espèce pour la résolution de laquelle on utilisera la formule (2')

37. LA FONCTION Z. — Quand f n'est pas identiquement nulle, la

fonction

$$Z(P) = \frac{-1}{4\pi} \iint_{V_y} U(\Pi, P) f(\Pi) d\Omega_{\Pi} \quad (d\Omega_{\Pi} = d\xi_1 d\xi_2 d\eta)$$

est solution de $\delta z = f$ sous des conditions analogues aux conditions (A), § 9. Ici encore s'introduisent les paraboles de sommet P et d'axe vertical et l'on trouverait un ensemble de *quatre conditions*, dont une seule suffirait pour l'existence des dérivées $\frac{\partial Z}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2}$, vérifiant l'équation $\delta z = f$.

Si

$$|f| < F\eta^\gamma,$$

on a, par l'emploi des coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} |4\pi Z| &< F \int_0^y \frac{\eta^\gamma d\eta}{y-\eta} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4(y-\eta)}} r dr \\ &< 4\pi F \int_0^y \eta^\gamma d\eta \int_0^\infty e^{-s} ds = \frac{4\pi F y^{\gamma+1}}{\gamma+1}. \end{aligned}$$

D'où

$$(3) \quad |Z| \leq \frac{F y^{\gamma+1}}{\gamma+1}.$$

De même

$$(4) \quad \left| \frac{\partial Z}{\partial x_1} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right| < \sqrt{\pi} F B\left(\frac{1}{2}, \gamma+1\right) y^{\gamma+\frac{1}{2}}.$$

Quand f est simplement une fonction *intégrable*, les *mêmes conditions d'accroissement* sont réalisées. *Tous ces calculs sont absolument analogues à ceux que nous avons faits dans le plan.* La seule différence est que toutes les formules relatives à la variable x dans le plan se décomposent ici en deux autres, relatives à x_1 et x_2 .

38. DÉRIVÉES DES FONCTIONS $\mathfrak{z}_0$ et $\mathfrak{z}$ ('). — Si les intégrales $\mathfrak{z}_0$ et $\mathfrak{z}$ peuvent être considérées comme continues sur le bord intérieur de Σ ,

(¹) Dans ce paragraphe, nous esquissons seulement les calculs, qui sont toujours du même genre.

il n'en est pas de même des intégrales

$$\frac{\partial \mathfrak{J}_0}{\partial x_i} = \int \int_{\Sigma_y} \frac{\partial U(\mu, P)}{\partial x_i} \varphi(\mu) d\sigma d\eta,$$

que nous aurons à envisager plus loin et qui deviennent, en général, infinies au bord. Cependant, si φ est fonction de η seulement, nous écrirons dans notre intégrale

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial U}{\partial \sigma} \sin \alpha \quad [\alpha = (\widehat{n, o x_i})].$$

La partie de l'intégrale contenant $\frac{\partial U}{\partial n}$ est une intégrale $\mathfrak{J}$. L'autre peut s'écrire

$$-\int_0^y \varphi d\eta \int_{\Gamma_\eta} \frac{\partial U}{\partial \sigma} \sin \alpha d\sigma = \int_0^y \varphi d\eta \int_{\Gamma_\eta} \frac{U \cos \alpha}{\rho} d\sigma,$$

ρ désignant le rayon de courbure de Γ_η : et ceci est une intégrale $\mathfrak{J}_0$. Donc, dans ce cas, $\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_i}$ est continue sur le bord intérieur de Σ .

Supposons maintenant que sur chaque courbe Γ_η l'accroissement de φ relativement à σ soit d'ordre non nul. Si μ est le point de Σ vers lequel P tend, on mènera par ce point une ligne, par exemple la trajectoire orthogonale des Γ , qui coupera chaque courbe Γ en un point qu'on prendra comme origine des arcs. On décomposera alors, suivant le procédé habituel, l'intégrale en deux parties dont la première vient d'être étudiée et dont l'autre sera continue au bord.

Envisageons maintenant

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x_i} = \int \int_{\Sigma_y} \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial x_i} \varphi(\mu) d\sigma d\eta;$$

indiquons dans quelles conditions cette intégrale a une limite quand P tend vers le bord. De l'égalité $\frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ et de $\delta, U = 0$ (écrite avec les variables σ, n, η), il résulte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial x_i} &= -\frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial^2 U}{\partial n^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial \sigma} \sin \alpha \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial \sigma^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial \sigma} \sin \alpha + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cos \alpha, \end{aligned}$$

si φ est une fonction de η seul, l'intégrale se transforme aisément en

une somme d'intégrales qui ont un sens au bord, à la condition que le rayon de courbure de Γ admette un accroissement d'ordre non nul par rapport à σ .

Dans le cas général, on trouve que si $\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$ existe et admet, par rapport à σ , un accroissement d'ordre non nul, et si φ admet, par rapport à η , un accroissement d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$, $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_i}$ existe au bord.

Les conditions ainsi trouvées sont également celles qui doivent être vérifiées par les données, dans un problème aux limites, pour que $\frac{\partial z_1}{\partial x_i}$ existe sur Σ .

Quant à $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_i}$, le même procédé utilisé dans le plan montre que, si $\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}$ existe à l'intérieur de S_0 , la limite de $\frac{\partial K}{\partial x_i}$ est $4\pi \frac{\partial \psi(x_1, x_2)}{\partial x_i}$ pour tout point (x_1, x_2) intérieur à S_0 .

D'où les conditions pour que $\frac{\partial z}{\partial x}$ existe au bord (voir § 41).

39. LA FONCTION DE GREEN. — La fonction de Green est donnée par la formule

$$G(\Pi, P) = U(\Pi, P) - H(\Pi, P),$$

H étant, relativement à Π , la solution de $\delta u = 0$, nulle pour $\eta = \gamma$ et prenant sur Σ la même valeur que U . G est solution de $\delta z = 0$ relativement à $P(x_1, x_2, \gamma)$ et de $\delta u = 0$ relativement à $\Pi(\xi_1, \xi_2, \eta)$.

Nous obtiendrons alors, en remplaçant u par G dans la formule (1) et désignant par $d\Omega$ l'élément de volume

$$4\pi Z(P) = \int \int_{s_\gamma} z(\mu) \frac{\partial G(\mu, P)}{\partial n} d\sigma d\eta + zG d\xi_1 d\xi_2 - \int \int \int_{V_\gamma} G(\Pi, P) f(\Pi) d\Omega_\Pi,$$

formule qui nous donne la solution de $\delta z = f$ prenant des valeurs données sur (S) : l'intégrale triple est la solution nulle sur (S) .

Formons cette fonction de Green : pour cela, posons

$$H(\Pi, P) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma_{\gamma, \eta}} V(\Pi, \mu) \varphi(\mu, P) d\sigma d\tau,$$

$\Sigma_{\gamma, \eta}$ étant la portion de Σ comprise entre les plans caractéristiques

de cote y et $\eta(y \geq \eta)$, μ un point de Σ de cote τ , σ l'arc de la courbe Γ_τ ; φ sera donné par la formule

$$U(\mu, P) = -\varphi(\mu, P) + \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma_{y,\tau}} V(\mu, m) \varphi(m, P) ds dt,$$

m étant un point de $\Sigma_{y,\eta}$ de cote t , et s l'arc de la courbe Γ_t ⁽¹⁾.

On démontrerait, comme dans le plan, la formule [form. (13), § 4*]

$$G(\Pi, P) = g U(\Pi, P) \quad (0 \leq g \leq 1).$$

Envisageons maintenant $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2$) et pour cela $\frac{\partial H}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma_{y,\eta}} V(\Pi, \mu) \frac{\partial \varphi(\mu, P)}{\partial x_i} d\sigma d\tau,$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ étant donné par l'équation

$$\frac{\partial U(\mu, P)}{\partial x_i} = -\frac{\partial \varphi(\mu, P)}{\partial x_i} + \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma_{y,\tau}} V(\mu, m) \frac{\partial \varphi(m, P)}{\partial x_i} d\xi dt.$$

Ce que nous nous proposons ici, c'est d'étudier des intégrales de la forme

$$I = \int \int \int_{V_y} \frac{\partial H}{\partial x_i} f(\Pi) d\Omega_{\Pi} = \int \int \int_{V_y} f(\Pi) d\Omega_{\Pi} \int \int_{\Sigma_{y,\eta}} \frac{V(\Pi, \mu)}{4\pi} \frac{\partial \varphi(\mu, P)}{\partial x_i} d\sigma d\tau.$$

Des transformations d'intégrales basées sur la formule de Dirichlet permettent de voir aisément que

$$I = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma_{y,0}} \frac{\partial U(\mu, P)}{\partial x_i} \Phi(\mu) d\sigma d\tau,$$

$\Phi(\mu)$ étant la solution de l'équation intégrale

$$\int \int \int_{V_y} V(\Pi, \mu) f(\Pi) d\Omega_{\Pi} = -\Phi(\mu) + \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma_{y,0}} V(\mu, m) \Phi(m) ds dt.$$

Il résulte des propriétés d'accroissement du premier membre de cette équation que la fonction Ψ possède un accroissement d'ordre

⁽¹⁾ Le signe — dans cette formule tient à ce que, dans $V(\Pi, \mu)$, le rayon vecteur va de μ à Π .

non nul par rapport à σ et, par suite, l'intégrale I a un sens, d'après ce que nous avons vu plus haut.

Si f satisfait à la limitation $|f| < F y^\gamma$, on établit sans peine la formule

$$|I| < (L)B\left(\frac{1}{2}, \gamma + 1\right) F y^{\gamma + \frac{1}{2}}.$$

En rapprochant ce résultat des formules (3) et (4), on voit donc que l'on peut écrire

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int \int \int_{v_y} G(\Pi, P) f(\Pi) d\Omega_{\Pi} \right| \\ \text{et} \\ \left| \int \int \int_{v_y} \frac{\partial G}{\partial x_i} f d\Omega_{\Pi} \right| < (L)B\left(\frac{1}{2}, \gamma + 1\right) F y^{\gamma + \frac{1}{2}}. \end{array} \right.$$

40. Nous aurons également besoin dans la suite des intégrales

$$\int \int \int_{v_y} \frac{\partial G}{\partial \xi_i} f(\Pi) d\Omega_{\Pi}.$$

Posons

$$I' = \int \int \int_{v_y} \frac{\partial H}{\partial \xi_i} f(\Pi) d\Omega_{\Pi}.$$

Cette fois, nous envisageons H comme *solution de* $\partial z = 0$ en x_1, x_2, y :

$$(6) \quad \frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma_{y,\eta}} V(\mu, P) \psi(\mu, \Pi) d\sigma d\tau,$$

ψ satisfaisant à l'équation

$$(7) \quad \frac{\partial U(\Pi, \mu)}{\partial \xi_i} = \psi(\mu, \Pi) + \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma_{\eta,\tau}} V(m, \mu) \psi_i(m, \Pi) ds dt.$$

Or, si nous remplaçons $\frac{\partial H}{\partial \xi_i}$ par sa valeur (6) dans I' , il vient après transformation

$$(8) \quad \begin{aligned} I' &= \int \int_{\Sigma_{y,0}} V(\mu, P) d\sigma d\tau \int \int \int_{v_\tau} \psi(\mu, \Pi) f(\Pi) d\Omega_{\Pi} \\ &= \int \int_{\Sigma_{y,0}} V(\mu, P) \Psi(\mu) d\Omega_{\Pi}. \end{aligned}$$

Si nous faisons subir aux deux membres de l'équation (7) l'opération

$$\int \int \int_{V_\tau} f(\Pi) d\Omega_\Pi,$$

nous constatons que la fonction $\Psi(\mu)$ définie par la formule (8) vérifie l'équation intégrale

$$\int \int \int_{V_\tau} \frac{\partial U(\Pi, \mu)}{\partial x_i} f(\Pi) d\Omega_\Pi = \Psi(\mu) + \int \int_{\Sigma_{\tau,0}} V(m, \mu) \Psi(m) ds dt.$$

Or, cette équation se résout sans difficulté. Si

$$|f(\Pi)| < F\eta^\gamma,$$

le premier membre admet la limitation donnée par la formule (4) et, par suite, Ψ admet une limitation analogue; de plus, I' tend vers une valeur bien déterminée sur le bord, puisque nous l'avons exprimé par une intégrale s , et admet, quel que soit P , une limitation analogue à Ψ , d'après la formule (2). Il résulte de là que

$$(9) \quad \left| \int \int \int_{V_y} \frac{\partial G}{\partial x_i} f(\Pi) d\Pi \right| < (L)FB \left(\frac{1}{2}, \gamma + 1 \right) y^{\gamma + \frac{1}{2}}.$$

Quand le point P vient sur Σ , $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ tend vers zéro, si Π est à l'intérieur de (S) . Or, on peut tracer à l'intérieur de (S) une surface voisine (S') telle que l'intégrale I' , étendue au volume compris entre (S) et (S') , soit aussi petite qu'on le veut. On déduit de là que *l'intégrale (I) elle-même tend vers zéro quand P vient sur Σ .*

41. PROBLÈMES AUX LIMITES RELATIFS AUX ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU TYPE PARABOLIQUE ELLIPTIQUE. — Envisageons l'équation

$$A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + A_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

$$A_1 A_2 - B^2 > 0, \quad b < 0.$$

Il résulte de la théorie des équations elliptiques que l'on peut, par un changement de variables, rendre A_1 et A_2 égaux à $-b$ et B nul.

On obtiendra ainsi l'équation

$$(c) \quad \delta z = a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + cz + f.$$

L'unicité d'une solution prenant des valeurs données sur une surface (S) se démontre sans difficulté par le même procédé que dans le plan.

Cette solution vérifie l'équation suivante :

$$(e) \quad z(x_1, x_2, y) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{V_y} \left(a_1 \frac{\partial z}{\partial \xi_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial \xi_2} + cz \right) G d\xi_1 d\xi_2 d\eta + \zeta(x_1, x_2, y),$$

la parenthèse étant fonction de (ξ_1, ξ_2, η) , et ζ étant la solution de $\delta z = f$ prenant sur (S) les valeurs données.

Supposons que la fonction donnée sur (S) admette sur chaque courbe Γ une *dérivée par rapport à σ* , pourvue d'un accroissement d'ordre non nul, qu'elle possède par rapport à y un accroissement d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$ et qu'elle soit *dérivable dans S_0* : alors les dérivées $\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}$ existent au bord.

Il en résulte alors, d'après les formules (5), que la méthode des approximations successives nous donnera $z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}$ au moyen de séries *absolument et uniformément convergentes*, vérifiant l'équation (e). On passe de là à l'équation (c) par la même méthode que dans le plan.

Cette résolution du problème aux limites proposé, par le moyen d'une équation intégral-différentielle, permet de traiter le même problème pour l'équation $\delta z = f(x_1, x_2, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2})$, f étant *lipschitzienne* en $z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}$: la détermination de la hauteur du domaine dans lequel on peut opérer se fait, comme dans le plan, au moyen de formules toutes semblables. Le calcul de la solution est aussi analogue. Nous n'insisterons donc pas sur ce point.

42. MÉTHODE SPÉCIALE A L'ÉQUATION LINÉAIRE. — On peut aussi, comme dans le plan, transformer l'équation (e) en équation inté-

grale

$$(e') \quad z(x_1, x_2, y) = \frac{1}{4\pi} \int \int \int_{V_y} \left(\frac{\partial a_1 G}{\partial \xi_1} + \frac{\partial a_2 G}{\partial \xi_2} - cG \right) z(\xi_1, \xi_2, \eta) d\xi_1 d\xi_2 d\eta + \zeta.$$

Quand la chose est possible, c'est-à-dire *quand* a_1 et a_2 *admettent une dérivée par rapport à* x_1 *et à* x_2 *respectivement*, c'est sous cette forme qu'il convient de traiter le problème, car il n'exige *sur les données* d'autre hypothèse que celle *de la continuité* et il ne nécessite que l'étude de $\frac{\partial G}{\partial \xi_i}$, qui se fait très simplement, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 40. La formule (9) fournit immédiatement une série de comparaison pour calculer z et l'analyse de cette équation est dès lors entièrement analogue à celle de l'équation (e') dans le plan. Ici les conditions sont donc : $\frac{\partial a_1}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial a_2}{\partial x_2}$ *existent* [et, par suite, a_1 et a_2 satisfont aux conditions (A)], c et f *satisfaisant aux conditions (A)*, les *coefficients et les données sont continus*.

Citons également, sans qu'il soit besoin d'insister, les généralisations relatives *aux séries de solutions* et au cas où S_0 *se réduit à un point*, puis à celui dans lequel Σ admet, en certains points, ou bien le long de certaines courbes Γ , un *plan tangent horizontal*. Les mêmes résultats que dans le plan subsistent avec de simples modifications de langage, qu'il est inutile de reproduire ici.

CHAPITRE III.

SUR LA NATURE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DU TYPE PARABOLIQUE.

Si nous envisageons l'équation de la chaleur

$$(1) \quad \delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

toute solution *régulière* dans une région $\mathcal{R}$ est une *fonction analytique de* x dans cette région : c'est-à-dire que, si $P(x_0, y)$ est un point de $\mathcal{R}$, $z(x, y)$ sera développable suivant une série entière en $(x - x_0)$ et, par suite, sera holomorphe dans un cercle du plan de la variable complexe x , ayant pour centre le point $(x_0, 0)$.

Cette propriété a été étendue par M. Levi aux solutions régulières de l'équation $\delta z = f(x, y)$, quand f est elle-même une fonction analytique de x dans la région $\mathfrak{R}$.

Si nous revenons à la solution z de $\delta z = 0$, nous voyons qu'on pourra déterminer deux nombres M et ρ tels que, pour toutes les valeurs de y appartenant à un intervalle (α, β) , on puisse écrire

$$(2) \quad \left| \frac{\partial^n z}{\partial x_0^n} \right| < \frac{M n!}{\rho^n},$$

et, comme l'équation (1) entraîne $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n}}$, on aura donc, pour toutes les valeurs y de l'intervalle (α, β) , en posant $\rho^2 = R$,

$$\left| \frac{\partial^n z(x_0, y)}{\partial y^n} \right| < \frac{M (2n)!}{R^n}.$$

La limitation ainsi trouvée a conduit M. Holmgren à envisager une classe de fonctions $\mathfrak{F}$ de la variable y satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1° Elles sont *indéfiniment dérivables* dans l'intervalle (α, β) ;
- 2° Leurs dérivées satisfont à la *limitation* $\left| \frac{d^n \mathfrak{F}}{dy^n} \right| < \frac{M (2n)!}{R^n}$, M et R étant indépendants de y .

Nous désignerons une telle fonction sous le nom de *fonction $\mathfrak{F}$* (ou *d'espèce $\mathfrak{F}$*) ou encore *fonction $\mathfrak{F}_R$* , lorsque nous voudrions spécifier le nombre R qui figure dans l'inégalité caractéristique.

Nous pouvons donc dire que *toute solution de $\delta z = 0$, régulière dans $\mathfrak{R}$, est une fonction analytique de x et une fonction $\mathfrak{F}$ de y .*

Ce sont les résultats précédents que nous proposons de généraliser et de compléter dans le Chapitre actuel.

I. — L'analyticité par rapport à x .

Pour démontrer qu'une fonction est analytique on peut, soit l'étudier *dans le champ complexe*, soit démontrer *dans le champ réel* des inégalités de la forme (2). C'est la première méthode que nous allons employer tout d'abord.

45. ANALYTICITÉ DES INTÉGRALES $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}$. — Les intégrales $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}$ sont des *fonctions analytiques de x* dans toute région ne contenant pas la courbe $x = X(y)$ ou le segment $A_1 A_2$ ⁽¹⁾. Si donc nous appliquons la formule fondamentale (α) à un contour (C) rectangulaire situé dans la région $\mathfrak{A}$, où la solution z de $\delta z = 0$ est régulière, nous déduisons de là l'analyticité de z par rapport à x .

Portons notre attention sur le domaine du plan de la variable complexe x , dans lequel les intégrales (prises le long de Oy),

$$\mathfrak{A}_0 = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta) d\eta, \quad \mathfrak{A} = \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta) d\eta,$$

sont holomorphes ⁽²⁾. Si nous posons $x = x_1 + ix_2$, $\mathfrak{A}_0$ devient

$$\mathfrak{A}_0(x_1, x_2; y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{x_1^2 - x_2^2 + 2ix_1x_2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta) d\eta,$$

ce qui nous montre que $\mathfrak{A}_0$ sera holomorphe *dans les deux angles formés par les bissectrices OR , OR' des angles des axes Ox_1 et Ox_2 , et contenant Ox_1* (*fig. 9*), car on a alors $x_1^2 > x_2^2$.

Le rayon de convergence de $\mathfrak{A}_0$ autour d'un point $(x_0, 0)$ du plan de x sera donc $\frac{|x_0|}{\sqrt{2}}$. La même conclusion s'applique à $\mathfrak{A}$.

Quant à $\mathfrak{K}$, c'est évidemment une fonction entière de x : la formule (α) nous montre donc que la fonction z est, en chaque point P de S une fonction analytique par rapport à x , le rayon de convergence étant égal à $\frac{d}{\sqrt{2}}$, si d est la plus courte distance de P aux côtés verticaux du rectangle ⁽³⁾.

(1) Voir GOURSAT, p. 304 sqq.

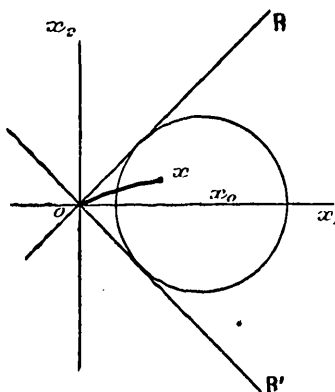
(2) Ce que nous allons dire s'appliquerait aussi aux intégrales (q entier > 0)

$$\int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}} e^{-\frac{x^q}{y-\eta}} \varphi(\eta) d\eta \quad \text{et} \quad \int_0^y \frac{x^{q-1}}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{x^q}{y-\eta}} \varphi(\eta) d\eta.$$

(3) Lorsque le contour n'est pas rectangulaire, les intégrales $\mathfrak{A}_0$ et $\mathfrak{A}$ sont relatives à des arcs de courbe $x = X(y)$ et le rayon de convergence est $\frac{|x - X(y)|}{\sqrt{2}}$: le domaine où z est holomorphe est alors limité par l'enveloppe des cercles de centre $(x, 0)$ et de rayon $\frac{|x - X(y)|}{\sqrt{2}}$: c'est un carré qui varie avec y .

Nous avons vu que, quand x est réel et tend vers zéro, l'intégrale $\mathfrak{A}$ tend vers $\pm 2\sqrt{\pi}\varphi(y)$, suivant que x est positif ou négatif. Voyons si cette propriété *subsiste quand x est complexe* : supposons, par

Fig. 9.



exemple, que x tende vers zéro en restant dans l'angle ROR' : nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(x, y) = & \varphi(y) \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} d\eta \\ & + \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} [\varphi(\eta) - \varphi(y)] d\eta. \end{aligned}$$

Le changement de variable $x = 2s\sqrt{y-\eta}$ transforme la première intégrale en

$$4\varphi(y) \int_{\frac{x}{2\sqrt{y}}}^{\infty} e^{-s^2} ds,$$

prise suivant un chemin dont la direction asymptotique est celle qui correspond à l'argument de x . Si donc x tend vers zéro suivant un chemin situé dans l'angle ROR' ⁽¹⁾ la valeur de cette intégrale tendra comme on le sait vers $2\sqrt{\pi}\varphi(y)$.

Si le chemin de (x) n'est pas tangent aux bissectrices, dans la seconde

(¹) Ce chemin peut, d'ailleurs, être tangent à OR ou OR' ou même coïncider avec ces deux droites; mais dans le texte nous le supposons non tangent. On peut montrer que $\mathfrak{A}(x, y)$ est continue (vers la droite) en tout point de ROR'.

intégrale, on a $x_1^2 - x_2^2 > \lambda^2 |x|^2$, λ étant un nombre fixe, et, par suite,

$$|x e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}| < |x| e^{-\frac{\lambda^2 |x|^2}{4(y-\eta)}}.$$

L'intégrale admet donc, comme limitation,

$$\int_0^y \frac{|x|}{(y-\eta)^2} e^{-\frac{\lambda^2 |x|^2}{4(y-\eta)}} |\varphi(\eta) - \varphi(y)| d\eta,$$

et ceci tend vers zéro quand $|x|$ tend vers zéro, φ étant continue, puisque c'est une intégrale du type $\mathfrak{A}$ dans le domaine réel. En définitive, dans les conditions où nous nous sommes placés, *la formule de discontinuité des intégrales $\mathfrak{A}$ est encore valable*; si $\varphi(0) = 0$, $\mathfrak{A}(x, y)$ tend vers zéro avec x et y .

On démontrerait de même, sans difficulté, que l'intégrale

$$\mathfrak{K}(x, y) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \psi(\xi) d\xi,$$

tend vers $2\sqrt{\pi}\psi(x_0)$ lorsque y tend vers zéro et que x tend vers un point x_0 intérieur à (a_1, a_2) , par valeurs complexes $x_2 + ix_1$, telles que $\frac{x_2^2}{y}$ tende vers zéro.

Les propriétés précédentes s'appliquent à une solution de $\delta z = f$, qui est une somme d'intégrales $\mathfrak{A}_0$ et $\mathfrak{B}$.

44. ANALYTICITÉ DE L'INTÉGRALE Z . — L'analyticité de Z [formule (23), § 8], quand f est analytique en x , démontre celle des solutions régulières de $\delta z = f$. Cette propriété a été établie par M. Levi (p. 239) : nous inspirant du même point de vue, nous allons, tout d'abord, donner une démonstration plus simple basée sur les propriétés des intégrales multiples de fonctions de plusieurs variables complexes.

Nous supposons le contour (C) rectangulaire, car c'est un contour de ce genre que nous envisagerons toujours dans la suite, mais le raisonnement que nous allons faire n'exige nullement cette hypothèse. Soit $CABD$ ce contour (nous modifions ici nos notations antérieures).

L'intégrale ($0 < \varepsilon < y$)

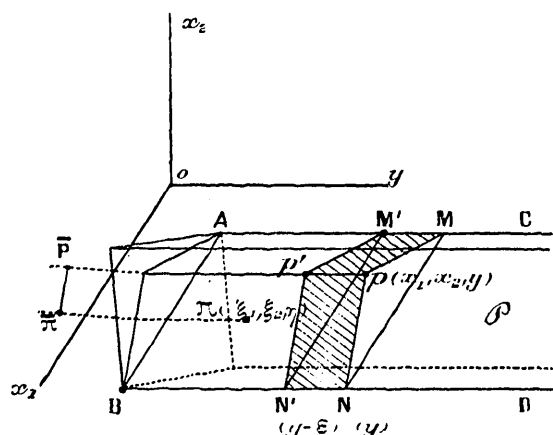
$$-2\sqrt{\pi}Z_\varepsilon = \int \int_{S_{y-\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int \int_{S_{y-\varepsilon}} U f d\xi d\eta$$

est une fonction analytique de x , pour des valeurs données de y et ε . Puisque U et f sont analytiques en ξ , cette intégrale conservera la même valeur dans le domaine complexe à trois dimensions x_1, x_2, y , si on l'étend à une surface Σ passant par le contour $ABN'M'$. Nous pouvons, en particulier, choisir une surface passant par le point $p(x_1, x_2, y)$: soit $\pi(\xi_1, \xi_2, \eta)$ un point quelconque de Σ . Or, nous avons

$$\left| e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \right| = e^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}{4(y-\eta)}}.$$

L'exposant de e dans cette formule sera donc négatif si la pente

Fig. 10.



de la droite $\overline{P\pi}$, projection de $p\pi$ sur le plan de la variable x , est comprise entre -1 et $+1$ (fig. 10). Supposons cette condition vérifiée (au moins pour η voisin de y).

Remarquons que tout ceci n'exige nullement que f soit *analytique sur le contour* (C) : il suffit que f satisfasse aux conditions de Cauchy à l'intérieur de Σ et soit *continue sur Σ et vers l'intérieur de Σ* : au reste, pour l'objet qui nous occupe, il nous suffit de remarquer que f peut simplement être continue sur (C).

Traçons Σ *intérieurement* au domaine $\mathcal{O}$, commun au domaine d'analyticité de f et au prisme $\mathcal{Q}$ formé par les quatre plans menés par AB, CD, et inclinés à 45° sur le plan x_1Oy , ce prisme étant limité dans un sens par la section droite passant par AB : la surface Σ pourra être

constituée, par exemple, par un prisme (ou un cylindre) intérieur à ω , ayant comme arêtes AB et CD, et comme base les sections droites AB, M'N'. L'intégrale envisagée ne contiendra pas de termes relatifs à ces deux sections droites, car les éléments $d\xi$, $d\eta$ et $d\eta d\xi_2$ y figurent seuls. De plus, d'après la façon même dont nous avons choisi Σ , on a

$$|x_2 - \xi_2| > \lambda |x_1 - \xi_1| \quad \text{et} \quad |d\eta d\xi_2| < \mu |d\xi_1 d\eta|.$$

λ et μ étant des nombres fixes, avec $0 < \lambda < 1$ ⁽¹⁾. Il résulte de là que

$$\left| e^{-\frac{(x_1 - \xi_1)^2}{4(y - \eta)}} \right| < e^{-\frac{(x_1 - \xi_1)^2}{4(y - \eta)}(1 - \lambda^2)},$$

et que le module de l'intégrale $\iint U f d\xi d\eta$, étendue dans le domaine complexe à la surface ombrée, est à un facteur constant près inférieur à l'intégrale

$$F \iint U(\xi_1, \eta; x_1, y) d\xi_1 d\eta,$$

étendue au rectangle M'N'NM, F étant le maximum de $|f|$ dans ⁽²⁾ : l'intégrale de surface a donc un sens et tend vers zéro avec ε , et cela uniformément, quelle que soit la position de p à l'intérieur du domaine ω ⁽²⁾.

Ceci prouve que, lorsque ε tend vers zéro, les fonctions Z_ε , qui sont analytiques en x , tendent vers une fonction limite Z , qui est elle-même analytique en x à l'intérieur de ω , et il suffit, pour cela, que f soit fonction analytique de x à l'intérieur de ω et continue sur (C).

(1) Dans le cas où Σ est un prisme, on a $d\eta d\xi_2 = \mu d\xi_1 d\eta$, μ étant fixe.

(2) Si le contour (C) est quelconque on trouve, au lieu d'un prisme ou d'un cylindre, la surface engendrée par des droites à 45°, parallèles au plan $x_1 O x_2$ et s'appuyant sur (C). Si les points du plan vertical AB, non situés sur la droite AB, n'appartiennent pas au domaine d'analyticité de f , il faudra limiter le prisme, passant par p , par une section oblique contenant AB. Au lieu de ce prisme, on peut aussi prendre pour surface Σ le cône de sommet p et de base MABN. En effet, les intégrales étendues aux triangles pAM et pBN ont été envisagées dans le texte reste donc celle qui est relative à pAB . Or elle prête aux mêmes remarques que les deux autres, si p reste à droite du plan vertical AB, car, dans le plan pAB , le module de l'exponentielle est égal à $e^{\frac{m^2(y - \eta) - (x_1 - \xi_1)^2}{4(y - \eta)}}$, $2m$ étant la pente du plan pAB .

La même démonstration prouverait l'*analyticité* de $\frac{\partial Z}{\partial x}$.

Il résulte de là que toute *solution* z de $\delta z = f$ prenant sur (C) des *valeurs continues et dérivables* est, ainsi que $\frac{\partial z}{\partial x}$, *analytique en* x à l'intérieur de $\mathfrak{O}$: en effet, cette solution et sa dérivée peuvent être représentées par des intégrales des types $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}, \mathfrak{X}, Z, \frac{\partial Z}{\partial x}$. De plus, z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont, dans le domaine $\mathfrak{O}$, continus aux points du contour (C) ⁽¹⁾.

43. ANALYTICITÉ DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION LINÉAIRE. — Soit z une solution de l'équation

$$\delta z = a \frac{\partial z}{\partial x} + cz + f,$$

régulière dans une région $\mathfrak{R}$ où les coefficients a, c, f sont des fonctions *analytiques de* x .

Si nous appliquons la formule fondamentale à cette solution et au contour rectangulaire MABN situé dans $\mathfrak{R}$, nous voyons que z est la solution d'une équation de la forme

$$z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{s_y} \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z}{\partial \xi} + c(\xi, \eta) z \right] U(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta + \bar{z}(x, y),$$

$\bar{z}$ étant la solution de $\delta z = f$ prenant sur le contour une valeur égale à la différence des valeurs de z et de l'intégrale double : $\bar{z}$ et $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$ sont donc continus sur le contour ⁽²⁾ et analytiques en x à l'intérieur de $\mathfrak{O}$.

Supposant $\bar{z}$ connu, nous pouvons calculer z par la méthode des approximations successives qui nous donnera pour z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ une série de comparaison entière en $\sqrt{y}$. *Ce calcul est valable dans le domaine complexe*, puisque, d'après le paragraphe précédent, les intégrales doubles dans le domaine complexe sont comparables aux intégrales étendues

⁽¹⁾ $\mathfrak{O}$ étant choisi tel que x_2^2 soit infiniment petit par rapport à $y - y_1$, quand p tend vers AB, d'ordonnée y_1 (à cause des intégrales $\mathfrak{X}$) : ceci aura lieu si la pente de p AB reste finie.

⁽²⁾ L'intégrale double prend, en effet, sur le contour, une succession de valeurs dérivable puisque $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, existent dans $\mathfrak{R}$.

aux domaines réels S_y . Il suffira de *multiplier* la série majorante du domaine réel par un *facteur convenable* pour avoir une majoration valable dans le domaine $\mathfrak{D}$ et sur (C) , et chaque terme z_n de la série ainsi formée est *analytique dans $\mathfrak{D}$ et continue sur (C)* , $\mathfrak{D}$ étant un domaine dont la frontière contient (C) , qui est commun à $\mathfrak{P}$ et au domaine d'analyticité des coefficients a , c , f , et choisi tel que la pente de pAB reste finie (*cf.* notes du § 44). Nous obtenons donc une série *uniformément convergente dans $\mathfrak{D}$ et sur (C)* et dont la somme définit une fonction analytique de x   l'intérieur de $\mathfrak{D}$ qui co incide avec la solution z quand x est réel.

Cette conclusion s'étend évidemment à l'équation

$$(E) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

quand b garde un signe constant et est analytique en x dans $\mathfrak{A}$, puisque le changement de variable qui ramène cette équation à l'équation (C) est analytique en x .

Nous obtenons ainsi ce THÉOREME : *Quand les coefficients de l'équation linéaire (E) sont des fonctions continues analytiques par rapport à x dans une région $\mathfrak{A}$, toute solution régulière dans cette région est également analytique en x .*

46. ÉQUATIONS NON LINÉAIRES. — Faisons tout d'abord une *remarque capitale*. Toutes les *formules de limitation* que nous avons données dans le premier Chapitre et dans la Note relative au *contour rectangulaire* sont aussi *exactes dans le domaine complexe*. Ceci résulte des remarques que nous avons faites sur la limitation du facteur exponentiel qui figure dans les intégrales simples ou doubles que nous avons rencontrées jusqu'ici : ces intégrales sont, dans le domaine complexe, comparables aux intégrales analogues prises dans le domaine réel. De plus, la formule des accroissements finis est valable pour deux points quelconques intérieurs à $\mathfrak{D}$ ou sur (C) .

Cela posé, envisageons l'équation

$$\partial z = f(x, y, z, p)$$

dans une région $\mathfrak{A}$ du plan où f est une fonction *analytique de x, z, p* , quand $|z|$ et $|p|$ restent inférieurs à N . Soit z une solution régulière

dans $\mathcal{R}$ et prenons un contour (C) rectangulaire intérieur à $\mathcal{R}$: z est la solution de l'équation

$$z = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{s_y} f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) U d\xi d\eta + \bar{z},$$

$\bar{z}$ étant défini comme dans le paragraphe précédent. La résolution de cette équation par approximations successives nous donnera donc une suite de fonctions z_n, p_n , de modules inférieurs à N, si la hauteur du rectangle est assez petite. La limitation de ces fonctions et de leurs différences successives dans le domaine complexe ne différera des limitations établies dans le domaine réel que par l'introduction d'un *facteur constant*.

Il résulte de là que nous obtiendrons z comme limite d'une suite *uniformément convergente* de fonctions analytiques et que, par suite, z sera fonction analytique de x .

Soit maintenant l'équation

$$r = f(x, y, z, p, q) \quad (f'_q > 0),$$

f étant *continue en y et analytique en x, z, p, q* , toujours dans les mêmes conditions que précédemment. Si nous employons la méthode suivie dans le paragraphe 50 pour calculer la solution au moyen de ses valeurs sur le contour rectangulaire (C), il nous faut faire des hypothèses où intervient y . La méthode indiquée au paragraphe 55 suppose au contraire des conditions relatives aux dérivées par rapport à x , qui sont ici évidemment réalisées d'après l'analyticité de f ; mais il subsiste encore la condition que, pour un accroissement de y , f'_q admette un accroissement d'ordre non nul.

Il est aisé de voir que, dans le cas actuel, nous pouvons faire *tomber cette hypothèse* : en effet, au lieu de faire le changement de variable (56) (§ 29), posons $\bar{y} = \int \varphi(y) dy$, avec

$$\varphi(y) = \frac{1}{f'_q[\alpha, y, z(\alpha, y), p(\alpha, y), q(\alpha, y)]},$$

α désignant l'abscisse du point A : nous pouvons faire ici ce changement de variables parce que nous connaissons *d'avance* les valeurs de la solution et de ses dérivées.

Nous obtenons alors, en posant $\frac{\partial z}{\partial \bar{y}} = \bar{q} = \frac{q}{\varphi}$,

$$r - \bar{q} = f(x, y, z, p, q) - \bar{q} = \psi(x, \bar{y}, z, p, \bar{q}),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{q}} = \varphi \frac{\partial f}{\partial q} - 1 = \frac{f'_q(x, y, z, p, q) - f'_q[\alpha, y, z(\alpha, y), p(\alpha, y), q(\alpha, y)]}{f'_q(\alpha \dots)},$$

et l'on déduit de l'analyticité de f que, $\mathfrak{M}$ et m étant le maximum et le minimum de $f'_q(\alpha \dots)$, on a

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{q}} \right| < \frac{F_2}{m} [|x - \alpha| + |z - z(\alpha, y)| + |p - p(\alpha, y)| + \mathfrak{M} |q - q(\alpha, y)|] \leq \Psi'.$$

Or, il résulte des formules (71) que, de même que dans le paragraphe 30 nous avons pu prendre la hauteur h assez petite pour assurer la convergence des approximations grâce à la limitation de Ψ' , de même ici nous pourrions prendre la largeur du rectangle assez faible pour réaliser le même objet.

Les calculs sont entièrement semblables à ceux qui ont été faits dans le paragraphe 30 : il suffira de prendre comme première approximation une fonction analytique de x telle que z_0, p_0, q_0 coïncident avec z, p, q sur AB, ce qui est toujours possible; x jouera alors le rôle que jouait y , et AC le rôle que jouait AB (fig. 10).

Toutes les formules de limitation s'appliquant dans le domaine complexe, nous déterminerons encore ici la fonction z comme limite d'une suite *uniformément convergente* de fonctions analytiques, sans hypothèse (autre que celle de la continuité) concernant la nature de f relativement à y .

Les résultats de ce paragraphe peuvent se résumer dans la PROPOSITION SUIVANTE : *Toute solution de l'équation $r = f(x, y, z, p, q)$ régulière dans une région $\mathfrak{R}$ du plan est une fonction analytique de x , si f est, dans la région $\mathfrak{R}$ et pour les valeurs qu'y prennent z, p, q , une fonction analytique de x, z, p, q , continue en y , la dérivée f'_q gardant un signe constant.*

En effet, si z_A, p_A, q_A sont les valeurs de z, p, q en un point A(x_0, y_0), f est holomorphe en x, z, p, q , dans un certain domaine défini par $|x - x_A|, |z - z_A|, |p - p_A|, |q - q_A| < \rho$, et l'on pourra prendre un contour rectangulaire assez petit pour que, en posant

$$z = z_A + p_A(x - x_0) + q_A(y - y_0) + \zeta.$$

la détermination de ζ soit possible à l'intérieur du contour, puisque alors les valeurs prises par ζ (et ses dérivées) sur le contour peuvent être rendues aussi petites qu'on veut.

La solution ainsi formée coïncidera avec la proposée d'après l'équation (54) du paragraphe 29, en remarquant que dans cette équation, $\frac{\partial f}{\partial z'}$, $\frac{\partial f}{\partial p'}$, $\frac{\partial f}{\partial q'}$ ont une limitation indépendante du choix du contour (').

47. SECONDE MÉTHODE POUR DÉMONTRER L'ANALYTICITÉ. — Considérons l'intégrale $-2\sqrt{\pi}Z = \int \int_{s_y} U f d\xi d\eta$, f étant une fonction *continue, analytique par rapport à x , à l'intérieur de S* . Soit un contour rectangulaire (C') situé à l'intérieur de S : la partie de l'intégrale étendue à l'aire extérieure à (C') est évidemment une fonction analytique de x en tout point intérieur à (C'). Proposons-nous de montrer que l'autre partie $Z' = \int \int_{s_y'} U f d\xi d\eta$ est analytique.

Pour cela, remarquons qu'on peut écrire en tout point de S' bord compris,

$$(3) \quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right| < \frac{F n!}{R^n},$$

F et R étant constants. Dès lors, si nous envisageons la formule

$$(4) \quad -\frac{\partial Z'}{\partial x} = \int_{(C')} U f d\eta - \int \int_{s_y'} U \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi d\eta$$

obtenue comme au paragraphe 8 en remarquant que $\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial \xi}$, nous pourrons la dériver et appliquer la même remarque à l'intégrale double ainsi obtenue, et ainsi de suite indéfiniment. Nous trouvons

(¹) Il est à remarquer que dans la démonstration de l'analyticité relative à $\partial z = f(x, y, z, p)$ nous avons résolu une équation fonctionnelle, ne contenant pas la fonction de Green, par des approximations dont les termes successifs ne prennent pas sur le bord des valeurs données. Au contraire, dans le cas de l'équation $r = f(x, y, z, p, q)$, il faut opérer, comme il a été dit dans le cas réel, avec les modifications indiquées dans le présent paragraphe. Naturellement $\frac{\partial z}{\partial y}$ sera également analytique en x .

ainsi

$$\frac{\partial^n Z'}{\partial x^n} = - \int_{(c'_y)} \left(\frac{\partial^{n-1} U}{\partial x^{n-1}} f + \frac{\partial^{n-2} U}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \dots + U \frac{\partial^{n-1} f}{\partial \xi^{n-1}} \right) d\eta + \int \int_{s'_y} U \frac{\partial^n f}{\partial \xi^n} d\xi d\eta.$$

Cette formule montre tout d'abord que, si f est *indéfiniment dérivable* par rapport à x , à l'intérieur de S , il en est de même de Z . Utilisons maintenant l'inégalité (3) et remarquons que, d'une manière générale,

$$\left| \int_{(c'_y)} \frac{\partial^n U}{\partial x^n} \varphi(\eta) d\eta \right| < \frac{M n!}{r^n} \quad \left(r < \frac{d}{\sqrt{2}} \right)$$

(voir § 43), M étant le maximum de $\int_{(c'_y)} U \varphi d\eta$ sur le cercle de rayon r situé dans le plan de la variable x . Or,

$$\left| \int_{(c'_y)} U \varphi d\eta \right| < \Phi \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = 2\Phi\sqrt{y}, \quad M = 2\Phi\sqrt{y},$$

Φ étant le module maximum de φ . Si donc ρ est le plus petit des nombres R et r , on a

$$\frac{\partial^n Z'}{\partial x^n} < \frac{2F\sqrt{y}}{\rho^{n-1}} [(n-1)! + 1!(n-2)! + \dots + (n-1)!] + 2\sqrt{\pi} y \frac{F n!}{\rho^n};$$

chaque terme du crochet est inférieur à $(n-1)!$. On peut donc écrire

$$\frac{\partial^n Z'}{\partial x^n} < \lambda \sqrt{y} \frac{F n!}{\rho^n},$$

ce qui démontre l'analyticité de Z' et par suite de Z dans toute région intérieure à S' et par conséquent à S .

On déduirait de là une seconde méthode pour démontrer l'analyticité des solutions de l'équation linéaire. Comme nous utiliserons un procédé *tout à fait semblable* dans le paragraphe 53, nous nous bornerons pour le moment à signaler cette démonstration.

II. — L'analyticité par rapport à y .

48. ANALYTICITÉ DES INTÉGRALES $\mathfrak{J}_0$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$. — Envisageons l'intégrale

$$\mathfrak{J}_0(x, y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta) d\eta.$$

Ce n'est pas, en général, une fonction analytique de y , puisque, comme solution de $\delta z = 0$, $\mathfrak{s}_0$ est une fonction $\mathfrak{x}$. Supposons que $\varphi(\eta)$ soit une *fonction analytique de η* à l'intérieur d'un intervalle $(0, \beta)$ contenant la valeur y et que cette fonction soit *continue* pour $y = 0$. Soit

$$\mathfrak{s}_0^{(\varepsilon)}(x, y) = \int_0^{y-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta) d\eta.$$

Si nous donnons à y une valeur complexe $y_1 + iy_2$, cette intégrale est évidemment dans le plan de la variable y une fonction analytique de y , à l'intérieur de toute région connexe située à droite du plan d'équation $y_1 = \varepsilon$ et faisant partie du domaine D d'analyticité de φ . Si ce domaine contient la droite joignant l'origine au point (y_1, y_2) , nous pourrions prendre l'intégrale le long de cette droite, la détermination du radical étant celle qui coïncide avec le radical arithmétique quand $y - \eta$ prend une valeur réelle positive.

Formons alors $\mathfrak{s}_0^{(\varepsilon)} - \mathfrak{s}_0^{(\varepsilon')}$: en remarquant que $|\sqrt{y-\eta}| > \sqrt{y_1-\eta_1}$, on a

$$|\mathfrak{s}_0^{(\varepsilon)} - \mathfrak{s}_0^{(\varepsilon')}| < \Phi \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{d\eta_1}{\sqrt{y_1-\eta_1}},$$

et ceci tend vers zéro uniformément quand ε et ε' tendent vers zéro. Par suite, $\mathfrak{s}(x, y)$ est une *fonction analytique de y* dans toute région à droite de Oy_2 (une coupure partant de O suffirait d'ailleurs), faisant partie de D et pouvant contenir O sur sa frontière, et cela quel que soit x .

La même démonstration s'appliquerait à $\mathfrak{s}(x, y)$ en supposant x et $y \neq 0$, car on aurait alors ⁽¹⁾

$$|\mathfrak{s}_0^{(\varepsilon)} - \mathfrak{s}_0^{(\varepsilon')}| < \Phi \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{x}{(y_1-\eta_1)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2 \cos^2 \omega}{4(y_1-\eta_1)}} d\eta_1, \quad \omega = y_1 \hat{O} \bar{P} \quad (\text{fig. 11}).$$

Mais il convient de voir si $\mathfrak{s}(x, y)$ a une limite quand x tend vers zéro. Pour cela, nous allons donner une *seconde démonstration* de l'analyticité de $\mathfrak{s}$. Soit

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(x, y) &= \int_0^y V(0, \eta; x, y) \varphi(\eta) d\eta, \\ \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y} &= \int_0^y \frac{\partial V}{\partial y} \varphi(\eta) d\eta = - \int_0^y \frac{\partial V}{\partial \eta} \varphi(\eta) d\eta = \frac{x}{y^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \varphi(y) + \int_0^y V \varphi'(\eta) d\eta, \end{aligned}$$

(1) Cette inégalité montre que, si y tend vers zéro suivant un chemin non tangent à Oy_2 et si $\varphi(0) = 0$, $\mathfrak{s}$ tend vers zéro, quel que soit x .

d'où, en posant $\theta = \frac{x}{y^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$,

$$\frac{\partial^n \mathfrak{s}}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1} \theta}{\partial y^{n-1}} \varphi(y) + \frac{\partial^{n-2} \theta}{\partial y^{n-2}} \frac{d\varphi}{dy} + \dots + \theta \frac{d^{n-1} \varphi}{dy^{n-1}} + \int_0^y V \frac{d^n \varphi}{d\eta^n} d\eta.$$

Supposons φ analytique à l'origine ⁽¹⁾ de façon que dans l'intervalle Oy , on puisse écrire

$$\left| \frac{d^n \varphi}{d\eta^n} \right| < \frac{\Phi n!}{r^n},$$

θ est analytique en y , sauf pour $y = 0$ qui est un point singulier : donc

$$\left| \frac{d^n \theta}{dy^n} \right| < x \frac{M n!}{|\lambda y^n|}.$$

λ étant aussi voisin de un qu'on veut. D'après le même raisonnement que dans le paragraphe 47, on conclurait de là que $\mathfrak{s}$ est analytique dans une région connexe ne contenant pas l'origine à son intérieur.

Soit $(y_0, 0)$ un point de cette région *situé sur* Ox ; y étant complexe, on a

$$\mathfrak{s}(x, y) = \mathfrak{s}(x, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial y_0} + \frac{(y - y_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial y_0^2} + \dots$$

Quand x tend vers zéro, $\frac{\partial^n \mathfrak{s}}{\partial y_0^n}$ tend vers $2\sqrt{\pi} \frac{\partial^n \varphi}{\partial y_0^n}$ et par suite $\frac{\mathfrak{s}}{2\sqrt{\pi}}$ tend vers

$$\varphi(y_0) + (y - y_0) \frac{d\varphi}{dy_0} + \frac{(y - y_0)^2}{2!} \frac{d^2 \varphi}{dy_0^2} + \dots = \varphi(y).$$

La *formule de discontinuité* est donc établie dans ce cas.

Quant aux intégrales

$$\mathfrak{K} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \psi(\xi) d\xi,$$

ce sont évidemment des fonctions *analytiques de* y admettant l'origine comme *point singulier*. Voyons si la *formule de Poisson* s'applique quand y tend vers zéro par valeurs complexes, avec la détermination positive du radical, et que x tend vers x_0 . D'après le

(1) Sinon on isolerait l'origine en partageant l'intégrale en deux parties.

raisonnement classique, il suffit d'étudier la limite de

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} d\xi = 2 \int_{\frac{x_0-x-\varepsilon}{2\sqrt{y}}}^{\frac{x_0-x+\varepsilon}{2\sqrt{y}}} e^{-s^2} ds.$$

Si la partie réelle de y est *positive*, on voit facilement que les limites de l'intégrale s'éloignent indéfiniment dans deux directions opposées faisant avec Ox un angle inférieur à 45° . Par suite, la limite est $2\sqrt{\pi}$. D'où la *formule de Poisson*.

49. ANALYTICITÉ DE L'INTÉGRALE Z . — Quand $f(x, y)$ est *analytique en y* , dans une région $\mathcal{R}$ contenant le contour rectangulaire (C) , l'*analyticité de Z par rapport à y* en tout point de S s'établirait aisément par le même procédé qu'au paragraphe 47 en utilisant la formule [voir formule (26), § 10]

$$2\sqrt{\pi} \frac{\partial Z}{\partial y} = - \int_{(C_y)} U f d\xi - \int \int_{S_y} U \frac{\partial f}{\partial \eta} d\xi d\eta.$$

La démonstration basée sur l'emploi du *domaine complexe* est également très simple et nous donnera, pour les démonstrations relatives aux équations $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, et $\mathcal{C}_2$, une marche analogue à celle que nous avons suivie dans la section précédente (voir *fig. 11*).

Si nous envisageons, comme dans le paragraphe 44, le contour rectangulaire $MABN$, α et β étant les abscisses de A et B , l'intégrale Z peut être prolongée analytiquement de la façon suivante. Considérons la fonction (ε' dépend de ε et sera défini plus loin)

$$-2\sqrt{\pi} Z_\varepsilon = \int \int_{S_{y-\varepsilon}} U f d\xi d\eta.$$

Nous pouvons l'écrire

$$(5) \quad -2\sqrt{\pi} Z_\varepsilon = \int_0^{y-\varepsilon'} h(\eta; x, y) d\eta,$$

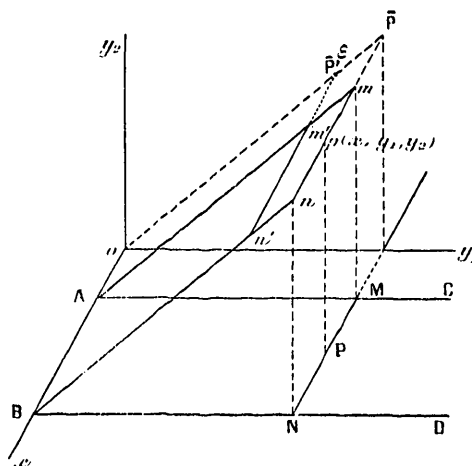
$$h(\eta; x, y) = \int_\alpha^\beta U(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi.$$

Supposons que f soit une fonction *continue en tout point de AB , analytique en η* , à l'intérieur d'un cylindre $\odot$ admettant AB comme

génératrice et limité par les sections droites contenant AC, BD (f étant analytique à l'intérieur de ces sections).

Dans ces conditions, $h(\eta; x, y)$ est une fonction analytique de y à droite du plan des xy_2 et une fonction analytique de η dans la portion de $\mathcal{D}$, bases comprises, située à gauche du plan perpendiculaire à Oy_1 ,

Fig. 11.



mené par p : cette fonction est continue quand y et η tendent vers zéro ou que η tend vers y . Nous pouvons alors faire l'intégration (5), en supposant que y soit complexe, $y - \varepsilon'$ étant le point $\bar{P}'$ situé sur $O\bar{P}$ à la distance ε de $\bar{P}$, ε restant fixe quand y varie.

Cela posé, il n'y a plus aucune difficulté à voir que, quand ε tend vers zéro, la fonction Z_ε tend uniformément vers une fonction limite pour tous les points $p(x, y_1, y_2)$ situés à l'intérieur de la portion $\mathcal{D}$, du domaine d'analyticité de f , qui est à droite de xOy_2 . Il suffit pour cela de remarquer que

$$-2\sqrt{\pi}Z_\varepsilon = \int \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2,$$

Σ_ε étant la surface $m'ABn'$. Or, on peut écrire

$$\left| \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \right| < \frac{1}{\sqrt{y_1-\eta_1}}, \quad \left| e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \right| < e^{-\frac{\lambda^2(x-\xi)^2}{y_1-\eta_1}}.$$

λ étant un nombre fixe quand la pente du plan pAB reste inférieure à une certaine limite : Z_ε est donc comparable à une intégrale étendue à

la projection de Σ_z . On en déduit aisément qu'on obtient une fonction analytique limite qui coïncide avec Z quand y est réel.

Même démonstration pour $\frac{\partial Z}{\partial x}$.

De plus, il résulte de ce que nous venons de voir que les limitations Z et $\frac{\partial Z}{\partial x}$ ne diffèrent de celles du *domaine réel* que par un *facteur constant*.

50. ANALYTICITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS. — Soit une solution de $\delta z = f$, *régulière dans une région $\mathcal{R}$* et se réduisant à une *fonction analytique de y* sur les côtés *parallèles à Oy* d'un rectangle situé dans $\mathcal{R}$: z sera une fonction analytique de y à l'intérieur de ce rectangle. En effet, nous pourrions déterminer z par la somme d'une intégrale $\mathfrak{x}$, de deux intégrales $\mathfrak{z}$ et d'une fonction Z . Les intégrales $\mathfrak{z}$ porteront sur des fonctions $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$ déterminées par les équations ($x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_0$ étant les équations des côtés du rectangle) :

$$F_1(\eta) = \varphi_1(\eta) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{y_0}^{\eta} \frac{x_2 - x_1}{(\eta - s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x_1 - x_2)^2}{4(\eta - s)}} \varphi_2(s) ds,$$

$$F_2(\eta) = \varphi_2(\eta) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{y_0}^{\eta} \frac{x_2 - x_1}{(\eta - s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x_1 - x_2)^2}{4(\eta - s)}} \varphi_2(s) ds.$$

La résolution de ces équations dans le domaine complexe s'effectue comme dans le domaine réel. F_1 et F_2 étant *analytiques en η* , *nulles et continues pour $\eta = y_0$* , φ_1 et φ_2 jouiront de cette même propriété. z est dans l'espace (x, y_1, y_2) une fonction *analytique de y* dans le domaine formé par la portion du domaine d'analyticité de f contenue dans le prisme ayant pour section droite le rectangle : elle est continue sur AB et analytique dans les plans verticaux AC , BD .

$\frac{\partial z}{\partial x}$ jouit de la même propriété parce que, en vertu de la régularité de z sur le contour, $\frac{\partial z}{\partial x}$ peut se mettre sous la même forme que z avec des intégrales $\mathfrak{z}$ portant sur des fonctions *nulles* pour $y = y_0$.

De là découle sans difficulté, grâce aux limitations de Z et $\frac{\partial Z}{\partial x}$, la démonstration des théorèmes analogues à ceux que nous avons établis dans la première section.

L'étude des équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}) \quad & \delta z = ap + cz + f, \\ (\mathcal{C}_1) \quad & \delta z = f(x, y, z, p) \end{aligned}$$

se fait aisément.

En ce qui concerne l'équation

$$r = f(x, y, z, p, q) \quad (f'_q > 0),$$

il faudra naturellement employer la méthode du paragraphe 30, en supposant que q et r admettent sur AB un accroissement d'ordre non nul par rapport à x .

Nous obtenons ainsi les THÉORÈMES SUIVANTS :

Étant donnée une région $\mathcal{R}$ du plan, contenant un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes, soit z une fonction continue, ainsi que ses dérivées premières; supposons que z prenne, sur les côtés du rectangle parallèles à Oy, une succession de valeurs analytiques en y . Dans ces conditions, z et ses deux dérivées seront des fonctions analytiques de y à l'intérieur du rectangle dans les deux cas suivants :

1° *Si dans la région $\mathcal{R}$, z est solution de l'équation $(\mathcal{C})$, et si les coefficients de cette équation sont à l'intérieur de $\mathcal{R}$ des fonctions continues analytiques en y ;*

2° *Si dans la région $\mathcal{R}$, z est solution des équations $(\mathcal{C}_1)$ ou $(\mathcal{C}_2)$, f étant continue en x et analytique en y , z , p , q , pour les valeurs prises par z et ses deux dérivées, la dérivée f'_q gardant un signe constant.*

De plus, dans le cas de l'équation $(\mathcal{C}_2)$, on suppose que r et q admettent, par rapport à x , sur les côtés horizontaux du rectangle, des accroissements d'ordre non nul.

§1. ANALYTICITÉ EN x ET y . — Les théorèmes précédents ne seraient plus vrais si les deux arcs C_1 , C_2 du contour (C), au lieu d'être des segments parallèles à Oy, étaient des arcs analytiques. Cependant, dans ces conditions, la fonction Z est une fonction analytique de x et de y , si f jouit de cette propriété. On pourrait partir de là pour étudier

l'analyticité des solutions, relativement à l'ensemble des variables x, y . Mais il est facile d'utiliser les considérations précédentes. Transformons le contour (C) en un contour rectangulaire par le changement de variable (V) déjà plusieurs fois employé : $x' = \frac{l(x - X_1)}{X_2 - X_1}$. Toute fonction analytique de x et de y est analytique en x' et y et réciproquement. Soit $\mathcal{F} = 0$ une des équations étudiées plus haut, $\mathcal{F}$ étant analytique en x, y, z, p, q . Sur tout segment vertical à l'intérieur du contour (C') transformé de (C), toute solution z de $\mathcal{F} = 0$, prenant sur C_1 et C_2 des valeurs analytiques, est, ainsi que $\frac{\partial z}{\partial x}$, une fonction analytique de y . Par conséquent, le problème de Cauchy est résoluble pour ce segment et nous donne une solution analytique en x et y , qui coïncide avec la proposée, car celle-ci est indéfiniment dérivable en x et y . Donc z est analytique en x et y .

En ce qui concerne l'équation $\delta z = 0$, toute solution analytique se réduit sur une caractéristique à une fonction entière de x d'ordre ≤ 2 (LALESKO, *Atti del Congresso Internazionale*, Roma 1908).

III. — Les fonctions $\mathfrak{E}$.

La considération des fonctions $\mathfrak{E}$ a fourni à M. Holmgren, dans ses études sur l'équation de la chaleur, plusieurs résultats fort intéressants et qui sont des cas particuliers de propositions plus générales, auxquelles nous allons arriver par une voie tout à fait différente.

§2. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS $\mathfrak{E}$. — Ces fonctions se reproduisent par les opérations algébriques élémentaires : multiplication, division, élévation aux puissances. Le produit de ces opérations effectué sur des fonctions $\mathfrak{E}$ est également une fonction $\mathfrak{E}$. Démontrons-le tout d'abord pour la multiplication : soient les fonctions f et g de y , telles que, dans l'intervalle (α, β) , $\left| \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right|$ et $\left| \frac{\partial^n g}{\partial y^n} \right|$ soient inférieurs à $\frac{M(2n)!}{R^n}$. La formule de Leibniz nous donne alors

$$\left| \frac{\partial^n f g}{\partial y^n} \right| \leq \frac{M^2}{R^n} (2n)! + C_n^1 (2n-1)! + \dots + C_n^n (2p)! (2(n-p))! + \dots + (2n)!.$$

Dans le crochet, on passe d'un terme au suivant en le multipliant

par $\frac{2p+1}{2(n-p)-1}$, quantité inférieure à 1, tant que $p < \frac{n-1}{2}$. Donc les termes décroissent, puis croissent; mais, comme ils sont deux à deux égaux, ils sont tous, sauf le premier et le dernier, inférieurs au second, qui est $n[2(n-1)]!$. Par conséquent, le crochet est inférieur à $2(2n)! + n(n-1)[2(n-1)]!$, lui-même inférieur à $K(2n)!$ ($K < 3$). Donc

$$\left| \frac{\partial^n f_g}{\partial y^n} \right| < \frac{M^2 K (2n)!}{R^n}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On démontrerait de même que $\frac{1}{f}$ est une fonction $\mathcal{K}$ ($f \neq 0$), en posant $\varphi = \frac{1}{f}$, d'où $f\varphi = 1$, et calculant la limitation de $f^{(n)}$ par voie de récurrence au moyen de la même formule de Leibniz; il suffirait d'isoler $f\varphi^{(n)}$ dans le second membre. Enfin, si $\varphi = f^a$, on dérivera $n-1$ fois la relation $\varphi' = \varphi \frac{f'}{f}$ ($\frac{f'}{f}$ est, en effet, fonction $\mathcal{K}$).

Nous avons dit plus haut que les solutions régulières de l'équation $\partial z = 0$ étaient analytiques en x et fonctions $\mathcal{K}$ en y . D'une façon plus précise, on peut, en tout point d'une région où z est régulière, dériver n fois la relation $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \frac{\partial^{2q} z}{\partial x^{2q}}$, ce qui donne

$$\left| \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} \right| < \frac{M(p+2q)!}{\rho^{p+2q}};$$

Or on sait que $(p+2q)!$ est comparable à $e^{p+2q} p! 2q!$. On peut donc écrire

$$(6) \quad \left| \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} \right| < M \frac{p!}{R_1^p} \frac{(2q)!}{R_2^q},$$

Nous dirons d'une fonction, qui satisfait à une limitation de cette forme dans une région donnée, qu'elle est, *par rapport à l'ensemble* (x, y) , analytique en x et d'espèce $\mathcal{K}$ en y . On définirait de même une fonction qui est d'espèce $\mathcal{K}$ par rapport à l'ensemble x, y .

Ce qui précède va nous conduire à cette conséquence que, si dans une fonction z analytique en x et d'espèce $\mathcal{K}$ en y , par rapport à l'ensemble, nous remplaçons x par une fonction $\mathcal{K}$ de y , le résultat est une fonction $\mathcal{K}$ de la variable unique y .

Pour cela, remarquons tout d'abord qu'il est facile de former une

fonction $F(y)$ dont toutes les dérivées pour une valeur donnée y_0 de y soient égales à $\frac{M(2n)!}{R^n}$: il suffit, par exemple, de prendre la fonction

$$F(y) = \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{y-y_0}} e^{-\frac{\xi^2}{4(y-y_0)}} \frac{d\xi}{1-\frac{\xi^2}{R}} \quad (-\sqrt{R} < a_1 < 0 < a_2 < \sqrt{R}),$$

qui est la valeur, pour $x=0$, d'une solution de $\delta z=0$ se réduisant, pour $y=y_0$, $a_1 < x < a_2$, à la fonction $\frac{1}{1-\frac{x^2}{R}}$.

Les dérivées de F pour $y=y_0$ ont bien la valeur désirée; il est vrai que notre formule ne définit F (en apparence) que pour $y \geq y_0$, mais ceci importe peu pour l'objet que nous avons en vue ⁽¹⁾.

Cela posé, soit un point x_0, y_0 du plan pour lesquelles inégalités (6) sont vérifiées, et dans z substituons à x la fonction $\varphi(y)$, d'espèce $\mathcal{K}$, telle que $x_0 = \varphi(y_0)$. Proposons-nous de calculer une limite supérieure des dérivées de la fonction $z[\varphi(y), y]$ pour $y=y_0$. Les dérivées partielles de z en ce point seront évidemment limitées par celles de la fonction

$$(7) \quad \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{1-\frac{x-x_0}{R_1}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{y-y_0}} e^{-\frac{\xi^2}{4(y-y_0)}} \frac{d\xi}{1-\frac{\xi^2}{R_2}},$$

et comme les calculs de dérivation d'une fonction composée donnent pour chaque dérivée une *expression entière ne contenant que des signes +*, les dérivées de $z[\varphi(y), y]$ seront majorées par celles de la fonction de y obtenue en remplaçant x par $\varphi(y)$ dans (7). D'après ce que nous avons vu plus haut, cette fonction de y possède des dérivées de tous ordres vérifiant l'inégalité caractéristique des fonctions $\mathcal{K}$. Si y_0 varie dans un intervalle (i) et x_0 dans un intervalle tel que les valeurs correspondantes de φ appartiennent à (i) , l'inégalité (6) étant toujours vérifiée, la limitation que nous avons obtenue sera indépendante de x_0 ,

(1) On peut dire que F *major*e f pour $y=y_0$. Si une fonction $f(x, y, \dots)$ est d'espèce $\mathcal{K}$ par rapport à l'ensemble $x, y, \dots$, on pourra la majorer pour $x=x_0, y=y_0, \dots$, par le *produit* de plusieurs fonctions de x , de $y, \dots$, analogues à F .

y_0 et, par suite, $z[\varphi(y), y]$ sera fonction $\mathfrak{X}$ dans tout l'intervalle (i) .

DEFINITION. — Appelons *courbe* $\mathfrak{X}$ tout arc de courbe représenté par une équation de la forme $x = X(y)$, X étant une *fonction* $\mathfrak{X}$ dans un intervalle (α, β) . Le résultat obtenu précédemment peut alors s'énoncer ainsi :

Sur une courbe $\mathfrak{X}$ toute solution régulière de l'équation de la chaleur, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$, se réduit à une fonction $\mathfrak{X}$ de y .

Ce résultat avait été démontré par M. Holmgren, dans le cas d'une courbe *analytique*, par des considérations entièrement différentes.

§3. ÉTUDE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION LINÉAIRE DONT LES COEFFICIENTS SONT FONCTIONS $\mathfrak{X}$. — Nous avons vu que, si les coefficients de l'équation

$$(\varepsilon) \quad \delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + c z + f$$

sont des fonctions analytiques de x dans une région $\mathfrak{A}$, toute solution régulière est également analytique en x . Il est tout naturel de se demander si, dans le cas où *les coefficients sont d'espèce $\mathfrak{X}$* dans $\mathfrak{A}$, les solutions *régulières* sont aussi de cette espèce.

Suivant toujours la marche habituelle dans ces questions, envisageons tout d'abord l'équation $\delta z = f$; si l'on peut trouver une solution régulière qui soit d'espèce $\mathfrak{X}$ en même temps que f , le fait aura lieu pour toute autre solution régulière d'après ce qu'on a vu pour $\delta z = 0$.

Pour démontrer ceci, nous utiliserons tout d'abord la fonction Z ,

$$Z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{s_y} \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} f(\xi, \eta) d\eta = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{s_y} U f dS.$$

Prenons ici comme contour (C) un contour *rectangulaire* de côtés parallèles aux axes ($x = x_1, x = x_2, y = y_1$) et soit y_2 l'ordonnée du côté supérieur du rectangle supposé contenu dans $\mathfrak{A}$. Nous obtenons par n dérivations successives la formule, dont nous avons déjà

parlé plus haut (§ 49),

$$(8) \quad \dots 2\sqrt{\pi} \frac{\partial^n Z}{\partial y^n} \\ = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^{n-1} U(\xi, y_1; x, y)}{\partial y^{n-1}} f(\xi, y_1) + \frac{\partial^{n-2} U}{\partial y^{n-2}} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + U \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} \right] d\xi \\ + \int \int_{S_y} U \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial \eta^n} d\xi d\eta.$$

Pour toute valeur de y intérieure à l'intervalle (y_1, y_2) , on a dans la première intégrale

$$\left| \frac{\partial^p U}{\partial y^p} \right| < \frac{M_1 p!}{|\lambda(y - y_1)|^p} \quad (0 < \lambda < 1),$$

d'où, en introduisant la limitation $\frac{M(2n)!}{R^n}$ des dérivées de f ,

$$\left| \frac{\partial^n Z}{\partial y^n} \right| < \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{\pi}} M M_1 \left\{ \frac{(n-1)!}{|\lambda(y - y_1)|^n} + \frac{(n-2)! 2!}{R |\lambda(y - y_1)|^{n-1}} + \dots + \frac{[2(n-1)]!}{R^n} \right\} \\ + (y - y_1) M \frac{(2n)!}{R^n};$$

Or, il est clair qu'on pourra déterminer deux nombres M' et R' tels que cette expression soit inférieure à $\frac{M' 2n!}{R'^n}$ quand y appartient à un intervalle (y'_1, y_2) , $y'_1 > y_1$. Z est donc fonction $\mathfrak{E}$ en tout point intérieur au rectangle et il suffit de dériver Z par rapport à x pour se convaincre du même fait pour $\frac{\partial Z}{\partial x}$.

Abordons maintenant l'équation (E), où nous supposons que les coefficients a, c, f sont des fonctions $\mathfrak{E}_R$ dans la région $\mathfrak{R}$ contenant le rectangle (ρ) envisagé plus haut.

Quand l'équation se réduit à $\delta z = 0$, nous avons vu que le rayon de convergence de la solution en un point $P(x, y)$ est égal à $\frac{d}{\sqrt{2}}$, d représentant la plus courte distance du point (x, y) aux côtés verticaux; z est donc une fonction $\mathfrak{E}_{\lambda^2 d^2}$ $\left(0 < \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sur tout segment vertical intérieur à (ρ) . A chaque dérivation par rapport à x , il s'introduit d en dénominateur dans la limitation des dérivées par

rapport à x , donc d^2 dans celles des dérivées par rapport à y , mais celles-ci deviennent aussi infinies sur le côté horizontal de (ρ) et nous avons vu plus haut que $(y - y_1)^n$ figurait au dénominateur dans la limitation de la dérivée d'ordre n par rapport à y .

Pour simplifier les choses, nous allons appeler d la plus courte distance au contour envisagé tout entier; on aura alors $y - y_1 > \alpha d^2$, α ne dépendant que de la hauteur du rectangle.

Nous sommes ainsi induits à supposer que les dérivées successives de z , solution de $(\mathcal{C})$, et de $\frac{\partial z}{\partial x}$, existent et satisfont à la limitation

$$\left| \frac{\partial^n z}{\partial y^n} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}} \right| < \frac{M(2n)!}{(\mu d)^{2n}}.$$

Nous allons donc montrer que si ces inégalités ont lieu jusqu'à l'ordre n , elles sont vraies pour l'ordre $n + 1$, μ étant un nombre que nous déterminerons pour réaliser ce fait. Pour cela, remarquons que la fonction $z_n = \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$, satisfait à l'équation

$$(\mathcal{C}_n) \quad \partial z_n = a \frac{\partial z_n}{\partial x} + c z_n + f_n,$$

f_n ne contenant que des dérivées d'ordre inférieur à n .

1° $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ existent: si, en effet, (ρ_n) est un contour rectangulaire intérieur à (ρ) et contenant (x, y) (fig. 12), z_n sera la solution de l'équation $(\mathcal{C}_n)$ prenant sur (ρ_n) des valeurs connues et, par suite, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ existent ⁽¹⁾ au point intérieur (x, y) ;

2° Calculons la limitation de ces deux dérivées. Nous avons

$$f_n = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + c z \right) - a \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x \partial y^n} - c \frac{\partial^n z}{\partial y^n} + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}.$$

On peut toujours supposer qu'on a choisi le contour (ρ) ou le nombre μ de telle sorte qu'on ait toujours $R \geq \mu^2 d^2$, et que par suite a, c, f soient des fonctions $\mathcal{E}_{\mu^2, d^2}$. La formule de Leibniz montre

(1) Nous n'avons démontré cela, dans le second Chapitre, que si $\frac{\partial a}{\partial x}$ existe, en supposant la simple continuité des données.

alors (cf. § 52) que

$$|f_n| < \frac{\text{KAM}(2n)!}{(\mu d)^{2(n-1)}}, \quad \left| \frac{\partial f_n}{\partial y} \right| < \frac{\text{KAM}[2(n+1)]!}{(\mu d)^{2n}},$$

A étant la constante relative à α, c, f .

Or, si d'une manière générale, dans un domaine limité par un contour rectangulaire, une solution u de l'équation

$$\partial u = a \frac{\partial u}{\partial x} + cu + f$$

est inférieure en valeur absolue à $[U]$, avec

$$|a|, |c|, \left| \frac{\partial a}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial a}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial c}{\partial y} \right| < A, \quad f < F \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < F',$$

on peut écrire en tout point intérieur au contour, d' étant sa plus courte distance à ce contour,

$$(9) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| < L \left(\frac{A[U] + F}{d'^2} + F' \right),$$

L étant un coefficient numérique *indépendant des coefficients et de la solution* (').

Appliquons cela au cas actuel où le contour est (ρ_n) et supposons (ρ_n) choisi de telle sorte que $d' = \lambda_n d$ ($\lambda_n < 1$), d étant la plus courte distance de $P(x, y)$ à (ρ) , déjà envisagée plus haut. Il suffit pour cela de prendre pour (ρ_n) le contour formé par des parallèles aux côtés de ρ à la distance $(1 - \lambda_n)d$.

Les limitations maxima de $z_n, f_n, \frac{\partial f_n}{\partial y}$ étant atteintes *sur les côtés de* (ρ_n) , nous aurons à appliquer la formule (9), avec $d' = \lambda_n d$ et

$$u = z_n, \quad [U] = \frac{M(2n)!}{[\mu(1 - \lambda_n)d]^{2n}},$$

$$F = \frac{\text{KAM}(2n)!}{[\mu(1 - \lambda_n)d]^{2(n-1)}}, \quad F' = \frac{\text{KAM}[2(n+1)]!}{[\mu(1 - \lambda_n)d]^{2n}}.$$

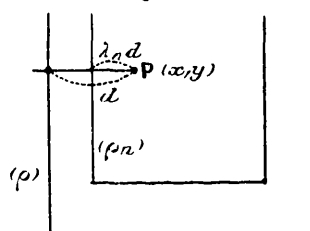
(¹) Il va sans dire qu'ici nous avons donné une limitation commune sous la forme la plus simple que possible, qui est naturellement assez grossière, bien qu'exacte. C'est ainsi que $\frac{\partial u}{\partial x}$ devient infini sur le contour comme $\frac{1}{d'}$, seulement (voir § 21, 23).

Donc

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| \\ \text{et} \\ \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| \end{array} \right\} < L \frac{\Lambda M(2n)!}{[\mu(1-\lambda_n)d]^{2n} \lambda_n^2 d^2} [1 + (2n+1)(2n+2)\mu^2 d^2 (1-\lambda_n)^2 + \lambda_n^2 d^2].$$

On pourra déterminer deux nombres β et γ , indépendants de n , de

Fig. 12.



telle sorte que le crochet soit inférieur à $\beta + \gamma n^2 \lambda_n^2$ en tout point intérieur à (ρ) ou sur (ρ) . Choisissons alors pour λ_n la valeur $\frac{\alpha}{n}$. Il vient

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < L \frac{\Lambda M[2(n+1)]!}{(\mu d)^{2(n+1)}} \frac{4n^2}{(2n+1)(2n+2)} \frac{\mu^2(\beta + \alpha^2 \gamma)}{4\alpha^2 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{2n}}.$$

Or la seconde fraction est < 1 , et

$$\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{-2n} < e^{2\alpha};$$

si donc on a choisi α et μ de telle façon que

$$\Lambda L \frac{\mu^2}{4\alpha^2} e^{2\alpha} (\beta + \alpha^2 \gamma) < 1 \quad (1),$$

on aura les limitations suivantes, qui sont précisément celles que nous voulions établir :

$$\left| \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x \partial y^n} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}} \right| < \frac{M[2(n+1)]!}{(\mu d)^{2(n+1)}}.$$

(1) On pourra, par exemple, choisir α de telle sorte que μ soit le plus grand possible; une fois μ déterminé, le choix de M en résultera à cause des limitations des premières dérivées.

Nous avons supposé $b = -1$. Dans le cas où b est une *fonction* $\mathfrak{E}$ de *signe constant*, nous serions conduits aux mêmes résultats, car z_n satisfait alors à l'équation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + b \frac{\partial z_n}{\partial y} = a \frac{\partial z_n}{\partial x} + \left(c - \frac{\partial b}{\partial y}\right) z_n + f'_n,$$

f'_n ne contenant encore que des dérivées d'ordre inférieur à n . Cette équation se ramène à la forme normale par un changement de variable, ce qui permet d'obtenir pour les dérivées de z_n des inégalités tout à fait analogues aux inégalités (10). Et ainsi, nous pouvons énoncer le THÉORÈME SUIVANT :

Lorsque les coefficients de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0$$

sont par rapport à y des fonctions $\mathfrak{E}$ dans une région $\mathfrak{R}$ du plan, toute solution régulière dans cette région est elle-même d'espèce $\mathfrak{E}$ en y , ainsi que sa dérivée par rapport à x ⁽¹⁾.

§4. APPLICATIONS DU THÉORÈME PRÉCÉDENT. — Soit $\varphi(y)$ une *fonction* $\mathfrak{E}$ de y et $y = \psi(t)$ une *fonction* $\mathfrak{E}$ de t . Nous allons montrer que $\varphi[\psi(t)]$ est elle-même d'espèce $\mathfrak{E}$ en t . Soit y_0 une valeur de y et $y_0 = \psi(t_0)$: d'après ce que nous avons vu au paragraphe §2, la propriété sera établie si nous la démontrons pour $\Phi(y)$ et $\Psi(t)$, Φ et Ψ étant des fonctions majorant φ et ψ pour $y = y_0, t = t_0$. Or soit $z(x, y)$ une solution de $\delta z = 0$, se réduisant à $\Phi(y)$ sur Oy , régulière dans un domaine traversé par Oy (cf. z_0 , §33); si nous faisons le changement de variable $y = \Psi(t)$, z vérifiera l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{\Psi'(t)} \frac{\partial z}{\partial t}$, $\Psi'(t)$ étant positif au voisinage de $t = t_0$ et, par suite, z se réduira, pour $x = 0$ et t voisin de t_0 , à une fonction $\mathfrak{E}$ de t : or celle-ci est $\Phi[\Psi(t)]$.

(¹) A la vérité, notre démonstration suppose l'existence de $\frac{\partial a}{\partial x}$. On pourrait, d'ailleurs, faire tomber cette hypothèse. Elle suppose aussi réalisées, pour la fonction b , les conditions qui permettent d'effectuer le changement de variable. On aurait un théorème analogue pour l'*analyticité en x et l'espèce Henry*.

Donc une fonction $\mathfrak{F}$ de fonction $\mathfrak{F}$ est elle-même d'espèce $\mathfrak{F}$ et plus généralement une fonction $\mathfrak{F}$ de $u, v, \dots$, composée de fonctions $\mathfrak{F}$ de x , est elle-même d'espèce $\mathfrak{F}$ en x ⁽¹⁾.

Appliquons ceci aux résultats du paragraphe précédent. Une solution régulière de l'équation (C) ne se réduit pas, en général, à une fonction $\mathfrak{F}$ de y sur une courbe $x = X(y)$. Cependant, ce fait a lieu si X est d'espèce $\mathfrak{F}$ et si, par le changement de variable $x = x' + X(y)$, les coefficients deviennent des fonctions $\mathfrak{F}$ de y au voisinage de $x' = 0$. Ceci est réalisé en particulier si ces coefficients sont d'espèce $\mathfrak{F}$ par rapport à l'ensemble (x, y) . Ainsi donc, dans ces conditions, toute solution régulière se réduit sur une courbe d'espèce $\mathfrak{F}$, $x = X(y)$, à une fonction de $\mathfrak{F}$ de y .

IV. — Le problème de Cauchy et le problème du prolongement.

Le problème de Cauchy (z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ donnés sur une courbe) pour une équation du type parabolique n'est pas en général résoluble. Dans le cas de l'équation de la chaleur, M. Holmgren a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème soit possible lorsque la courbe portant les données est analytique. Nous allons nous placer ici à un point de vue un peu différent.

§§. PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION $\partial z = f$. — Remarquons que, d'une façon générale, lorsque la courbe portant les données est représentée par une équation de la forme $x = X(y)$, X étant indéfiniment dérivable, s'il existe une solution régulière de $\partial z = f$ d'un certain côté de la courbe, elle ne peut être qu'unique. En effet, s'il en existait deux, leur différence serait une solution régulière, s'annulant sur la courbe ainsi que sa dérivée par rapport à x . Par conséquent, toutes les équations qui permettent d'effectuer le calcul des dérivées en un point de la courbe donneraient zéro comme résultat. Or, nous avons vu que quand ces dérivées existaient en un point d'un contour (C), elles étaient les limites effectives des dérivées de la solution en un point tendant vers (C). Donc la solution est *identiquement nulle*.

(1) Ceci généralise les résultats du paragraphe 52.

Dans ce qui suit, nous nous occupons simplement du cas où l'on se donne sur une courbe $\mathfrak{C}$ des valeurs de z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ qui soient des fonctions $\mathfrak{C}$ et nous supposons que les coefficients deviennent des fonctions $\mathfrak{C}$, par le changement de variables $x' = x - X(\gamma)$, ce qui aura lieu, en particulier, s'ils sont d'espèce $\mathfrak{C}$ par rapport à l'ensemble (x, γ) .

Nous aurons donc en définitive à résoudre le problème *pour l'axe des γ en supposant les coefficients d'espèce $\mathfrak{C}$ en γ , ainsi que les fonctions données*

$$(11) \quad z(0, \gamma) = \varphi(\gamma), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0, \gamma) = \psi(\gamma).$$

Proposons-nous dans ces conditions de déterminer la solution, pour l'équation $\delta z = f$.

Il suffira d'ajouter à la solution bien connue z_0 du problème pour $\delta z = 0$ ⁽¹⁾, la solution de $\delta z = f$, s'annulant sur $O\gamma$ ainsi que sa dérivée par rapport à x .

Or cette solution est

$$(12) \quad Z_0(x, \gamma) = \int_0^x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p f(\xi, \gamma)}{\partial \gamma^p} d\xi.$$

En effet, si f est une fonction $\mathfrak{C}_R$ dans un intervalle (γ_1, γ_2) , la série que nous venons d'écrire sera convergente à l'intérieur de l'intervalle $(-\sqrt{R}, +\sqrt{R})$ et par suite Z_0 sera déterminée à l'intérieur d'un rectangle ayant pour axe $O\gamma$ et pour dimensions $2\sqrt{R}$ et $\gamma_2 - \gamma_1$ ⁽²⁾. Or une vérification immédiate montre que Z_0 s'annule sur $O\gamma$ ainsi que sa dérivée par rapport à x .

Cette fonction Z_0 est elle-même d'espèce $\mathfrak{C}$, ce qui constitue une *seconde démonstration* du fait que les solutions régulières $\delta z = f$ sont fonctions $\mathfrak{C}$.

⁽¹⁾ Cette solution est

$$z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n \varphi}{d\gamma^n} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{d^n \psi}{d\gamma^n}.$$

⁽²⁾ En supposant que f soit fonction $\mathfrak{C}$ pour $|x| < \sqrt{R}$, sinon le domaine serait réduit.

On a en effet ⁽¹⁾

$$\frac{\partial^n Z_0}{\partial y^n} = \int_0^x \sum_p \frac{(x - \xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^{n+p} f(\xi, y)}{\partial y^{n+p}} d\xi.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^n Z_0}{\partial y^n} \right| &< M \int_0^x \sum_p \frac{(x - \xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{[2(n+p)]!}{R^{n+p}} d\xi \\ &< M \sum_p \frac{x^{2p+2}}{(2p)!} \frac{[2(n+p)]!}{R^{n+p}}. \end{aligned}$$

Remplaçons $[2(n+p)]!$ par $\int_0^\infty e^{-t} t^{2(n+p)} dt$: l'expression devient

$$\frac{Mx^2}{R^n} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{e^{\frac{tx}{\sqrt{R}}} + e^{-\frac{tx}{\sqrt{R}}}}{2} \right) t^{2n} dt.$$

Mais

$$\int_0^\infty e^{-\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R}}\right)t} t^{2n} dt = \frac{(2n)!}{\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R}}\right)^{2n+1}}.$$

Il vient donc en définitive

$$\left| \frac{\partial^n Z_0}{\partial y^n} \right| < \frac{M(2n)!}{2R^n} \left[\frac{x^2}{\left(1 + \frac{x}{\sqrt{R}}\right)^{2n+1}} + \frac{x^2}{\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R}}\right)^{2n+1}} \right],$$

ce qui montre bien que Z_0 sera d'espèce $\mathcal{H}$ dans tout intervalle strictement intérieur à $(-\sqrt{R}, +\sqrt{R})$. Évidemment, il en est de même pour $\frac{\partial Z_0}{\partial x}$ qui est donnée par la formule

$$\frac{\partial Z_0}{\partial x} = \int_0^x \sum_p \frac{(x - \xi)^{2p}}{(2p)!} \frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p} d\xi.$$

56. PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'ÉQUATION LINÉAIRE. — Envisageons

(¹) Par la notation $\sum_p$ nous entendons la sommation effectuée pour toutes les valeurs de p de zéro à ∞ .

maintenant l'équation

$$(C) \quad \partial z = a \frac{\partial z}{\partial x} + cz + f,$$

dont les coefficients sont d'espèce $\mathfrak{E}_R$ dans une région contenant un segment de Oy , sur lequel les données sont les fonctions d'espèce $\mathfrak{E}_R$, $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ [formule (11)]. Le changement d'inconnue

$$u(x, y) = z(x, y) - \varphi(y) - xf(y)$$

nous ramène au même problème pour une équation de même forme avec des données nulles sur Oy .

Soit donc u , solution de (C), nulle sur Oy , ainsi que sa dérivée : la formule (12) nous montre que u est solution de l'équation

$$(13) \quad u(x, y) = \int_0^x \sum_p \frac{(x - \xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ \times \frac{\partial^p}{\partial y^p} \left[a(\xi, y) \frac{\partial u(\xi, y)}{\partial \xi} + c(\xi, y) u(\xi, y) + f(\xi, y) \right] d\xi.$$

Nous allons résoudre cette équation par *approximations successives*.

Si $\frac{\partial a}{\partial x}$ existe et est d'espèce $\mathfrak{E}_R$ nous pouvons par un changement d'inconnue [formule (40), § 17] rendre le coefficient a nul, c et f restant des fonctions $\mathfrak{E}$. Supposons-nous donc placés dans ce cas; nous formerons alors la chaîne d'opérations suivantes :

$$u_0 = \int_0^x \sum_p \frac{(x - \xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p} d\xi, \\ u_1 = \int_0^x \sum_p \frac{(x - \xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p c u_0}{\partial y^p} d\xi, \\ \dots\dots\dots$$

Envisageons le premier terme

$$u_1(x, y) = \int_0^x \sum_p \frac{(x - \xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} d\xi \int_0^\xi \sum_q \frac{(\xi - s)^{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{\partial^p}{\partial y^p} \left[c \frac{\partial^q f(s, y)}{\partial y^q} \right] ds.$$

Un terme de u , peut s'écrire, par un changement dans l'ordre d'in-

tégration,

$$\int_0^x \frac{\partial^p}{\partial y^p} \left(c \frac{\partial^q f}{\partial y^q} \right) ds \int_s^x \frac{(x-\xi)^{2p+1} (\xi-s)^{2q+1}}{(2p+1)! (2q+1)!} d\xi$$

(c et f fonctions de s, y). La deuxième intégrale est égale à

$$\begin{aligned} & \frac{(x-s)^{2(p+q)+3}}{(2p+1)! (2q+1)!} \int_0^1 t^{2p+1} (1-t)^{2q+1} dt \\ &= \frac{(x-s)^{2(p+q)+3}}{(2p+1)! (2q+1)!} B[2(p+1), 2(q+1)] = \frac{(x-s)^{2(p+q)+3}}{[2(p+q)+3]!}. \end{aligned}$$

Donc, en changeant le nom de la variable d'intégration,

$$u_1 = \int_0^x \sum_p \sum_q \frac{(x-\xi)^{2(p+q)+3}}{[2(p+q)+3]!} \frac{\partial^p}{\partial y^p} \left(c \frac{\partial^q f}{\partial y^q} \right) d\xi.$$

Supposons que, dans les résultats des opérations de dérivation, nous ayons remplacé partout les dérivées par leurs *bornes supérieures* : le résultat ainsi obtenu sera une série σ à termes positifs. Si nous considérons la fonction $\bar{u}_1$ obtenue en remplaçant $\frac{\partial^p}{\partial y^p} c(\xi, y) \frac{\partial^q f(\xi, y)}{\partial y^q}$ dans l'expression de u_1 par $\frac{\partial^{p+q} c f}{\partial y^{p+q}}$, et si nous effectuons ensuite la majoration, nous obtenons la série σ plus une autre série σ' à termes tous positifs et le module de u_1 sera donc *certainement inférieur* à $\sigma + \sigma'$. Réunissons maintenant dans $\bar{u}_1$ les $r+1$ termes tels que $p+q=r$: nous voyons alors que les séries majorantes relatives à u_1 et à ses dérivées en y seront limitées par celles qui sont relatives à la fonction

$$U_1 = \frac{x}{2} \int_0^x \sum_r \frac{(x-\xi)^{2r+2}}{(2r+2)!} \frac{\partial^r c f}{\partial y^r} d\xi.$$

Cela fait, dans l'équation suivante

$$u_2 = \int_0^x \sum_p \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p c u_1}{\partial y^p} d\xi,$$

substituons U_1 à la place de u_1 , puis effectuons les mêmes opérations que plus haut en remplaçant $\frac{\partial^p}{\partial y^p} \left(c \frac{\partial^q c f}{\partial y^q} \right)$ par $\frac{\partial^{p+q} c^2 f}{\partial y^{p+q}}$ et ainsi de suite : nous obtenons ainsi des fonctions U_n , dont les fonctions majorantes

auront toujours une valeur supérieure à celles qui majoreraient les u_n .
Or (voir § 52)

$$U_n = \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^x \sum_r \frac{(x-\xi)^{2r+n+1}}{(2r+n+1)!} \frac{\partial^r c^n f}{\partial y^r} d\xi,$$

$$\left| \frac{1}{2^n} \frac{\partial^r c^n f}{\partial y^r} \right| < K^n C^n F \frac{(2r)!}{R^r}.$$

D'où

$$|U_n| < K^n C^n F \sum_r \frac{|x|^{2r+n+2}}{(2r+n+2)!} \frac{(2r)!}{R^r} < F \frac{(KCx^2)^n}{(n+2)!} \sum_r \frac{x^{2r+2}}{R^r},$$

ce qui est le terme général d'une série convergente pour $|x| < \sqrt{R}$.

De même

$$\frac{\partial^m U_n}{\partial y^m} = \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^x \sum_r \frac{(x-\xi)^{2r+n+1}}{(2r+n+1)!} \frac{\partial^{r+m} c^n f}{\partial y^{r+m}} d\xi,$$

$$\left| \frac{\partial^m U_n}{\partial y^m} \right| < F \frac{(KCx^2)^n}{(n+2)!} \sum_r \frac{x^{2r+2}}{(2r)!} \frac{[2(r+m)]!}{R^{r+m}},$$

série étudiée antérieurement (§ 55). On trouve ainsi

$$\left| \frac{\partial^m U_n}{\partial y^m} \right| < \frac{F(KC)^n x^{2n+2}}{(n+2)!} \frac{(2m)!}{R^m}$$

pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle strictement intérieur à $(-\sqrt{R}, +\sqrt{R})$. Il résulte de là que la série $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ satisfait à l'équation (C) (où $a=0$), car cette série et toutes les séries dérivées en y sont des séries entières en x . On a d'ailleurs ⁽¹⁾

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^m U_n}{\partial y^m} \right| < F \frac{(2m)!}{R^m} x^2 e^{KCx^2}.$$

Nous avons supposé $a=0$. S'il n'était pas possible de ramener l'équation primitive à ce cas particulier, on verrait aisément que le raisonnement qui vient d'être donné fournit également la solution par approximations successives ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Il serait possible de former une limitation plus étroite.

⁽²⁾ La solution, si elle est d'espèce $\mathcal{H}$, ne peut être qu'unique, car, si $f=0$, l'équation (C) ne peut admettre que la solution identiquement nulle comme on le verrait aisément par le procédé de l'itération.

Proposons-nous maintenant le *problème de Cauchy pour un arc de courbe* Γ d'espèce $\mathfrak{K}$ [$x = X(y)$] et supposons que les coefficients deviennent, après le changement de variable $x = x' + X(y)$, des fonctions $\mathfrak{K}_R$ dans la région $\mathfrak{A}$ définie par $|x'| < h$, $\alpha < y < \beta$. Dans ces conditions si les données et la fonction X sont d'espèce $\mathfrak{K}_R$ on obtiendra la solution du problème de Cauchy dans le domaine $\alpha < y < \beta$, $|x - X(y)| < l$, l étant le plus petit des nombres h et $\sqrt{R}$.

La condition relative aux coefficients sera réalisée en particulier *s'ils sont des fonctions $\mathfrak{K}$ par rapport à l'ensemble des variables x, y dans une région $\mathfrak{A}$ contenant Γ .*

37. LE PROBLÈME DU PROLONGEMENT. — La solution que nous venons de trouver est définie *de part et d'autre* de la courbe Γ . Si, au contraire, on se propose de déterminer la solution au moyen de ses valeurs sur un contour (C) situé dans $\mathfrak{A}$, la solution ne sera, en général, définie qu'à l'intérieur de ce contour. Proposons-nous de chercher à quelles conditions une solution déterminée dans une région intérieure à $\mathfrak{A}$, limitée par un certain contour, est *prolongeable* au delà d'une portion Γ de ce contour ne comprenant aucun segment de caractéristique. Nous dirons avec M. Holmgren que la solution z envisagée est *prolongeable au delà de Γ* , s'il existe, au delà de Γ , une solution régulière z' de l'équation, telle que cette solution et ses dérivées premières se raccordent avec z et ses dérivées le long de Γ , c'est-à-dire que *l'ensemble de z et de z' constitue une solution régulière unique dans un domaine contenant à son intérieur la courbe Γ .*

M. Holmgren a étudié le *prolongement des solutions de l'équation de la chaleur* en supposant la courbe Γ *analytique*. Nous allons utiliser les résultats établis plus haut pour traiter le problème dans le cas de l'équation (C) en supposant tout d'abord que Γ est un *segment AB parallèle à Oy* situé dans la région $\mathfrak{A}$ où les coefficients de l'équation (C) sont d'espèce $\mathfrak{K}$ en y .

La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une solution régulière de l'équation (C), définie d'un certain côté de AB, soit prolongeable au delà de AB, est que les valeurs qu'elle prend sur un

segment quelconque strictement intérieur à AB constituent une fonction $\mathfrak{E}$ de y :

1° La condition est évidemment *nécessaire* d'après ce que nous avons vu plus haut; 2° la condition est *suffisante*. Soit en effet (ρ) un contour (C) rectangulaire situé dans $\mathfrak{A}$ et ayant un côté appliqué sur AB, suivant A'B, le point A' pouvant être aussi voisin qu'on le veut du point A (A peut être en effet sur le contour de $\mathfrak{A}$). z étant une fonction $\mathfrak{E}$ sur A'B, nous pouvons appliquer le même raisonnement qu'au paragraphe 35, mais en prenant des contours successifs (ρ_n) ayant tous un côté sur A'B, leurs autres côtés étant parallèles: d désignera alors la distance à ces autres côtés et le raisonnement suivi donnera une limitation valable même sur les points de A'B ('). Ceci prouve que $\frac{\partial z}{\partial x}$ est aussi une fonction $\mathfrak{E}$ dans tout intervalle intérieur à AB. Pour un tel intervalle, on peut alors résoudre le problème de Cauchy qui définit une solution *régulière unique d'espèce $\mathfrak{E}$ de part et d'autre de AB*, coïncidant avec la proposée d'un certain côté.

Au cas où AB est un arc d'espèce $\mathfrak{E}$ et d'équation $x = X(y)$ le théorème est encore vrai en supposant que les coefficients deviennent des fonctions $\mathfrak{E}$ au voisinage de $x' = 0$ après le changement de variable $x = x' + X(y)$. Donc *l'énoncé donné plus haut s'applique à un arc AB d'espèce $\mathfrak{E}$ et à une équation où les coefficients sont fonctions $\mathfrak{E}$ en x, y .*

38. ÉTUDE DES PROBLÈMES PRÉCÉDENTS LORSQUE LES COEFFICIENTS SONT ANALYTIQUES PAR RAPPORT A y . — Les considérations précédentes montrent le rapport étroit qui existe entre la nature des coefficients d'une équation aux dérivées partielles et les solutions régulières de celles-ci. Il suffit que les coefficients soient *analytiques en x ou d'espèce $\mathfrak{E}$ en y* pour que *toute solution régulière* soit elle-même de cette nature. Mais

(¹) Avec une petite différence cependant, car la limitation de $\frac{\partial z_n}{\partial y}$ sur l'axe des y devra intervenir dans la limitation de $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, mais comme elle est connue d'avance, ceci ne change pas sensiblement le raisonnement; il suffit d'ajouter au second membre de (10) un terme qui est de même forme que les autres.

les liens ne sont pas aussi étroits pour chaque espèce de fonctions et pour chaque variable. Ainsi nous avons vu que l'*analyticité des coefficients* en y n'entraînait celle des solutions que *sous certaines conditions*. Étant donné un contour rectangulaire formé par deux segments de caractéristiques et deux segments parallèles à Oy , si z prend sur chacun de ces segments une succession de valeurs analytiques, z sera une fonction analytique de y à l'intérieur du contour. Sera-t-elle *prolongeable* au delà des deux arcs ? En d'autres termes, les résultats démontrés plus haut seront-ils également valables en remplaçant le mot *fonction* $\mathfrak{F}$ par le mot *fonction analytique* ?

La question qui se pose tout d'abord est de voir si, dans le cas de l'équation $\delta z = f$, f étant analytique en y , la solution du *problème de Cauchy*, lorsqu'on donne z et $\frac{\partial z}{\partial x}$, fonctions *analytiques de y* , sur un segment de Oy est elle-même *analytique en y* .

Or nous obtenons cette solution en ajoutant à Z_0 la solution z_0 du problème de Cauchy pour $\delta z = 0$, laquelle est bien analytique en y . En est-il de même pour Z_0 ? Si, sur un segment de Oy , nous avons

$$\left| \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right| < \frac{M n!}{R^n},$$

un calcul analogue à celui qui a été fait dans le cas des fonctions $\mathfrak{F}$ (§ 33) nous montre que

$$\left| \frac{\partial^n Z_0}{\partial y^n} \right| < \frac{M}{R^n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} \frac{(n+p)!}{R^p} < \frac{M x^2}{R^n} n! \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p} p!}{(2p+2)!}.$$

D'où l'on déduit immédiatement l'*analyticité*. Mais nous pouvons opérer autrement en écrivant

$$\sum_p \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p} = \sum_p \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{p!} \frac{p!}{(2p+1)!} \frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p}.$$

Si, dans le plan de la variable complexe t , nous envisageons l'intégrale

$$J_p = \int_{-\infty - ih}^{+\infty + ih} e^{-t^2} t^{-2p} dt,$$

une intégration par parties montre que

$$J_p = -\frac{2}{2p-1} J_{p-1} \quad (J_0 = \sqrt{\pi}).$$

Donc

$$J_{p+1} = (-1)^{p+1} \frac{2^{2p+1} p!}{(2p+1)!} \sqrt{\pi}, \quad \frac{p!}{(2p+1)!} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{4}\right)^p \int e^{-t^2} t^{-2(p+1)} dt.$$

Il résulte de là que la série envisagée peut se représenter par

$$\begin{aligned} & -\frac{(x-\xi)}{2\sqrt{\pi}} \int \sum_{p=0}^{\infty} \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t^2} \right]^p \frac{1}{p!} \frac{\partial^p f(\xi, \gamma)}{\partial \gamma^p} e^{-t^2} \frac{dt}{t^2} \\ & = -\frac{(x-\xi)}{2\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} f\left[\xi, \gamma - \frac{(x-\xi)^2}{4t^2}\right] \frac{dt}{t^2}, \end{aligned}$$

puisque f est analytique (développement de Taylor). Donc

$$(13) \quad Z_0 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-\xi) d\xi \int_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} f\left[\xi, \gamma - \frac{(x-\xi)^2}{4t^2}\right] \frac{dt}{t^2}.$$

On démontrerait de même que

$$\frac{\partial Z_0}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x d\xi \int_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} e^{-t^2} f\left[\xi, \gamma - \frac{(x-\xi)^2}{4t^2}\right] dt.$$

Voyons comment doit être choisi h . Nous supposons que, dans la région $\mathfrak{A}$, f est, autour de chaque point, holomorphe dans un cercle dont le rayon minimum est R . Il faudra donc que

$$\left| \frac{(x-\xi)^2}{4t^2} \right| < R, \quad t > \frac{|x-\xi|}{2\sqrt{R}},$$

ce qui a lieu si $h > \frac{|x|}{2\sqrt{R}}$. On prendra h supérieur à la valeur maxima de $\frac{|x|}{2\sqrt{R}}$ dans la région envisagée. Dans ces conditions, il est manifeste que z sera une fonction analytique de γ dans cette région.

Plus généralement, si, en posant $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $f(x, \gamma)$ est une fonction analytique de γ , quand le point (x, γ_1, γ_2) varie dans un certain domaine $\mathfrak{D}$, qui se réduit à $\mathfrak{A}$ pour $\gamma_2 = 0$, Z_0 et $\frac{\partial Z_0}{\partial x}$ sont analytiques

dans le même domaine. Dans l'intégrale qui représente Z_0 , il faudra prendre $h > \frac{|x|}{2\sqrt{d}}$, d désignant la plus courte distance du point p (x, y_1, y_2) à la frontière de la section du domaine par le plan passant par p et parallèle à $y_2 O y_1$. Dans ces conditions, si dans le domaine $\mathfrak{O}$ on a $|f| < F|x|^p$, on en déduit

$$|Z_0| < \frac{F|x|^{p+2}}{(p+1)(p+2)}, \quad \left| \frac{\partial Z_0}{\partial x} \right| < \frac{F|x|^{p+1}}{p+1}.$$

Nous pouvons maintenant résoudre le *même problème de Cauchy* (données nulles sur Oy) pour l'équation

$$\partial u = a \frac{\partial u}{\partial x} + cu + f,$$

dont les coefficients sont analytiques en y dans $\mathfrak{O}$. Nous formerons la suite d'approximations

$$(14) \quad \partial u_0 = 0, \quad \partial u_1 = a \frac{\partial u_0}{\partial x} + cu_0, \quad \dots,$$

$u_0, u_1, \dots$ seront, ainsi que $\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots$, des fonctions analytiques de y dans $\mathfrak{O}$, et l'on aura (en supposant x positif)

$$|u_0| < \frac{Fx^2}{2}, \quad \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right| < Fx.$$

On en déduit

$$\left| a \frac{\partial u_0}{\partial x} + cu_0 \right| < F \left(Ax + \frac{Cx^2}{2} \right) < MFx.$$

D'où

$$\begin{aligned} |u_1| &< \frac{MFx^3}{3!}, & \left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right| &< \frac{MFx^2}{2!}, \\ \left| a \frac{\partial u_1}{\partial x} + cu_1 \right| &< MF \left(\frac{Ax^2}{2!} + \frac{Cx^3}{3!} \right) < \frac{M^2Fx^2}{2!}, \\ |u_2| &< \frac{M^2Fx^4}{4!}, & \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right| &< \frac{M^2Fx^3}{3!} \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On obtiendra ainsi deux séries *absolument et uniformément convergentes* de fonctions analytiques de y dans toute région intérieure à $\mathfrak{O}$ et qui, par suite, représente *deux fonctions analytiques*

de y dans la même région ⁽¹⁾. On aura d'ailleurs, pour $x > 0$,

$$|u| < F(e^{Mx} - 1 - Mx), \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < F(e^{Mx} - 1).$$

39. SUR DIFFÉRENTS PROBLÈMES DE PROLONGEMENT. — Ceci établi, revenons à la question que nous nous étions posée. Si une solution de l'équation (C), à coefficients analytiques en y dans le domaine complexe Ω , est *analytique en y* sur les côtés verticaux d'un rectangle contenu dans la région réelle $\mathcal{R}$ de Ω , elle est *prolongeable* à droite et à gauche; c'est-à-dire qu'elle constitue une fonction analytique de y dans un domaine faisant partie de Ω et contenant le rectangle. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que $\frac{\partial z}{\partial x}$ se réduit pour chacun des arcs à une fonction analytique de y ⁽²⁾. Mais il ne suffit pas que z soit analytique sur un seul côté du rectangle pour qu'elle puisse être prolongée au delà suivant une fonction analytique. Elle est prolongée suivant une fonction $\mathcal{K}$ dont toutes les dérivées se raccordent avec celles de la solution sur l'arc de courbe, mais ce prolongement ne sera pas nécessairement analytique.

Dans le cas où le contour (C) n'est plus rectangulaire, mais où C_1 et C_2 sont analytiques, les résultats précédents sont encore vrais si le changement de variable $x' = \frac{l(x - X_1)}{X_2 - X_1}$ transforme les coefficients en fonctions analytiques de y , quand x' appartient à un intervalle contenant l'intervalle $(0, l)$.

Si l'on suppose maintenant que les coefficients soient des fonctions analytiques de x et de y , les formules (13) et (14) nous montrent que la solution du *problème de Cauchy avec des données analytiques* (et pour un arc analytique que nous transformerons en un segment

⁽¹⁾ Il va sans dire que si $\frac{\partial a}{\partial x}$ existe, il convient de faire le changement d'inconnue qui annule a .

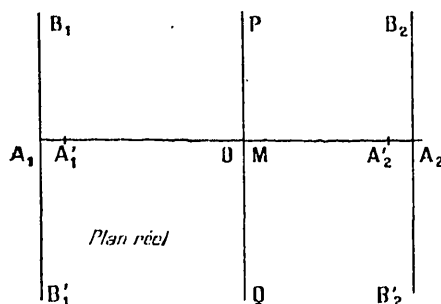
⁽²⁾ On le voit en répétant avec très peu de modifications le raisonnement qui a été fait dans le cas des fonctions $\mathcal{H}$. On prendra alors des contours successifs formés par les côtés verticaux du rectangle et les parallèles au côté horizontal. A chaque dérivation, il s'introduit à la fois la distance d à ce côté, au premier degré, et le nombre n (et non plus n^2): ces deux faits sont connexes.

Ceci résulte aussi de ce qui a été vu dans la deuxième Partie de ce Chapitre.

de Oy) sera elle même analytique, ce que nous savions déjà par le *théorème classique*.

Si z est donné par ses valeurs sur un contour (C) , ces valeurs étant analytiques en y sur C_1 et C_2 , la solution du problème de Cauchy sera possible pour tout segment parallèle à Oy et intérieur à (C) ⁽¹⁾, puisque $\frac{\partial z}{\partial x}$ sera fonction analytique de y sur ce segment; elle sera possible aussi pour un arc analytique intérieur à C et même pour C_1 et C_2 . La résolution du problème de Cauchy nous donne alors une fonction *analytique* de x et y , coïncidant avec la solution proposée. Donc

Fig. 13.



le *prolongement est possible*, relativement à l'ensemble des variables x, y , à l'intérieur d'une bande comprise entre les deux caractéristiques qui comprennent les deux arcs C_1 et C_2 du contour (C) .

Le prolongement est-il possible également au-dessous du segment A_1A_2 de caractéristique? Pour cela, il est tout d'abord *nécessaire* que la valeur prise sur celui-ci soit une *fonction analytique* de x . Rechercher les conditions suffisantes serait un problème assez difficile. Bornons-nous, par exemple, au cas de l'équation de la chaleur $\delta z = 0$, avec un contour rectangulaire.

Si, sur un segment $A'_1A'_2$ intérieur à A_1A_2 (fig. 13), la valeur de z est une *fonction analytique* de x , nous pourrions d'une infinité de façons

(1) Nous avons déjà vu ceci dans le paragraphe 51 même pour les équations non linéaires. Le résultat relatif au prolongement est également vrai pour les équations non linéaires.

prolonger la solution au-dessous de $A'_1 A'_2$, suivant une fonction analytique de x , mais non de y , si les valeurs de z sur AC et BD sont quelconques. Si, en effet, nous prenons un point M sur $A'_1 A'_2$, nous connaissons en M les valeurs de $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ et $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x \partial y^n}$ quel que soit n : z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont sur l'arc PM des fonctions $\mathfrak{E}$, même au point M , et nous pouvons, d'une infinité de façons, les prolonger au delà de M , de façon à obtenir une fonction $\mathfrak{E}$ sur un segment PQ (voir paragraphe suivant). Alors la solution du problème de Cauchy relatif à ces données et au segment PQ nous donnera une fonction qui coïncide avec la solution au-dessus de $A'_1 A'_2$ et sur $A'_1 A'_2$ lui-même, et qui sera analytique en x .

Le cas où l'on veut avoir un prolongement *analytique en x et y* a été traité par M. Lalesco. La valeur de la solution sur toute caractéristique doit être une *fonction entière d'ordre ≤ 2* et sa connaissance suffit à déterminer la solution de part et d'autre de la caractéristique.

60. UN PROBLÈME RELATIF À LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Quelle doit-être la nature de la donnée sur $A_1 A_2$ pour que z puisse être prolongeable *au-dessous de $A_1 A_2$* , de façon à prendre des valeurs déterminées sur les prolongements $A_1 B'_1$ et $A_2 B'_2$ de $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$? En d'autres termes, si l'on se reporte à la *signification physique* du problème : étant donnée la portion d'un milieu indéfini limitée par deux plans parallèles et dans laquelle on étudie la distribution de la température supposée uniforme dans chaque tranche parallèle à ces plans, connaissant la température initiale en chaque point et la température des deux plans frontières à chaque instant, quelles doivent être ces données pour que l'état du corps puisse être considéré comme résultant d'un *état antérieur à l'instant initial*? C'est le problème que s'est posé M. Appell, dans le cas d'un milieu *indéfini dans tous les sens*.

L'étude de l'analyticité va nous donner ici une condition nécessaire : envisageons le plan de la variable complexe x (*fig. 14*) et marquons sur l'axe réel le segment $\overline{A_1 A_2} = A_1 A_2$; les valeurs prises par z sur $\overline{A_1 A_2}$ doivent définir une *fonction $\Phi(x)$ analytique dans le carré de diagonale $\overline{A_1 A_2}$, continue sur le contour du carré*. Ceci résulte de ce que nous avons dit dans le paragraphe 43 (en note).

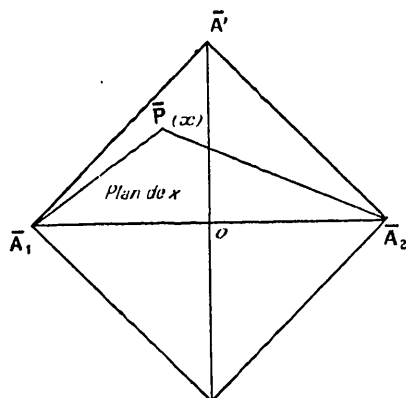
Cette condition est aussi suffisante. Pour le voir, remarquons tout

d'abord que si $\Phi(x)$ est une fonction analytique de x satisfaisant à la condition que nous venons de donner, l'intégrale

$$K(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \Phi(\xi) d\xi,$$

x_1 et x_2 étant les abscisses de $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$, est une fonction analytique de x dont la valeur peut être calculée en prenant pour chemin d'intégration la ligne brisée $\bar{A}_1 \bar{P} \bar{A}_2$: quand y tend vers zéro et x vers x_0 , x_0 étant un point intérieur au carré ou sur son contour, l'intégrale tend vers $\Phi(x_0)$ (nous pouvons supposer Φ nul en $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$).

Fig. 14.



Cela posé, soit O le milieu de $A_1 A_2$, que nous supposons à l'origine (fig. 13) : effectuons le prolongement, au-dessous de $A_1 A_2$, de la fonction $z(o, y)$. Pour cela posons

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \\ \Phi(ix) &= a_0 + ia_1 x - a_2 x^2 + \dots = \varphi(x^2) + ix\psi(x^2). \end{aligned}$$

La dérivée $\frac{\partial^n z(o, y)}{\partial y^n}$, pour $y = 0$, est égale à $(2n)! a_{2n}$: pour avoir une fonction de y , définie pour $y \leq 0$, et dont la dérivée $n^{\text{ième}}$, pour $y = 0$, soit égale à a_{2n} , formons une solution z' de l'équation $\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} = -\frac{\partial z'}{\partial y}$ prenant sur $A_1 A_2$ la valeur $\varphi(x^2)$ et sur $A_1 B'_1, A_2 B'_2$ des valeurs $\chi_1(y), \chi_2(y)$.

On aura, au point O , $\frac{\partial^n z'}{\partial y^n} = (-1)^n \frac{\partial^{2n} z'}{\partial x^{2n}} = (2n)! a_{2n}$. Par conséquent,

$z'(0, y)$ constitue un prolongement de $z(0, y)$. Nous constituerons de même, avec la dérivée par rapport à x d'une solution z'' prenant sur $A_1 A_2$ la valeur $x\psi(x^2)$, un prolongement de $\frac{\partial z}{\partial x}(0, y)$. Soient $f(y)$ et $g(y)$ les fonctions ainsi calculées.

Remarquons que φ a une valeur bien déterminée aux points A_1 et A_2 : en effet, dans le plan de la variable complexe x , $\Phi(ix)$ est la valeur de Φ au point obtenu en faisant tourner le point d'abscisse x de 90° autour du point O . Donc $\varphi(x_2^2) + ix_2\psi(x_2^2) = \Phi(\bar{A}')$, $\bar{A}'$ étant sur le contour du carré. Or, nous avons supposé Φ continue sur le contour du carré. φ est donc continue en A_1 et A_2 et nous devons choisir γ_1 et γ_2 se raccordant avec φ en ces points. Même raisonnement pour ψ .

Formons maintenant la solution z_1 du problème de Cauchy relatif à l'équation $\delta z = 0$, au segment POQ (fig. 13) et aux données $f(y)$ et $g(y)$: cette solution prend évidemment la valeur $\Phi(x)$ sur $A_1 A_2$; elle est définie à l'intérieur du contour $B_1 A_1 A_2 B_2$ et sur les côtés $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ eux-mêmes. En effet, en un point de OQ , on a

$$\frac{\partial^{2n} z_1}{\partial x^{2n}} = (-1)^n \frac{\partial^{2n} z'}{\partial x^{2n}}, \quad \frac{\partial^{2n+1} z_1}{\partial x^{2n+1}} = (-1)^n \frac{\partial^{2n+1} z''}{\partial x^{2n+1}},$$

et par suite, x étant réel, on peut écrire

$$z_1(x, y) = \text{partie réelle de } [z'(ix, y) - iz''(ix, y) dx].$$

Or, cette fonction est définie et continue même pour $x = x_1$ et $x = x_2$ (ici $x_1 = -x_2$) puisqu'on obtient pour ces valeurs de x le point $\bar{A}'$ et son symétrique, de sorte que $z'(ix_2, y)$ et $z''(ix_2, y)$, par exemple, sont les valeurs de z' et z'' au point $\bar{A}'$. Quand y tend vers zéro, d'après ce que nous avons dit plus haut, $z'(ix_2, y)$ tend vers $\varphi(\bar{A}') = \varphi(-x_2^2)$, quantité réelle, car, si nous avons représenté z' par des fonctions $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{X}$, la fonction $\mathfrak{X}$ seule intervient ici. Donc pour $x = x_2$ et $y = 0$, la partie réelle de $z'(ix, y)$ est $\varphi(-x_2^2)$; de même $z''(ix, y)$ prend la valeur $ix_2\psi(-x_2^2)$ et, par suite en A_2 , z_1 prend la valeur

$$\varphi(-x_2^2) + x_2\psi(-x_2^2) = \Phi(x_2).$$

Nous trouvons donc bien ainsi une fonction prenant la valeur $\Phi(x)$

sur Λ_1, Λ_2 et des valeurs continues sur $A_1 B'_1, A_2 B'_2$, se raccordant avec Φ en A_1 et A_2 .

V. — Sur un théorème d'existence.

61. IMPOSSIBILITÉ D'UN CERTAIN PROBLÈME RELATIF AUX SOLUTIONS ANALYTIQUES. — Nous allons envisager maintenant le problème du prolongement analytique dans le cas où l'on se donne les valeurs de la solution sur *deux arcs de courbes analytiques sécants*. Si nous nous bornons à l'équation de la chaleur $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, le problème sera donc le suivant : *peut-on obtenir une solution de cette équation analytique autour d'un point du plan et prenant des valeurs données sur deux arcs de courbes analytiques passant par ce point?* Cette question a été envisagée dernièrement par M. Levi, qui a trouvé quelques cas d'exception, mais qui n'a pu décider si le problème était possible en général. Nous allons montrer que, *en général, le problème est impossible*.

Bornons-nous à un exemple simple, en supposant que les deux courbes soient l'axe Oy et la bissectrice OR de xOy et que la solution doive être nulle sur Oy . On peut toujours supposer cette dernière hypothèse réalisée, car, si la donnée est $\varphi_1(y)$ sur Oy , il suffit d'envisager la solution $z - \zeta$, ζ étant une solution analytique prenant la valeur φ_1 sur Oy . Soit donc $\varphi(y)$ la valeur sur OR avec la condition $\varphi(0) = 0$. Si la solution cherchée existe, elle doit se réduire sur Ox à une fonction impaire entière $\psi(x)$. On aura

$$z(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \psi(\xi) d\xi.$$

Écrivons que, sur OR , z prend la valeur $\varphi(y)$. Il vient

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4y}} \psi(\xi) d\xi = \varphi(y);$$

ψ étant une fonction impaire, le changement de la variable ξ en $-\xi$ montre que

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(y+\xi)^2}{4y}} \psi(\xi) d\xi = \varphi(y),$$

φ est donc la demi-somme des deux intégrales, et la fonction ψ satisfait à l'équation

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{4}} e^{-\frac{\xi^2}{4y}} \operatorname{sh} \frac{\xi}{2} \psi(\xi) d\xi = \varphi(y).$$

Posons

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \frac{\xi}{2} \psi(\xi) &= \xi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \xi^{2n}, \\ e^{\frac{y}{4}} \varphi(y) &= y \sum a_n y^n, \end{aligned}$$

puis faisons le changement de variable $\xi = 2t\sqrt{y}$. Il vient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sum \alpha_n 2^{2(n+1)} t^{2(n+1)} y^n dt = \sum a_n y^n.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^{2(n+1)} dt = \frac{1.3 \dots (2n+1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1.3 \dots (2n+1) \alpha_n 2^{n+1} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n,$$

par suite

$$\alpha_n = \frac{a_n}{2^{n+1} 1.3 \dots (2n+1)}.$$

Or nous avons posé

$$\psi(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} \sum \alpha_n x^{2n},$$

et $\psi(x)$ doit être une fonction entière d'ordre ≤ 2 . Par conséquent, *il est nécessaire que la fonction*

$$\frac{x^2}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{2n}}{2^{n+1} 1.3 \dots (2n+1)},$$

soit une fonction entière d'ordre ≤ 2 . Il est clair que ceci n'aura pas lieu en général, car $\operatorname{sh} \frac{x}{2}$ admet pour zéros les points $x = 2K\pi i$, et il faudrait tout d'abord que la série Σ admette ces zéros.

Donnons d'ailleurs un exemple simple de l'impossibilité du pro-

blème. Prenons $f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}}$. Alors nos formules nous montrent que

$\varphi(y) = 2ye^{-\frac{y}{2}}$. Nous avons ainsi une solution unique, nulle sur Oy et égale sur OR à une fonction analytique. Elle se réduit sur Ox à $f(x)$ non entière; donc *elle n'est pas prolongeable au-dessous de Ox* .

62. CAS OU LES ARCS DE COURBE NE SONT PAS SÉCANTS. — Qu'arriverait-il si les arcs de courbe portant les données *n'étaient pas sécants*? Soient A_1B_1 , A_2B_2 ces arcs, compris entre les caractéristiques A_1A_2 , B_1B_2 . Nous avons vu que si, en envisageant un contour (C) formé par un segment de caractéristique et deux arcs analytiques, on se donnait la valeur de z (celle-ci étant analytique sur les deux arcs analytiques), la solution était analytique en x et y et existait dans toute la bande limitée par les caractéristiques extrêmes. Par conséquent, dans le cas actuel, si nous nous donnons une *fonction arbitraire* représentant la valeur de z sur A_1A_2 , la solution, prenant les valeurs données sur le contour (C) formé par $B_1A_1A_2B_2$, répondra à la question : sur toute caractéristique coupant A_1B_1 , elle se réduit à une *fonction entière d'ordre ≤ 2* .

Il est intéressant de voir comment ce problème peut être rattaché à la théorie des équations fonctionnelles. Supposons que A_1B_1 et A_2B_2 soient des segments parallèles à Oy ($x = 0$ et $x = h$) et soit a, a_2 un segment de caractéristique ($y = y_0$) qui les coupe. La détermination de z revient à celle de la fonction entière $\psi(x)$ à laquelle z doit se réduire pour $y = y_0$. Supposons-nous placés dans le cas où les données sont zéro sur A_1B_1 et $\varphi(y)$ sur A_2B_2 . $\psi(x)$ sera impaire et, au point a_2 , nous devons avoir

$$\left(\frac{d^{2n}\psi}{dx^{2n}}\right)_{x=h} = \left(\frac{d^n\varphi}{dy^n}\right)_{y=y_0}.$$

Donc ψ satisfait à la relation

$$\psi(h+x) + \psi(h-x) = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n\varphi}{dy^n} = \omega(x^2),$$

on en déduit aisément que $\psi(x)$ est une *fonction impaire, solution*

de l'équation fonctionnelle

$$(15) \quad \psi(x+2h) - \psi(x) = g(x), \quad g(x) = \omega[(x+h)^2].$$

L'équation (15) est une équation envisagée par Abel. Si $\Psi(x)$ est une solution quelconque de cette équation, on vérifie sans peine, d'après la forme de g , que $\frac{\Psi(x) - \Psi(-x)}{2}$ est une solution impaire.

Ceci nous montre que l'équation (15) admet une infinité de solutions d'ordre ≤ 2 . Il est clair qu'elle ne peut pas admettre de solution d'ordre inférieur à celui de g .

Si nous avons pris comme données $\varphi_1(y)$ et $\varphi_2(y)$, nous aurions obtenu

$$\begin{aligned} \psi(x) + \psi(-x) &= f(x^2), \\ \psi(h+x) + \psi(h-x) &= g(x^2), \end{aligned}$$

f et g étant des fonctions entières d'ordre ≤ 2 . Ce système admet pour ψ une *infinité de solutions*, parmi lesquelles il y en a une *infinité qui sont des fonctions entières d'ordre ≤ 2* . Si f et g sont d'ordre $2 - \alpha$, ψ ne peut être d'un ordre inférieur.



NOTE SUR LE CONTOUR RECTANGULAIRE.

Cette Note a pour objet d'établir, dans le cas du contour rectangulaire, les résultats qui figurent dans les paragraphes 4*, 5*, 6*, 7*, 15 (cf. aussi § 34).

Lorsqu'on fait l'étude des solutions de l'équation $\delta z = f$, toutes les questions concernant l'existence des dérivées au bord et la limitation de leurs accroissements sont, en effet, particulièrement simples à traiter dans le cas d'un contour rectangulaire. Une simple transformation de coordonnées, qui ne change pas la forme de l'équation, nous permet toujours de prendre, comme équations des côtés du contour, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$, soit Ox , Oy , AB : les données respectives sont $\Phi(x)$, $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$.

Envisageons tout d'abord l'équation $\delta z = 0$ et, comme au paragraphe 5, formons la fonction $\bar{z}$ prenant sur Ox la valeur $\Phi(x)$, puis posons $z = \bar{z} + z_1$, avec

$$(1) \quad z_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \varphi_1(\eta) d\eta \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{a-x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-a)^2}{4(y-\eta)}} \varphi_2(\eta) d\eta,$$

φ_1 et φ_2 étant les solutions du système

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi_1(\eta) - \bar{z}(0, \eta) \equiv F_1(\eta) = \varphi_1(\eta) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \frac{a}{(\eta-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4(\eta-s)}} \varphi_2(s) ds & [F_1(0) = 0], \\ \Phi_2(\eta) - \bar{z}(a, \eta) \equiv F_2(\eta) = \varphi_2(\eta) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \frac{a}{(\eta-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4(\eta-s)}} \varphi_1(s) ds & [F_2(0) = 0]. \end{cases}$$

Le grand avantage de ces deux équations est que les deux intégrales sont indéfiniment dérivables par rapport à y , si φ_1 et φ_2 sont continues. Par conséquent, si $F_i(y)$, ($i = 1, 2$), admet par rapport à y un accroissement d'ordre γ , c'est-à-dire si l'on a

$$|F_i(y) - F_i(\eta)| < (L)|y - \eta|^\gamma,$$

il en sera de même de φ_i . De plus $\varphi_i(0) = 0$ et $|\varphi_i(y)| < (L)y^\gamma$.

Proposons-nous, par exemple, de calculer $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}$. Nous mettrons $\frac{\partial H}{\partial x}$ sous la forme (cf. § 4)

$$(1') \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^y \frac{\xi}{(s-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\xi^2}{4(s-\eta)}} \bar{\varphi}_1(s; x, y) ds \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^y \frac{a-\xi}{(s-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\xi^2}{4(s-\eta)}} \bar{\varphi}_2(s; x, y) ds,$$

$\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ étant données par les deux équations

$$-\frac{x e^{-\frac{x^2}{4(y-s)}}}{2(y-s)^{\frac{3}{2}}} = \bar{\varphi}_1(s; x, y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_s^y \frac{a}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4(t-s)}} \bar{\varphi}_2(t; x, y) dt, \\ \frac{(a-x) e^{-\frac{(a-x)^2}{4(y-s)}}}{2(y-s)^{\frac{3}{2}}} = \bar{\varphi}_2(s; x, y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_s^y \frac{a}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4(t-s)}} \bar{\varphi}_1(t; x, y) dt.$$

Posons alors

$$(2') \quad \bar{\varphi}_1 = -\frac{x e^{-\frac{x^2}{4(y-s)}}}{2(y-s)^{\frac{3}{2}}} + \psi_1, \quad \bar{\varphi}_2 = \frac{(a-x) e^{-\frac{(a-x)^2}{4(y-s)}}}{2(y-s)^{\frac{3}{2}}} + \psi_2.$$

Les équations en $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ deviennent alors des équations en ψ_1 et ψ_2 avec les mêmes noyaux; dans la première, par exemple, le terme connu sera

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_s^y \frac{a}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4(t-s)}} \frac{a-x}{2(y-t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(a-x)^2}{4(y-t)}} dt,$$

et ceci est une fonction continue de s, x, y pour $s \leq y$ et $x < a$, et qui, pour $x = a$, a une limite qui est continue en y et s . Donc, ce terme est partout ⁽¹⁾ continu pour $0 \leq s \leq y$. De même pour la deuxième équation. Par suite, ψ_1 et ψ_2 seront partout continues et l'on pourra écrire, g , étant *partout continue*,

$$(1'') \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{2} V[\xi, \eta; x, y] - h_0(\xi, \eta; x, y) - g_1(\xi, \eta; x, y),$$

(1) Quand nous emploierons dans cette Note le mot *partout*, nous entendrons par là : dans le rectangle, contour compris. D'autre part, la lettre γ (ou γ') désignera toujours un nombre compris entre *zéro* et *un*, sinon il peut s'introduire pour la valeur *un* des termes logarithmiques, comme au paragraphe 13.

h_0 étant le terme obtenu en remplaçant, dans l'expression (1') de $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ respectivement par les deux premiers termes des formules (2') [cf. § 4, formules (9) et (11)].

Passons maintenant à l'étude des accroissements : commençons par étudier les accroissements de z par rapport à x .

Si l'on a ($h > 0$)

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| < (L)h^\alpha,$$

la fonction $\bar{z}(x+h, y) - \bar{z}(x, y)$, solution de $\partial z = 0$, nulle à l'infini et dont le module est $< (L)h^\alpha$ sur Ox , admettra partout cette limitation (§ 18).

Quant à z_1 , pour l'étudier il nous suffit d'envisager la première intégrale $\mathfrak{z}$ de la formule (1), l'autre étant analogue. Or, si l'on a

$$(i) \quad |\mathfrak{z}(h, y) - \mathfrak{z}(+0, y)| < (L)h^\gamma,$$

la fonction $\mathfrak{z}(x+h, y) - \mathfrak{z}(x, y)$, solution de $\partial z = 0$, admettra partout cette limitation, puisqu'elle l'admet sur Oy et est nulle sur Ox et à l'infini. Cela posé :

1° Si $|\Delta F_i| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma}{2}}$, on a $|\mathfrak{z}_1(x+h, y) - \mathfrak{z}_1(x, y)| < (L)h^\gamma$. — En effet, $\Delta \varphi_i$ satisfait à la même inégalité que ΔF_i . Écrivons alors

$$\mathfrak{z} = \frac{\varphi_1(y)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} d\eta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y x \frac{\varphi_1(\eta) - \varphi_1(y)}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} d\eta.$$

Si nous appelons $\mathfrak{z}_1$ et $\mathfrak{z}_2$ ces deux intégrales, nous avons aisément

$$|\mathfrak{z}_1(h, y) - \mathfrak{z}_1(+0, y)| = \frac{|\varphi_1(y)|}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{h^2}{4y}} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds, \quad \left[s = \frac{x^2}{4(y-\eta)} \right].$$

Or $|\varphi_1(y)| < (L)y^{\frac{\gamma}{2}}$. Si donc nous posons $h^2 = 4\lambda y$, le second membre sera inférieur à $(L)h^\gamma \lambda^{-\frac{\gamma}{2}} \int_0^\lambda \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds$. Le terme en λ reste toujours fini et l'expression envisagée est donc $< (L)h^\gamma$.

D'autre part $\mathfrak{z}_2(0, y) = 0$ et $|\mathfrak{z}_2(h, y)| < (L)h^\gamma$, comme on le voit par le même changement de variable. D'après ce que nous avons dit

plus haut, l'accroissement de $z_1 + z_2 = z$ est donc d'ordre γ , l'inégalité (i) étant vérifiée : d'où l'accroissement de z_1 .

2° Si $|\Delta F_i| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma+1}{2}}$, $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ existe partout. — On a, en effet, d'après la formule (7) du paragraphe 2,

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{\varphi_1(\gamma)}{\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

et ceci tend vers zéro avec y . Si l'on calcule $\frac{\partial z_2}{\partial x}$, on constate immédiatement que cette intégrale est continue et tend aussi vers zéro avec y . $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ est donc continue au bord (1).

3° Si F'_i existe (avec $F'_i(0) = 0$) et si $|\Delta F'_i| < (L)\Delta y^{\frac{\gamma}{2}}$, $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ existent partout et $\left| \frac{\partial z_1}{\partial y}(x+h, y) - \frac{\partial z_1}{\partial y}(x, y) \right| < (L)h^\gamma$. — En effet, d'après (2), φ'_i existe et $\varphi'_i(0) = 0$; donc, z étant le premier terme de z_1 ,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\partial V}{\partial \eta}(0, \eta; x, y) \varphi_1(\eta) d\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \varphi'_1(\eta) d\eta,$$

et l'on est ramené au 1°.

Envisageons maintenant les accroissements Δ par rapport à y .

4° Si $|\Delta F_i| < (L)\Delta y^\gamma$, on a $|\Delta z_1| < (L)\Delta y^\gamma$. — En effet, $|\varphi_i(\gamma)| < (L)y^\gamma$ et, d'après la formule de limitation (6), § 2, des intégrales z , $|z_1(0, k)| < (L)k^\gamma$. La fonction $z_1(x, y+k) - z_1(x, y)$, solution de $\delta z = 0$, se réduit sur Ox à $z_1(0, k)$ et sur les côtés verticaux à $F_i(y+k) - F_i(y)$. Elle a donc partout la limitation $(L)k^\gamma$.

(1) On déduit aisément de là les formules de la deuxième Note du paragraphe 5* : en effet, avec les notations de cette Note, on a alors $|\Delta \varphi_i| < (L)\Delta y^{\frac{1+\gamma}{2}}$, d'où la limitation de $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_2}{\partial x}$. Si $\Phi(x)$ est simplement continue, on pose $\varphi_i = \psi_i + \chi_i$, les fonctions ψ_i et χ_i étant les solutions des équations (2) dans lesquelles on prend pour premier membre $\Phi_i(\eta)$, puis $-\bar{z}(0, \eta)$ [et $-\bar{z}(a, \eta)$]. Alors $\psi_i(0) \neq 0$ et il s'introduit $\frac{1}{\sqrt{y}}$ dans la limitation des intégrales $\frac{\partial z}{\partial x}$ portant sur ψ_i . De plus $\frac{\partial \bar{z}(0, \eta)}{\partial \eta}$ est de la forme $\frac{\bar{z}}{\eta}$: dans les intégrales δ portant sur χ_i , on décomposera l'intervalle d'intégration en deux intervalles égaux $(0, \frac{y}{2})$ et $(\frac{y}{2}, y)$; dans le premier on dérivera le noyau, dans le deuxième on appliquera la formule (7) (§ 2), et l'on aura ainsi $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\zeta}{\sqrt{y}}$ (ζ continue partout).

5° Si F'_i existe [$F'_i(0) = 0$] et si $|\Delta F'_i| < (L) \Delta y^\gamma$, $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ existe partout et $\left| \Delta \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| < (L) \Delta y^\gamma$. — Même démonstration, en considérant $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ comme solution de $\delta z = 0$.

6° Si $|\Delta F'_i| < (L) \Delta y^{\frac{\gamma}{2}}$, on a $\left| \Delta \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| < (L) \Delta y^{\frac{\gamma+1}{2}}$, et enfin si $i |\Delta F'_i| < (L) \Delta y^{\frac{1+\gamma'}{2}}$, $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y}$ existe partout. — En effet, on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \varphi'_1(\eta) d\eta,$$

Cette intégrale est une solution de $\delta z = 0$, nulle sur Ox et à l'infini, et se réduisant sur Oy à la fonction $-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi'_1(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta$, laquelle admet un accroissement d'ordre $\frac{1}{2}$, si l'on ne fait aucune hypothèse sur φ'_1 , et d'ordre $\frac{\gamma+1}{2}$, si l'accroissement de φ'_1 est d'ordre $\frac{\gamma}{2}$. Il est inutile de reproduire ce calcul facile. Quant à $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z_1}{\partial y}$, il suffit, pour constater son existence partout dans le cas indiqué, de reproduire sur $\frac{\partial z}{\partial y}$ (voir 3°) la décomposition du 1° et le raisonnement du 2°.

Nous pouvons donc, en nous rappelant ce qui a été fait sur $\bar{z}$ relativement à y (1) (§ 7), énoncer les résultats suivants, qui servent à l'étude de l'équation $r = f(x, y, z, p, q)$:

Si Φ'_i, Φ', Φ'' existent, avec $|\Delta \Phi'_i| < (L) \Delta y^{\frac{\gamma}{2}}$ et $|\Delta \Phi''| < (L) \Delta x^\gamma$, on a, par rapport à x ,

$$(3) \quad |\Delta z| < (L) \Delta x, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial x} \right| < (L) \Delta x, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial y} \right| < (L) \Delta x^\gamma,$$

et par rapport à y

$$|\Delta z| < (L) \Delta y, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial x} \right| < (L) \Delta y^{\frac{\gamma+1}{2}}, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial y} \right| < (L) \Delta y^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Si $|\Delta \Phi'_i| < (L) \Delta y^{\frac{\gamma'+1}{2}}$ et si Φ''' existe, avec $|\Delta \Phi'''| < (L) \Delta x^{\gamma'}$, on a

$$|\Delta z| < (L) \Delta y, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial x} \right| < (L) \Delta y, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial y} \right| < (L) \Delta y^{\frac{1+\gamma'}{2}}.$$

(1) L'accroissement de F_i dépend en effet de celui de Φ_i et de celui de $\bar{z}$, puisque $F_1(y) = \Phi_1(y) - \bar{z}(0, y)$, $F_2(y) = \Phi_2(y) - \bar{z}(a, y)$.

Ces deux derniers cas peuvent se réunir dans les formules

$$(3') \quad |\Delta z| < (L) \Delta y, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial x} \right| < (L) \Delta y^{\gamma+\beta}, \quad \left| \Delta \frac{\partial z}{\partial y} \right| < (L) \Delta y^{\gamma},$$

β étant le plus petit des nombres $\frac{1}{2}$ et $1 - \gamma$.

Passons maintenant à l'étude de l'équation $\delta z = f$. Si f satisfait à la condition (33), paragraphe 15, il résulte du paragraphe 14 et des formules (3') que les inégalités (34), paragraphe 15, sont vérifiées avec $\gamma = \gamma'$. Envisageons maintenant le cas qui se présente au paragraphe 33, à savoir

$$f(x, 0) = 0, \quad |f(x, y)| < K y^{\frac{\gamma}{2}}, \quad |f(x+h, y) - f(x, y)| < K h^{\gamma}.$$

Nous avons alors, U étant toujours la solution fondamentale (voir § 10),

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial y} = & -f(x, y) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{\Sigma_y} \frac{\partial U}{\partial y} [f(\xi, \eta) - f(x, \eta)] dS \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} f(x, \eta) d\eta + \dots \end{aligned}$$

le terme non écrit étant une intégrale analogue à la précédente. Si nous voulons avoir la solution Z_0 de $\delta z = f$, nulle sur le contour, solution partout *régulière* puisque $f(x, 0) = 0$, nous ajouterons à Z la solution z_0 de $\delta z = 0$, nulle sur Ox et prenant sur les côtés verticaux Oy et AB la même valeur que $-Z$. Donc, d'après la formule précédente, $\frac{\partial z_0}{\partial y}$ se réduit sur Ox , Oy , AB , à zéro, $-\frac{1}{2}f(0, y)$, $-\frac{1}{2}f(a, y)$: par suite, $\frac{\partial z_0}{\partial y}$ sera donnée par les équations (1) et (2), dans lesquelles on a posé

$$F_1(\eta) = -\frac{1}{2}f(0, \eta), \quad F_2(\eta) = -\frac{1}{2}f(a, \eta).$$

$\varphi_1(\eta)$ peut donc s'écrire

$$\varphi_1(\eta) = -\frac{1}{2}f(0, \eta) + \frac{1}{2}\psi_1(\eta),$$

ψ_1 étant une fonction continue, qui, ainsi que sa dérivée, est limitée par $(L)K\eta^{\frac{\gamma}{2}}$. Nous avons pour φ_2 des conclusions analogues. Donc, pour avoir $\frac{\partial Z_0}{\partial y}$, il suffit de remplacer dans la formule (4) les intégrales

simples par

$$(5) \quad \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}} \{ [f(x, \eta) - f(0, \eta)] + \psi_1(\eta) \} d\eta,$$

et une autre analogue. On voit alors que $\frac{\partial Z_0}{\partial y}$ contient des intégrales simples limitées en fonction de $Ky^{\frac{\gamma}{2}}$. Quant à l'intégrale double, elle admet une limitation analogue, car elle se compose d'intégrales $I_{\gamma, \frac{3}{2}}$ et $I_{\gamma+2, \frac{5}{2}}$ [voir § 8, formules (24')].

Voyons maintenant les accroissements par rapport à x : nous aurions à faire la décomposition de l'aire d'intégration, qui est figurée dans la figure 6^{bis} du paragraphe 13, avec une analyse analogue à celle du paragraphe 14. La partie de l'accroissement de $\frac{\partial Z_0}{\partial y}$, qui est relative à l'accroissement de $f(x, y)$ dans l'intégrale double, se détruit avec le terme correspondant des intégrales simples, comme dans le paragraphe 14. Il ne reste donc que les accroissements résultant de l'accroissement de U : ils sont $< (L)K\Delta x^\gamma$, en ce qui concerne l'intégrale double. Quant à l'intégrale (5), elle se décompose en deux parties : celle qui contient ψ_1 admet une dérivée contenant K en facteur, et l'accroissement de l'autre se traite par une méthode analogue à celle qu'on a suivie au paragraphe 14 pour l'intégrale (32''); il est donc inférieur à $(L)K\Delta x^\gamma$. Donc

$$\begin{aligned} |\Delta Z_0| &< (L)K\Delta x, & \left| \Delta \frac{\partial Z_0}{\partial x} \right| &< (L)K\Delta x, & \left| \Delta \frac{\partial Z_0}{\partial y} \right| &< (L)K\Delta x^\gamma, \\ |Z_0| &< (L)Ky^{\frac{\gamma}{2}+1}, & \left| \frac{\partial Z_0}{\partial x} \right| &< (L)Ky^{\frac{\gamma+1}{2}}, & \left| \frac{\partial Z_0}{\partial y} \right| &< (L)Ky^{\frac{\gamma}{2}}. \end{aligned}$$

Ce sont les formules qui nous ont servi dans le paragraphe 55 [formules (71) et (72)] et qui interviennent à la seconde approximation [première formule (60)], la première approximation donnant évidemment lieu aux inégalités (3) ou (3'), puisque c'est une équation de la forme $\delta z = \varphi(x)$, dont la solution se forme comme il a été dit à la fin du paragraphe 7.

Les Chapitres IV et V paraîtront en 1914.