

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SÉGUIER

**Sur la représentation linéaire homogène des groupes
symétrique et alterné**

Journal de mathématiques pures et appliquées 6^e série, tome 6 (1910), p. 387-436.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1910_6_6__387_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur la représentation linéaire homogène
des groupes symétrique et alterné;*

PAR M. DE SÉGUIER.

La théorie générale de la représentation des groupes de substitutions linéaires et homogènes est due à M. Schur ⁽¹⁾. Mais, pour l'application que j'ai en vue, je suis obligé de la reprendre d'abord brièvement sous une forme différente.

On sait qu'un groupe G de substitutions linéaires, à variables homogènes ou non, est dit *représenter* un groupe abstrait Γ quand G est simplement ou multiplement homomorphe à Γ ⁽²⁾. Chaque substitution de G qui correspond à une substitution σ de Γ est dite *représenter* σ . Je dirai que la représentation est *propre* ou *impropre* selon que G est simplement ou multiplement homomorphe à Γ . Deux représentations G , G' de Γ sont *équivalentes* ou *indistinctes* s'il existe un changement de variables transformant G en G' de telle manière qu'une substitution quelconque s de G et sa transformée s' de G' représentent toujours la même substitution de Γ .

I. Soit $\Gamma = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ un g_x fini, défini par $B_j(\beta) = 1$ ($j = 1, \dots, m$), en désignant d'une manière générale par $X(\beta)$ un produit d'éléments β_i . De toute représentation homogène G (propre ou impropre)

⁽¹⁾ *Cr.*, t. 127, 1904, et t. 132, 1907.

⁽²⁾ Je me servirai de la même terminologie que dans mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, auxquels je renverrai par la lettre E , et mes *Éléments de la théorie des groupes de substitutions*, auxquels je renverrai par la lettre S .

de Γ on déduit, en y regardant les variables comme non homogènes et en adjoignant des similitudes ⁽¹⁾ arbitraires, un groupe fini ou infini $G = \{b_1, \dots, b_\nu, a_1, \dots, a_\lambda, a_1^{\pm 1}, \dots, a_\lambda^{\pm 1}\}$ ($\lambda \geq m$) où les $a_k^{\pm 1}$ sont des similitudes, vérifiant les équations (cf. E., 18)

$$(1) \quad B_j(b) = a_j, \quad b_i^{-1} a_k b_i = a_k, \quad A_i(a) = 1.$$

les $A_i(a) = 1$ se composant : 1° des conséquences $A_{i_1}(a) = 1$ ($i_1 = 1, 2, \dots$) des $B_j = a_j$ et des $b_i^{-1} a_k b_i = a_k$ entre $a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}$, parmi lesquelles figurent les équations exprimant que $a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}$ sont permutables entre eux [a_k , permutable à chaque b en vertu de $b_i^{-1} a_k b_i = a_k$, l'est à chaque $B_j(b)$]; 2° des équations $A_{i_2}(a) = 1$ exprimant que $a_{m+1}^{\pm 1}, \dots, a_\lambda^{\pm 1}$ sont permutables entre eux et à $a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}$ (il est clair qu'aucune des équations $A_{i_2} = 1$ ne résulte de $A_{i_1} = 1$). Inversement, tout groupe linéaire vérifiant (1) et où les a sont des similitudes, fournit, en y regardant les variables comme homogènes, une représentation homogène de Γ .

Je dirai que G est une *hyperreprésentation* de Γ (*propre* ou *impropre* selon que G est propre ou impropre) *répondant* au système $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$, en désignant d'une manière générale par $\check{s}$ le multiplicateur commun des variables dans une similitude s , et en appelant *système* $(x_1, \dots, x_m)$ tout ensemble de m nombres vérifiant $A_i(x) = 1$ (x_i étant mis à la place de a_i). Les hyperreprésentations d'un même nombre n de variables, qui se déduisent de l'une d'elles G en multipliant chaque substitution de G par une similitude arbitraire (ce qui laisse les commutateurs inaltérés) et en adjoignant aux générateurs d'autres similitudes arbitraires seront dites *associées* entre elles et former une *catégorie*. Cette définition est évidemment indépendante du choix fait parmi elles de G et les changements de variables. Il est clair aussi qu'on obtient toutes les hyperreprésentations de la catégorie de G en y remplaçant b_i par $\tau_i b_i$, τ_i étant une similitude arbitraire, et le groupe $\{a_{m+1}^{\pm 1}, \dots, a_\lambda^{\pm 1}\}$ par un groupe quelconque de similitudes de degré n : quand on remplace les b_i par les $\tau_i b_i$, $a_1, \dots$,

(1) J'entends par *similitude* une substitution qui multiplie toutes les variables (supposées non homogènes) par un même nombre.

a_m sont remplacés par $\sigma_1 a_1, \dots, \sigma_m a_m$, les similitudes σ vérifiant $B_j(\tau) = \sigma_j$ et par suite $A_i(\sigma) = 1$.

Désignons par $Q_h(a) = 1$ ($h = 1, 2, \dots$) les conséquences entre $a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}$ des équations $B_j(b) = a_j$, $b_k b_l = b_l b_k$ ($k, l = 1, \dots, v$) : les $Q_h = 1$ comprennent évidemment les $A_{i_h} = 1$, et pour qu'il existe des similitudes $\tau_1, \dots, \tau_v$ telles que $B_j(\tau) = \sigma_j$, il faut et suffit que $Q_h(\sigma) = 1$. Les systèmes $(\check{\sigma}_1, \check{a}_1, \dots, \check{\sigma}_m, \check{a}_m)$ tels que $Q_h(\check{\sigma}) = 1$ seront dits *associés* et former une *catégorie*. Pour que deux hyperreprésentations de même degré répondant respectivement aux systèmes $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$ et $(\check{\sigma}_1, \check{a}_1, \dots, \check{\sigma}_m, \check{a}_m)$ soient associées, il faut évidemment que les deux systèmes le soient.

2. Considérons le groupe G_0 , fini ou non, *défini* par les équations (1). Les équations $A_i = 1$ équivalent [en prenant la notation additive elles reviennent à un système linéaire (cf. E., 205, 207)] à des équations de la forme $a'_1 = 1, \dots, a'_r = 1$, $a'_i a'_x = a'_x a'_i$ ($i, x = 1, \dots, m$), r étant $\leq m$, et $a_{r+1}^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}$ étant d'ordre infini : les a'_i sont ici des produits des a_i , soit $a'_i = A_i(a)$; et, si $A_i = \prod a_k^{\alpha_{ik}}$, les e_i sont les diviseurs élémentaires ≥ 1 de la matrice des entiers α_{ik} . En adjoignant donc les générateurs $a_k^{\pm 1} = a_k^{\pm 1}$ ($k = m+1, \dots, \lambda$) et les équations $A_i(a') = 1$, on voit que le groupe $\mathfrak{A}_0$ défini par les $A_i = 1$ est le produit direct de $\mathfrak{A} = \langle a'_1, \dots, a'_r \rangle$ par $\mathfrak{A}_1 = \langle a'_{r+1}, \dots, a'_\lambda, a_{r+1}^{\pm 1}, \dots, a_\lambda^{\pm 1} \rangle$; tout groupe X dont le produit direct par $\mathfrak{A}$ est $\mathfrak{A}_0$ est d'ailleurs engendré par des éléments de la forme $x_i = \alpha_i a'_i$, $x_i^{-1} = \alpha_i^{-1} a_i^{-1}$ ($i = r+1, \dots, \lambda$), α_i étant quelconque dans $\mathfrak{A}$, puisque X est dans $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ et ne contient aucun élément de $\mathfrak{A}$. Si α_{i1} , par exemple, est égal à 1, on peut évidemment remplacer partout a_1 par $\prod_2^m a_k^{-\alpha_{ik}}$ et prendre A_1 pour a'_1 . Alors $a'_1 = 1$, $e_1 = 1$, et $\mathfrak{A} = \langle a'_2, \dots, a'_r \rangle$, $a'_2, \dots, a'_r$ étant des fonctions de $a_2, \dots, a_m$. Si $A_1, \dots, A_h$ sont résolus par rapport à $a_1, \dots, a_h$, on pourra évidemment éliminer de même $a_1, \dots, a_h$.

Si un groupe quotient $\mathfrak{A}_0 | \mathfrak{O}$ est fini, $\mathfrak{O}$ contient nécessairement une puissance de tout élément c de $\mathfrak{A}_1$, sans quoi $\mathfrak{A}_0 | \mathfrak{O}$ contiendrait des complexes $\mathfrak{O}c^p$ en nombre infini. $G_0 | \mathfrak{A}_0$ est isomorphe à Γ , et toute représentation entière de G_0 où les a sont des similitudes est une hyperreprésentation de Γ répondant à $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$ ou, comme je

dirai encore, à $(\check{a}'_1, \dots, \check{a}'_m)$. On remarquera que, dans les divers systèmes $(\check{a}'_1, \dots, \check{a}'_m)$ qui répondent biunivoquement aux systèmes $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$, $\check{a}'_{r+1}, \dots, \check{a}'_m$ prennent des valeurs absolument arbitraires, puisque, d'après ce qu'on vient de voir, les équations $A_i(\check{a}) = 1$ laissent $\check{a}'_{r+1}, \dots, \check{a}'_k$ indéterminés. Quant à $\check{a}'_1, \dots, \check{a}'_r$, ils constituent un caractère de $\mathfrak{A}$, et à la représentation correspondante de $\mathfrak{A}$ répond au moins une représentation irréductible de $\mathfrak{G}_0 | \mathfrak{A}^{(1)}$. En lui adjoignant des similitudes de même degré et de multiplicateurs $\check{a}'_{r+1}, \dots, \check{a}'_k$ on en déduit une représentation irréductible de $\mathfrak{G}_0$. Ainsi à chaque système $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$ répond au moins une hyperreprésentation irréductible de Γ .

3. Supposons G irréductible. Parmi les hyperreprésentations $(\tau, b_1, \dots, \sigma, a_1, \dots)$ associées à $G = (b_1, \dots, a_1, \dots)$, déterminons-en une, que j'appellerai *unitaire*, par la condition que $a_{m+1} = \dots = a_k = 1$ et que $|\tau_l| = |b_l|^{-1}$. Alors tous les $|\sigma_k a_k|$ seront égaux à 1. Or n divise N ⁽²⁾. On peut donc représenter chaque catégorie par un système $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$ où $\check{a}_1^N = \dots = \check{a}_m^N = 1$. Le nombre des catégories de systèmes $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$ est donc fini.

Désignons ces catégories par $C_1, \dots, C_\mu$, C_1 étant celle où $\check{a}_1 = \dots = \check{a}_m = 1$. Si $(\check{a}_{\alpha_1}, \dots, \check{a}_{\alpha_m})$ et $(\check{a}_{\beta_1}, \dots, \check{a}_{\beta_m})$ sont deux systèmes représentant respectivement les catégories C_α et C_β , la catégorie C_γ du système $(\check{a}_{\alpha_1} \check{a}_{\beta_1}, \dots, \check{a}_{\alpha_m} \check{a}_{\beta_m})$ (évidemment existant), entièrement déterminée par C_α et C_β , sera dite *composée* de C_α , C_β . Les C_α forment donc un $\mathfrak{g}_\mu$ abélien $\mathfrak{M}$ dit *multiplicateur* de Γ [on verra (4, 6) que $\mathfrak{M}$ est indépendant des équations choisies pour Γ]. Comme $\check{a}_k^N = 1$, tout invariant (*E.*, 118) de $\mathfrak{M}$ et par suite tout facteur premier de μ divise N . Si $\mu = 1$, Γ est dit *fermé*.

4. On obtient donc tous les systèmes $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$ en prenant $\check{a}_j = \sigma_j u_j$, les u_j étant des racines $N^{\text{ièmes}}$ de 1 convenablement choisies

(1) FROBENIUS, *S. A. B.*, 1898, p. 501-509, 512-515.

(2) SCHUR, *Crelle*, t. 127, p. 44-46.

qui caractérisent les diverses catégories, et les σ vérifiant $B_j(\tau) = \sigma_j$ où les τ sont arbitraires. Or, si l'on porte $\sigma_j = B_j(\tau)$ dans $A_{i_1}(\sigma) = 1$, on obtient, entre $\tau_1, \dots, \tau_r$, des identités qui équivalent à $A'_\theta(\sigma) = 1$ ($\theta = 1, \dots, r$), c'est-à-dire à $A'_\theta(\sigma) = 1$ (sans quoi les τ ne seraient pas indépendants). Donc $a'_\theta = A'_\theta(\sigma u) = A'_\theta(u)$. Ainsi, quand le système $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$ parcourt une catégorie, les $\check{a}'_j$ correspondants sont assujettis à la condition que $\check{a}'_1, \dots, \check{a}'_r$ restent fixes, $\check{a}'_{r+1}, \dots, \check{a}'_m$ (et de même $\check{a}'_{m+1}, \dots, \check{a}'_n$) variant arbitrairement.

Considérons le groupe fini $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_0 | \mathcal{A}$, défini par les équations de $\mathcal{G}_0$ auxquelles on adjoint $a'_{r+1} = \dots = a'_n = 1$ (même après la fixation de $\mathcal{G}_0$, qui dépend du choix des équations de Γ , $\mathcal{G}$ dépend encore du choix de $\mathcal{A}$, dans $\mathcal{A}_0$). $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{A}$ (E , 18), $\mathcal{G} | \mathcal{A} \equiv \Gamma$, et, dans toute représentation irréductible de $\mathcal{G}$, les a sont ⁽¹⁾ des similitudes ⁽²⁾. Or, d'après ce qu'on vient de voir, les diverses représentations irréductibles de $\mathcal{A}$ fournies par les représentations entières irréductibles de $\mathcal{G}$ et par suite aussi les caractères de $\mathcal{A}$ ⁽³⁾ répondent biunivoquement aux catégories des systèmes $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$. Donc le nombre μ de ces catégories est $e_1 \dots e_r$, plus grand commun diviseur des déterminants d'ordre r de la matrice des $\alpha_{i,k}$. De plus les formules $a'_i = A'_i(a)$ montrent que ces catégories se composent comme les caractères de $\mathcal{A}$ ⁽⁴⁾. Donc $\mathcal{A} \equiv \mathcal{N}$.

On remarquera que toute conséquence de $A_{i_1} = 1$ peut ici se ramener

⁽¹⁾ Pour abréger le langage, j'identifierai souvent dans ce qui suit les groupes abstraits avec leurs représentations.

⁽²⁾ Voir, par exemple, SCHUR, *S. A. B.*, 1905, p. 409, et 1906, p. 166.

⁽³⁾ FROBENIUS, *S. A. B.*, 1898, p. 501-509, 512-515.

⁽⁴⁾ Cf. FROBENIUS, *S. A. B.*, 1899, p. 330-334; BURNSIDE, *P. L. M. S.*, 2^e série, t. I, 1903, p. 120-122. $g_1, \dots, g_n$ étant une base d'un groupe abélien H , γ_i l'ordre de g_i et θ_i une racine primitive $\gamma_i^{\text{ème}}$ de 1, les θ_i seront dits *racines fondamentales* de H et les quantités $\theta_i^{p_i}$ où p_i parcourt un système de restes de γ_i caractères fondamentaux de H (ils dépendent donc du choix de la base et de celui des θ_i). La valeur pour l'élément $h = \prod g_i^{x_i}$ du caractère χ_r déterminé par $\theta_1^{p_1}, \dots, \theta_n^{p_n}$ ($r = \prod \theta_i^{p_i}$) est $\prod \theta_i^{p_i x_i} = \chi_r(h)$. χ_r sera dit *associé* à r . Le caractère composé $\chi_r \chi_s$ est évidemment χ_{rs} . d parcourt un diviseur D de H , les éléments e tels que $\chi_d(e) = 1$ forment un groupe E . Comme $\chi_e(d) = \chi_d(e)$, les groupes D et E sont dits *réciroques*.

à la forme $\Pi_i A_{i_i}^{v_i} = 1$ (cf. *E.*, 17) ou $\Pi_k a_k^{\xi_k} = 1$ ($\xi_k = \sum_i \alpha_{i,k} v_i$). Donc, dans tout système $\Pi_k a_k^{\xi_k} = 1$ de semblables conséquences, les diviseurs élémentaires de la matrice ξ des ξ_{jk} sont des multiples des c_i , et le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre r de ξ est un multiple de μ (*E.*, 197).

3. Partons d'un autre système $\bar{B}_j(\bar{\beta}) = 1$ ($j = 1, \dots, \bar{m}$) d'équations de Γ , les $\bar{\beta}$ étant de nouveaux générateurs, et opérons de même en désignant les éléments, groupes, nombres correspondant à ceux introduits précédemment par les mêmes lettres surmontées d'un trait. On va voir que $\bar{\mathfrak{A}} \equiv \mathfrak{A}$ ($\equiv \mathfrak{A}$), et que les déterminations de $\bar{\mathfrak{G}}$ sont les mêmes que celles de $\mathfrak{G}$.

Supposons d'abord que $\bar{\beta}_l = \beta_l$, et que $\bar{v} = v$ ($\bar{m}$ pouvant être différent de m). $B_j(\beta)$ peut se mettre identiquement sous la forme $\Pi V^{-1}(\beta)(\bar{B}_h^{\pm 1}(\beta))V(\beta)$ (*E.*, 17). Donc, en mettant $\bar{b}$ pour β , et en observant que $\bar{b}_l^{-1} \bar{a}_k \bar{b}_l = \bar{a}_k$, $B_j(\bar{b}) = \alpha_j$, α_j étant une fonction des $\bar{a}_k$. Inversement l'expression des $\bar{B}$ par les B fournit les $\bar{a}$ en fonction des α . Donc les α engendrent le même groupe que les $\bar{a}$. Or les équations $B_j(\bar{b}) = \alpha_j$, $\bar{b}_l^{-1} \alpha_k b_l = \alpha_k$ définissent évidemment le même groupe abstrait $\mathfrak{G}_0$ que $B_j(b) = \alpha_j$, $b_l^{-1} \alpha_k b_l = \alpha_k$, $\bar{b}_l$ jouant le rôle de b_l , et α_k celui de a_k . Donc $\bar{\mathfrak{A}} \equiv \mathfrak{A}$, et $\bar{\mathfrak{G}}$ a les mêmes déterminations que $\mathfrak{G}$.

Supposons maintenant $\bar{v} > v$, $\bar{\beta}_l = \beta_l$ pour $l = 1, \dots, v$, $\bar{B}_j = B_j$ pour $j = 1, \dots, m$, et que les autres $\bar{B}_j$ soient de la forme $\bar{\beta}_h^{-1} \varphi_h(\beta) = 1$ ($h = v + 1, \dots, \bar{v}$), φ_h ne contenant que $\beta_1, \dots, \beta_v$ (cf. *E.*, 19). La somme des exposants de $\bar{b}_h$ dans les conséquences des $\bar{B}_j(\bar{b}) = \bar{a}_j$ entre les $\bar{a}_j$ mises sous forme typique doit être nulle. Donc $\bar{a}_h$ disparaît en vertu de $\bar{b}_l^{-1} \bar{a}_k \bar{b}_l = \bar{a}_k$, $\bar{A}_i(\bar{a}) = 1$, et il ne reste entre les $\bar{a}$ que les mêmes conséquences $A_{i_i}(\bar{a}) = 1$ qu'entre les α . Donc $\bar{\mathfrak{A}} \equiv \mathfrak{A}$, et les déterminations de $\bar{\mathfrak{G}}$ coïncident avec celles de $\mathfrak{G}$.

Passons au cas général. On pourra, sans changer $\mathfrak{A}$ ni les déterminations de $\mathfrak{G}$, adjoindre aux équations $B_j(\beta) = 1$ les expressions $\bar{\beta}_h = \varphi_h(\beta)$ des $\bar{\beta}$ par les β [$\bar{B}_j(\bar{\beta}) = 1$ résulte du système ainsi formé (cf. *E.*, 19)]. On pourra de même, sans changer $\bar{\mathfrak{A}}$ ni les déterminations de $\bar{\mathfrak{G}}$, adjoindre aux équations $\bar{B}_j(\bar{\beta}) = 1$ les expressions

$\beta_h = \bar{\varphi}_h(\bar{\beta})$ des β par les $\bar{\beta}$. On se trouve alors dans le premier cas particulier considéré.

6. C désignant le commutant de $\mathfrak{G}_0$, on obtient les équations de $\mathfrak{G}_0 | \mathfrak{C}$ en adjoignant à celles de $\mathfrak{G}_0$ les relations $b_l b_k = b_k b_l$ (E., 66). Comme, d'ailleurs, l'élimination des σ_j entre les $B_j(\tau) = \sigma_j$ entraîne les identités $A'_0(B(\tau)) = 1$, on voit qu'en regardant les b comme permutables, on aura identiquement $a'_0 = A'_0(a) = 1$, ($0 = 1, \dots, r$), $a'_{r+1}, \dots, a'_\lambda$ restant indéterminés. Donc $\mathfrak{C}$ contient $\mathfrak{A}$ et est premier à $\mathfrak{A}_1$ (E., 66). Donc $\mathfrak{C} \mathfrak{A}_1$ est un produit direct qui se réduit à $\mathfrak{C}$ quand on fait $a'_{r+1} = \dots = a'_\lambda = 1$. Donc $\mathfrak{C}$ est le commutant de $\mathfrak{G}$ (E., 63). Donc $\mathfrak{C}$ est fini, et $\mathfrak{C} | \mathfrak{A}$ est isomorphe au commutant $\mathbf{K}$ de Γ , tandis que $\mathfrak{G}_0 | \mathfrak{C} \mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{G} | \mathfrak{C} \equiv \Gamma | \mathbf{K}$.

Soit G une hyperreprésentation propre, finie ou non, de Γ , vérifiant (1) et G^0 l'hyperreprésentation associée où $a'_{r+1} = \dots = a'_\lambda = 1$. G^0 est évidemment homomorphe à $\mathfrak{G}$, l'unité de G^0 répondant à un diviseur $\mathfrak{v}^0$ de $\mathfrak{A}$. Soit $A^0 \equiv \mathfrak{A} | \mathfrak{v}^0$ le diviseur de G^0 répondant à $\mathfrak{A}$. On aura $G^0 | A^0 \equiv \mathfrak{G} | \mathfrak{A} \equiv \Gamma$, et le commutant C^0 de G^0 , répondant à $\mathfrak{C} | \mathfrak{v}^0$ (E., 63), contient A^0 .

7. En considérant les b comme permutables (ce qui fournit les équations de $\mathfrak{G}^0 | \mathfrak{C}$) et en les éliminant (ou en les considérant comme des paramètres variables), on obtient, d'après ce qui précède, les équations de $\mathfrak{A}_1$. Or, prenons la notation additive, et supposons que le déterminant Δ des coefficients des b dans $B_1, \dots, B_\nu$ est $\neq 0$ (on peut toujours supposer, par exemple, que, pour $l \leq \nu$, B_l est de la forme $b_l^{q_l}$). On voit alors de suite que l'élimination des b fournit $a_{\nu+1}, \dots, a_\lambda$ en fonction de $a_1, \dots, a_\nu$ qui restent indéterminés. Donc $\mathfrak{A}_1 = \{a_1, \dots, a_\nu\}$, et $\nu = \lambda - r$. Pour un même groupe Γ on peut faire varier à volonté ν et λ à partir d'un certain minimum (on peut, par exemple, répéter plusieurs fois une équation $B_j(\beta) = 1$, ou introduire des générateurs fictifs β_h avec les équations $\beta_h = 1$). Mais, $\mathfrak{A}$ ne variant pas (8), les $e_i \neq 1$ ne varient pas. En particulier on peut toujours faire $\lambda = m$, et alors $\nu = m - r$.

Si Γ est fermé, on peut supposer $\nu = m = 1$. Donc tout groupe cyclique est fermé.

8. Considérons un groupe *fini* G_0 défini par $B_j(b) = a_j$, $b_l^{-1} a_k b_l = a_k$, $A_{0i}(a) = 1$, le système des $A_{0i} = 1$ comprenant entre autres toutes les équations $A_i = 1$. Soit A_0 le diviseur (*E.*, 18) abélien de G_0 défini par les $A_{0i} = 1$ (je dirai que G_0 est une *extension* de Γ par A_0 où A_0 est l'*extenseur* de Γ), C_0 le commutant de G_0 , et D_0 le plus grand commun diviseur de A_0, C_0 . Le commutant de $G_0 | A_0 \equiv \Gamma$ est $A_0 C_0 | A_0$, et $(G_0 | A_0) | (A_0 C_0 | A_0)$ est isomorphe à $G_0 | A_0 C_0$, $A_0 C_0 | A_0$ à $C_0 | D_0$, $A_0 C_0 | C_0$ à $A_0 | D_0$. Chaque représentation entière irréductible de G_0 est une hyperreprésentation de Γ correspondant à un système $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$, puisque les a_i y sont des similitudes (*cf.* 4). Une fois choisis les caractères fondamentaux de A_0 , il y a un caractère de A_0 et un seul χ_α (α étant ici l'élément de A_0 associé à ce caractère) tel que $\chi_\alpha(a_k) = \check{a}_k$ pour $k = 1, \dots, \lambda$. Je dirai que le système $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$ et sa catégorie *répondent* à χ_α ou à α , et de même que l'hyperreprésentation considérée *répond* à χ_α ou à α , et l'on sait obtenir toutes les hyperreprésentations irréductibles de Γ répondant à α (¹).

Soient $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$ répondant à α et $(\check{\sigma}_1 \check{a}_1, \dots, \check{\sigma}_m \check{a}_m)$ répondant à α' deux systèmes associés; $\tau_1, \dots, \tau_\nu, \sigma_1, \dots, \sigma_\lambda$ des similitudes de degré n telles que $B_j(\tau) = \sigma_j$, d'où $A_i(\sigma) = 1$; T le plus petit commun multiple des σ, τ , et S celui des σ . T est une représentation de $G_0 | C_0$ dans laquelle S est une représentation de $A_0 | D_0 \equiv A_0 C_0 | C_0$ (d'où $T | S \equiv G_0 | A_0 C_0$). Le multiplicateur d'une variable dans T est donc un caractère linéaire χ de G_0 ayant la propriété de se réduire dans A_0 à un caractère χ'_f de $A_0 | D_0$, et l'on a $\chi_{\alpha'} = \chi_\alpha \chi'_f$ ou $\alpha' = \alpha f$. Soit inversement f un élément de A_0 tel qu'à χ'_f réponde un caractère linéaire χ de G_0 , et $\chi(b_l) = \check{\tau}_l$, $\chi(a_k) = \check{\sigma}_k$. La représentation correspondant à χ donnera $B_j(\check{\tau}) = \check{\sigma}_j$, en sorte que $(\check{\sigma}_1 \check{a}_1, \dots, \check{\sigma}_m \check{a}_m)$ est associé à $(\check{a}_1, \dots, \check{a}_m)$. Il est clair que, si à χ'_f et à χ'_g répondent respectivement les caractères linéaires χ et ψ de G_0 , le caractère linéaire $\chi \psi$ répondra à χ'_{fg} , c'est-à-dire que *les éléments de l'espèce de f forment un groupe F_0 . F_0 est le réciproque de D_0* : en effet, à tout caractère linéaire χ de G_0 répond un caractère χ'_f de $A_0 = \Sigma \alpha$, et D_0 , plus grand

(¹) FROBENIUS, *S. A. B.*, 1898, p. 501-509, 512-515.

commun diviseur de A_0 , C_0 est formé des α tels que $\chi(\alpha) = 1$, c'est-à-dire tels que $\chi'(\alpha) = 1$. On peut exprimer le résultat obtenu en disant qu'à deux éléments α et α' de A_0 (autrement dit aux caractères χ_α et $\chi_{\alpha'}$) répondent deux systèmes $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ associés ou non selon que $\alpha \equiv \alpha'$ ou $\alpha \not\equiv \alpha' \pmod{F_0}$.

Si d'ailleurs $A_0 | F_0 = \Sigma F_0 \alpha_i$, et si $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}$ sont les catégories répondant à α_1, α_2 , la catégorie répondant à α, α_2 sera évidemment C_{α, α_2} . Donc $A_0 | F_0 \equiv D_0$ est isomorphe à un diviseur de $\mathfrak{K}$. Je dirai que l'extension G_0 de Γ par A_0 est normale si $F_0 = 1$, et antinormale si $D_0 = 1$. Si $D_0 \equiv \mathfrak{K}$, les représentations de G_0 fournissent, en y regardant les variables comme homogènes, toutes les représentations homogènes de Γ , et G_0 sera dit représentatif de Γ . Ainsi $\mathfrak{G}$ est un représentatif de Γ . Un représentatif de Γ peut se définir, indépendamment des équations choisies pour Γ , comme un groupe dont les représentations fournissent, en y regardant les variables comme homogènes, toutes les représentations homogènes de Γ . Si $A_0 = D_0 \equiv \mathfrak{K}$, je dirai que G_0 est figuratif de Γ : ainsi $\mathfrak{G}$ est un figuratif de Γ , et les diverses déterminations de $\mathfrak{G}$ fournissent évidemment tous les figuratifs de Γ . Un groupe G_0 figuratif de Γ peut donc se définir à nouveau, indépendamment des équations de Γ , comme un représentatif d'ordre minimum de Γ , ou comme une extension normale d'ordre maximum, c'est-à-dire comme un groupe d'ordre maximum dont le central et le commutant ont un diviseur commun A_0 tel que $G_0 | A_0 \equiv \Gamma$. Ce diviseur commun A_0 , étant isomorphe à $\mathfrak{K}$, est le même dans tous les figuratifs, et le multiplicateur se trouve ainsi défini à nouveau indépendamment des équations de Γ . Aucun diviseur de A_0 ne se sépare de G_0 , car ce diviseur devrait être premier à C_0 (E., 53, 63).

Supposons G_0 figuratif de Γ . G_0 étant, d'après ses équations, partiellement homomorphe à $\mathfrak{G}_0$, son commutant C_0 , qui répond à $\mathfrak{G}$ et a le même ordre, est isomorphe à $\mathfrak{G}$. Si donc Γ est parfait (E., 55), G_0 , qui coïncide alors avec C_0 , est unique.

9. Considérons les diverses extensions de Γ par un groupe donné $A = \Sigma \alpha = \Sigma \beta$. Soient $a_i^{\alpha_i} = 1, a_i a_k = a_k a_i$ ($i, k = 1, \dots, \rho$) les équations de A . Celles d'une extension G de Γ par A seront de la forme

$B_j(b) = c_j$, $b_i^{-1} a_k b_i = a_k$, $a_i^{a_i} = 1$, $a_i a_k = a_k a_i$, les c_j étant des fonctions des a_i (vérifiant, en vertu des équations de A , toutes les conséquences des $B_j = c_j$ entre les c (*E.*, 19). Ainsi, Γ et A étant donnés, G est défini par les c_j qui seront dits *éléments définissants* de G . En prenant les générateurs $b_i = \xi_i b_i$ (les ξ_i étant quelconques dans A) et les a_k , G se trouve défini par les éléments $B_j(\xi) c_j = c'_j$ qui (relativement à A) seront dits former un système d'éléments *associé* à celui des c_j et appartenir à une même *catégorie* [les systèmes de nombres correspondants $(\chi_\alpha(c_1), \dots, \chi_\alpha(c_m))$ et $(\chi_\alpha(c'_1), \dots, \chi_\alpha(c'_m))$, (*cf.* I, 8), χ_α étant un caractère quelconque de A , sont évidemment associés]. Deux systèmes d'éléments associés définissent donc le même groupe abstrait. De même si un automorphisme (*E.*, 117) de A fait correspondre à l'élément général α l'élément α'' , l'extension G'' définie par $c''_1, \dots, c''_m$ est isomorphe à G , $b_i \alpha''$ de G'' répondant à $b_i \alpha$ de G , car les c''_j sont les mêmes fonctions des a''_i que les c_j des a_i , et A est défini par les mêmes équations entre les a''_i qu'entre les a_i .

Supposons que G soit une extension normale de Γ . Soit C_α la catégorie du système $(\chi_\alpha(c_1), \dots)$. Quand α parcourt A , C_α parcourt $(A, 1)$ catégories distinctes (8). Soit G^0 un *figuratif* de Γ défini par les éléments $d^0_1, \dots, d^0_m$ de $\mathfrak{N}$, et C^0_x la catégorie du système $(\psi_x(d^0_1), \dots, \psi_x(d^0_m))$, ψ_x étant un caractère de $\mathfrak{N} = \Sigma x$. Soit $C^0_{x_\alpha} = C_\alpha$. On aura $C^0_{x_\alpha x_\beta} = C_{\alpha\beta}$, donc $x_\alpha x_\beta = x_{\alpha\beta}$, et les x_α forment un groupe $\mathfrak{N}' \equiv A$. Soit $\mathfrak{N}$ son réciproque dans $\mathfrak{N}$ (pour un choix déterminé de la base et des racines fondamentales). ψ_{x_α} , égal à 1 dans $\mathfrak{N}$, est un caractère de $\mathfrak{N} | \mathfrak{N}$, et à chaque élément β de A on peut faire correspondre un élément $\mathfrak{N}\beta^0$ de $\mathfrak{N} | \mathfrak{N}$ tel que $\psi_{x_\alpha}(\beta^0) = \chi_{\alpha'}(\beta)$, α' dépendant de α [la correspondance (α, α') est un automorphisme de A]. Identifions $\mathfrak{N}\beta^0$ avec β , et soit $d_j = \mathfrak{N}d^0_j$. L'extension $G \equiv G^0 | \mathfrak{N}$ de Γ par A définie par $d_1, \dots, d_m$ est normale, puisque $(\psi_{x_\alpha}(d^0_1), \dots)$ ou $(\chi_{\alpha'}(d_1), \dots)$ parcourt $(A, 1)$ catégories quand x_α parcourt $\mathfrak{N}'$, et $(\chi_\alpha(c_1), \dots)$ est associé à $(\chi_{\alpha'}(d_1), \dots)$. A l'automorphisme (α, α') de A en correspond un autre (β, β'') défini par la condition que $\chi_\alpha(\beta) = \chi_{\alpha'}(\beta'')$ quel que soit α dans A . En effet, cette relation, qui équivaut à $\chi_\beta(\alpha) = \chi_{\beta'}(\alpha')$, fait correspondre à chaque β un β'' complètement déterminé, et au produit de deux β le produit des β'' corres-

pondants. Si donc (β, β') fait correspondre c'_j à c_j , $(\chi_{\alpha'}(d_i), \dots)$ sera associé à $(\chi_{\alpha'}(c'_i), \dots)$, et $(\chi_{\alpha'}(c'_i d_i^{-1}), \dots)$ représente C_i quel que soit α' . Posons $c'_j d_j^{-1} = e_j$, et considérons l'extension G' de Γ par A définie par les e_j (qui vérifient évidemment les conditions requises). Comme toute hyperreprésentation de Γ fournie par G' appartient à la catégorie C_1 , l'extension G' est antinormale. Si inversement les e_j définissent une extension antinormale G' de Γ par A , l'extension H définie par les $d_j e_j$ est une extension normale de Γ par A , puisque les systèmes $(\chi_{\alpha}(d_i e_i), \dots)$ appartiennent à des catégories distinctes.

Si donc on a déterminé s systèmes non associés $e_{k_1}, \dots, e_{k_m}$ ($k = 1, \dots, s$) définissant respectivement des extensions antinormales G_k de Γ par A , s étant maximum, toute extension normale de Γ par A sera définie par un des systèmes $d_1 e_{k_1}, \dots, d_m e_{k_m}$. Je désignerai par H_k l'extension définie par $d_1 e_{k_1}, \dots, d_m e_{k_m}$.

Ces s extensions ne sont pas toujours toutes distinctes (cf. 10, 11). Mais elles le sont toujours si Γ est complet⁽¹⁾. Il suffit de montrer que, si H_1, H_2 , par exemple, sont isomorphes, l'automorphisme de Γ fourni par cet isomorphisme (qui fait correspondre A et $H_2 | A$ de H_2 à A et $H_1 | A$ de H_1 , puisque le central de Γ est 1) est contragrédient. Or, s'il était cogrédient, on pourrait le ramener à l'unité en transformant H_2 par un de ses éléments, et il y aurait un isomorphisme de H_1 à H_2 faisant correspondre à $d_j e_{2j}$ un élément de la forme $B_j(\xi) d_j e_{1j}$, $\xi_1, \dots, \xi_v$ étant dans A . En désignant alors généralement par α' l'élément que l'automorphisme ainsi obtenu pour A fait correspondre à α , $B_j(\xi) d_j e_{1j}$ est égal à $d'_j e'_{2j}$, et l'extension définie par $e'_{2_1}, \dots, e'_{2_m}$, isomorphe à G_2 , est antinormale. Donc $(\chi_{\alpha'}(e'_{2_1}), \dots)$, comme $(\chi_{\alpha}(e_{1_1}), \dots)$, appartient, quel que soit α , à C_1 . Donc, $(\chi_{\alpha}(d_1 e_{1_1}), \dots)$ et $(\chi_{\alpha}(d'_1 e'_{2_1}), \dots)$ étant associés, $(\chi_{\alpha}(d_1), \dots)$ et $(\chi_{\alpha}(d'_1), \dots)$ ou [en

(1) Un groupe $G = \Sigma x = \Sigma x'$ est dit *complet* quand il n'a pas d'élément normal $\neq 1$ et qu'il n'admet que des automorphismes *cogrédients* : on appelle *cogrédient* tout automorphisme (x, x') , où x' est, quel que soit x , de la forme $a^{-1} x a$, a étant dans G ; les autres automorphismes sont dits *contragrédients*. L'automorphisme (x, x) est dit *automorphisme unité*. Voir HÖLDER, *M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 324-325.

déterminant α'' par la condition que $\chi_\alpha(\beta') = \chi_{\alpha'}(\beta)$ quel que soit β dans A] ($\chi_{\alpha'}(d_1), \dots$) le sont. Or l'extension définie par $d_1, \dots$ est normale. Donc $\alpha'' = \alpha$, et $\chi_\alpha(d'_j) = \chi_\alpha(d_j)$ quel que soit α , d'où $d'_j = d_j$. Donc l'automorphisme considéré de A fait correspondre e_{2j} à $B_j(\xi)e_{1j}$. Donc G_2 serait isomorphe à G_1 contre l'hypothèse.

10. Cherchons maintenant à construire les G_k , ce qui donnera en même temps s . Un quelconque d'entre eux G' a un commutant C' isomorphe au commutant K de Γ et des équations de la forme $g_i^{\gamma_i} = \eta_i \zeta_i$, $g_i g_j = g_j g_i \eta_{ij} \zeta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, \sigma$), $g_i^{-1} f_k g_i = f_{ki}$ (f_k parcourant les générateurs de C' , η_i, η_{ij} étant dans A et $\zeta_i, \zeta_{ij}, f_{ki}$ dans C') jointes à celles de A et de C' et à celles exprimant que $\alpha_1, \dots, \alpha_\rho$ sont normaux dans G' . En réduisant C' à 1, les g deviennent permutables; donc $\eta_{ij} = 1$. En réduisant A à 1, on a les équations d'un groupe de commutant C' , isomorphe à Γ ; donc les ζ_i et les ζ_{ij} sont complètement déterminés quand les g_i le sont. On voit d'ailleurs de suite, d'après la forme typique des conséquences des équations de $G'(E., 17)$ ou en adjoignant successivement les g_i à $A C'$, que, quels que soient les η_i dans A , G' sera une extension antinormale de Γ par A ($E., 19$). Or, en remplaçant g_i par un élément de $A g_i$, η_i est remplacé par $\eta_i \theta_i^{\gamma_i}$, $\theta_i = \Pi_i^{\rho} \alpha_k^{t_{ik}}$ étant quelconque dans A . Donc s est le nombre des manières de choisir les t_{ik} ($0 \leq t_{ik} < \alpha_k$), deux systèmes de t_{ik} tels que $t'_{11}, t'_{12}, \dots$ et $t''_{11}, t''_{12}, \dots$ étant regardés comme indistincts si chaque différence $t'_{ik} - t''_{ik}$ est de la forme $x \alpha_k + y \gamma_i$, c'est-à-dire si elle est un multiple du plus grand commun diviseur δ_{ik} de α_k et de γ_i . Donc $s = \Pi_{ik} \delta_{ik}$. En particulier, si (Γ, K) est premier à $(A, 1)$, $s = 1$, et il n'y a qu'une extension normale de Γ par A .

Si $H_1, H_2, \dots$ sont les divers figuratifs de Γ , les extensions normales de Γ par A figurent toutes parmi les groupes $H_i | \mathfrak{K}, \dots, \mathfrak{K}$ étant le même diviseur de $\mathfrak{K}$ qu'au n° 9. Soit en effet H' une extension normale quelconque de Γ par A . On peut la construire comme au n° 8 en partant de l'extension antinormale G' ayant pour équation $g_i^{\gamma_i} = \eta_i \zeta_i, \dots$: H' est défini par $d, e_1, \dots, e_i$ étant égal à η_i pour $i \leq \sigma$ et à 1 pour $i > \sigma$ (il suffit pour cela de ranger convenablement les équations). Or si, dans cette construction, A est remplacé par $\mathfrak{K}$, et chaque e_i par un élément de $\mathfrak{K} e_i^0$, $\mathfrak{K} e_i^0$ correspondant à e_i

dans un isomorphisme de A à $\mathfrak{K} | \mathfrak{K}$, H' est remplacé par un figuratif H , et $H | \mathfrak{K} \equiv H'$.

11. Je supposerai désormais $\lambda = m$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Prenons par exemple pour Γ le g_{2n} ($n \geq 2$) diédral. $\mathfrak{G}_0$ est défini par $a^n = \alpha$, $b^2 = \beta$, $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$ et les équations exprimant que α , β , γ sont normaux; $r = m - v$ est ici égal à 1. Toute conséquence de ces équations où ne figurent que α , β , γ se réduit, d'après sa forme typique (*E.*, 17) (la somme des exposants de a ou de b devant s'annuler), à $\alpha^{2x}\gamma^{-nx} = 1$. On a d'ailleurs, en élevant $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$ à la puissance n , $\alpha^2\gamma^{-n} = 1$. Donc $\mathfrak{A}_0$ est ici défini par $\alpha^2 = \gamma^n$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, $\beta\gamma = \gamma\beta$. Donc $\mu = 2$ si n est pair, et Γ est fermé si n est impair.

Soit n pair $= 2n'$, et prenons pour générateurs $\alpha' = \alpha\gamma^{-n'}$, β , γ . $\mathfrak{A} = \{\alpha'\}$ est défini par $\alpha'^2 = 1$, et $\mathfrak{A}_0$ a les déterminations

$$\begin{aligned} & \{\beta, \beta^{-1}, \gamma, \gamma^{-1}\}, \quad \{\alpha\beta, (\alpha\beta)^{-1}, \gamma, \gamma^{-1}\}, \\ & \{\beta, \beta^{-1}, \alpha\gamma, (\alpha\gamma)^{-1}\}, \quad \{\alpha\beta, (\alpha\beta)^{-1}, \alpha\gamma, (\alpha\gamma)^{-1}\}. \end{aligned}$$

Les déterminations correspondantes de $\mathfrak{G}$ sont $a^{2n} = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; $a^{2n} = 1$, $b^2 = a^n$, $b^{-1}ab = a^{-1}$; $a^{2n} = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{n-1}$ si n' est pair, ou $a^n = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$, $\gamma^2 = 1$, $a\gamma = \gamma a$, $b\gamma = \gamma b$ si n' est impair; $a^{2n} = 1$, $b^2 = a^n$, $b^{-1}ab = a^{n-1}$ si n' est pair, ou $a^n = 1$, $b^2 = \gamma$, $b^{-1}ab = a^{-1}\gamma$, $\gamma^2 = 1$, $a\gamma = \gamma a$ si n' est impair. La dernière détermination se ramène, quel que soit n , à la précédente en remplaçant b par ba . On voit que le maximum du nombre des figuratifs indiqué au n° 10 n'est pas toujours atteint.

12. Le symétrique Γ de degré $t \geq 4$ (le symétrique et l'alterné de degré < 4 rentrent dans les cas précédemment traités) est défini par les équations (*S.*, 69)

$$(2) \quad \begin{cases} b^t = 1, & a^2 = 1, & (ba)^{t-1} = 1, & (ab^{-1}ab)^3 = 1, & (ab^{-j}ab^j)^2 = 1, \\ & j = 2, \dots, \tau, & \tau \text{ étant le plus grand entier } \leq \frac{t}{2}. \end{cases}$$

On a à considérer le groupe $\mathfrak{G}_0$ défini par les équations

$$(3) \quad \begin{cases} b^t = \beta, & a^2 = \alpha, & (ba)^{t-1} = \gamma, & (ab^{-1}ab)^3 = \delta, & (ab^{-j}ab^j) = \varepsilon_j, \\ j = 2, \dots, \tau; & \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_j \text{ sont permutables à } a, b \text{ (donc entre eux).} \end{cases}$$

Ici $m = \tau + 3$, $\nu = 2$, $\mathfrak{A}_0 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\tau\}$.

Comme dans tout produit $a^x b^y a^{x'} b^{y'} \dots$ appartenant à $\mathfrak{A}_0$, on peut toujours faire passer à gauche le dernier élément à droite, je considérerai, dans un tel produit (que l'on peut évidemment écrire en commençant par un quelconque de ses éléments), le premier élément à gauche comme suivant le dernier à droite.

Je poserai $(ab^{-h}ab^h)^{\rho_h} = \varepsilon_h$ (h étant pris mod t ; $\varepsilon_1 = \delta$; $\rho_h = 3$, si $h \equiv \pm 1 \pmod{t}$; $\rho_h = 2$, si $h \not\equiv \pm 1 \pmod{t}$: il est clair que $\varepsilon_h = \varepsilon_{-h}$). Pour abréger je dirai « transformer $ab^h a$ » au lieu « de remplacer $ab^h a$ par l'expression égale $b^h ab^{-h} ab^h ab^{-h} ab^h \delta \alpha^{-1}$, si $h \equiv \pm 1 \pmod{t}$, ou $b^h ab^{-h} ab^h \varepsilon_h \alpha^{-2}$, si $h \not\equiv \pm 1 \pmod{t}$ ».

Il s'agit maintenant de former les conséquences des équations (3) entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\tau$.

13. Supposons d'abord un instant a permutable à b . Soit (3 bis) le système obtenu en adjoignant à (3) $ba = ab$. Ce système (3 bis) équivaut évidemment à

$$b^t = \beta, \quad a^2 = \alpha, \quad b^{t-1} a^{t-1} = \gamma, \quad \delta = \alpha^3, \quad \varepsilon_j = \alpha^2, \quad ba = ab,$$

et l'équation $b^{t-1} a^{t-1} = \gamma$ s'écrit, en vertu de $b^t = \beta$, $a^2 = \alpha$,

$$\alpha^{t-1} = b\gamma\beta^{-1}, \quad \text{d'où} \quad \alpha^{t(t-1)} = \beta^{1-t}\gamma^t \quad \text{ou} \quad \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}} = \beta^{1-t}\gamma^t.$$

Toute conséquence de (3 bis) entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\tau$ se ramène, en tenant compte de $\delta = \alpha^3$, $\varepsilon_j = \alpha^2$, à une relation entre α, β, γ seuls. D'ailleurs toute conséquence de (3 bis) peut se mettre, en vertu des équations exprimant que les générateurs sont permutables, sous la forme $\Phi = 1$, Φ étant un produit de puissances de $b^t\beta^{-1}$, $a^2\alpha^{-1}$, $b^{t-1}a^{t-1}\gamma^{-1}$, $\delta\alpha^{-3}$, $\varepsilon_j\alpha^{-2}$ (E., 17). Une conséquence entre α, β, γ seuls est donc de la forme

$$(a^2\alpha^{-1})^x (b^t\beta^{-1})^y (b^{t-1}a^{t-1}\gamma^{-1})^z = 1.$$

Pour que b disparaisse, il faut que $ty + (t-1)z = 0$, d'où $y = (t-1)\xi$, $z = -t\xi$. Pour que a disparaisse, il faut que $2x + (t-1)z = 0$, d'où $x = \frac{t(t-1)}{2}\xi$. Donc la relation cherchée sera de la forme

$$\left(\alpha^{-\frac{t(t-1)}{2}} \beta^{1-t} \gamma^t\right)^\xi = 1.$$

Donc les conséquences de (3 bis) entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\tau$ coïncident avec les conséquences de

$$(4) \quad \begin{cases} \beta^{1-t} \gamma^t = \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}, & \delta = \alpha^3, & \varepsilon_j = \alpha^2, \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_j \text{ étant permutables.} \end{cases}$$

14. Ne supposons plus a permutable à b . A priori toutes les conséquences de (3) entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\tau$ résultent aussi de (3 bis).

On a d'ailleurs

$$(5) \quad \delta^2 = \delta a^{-1} \delta a = (ab^{-1}ab)^2 a^{-1} (ab^{-1}ab)^3 a = \alpha^6,$$

$$(6) \quad \varepsilon_j^2 = \varepsilon_j a^{-1} \varepsilon_j a = (ab^{-j}ab^j)^2 a^{-1} (ab^{-j}ab^j)^3 a = \alpha^6.$$

A la relation

$$\begin{aligned} & (i+1, i+3, i+2)^{-1} \cdot (12) (i+1, i+2) \cdot (i+1, i+3, i+2) \\ &= (12) (i+2, i+3) \quad [i \not\equiv \pm 1 \pmod{t}] \end{aligned}$$

du g^t symétrique de champ $1, \dots, t$, isomorphe à Γ , répond dans $\mathcal{G}_0$ la relation

$$(7) \quad b^{-i} (ab^{-1}ab)^{-2} b^i \cdot ab^{-i} ab^i \cdot b^{-i} (ab^{-1}ab)^2 b^i = ab^{-i-1} ab^{i+1} \xi,$$

ξ étant dans $\mathcal{A}_0$, ou, en remplaçant $(ab^{-1}ab)^{-2}$ par $\delta^{-1} ab^{-1} ab$, et en développant $(ab^{-1}ab)^2$,

$$\delta^{-1} \alpha b^{-i} ab^{-1} \cdot ab^{i+1} a \cdot b^{-i-1} ab ab^{-1} ab^{i+1} = ab^{-i-1} ab^{i+1} \xi,$$

ou, en transformant $ab^{i+1} a$,

$$\delta^{-1} \varepsilon_{i+1} \cdot b^{-i} ab^i ab^{-i} a \cdot b^{-1} ab^{i+1} = ab^{-i-1} ab^{i+1} \xi,$$

ou, en remplaçant $b^{-i} ab^i ab^{-i} a$ par $a^{-1} b^{-i} \varepsilon_i = \alpha^{-1} \varepsilon_i ab^{-i}$

$$\alpha^{-1} \delta^{-1} \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = \xi, \quad \text{d'où} \quad \xi^2 = 1.$$

Or, en élevant (7) au carré, on a $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \xi^2$. Donc

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_\tau \quad \text{soit} \quad = \varepsilon.$$

On a ensuite

$$\gamma = (ba)^{t-1} = bab^{-1} \cdot b^2 ab^{-2} \dots b^{t-2} ab^{2-t} \cdot b^{t-1} a,$$

ou, en remplaçant bab^{-1} par $abab^{-1} abab^{-1} a \alpha^{-2} \delta$ et $b^j ab^{-j}$ ($j \geq 2$)

par $ab^j ab^{-j} a \alpha^{-3} \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \gamma &= ab ab^{-1} ab ab^{-1} a . ab^2 ab^{-2} a . ab^3 ab^{-3} a \dots ab^{t-2} ab^{2-t} a . b^{t-1} a \alpha^{1-3t} \partial \varepsilon^{t-3} \\ &= ab ab^{-1} a (ba)^{t-2} b^{2-t} ab^{t-1} a \alpha^{1-2t} \partial \varepsilon^{t-3}, \end{aligned}$$

ou, puisque $b^t = \beta$,

$$\gamma = ab ab^{-2} \gamma b^2 ab^{-1} a \alpha^{1-2t} \partial \varepsilon^{t-3}$$

ou

$$(8) \quad \partial \varepsilon^{t-3} = \alpha^{2t-3}.$$

Si t est impair, $\varepsilon^{t-3} = \alpha^{2t-6}$. Donc

$$(9) \quad \partial = \alpha^3 \quad \text{ou} \quad \partial = \alpha^{-1} \varepsilon.$$

Si t est pair, $\varepsilon^{t-3} = \alpha^{2t-8} \varepsilon$. Donc

$$(10) \quad \partial \varepsilon = \alpha^5 \quad \text{ou} \quad \partial = \alpha \varepsilon.$$

On peut donc supprimer les générateurs $\delta, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_t$ de $\mathcal{H}_0$, et supposer que, dans (3), $\varepsilon_3, \dots, \varepsilon_t$ désignent $\varepsilon_2 = \varepsilon$, et que ∂ désigne α^3 si t est impair, $\alpha \varepsilon$ si t est pair. Toutes les conséquences de (3) entre $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ résultent alors de $\beta^{t-1} \gamma^t = \alpha^{\frac{t(t-1)}{2}}$, $\varepsilon = \alpha^2$.

15. Prenons maintenant la formule $\beta = b^t = (aba)^t \bmod \{\alpha\}$, et sous-entendons désormais le module $\{\alpha\}$. En transformant aba on a

$$\beta \equiv (b ab^{-1} ab ab^{-1} ab)^t,$$

ou, en faisant commencer le second membre à la quatrième lettre

$$\beta \equiv (ab ab^{-1} ab^2 ab^{-1})^t.$$

d'où, en transformant $ab^2 a$,

$$\beta \varepsilon^{-t} \equiv (ab ab ab^{-2} ab)^t \equiv [ab^{-2} (ab)^3]^t$$

ou, puisque $(ab)^3 = (ab)^{t-1} (ab)^{4-t} = \gamma (ab)^{4-t}$,

$$\begin{aligned} (11) \quad \beta (\gamma \varepsilon)^{-t} &\equiv [ab^{-2} (ab)^{4-t}]^t \equiv [ab^{-2} (b^{-1} a)^{t-4}]^t \\ &\equiv [ab^{-2} a (b^{-1} a)^{t-6} b^{-1} a]^t \\ &\equiv [b^{-4} a (b^{-1} a)^{t-6}]^t \\ &\equiv [ab^{-4} (ab^{-1})^{t-6}]^t. \end{aligned}$$

Si $t = 4$, on obtient de suite, en transformant un des $ab^{-2}a$ de la première expression de $\beta(\gamma\varepsilon)^{-t}$, $\beta^{t-1}\gamma^{-t} \equiv 1$. Si $t = 5$, on obtient de même, en transformant un des $ab^{-3}a$ de la seconde expression de $\beta(\gamma\varepsilon)^{-t}$, $\beta^{t-1}\gamma^{-t} \equiv \varepsilon$. Ces formules rentrent dans les formules générales que nous obtiendrons tout à l'heure.

16. Considérons l'élément $e_x = [ab^{-2x}(ab^{-1})^{t-2x-2}]^t$ ($1 \leq x \leq \tau - 1$), et admettons qu'il est dans $\mathfrak{A}_0$ [on vient de voir que $e_2 \equiv \beta(\gamma\varepsilon)^{-t}$]. En transformant $ab^{-2x}a$ on obtient

$$(12) \quad e_x \equiv [ab^{2x}ab^{-2x-1}(ab^{-1})^{t-2x-1}ab^{-2x-1}]^t \varepsilon^t,$$

d'où, en transformant partout $ab^{-2x-1}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}ab^{2x+1}ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{t-2x-6}ab^{-2x-2}ab^{2x+1}]^t \varepsilon^t,$$

d'où, en transformant le deuxième et le troisième ab^{-2x-2} du crochet,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}ab^{-1}ab^{2x+1}ab^{-2x-3}(ab^{-1})^{t-2x-8}ab^{-2x-3}ab^{2x+1}ab^{-1}]^t \varepsilon^t,$$

et généralement

$$(13) \quad e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{2x+n+1}ab^{-2x-n-2} \\ \times (ab^{-1})^{t-2(x+n+3)} ab^{-2x-n-2} ab^{2x+n+1}(ab^{-1})^n]^t \varepsilon^t,$$

17. Soit d'abord t impair $= 2\tau + 1$, et supposons d'abord $x \leq \tau - 3$. On aura, en faisant $n = \tau - x - 3$,

$$(14) \quad e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3} ab^{x+\tau-2} ab^{-x-\tau+1} \\ \times ab^{-1} ab^{-x-\tau+1} ab^{x+\tau-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t \varepsilon,$$

d'où, en transformant partout $ab^{-x-\tau+1}a$,

$$(15) \quad e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2} ab^{x+\tau-1} ab^{-x-\tau+2} ab^{x+\tau-1}(ab^{-1})^{\tau-x-2}]^t \varepsilon.$$

Si $x = 1$, cette formule donne $e_1 \equiv e_2 \varepsilon$, et, comme e_2 est dans $\mathfrak{A}_0$ (15), e_1 y est aussi. Soit désormais $x \geq 2$. Supposons établie, pour i impair, la généralisation suivante de (15)

$$(16) \quad e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2} ab^{x+\tau-i} ab^{-i-1} ab^{x+\tau-i}(ab^{-1})^{\tau-x-2}]^t \varepsilon^i,$$

qui donne, pour $x = i$, d'après la définition de e_x , $e_i \equiv e_{i+1} \varepsilon^i$. On en

tire, en transformant $ab^{-\ell-2x+2i}$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{-x-\tau+i-1}ab^{\ell+2x-2i}ab^{-x-\tau+i-1}(ab^{-1})^{\tau-x-2}]^t \varepsilon^{i+1},$$

et généralement

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{n+2+i}ab^{-n-3-i} \\ \times (ab^{-1})^{\ell-2(x+n+2)}ab^{-n-3-i}ab^{n+2+i}(ab^{-1})^n]^t \varepsilon^{i+1},$$

d'où, en faisant $n = 0$, et en transformant les ab^{2+i} ,

$$(17) \quad e_x \equiv [ab^{-2x+2(i+1)}ab^{-i-2}(ab^{-1})^{\ell-2x-4}ab^{-i-2}]^t \varepsilon^{i+1}.$$

Si $x = i + 1$, cette formule donne, d'après la définition de e_x , $e_{i+1} \equiv e_{i+2} \varepsilon^{i+1}$. De là, en transformant $ab^{-2x+2(i+1)}$,

$$e_x \equiv [ab^{2x-2(i+1)}ab^{-2x+i}(ab^{-1})^{\ell-2x-4}ab^{-2x+i}]^t \varepsilon^{i+2},$$

d'où, en transformant partout $ab^{-2x+i}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}ab^{2x-i}ab^{-2x+i-1}(ab^{-1})^{\ell-2x-6}ab^{-2x+i-1}ab^{2x-i}]^t \varepsilon^{i+2},$$

et généralement

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{2x+n-i}ab^{-2x-n+i-1} \\ \times (ab^{-1})^{\ell-2(x+n+2)}ab^{-2x-n+i-1}ab^{2x+n-i}(ab^{-1})^n]^t \varepsilon^{i+2}.$$

d'où, pour $n = \tau - x - 3$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{x+\tau-i-3}ab^{-x-\tau+i+2} \\ \times ab^{-1}ab^{-x-\tau+i+2}ab^{x+\tau-i-3}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t \varepsilon^{i+2}.$$

En transformant partout $ab^{-x-\tau+i+2}a$, on obtient alors la formule (16) où i est changé en $i + 2$.

On a donc, d'une manière générale, quel que soit x ,

$$(18) \quad e_x \equiv e_{x+1} \varepsilon^x.$$

18. Nous avons supposé jusqu'ici $x \leq \tau - 3$. Soit maintenant $x = \tau - 2$. On partira alors de la définition de e_x , qui jouera le rôle de (14), et qui s'écrit ici

$$e_{\tau-2} \equiv [ab^{-2\tau+4}(ab^{-1})^{\ell-2\tau+2}]^t \equiv [ab^5(ab^{-1})^3]^t \beta^{-\ell}.$$

On en déduit successivement par le même procédé

$$\begin{aligned} e_{\tau-1} &\equiv [ab^{-5}ab^4 \quad ab^{-1}ab^4] \beta^{-t} \varepsilon \\ &\equiv [ab^7 \quad ab^{-1}ab^3 \quad ab^{-4}] \beta^{-t} \varepsilon \\ &\equiv [ab^{-7}ab^3 \quad ab^3 \quad ab^3] \beta^{-t} \\ &\equiv [ab^9 \quad ab^{-3}ab^{-1}ab^{-3}] \beta^{-t} \\ &\equiv \dots \end{aligned}$$

et généralement

$$\begin{aligned} e_{\tau-1} &\equiv [ab^{4n+1} \quad ab^{1-2n} \quad ab^{-1}ab^{1-2n}] \beta^{-t} \varepsilon \\ &\equiv [ab^{-4n-1} \quad ab^{2n+1} \quad ab^{-1}ab^{2n+2}] \beta^{-t} \varepsilon \\ &\equiv [ab^{4n+3} \quad ab^{-2n-2} \quad ab^3 \quad ab^{-2n-2}] \beta^{-t} \varepsilon \\ &\equiv [ab^{-4n-3} \quad ab^{2n+1} \quad ab^3 \quad ab^{2n+1}] \beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{4(n+1)+1} \quad ab^{1-2(n+1)} \quad ab^{-1}ab^{1-2(n+1)}] \beta^{-t} \\ &\equiv \dots \end{aligned}$$

On s'arrêtera à la première formule où apparaît b^t . Cette formule s'écrit, quel que soit t ,

$$(19) \quad e_{\tau-2} \equiv \beta^{-t} (ab^3 ab^{-1})^t \varepsilon^\tau \equiv e_{\tau-1} \varepsilon^\tau \equiv e_{\tau-1} \varepsilon^{\tau-2},$$

c'est-à-dire que la formule (18) s'applique encore pour $x = \tau - 2$.

19. Soit $x = \tau - 1$. C'est encore la définition de e_x qui jouera le rôle de (14). On partira donc de

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^{-2\tau+2} (ab^{-1})^{t-2\tau}]^t \equiv [ab^3 ab^{-1}]^t \beta^{-t},$$

d'où l'on déduit, toujours par le même procédé,

$$\begin{aligned} e_{\tau-1} &\equiv [ab^{-3} \quad ab^5] \beta^{-t} \varepsilon \\ &\equiv [ab^{-5} \quad ab^7] \beta^{-t} \varepsilon \\ &\equiv [ab^{-7} \quad ab^9] \beta^{-t} \varepsilon \\ &\equiv \dots \\ &\equiv [ab^{-4n-1} \quad ab^{4n+3}] \beta^{-t} \varepsilon \\ &\equiv [ab^{-4n-3} \quad ab^{4n+5}] \beta^{-t} \varepsilon \\ &\equiv \dots \\ &\equiv [ab^{2-t} \quad ab^t] \beta^{-t} \varepsilon^{\tau-1}. \end{aligned}$$

On a donc ici

$$(20) \quad e_{\tau-1} \equiv \beta^{2-t} \varepsilon^{\tau-1}.$$

Ainsi en multipliant les formules déduites de (18) pour $x = 2, \dots, \tau - 3$, par (19) et (20),

$$(21) \quad e_2 \equiv \beta^{2-t} \varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}-1}.$$

Or $e_2 \equiv \beta(\gamma\varepsilon)^{-t} \equiv \beta\gamma^{-t}\varepsilon$ (15). Donc, en éliminant e_2 ,

$$\beta^{t-1}\gamma^{-t} \equiv \varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

20. Soit maintenant t pair $= 2\tau$, et supposons d'abord $x \leq \tau - 3$. La formule (13) donne, pour $n = \tau - x - 3$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{x+\tau-3}ab^{-x-\tau+1}ab^{-x-\tau+1}ab^{x+\tau-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

d'où, en transformant le premier $ab^{-x-\tau+1}a$ du crochet,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{x+\tau-1}ab^{-t-2x+2}ab^{x+\tau-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

d'où, en transformant $ab^{-t-2x+2}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{-x-\tau+1}ab^{t+2x-2}ab^{-x-\tau}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t.$$

Si $x = 1$, cette formule donne $e_1 \equiv e_2$. Donc e_1 est, comme e_2 , dans $\mathcal{A}_0$ (15). Supposons établie la formule plus générale

$$(22) \quad e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-2}ab^{-x-\tau+i}ab^{t+2x-2i}ab^{-x-\tau+i-1}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

d'où, pour $x = i$, $e_i \equiv e_{i+1}$. On en tire, en transformant $ab^{-x-\tau+i}a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-3}ab^{-x-\tau+i-1}ab^{x+\tau-i}ab^{x+\tau-i}ab^{-x-\tau+i-1}(ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

d'où, en transformant partout $ab^{-x-\tau+i-1}$, et en introduisant $b^t b^{-t} b^t b^{-t}$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^{\tau-x-4}ab^{\tau-x+i-2}ab^{x-\tau-i+1} \\ \times (ab^{-1})^2 ab^{x-\tau-i+1}ab^{\tau-x+i-2}(ab^{-1})^{\tau-x-4}]^t,$$

et généralement

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2}(ab^{-1})^n ab^{n+i+2}ab^{-n-i-3}(ab^{-1})^{t-2(x+n+3)}ab^{-n-i-3}ab^{n+i+2}(ab^{-1})^n]^t,$$

d'où, en faisant $n = 0$, et en transformant partout $ab^{t+2}a$,

$$(23) \quad e_x \equiv [ab^{-2x+2(i+1)}ab^{-t-2}(ab^{-1})^{t-2x-4}ab^{-i-2}]^t,$$

qui, pour $x = i + 1$, donne $e_{i+1} \equiv e_{i+2}$. En transformant $ab^{-2x+2(i+1)}a$,

on en tire

$$e_x \equiv [ab^{2x-2(i+1)} ab^{-2x+i} (ab^{-1})^{t-2x-4} ab^{-2x+i}]^t,$$

d'où, en transformant partout $ab^{-2x+i} a$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2} ab^{2x-i} ab^{-2x+i-1} (ab^{-1})^{t-2x-6} ab^{-2x+i-1} ab^{2x-i}]^t,$$

et généralement

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2} (ab^{-1})^n ab^{2x+n-i} ab^{-2x-n+i-1} \\ \times (ab^{-1})^{t-2(x+n+3)} ab^{-2x-n+i-1} ab^{2x+n-i} (ab^{-1})^n]^t,$$

d'où, pour $n = \tau - x - 3$,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2} (ab^{-1})^{\tau-x-3} ab^{x+\tau-i-3} \\ \times ab^{-x-\tau+i+2} ab^{-x-\tau+i+2} ab^{x+\tau-i-3} (ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t,$$

et, en transformant le premier $ab^{-x-\tau+i+2} a$ du crochet,

$$e_x \equiv [ab^{-2x-2} (ab^{-1})^{\tau-x-2} ab^{x+\tau-i-2} ab^{-2x-t+i+4} ab^{x+\tau-i-3} (ab^{-1})^{\tau-x-3}]^t.$$

En transformant $ab^{-2x-t+i+4} a$, on en déduit la formule (22) où i est remplacé par $i + 2$. On a donc généralement $e_x \equiv e_{x+1}$. Donc $e_1 \equiv e_{\tau-3}$.

21. Soit maintenant $x = \tau - 2$. La définition de e_x donne

$$e_{\tau-2} \equiv [ab^{-t+4} (ab^{-1})^2]^t \equiv [ab^4 (ab^{-1})^2]^t \beta^{-t}.$$

On en déduit, en transformant $ab^4 a$,

$$e_{\tau-2} \equiv [ab^{-4} ab^3 ab^3]^t \beta^{-t},$$

d'où, en transformant le premier $ab^3 a$, puis, par des transformations successives analogues,

$$\begin{aligned} e_{\tau-2} &\equiv [ab^6 \quad ab^{-1} \quad ab^{-3}]^t \beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{-6} \quad ab^5 \quad ab^3]^t \beta^{-t} \\ &\equiv [ab^8 \quad ab^{-1} \quad ab^{-5}]^t \beta^{-t} \\ &\equiv [ab^{-8} \quad ab^7 \quad ab^3]^t \beta^{-t} \\ &\equiv \dots \end{aligned}$$

et généralement

$$\begin{aligned}
 (24) \quad e_{\tau-2} &\equiv [ab^{2n} \quad ab^{-1} \quad ab^{2-2n}]^t \beta^{-t} \\
 e_{\tau-2} &\equiv [ab^{-2n} \quad ab^{2n-1} \quad ab^3]^t \beta^{-t} \\
 &\equiv [ab^{2(n+1)} \quad ab^{-1} \quad ab^{2-2(n+1)}]^t \beta^{-t} \\
 &\equiv \dots
 \end{aligned}$$

La formule (24) donne pour $n = \tau$

$$e_{\tau-2} \equiv (ab^2)^t \beta^{-t} \equiv e_{\tau-1}.$$

22. Soit $x = \tau - 1$, et $e_x = e_{\tau-1} = (ab^2)^t \beta^{-t}$.

Posons $t = q't'$, t' étant impair, et $q = 2^0 = 2q'$. Alors $e_{\tau-1} = [(ab^2)^q]^{t'} \beta^{-t}$.

Transformons un des $ab^2 a$ du crochet. Il viendra

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^4 ab^{-2} ab^4 (ab^2)^{q-3}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon,$$

d'où, en transformant partout $ab^4 a$,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^6 ab^{-4})^2 ab^6 (ab^2)^{q-5}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon,$$

et généralement

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{2n+2} ab^{-2n})^n ab^{2n+2} (ab^2)^{q-2n-1}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

On tire de là, pour $n = q' - 1$,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^q ab^{2-q})^{q'-1} ab^q ab^2]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{q'(q'-1)}{2}}.$$

Si t est $> q$, on continuera en transformant partout $ab^q a$, ce qui donne

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^{2q+2} ab^{-q} (ab^{q+2} ab^{-q})^{q'-1}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{q'(q'+1)}{2}}.$$

d'où, en transformant partout $ab^{q+2} a$ et $ab^{2q+2} a$,

$$e_{\tau-1} \equiv [ab^{2q+4} ab^{-2q-2} ab^{2q+4} ab^{-q-2} (ab^{q+4} ab^{-q-2})^{q'-2}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{(q'+1)(q'+2)}{2} + 1},$$

et généralement

$$\begin{aligned}
 e_{\tau-1} &\equiv [(ab^{2q+2n+2} ab^{-2q-2n})^n ab^{2q+2n+2} ab^{-q-2n} \\
 &\quad \times (ab^{q+2n+2} ab^{-q-2n})^{q'-n-1}]^{t'} \beta^{-t} \varepsilon^{\frac{(q'+n)(q'+n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}},
 \end{aligned}$$

d'où, pour $n = q' - 1$,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{3q}ab^{2-3q})^{q'-1}ab^{3q}ab^{-2q+1}]^{l'}\beta^{-l}\varepsilon^{\frac{3q'(3q'-1)}{2}},$$

et généralement, pour n impair),

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{nq}ab^{2-nq})^{q'-1}ab^{nq}ab^{-(n-1)q+1}]^{l'}\beta^{-l}\varepsilon^{\frac{nq'(nq'-1)}{2}},$$

d'où, pour $n = l'$,

$$e_{\tau-1} \equiv [(ab^{l'}ab^{2-l'})^{q'-1}ab^{l'}ab^{-l'+q+1}]^{l'}\beta^{-l}\varepsilon^{\frac{l'(l'-1)}{2}} \equiv \beta^{2-l}\varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

Donc

$$e_2 \equiv e_{\tau-1} \equiv \beta^{2-l}\varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

Or $e_2 \equiv \beta\gamma^{-l} (13)$. Donc, en éliminant e_2 ,

$$\beta^{l-1}\gamma^{-l} \equiv \varepsilon^{\frac{\tau(\tau-1)}{2}}.$$

23. On a donc, quel que soit l ,

$$(25) \quad \beta^{1-l}\gamma^l\varepsilon^l\alpha^m = 1, \quad l = \frac{\tau(\tau-1)}{2},$$

m étant encore inconnu. Cette relation étant une conséquence de

$\beta^{1-l}\gamma^l = \alpha^{\frac{l(l-1)}{2}}$, $\varepsilon = \alpha^2$ (14), son premier membre est de la forme

$$(26) \quad \left(\beta^{1-l}\gamma^l\alpha^{-\frac{l(l-1)}{2}}\right)^x (\varepsilon\alpha^{-2})^y.$$

Donc $x = 1$, $y = l$, et

$$(27) \quad m = -\frac{l(l-1)}{2} - 2l = -\frac{l(l-1)}{2} - \tau(\tau-1).$$

Il est clair qu'on aurait pu déterminer m , mais plus péniblement, en conservant α dans les calculs qui ont fourni $\beta^{1-l}\gamma^{-l} \equiv \varepsilon^l$.

24. Toute conséquence des équations (3) entre α , β , γ , ε résulte de celles qui ont été trouvées.

En effet, une telle conséquence $\Phi = 1$, devant résulter de $\beta^{1-l}\gamma^l = \alpha^{\frac{l(l-1)}{2}}$, $\varepsilon = \alpha^2$ (14), a un premier membre Φ de la forme (26).

Mais $\beta^{1-t} \gamma^t \varepsilon^t \alpha^m$ ayant aussi cette forme, $\Phi = 1$ se ramène, en vertu des relations trouvées, à la forme $(\alpha^{-2} \varepsilon)^x = 1$ ($x = 0$ ou 1). Il s'agit de montrer que, dans toute conséquence de cette forme, x est nécessairement nul. Il suffit pour cela de construire un groupe d'ordre $2(t!)$ défini par

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 = 1, \quad b^t = \beta, \quad (ab)^{t-1} = \gamma, \quad (ab^{-1}ab)^2 = \delta, \\ (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon, \quad (j = 2, \dots, t), \quad \varepsilon^2 = 1; \\ \delta = 1 \text{ si } t \text{ est impair; } \quad \delta = \varepsilon \text{ si } t \text{ est pair; } \quad \beta, \gamma \text{ sont dans } \{\varepsilon\} = E. \end{array} \right.$$

Admettons l'existence d'un tel groupe abstrait X , et cherchons à construire un groupe analogue $\bar{X}$ où t soit remplacé par $t+1$. Je désignerai par $\bar{\tau}, \bar{\varepsilon}, \bar{E}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \dots$ les objets analogues à $\tau, \varepsilon, \dots$ et relatifs à $\bar{X}$.

Soit G la représentation régulière de X et S_t le symétrique de champ $1, \dots, t$. $X|E \equiv S_t$ est représenté régulièrement par le plus petit commun multiple Γ des substitutions $(Ea) = (Ex, Exa)$, (S , 57) et $(Eb) = (Ex, Exb)$, Ex parcourant $X|E$: je supposerai que (Ea) répond à la substitution (12) et (Eb) à $(12 \dots t)$; je désignerai d'une manière générale par (Ez) la substitution de Γ qui répond à l'élément Ez de $X|E$, et par (z) la substitution de G qui répond à z de X .

Les éléments de $X|E$ se partagent en couples tels que Ex, Exa . Désignons par Ex un élément arbitrairement choisi dans chacun de ces couples et par x un élément arbitrairement choisi dans Ex . Alors les x et les xa formeront un système déterminé R_1 de restes de $X \bmod E$, et les εx et les εxa un autre système de restes R_2 . On pourra donc écrire

$$\begin{aligned} (\varepsilon) &= (x_1, x_2) (x_2, x_1) \\ (x_i \text{ parcourant } R_1, \text{ et } x_j &\equiv x_i \varepsilon \text{ si } j \neq i; \quad i, j \equiv 0, 1 \bmod 2); \\ (a) &= a_1 a_2, \quad a_1 = (x_1, x_1 a), \quad a_2 = (x_2, x_2 a), \\ (b) &= (x_1, x_1 b) (x_2, x_2 b). \end{aligned}$$

Soit $x_i b \varepsilon^{f(x_i, b)}$ celui des deux éléments de $Ex_i b$ qui est dans R_1 , et posons $(x_i, x_i b \varepsilon^{f(x_i, b)}) = b_i$, $b_1 b_2 = b_0$. (b) se déduit de b_0 en remplaçant les ε^f par 1 . Si $b^t = \varepsilon^0$, $(b)^t = (x_1, x_1 b^t) (x_2, x_2 b^t)$ se

réduit à $(\varepsilon)^0$. Si $(E a^{\lambda_1} b^{\mu_1} a^{\lambda_2} b^{\mu_2} \dots a^{\lambda_t} b^{\mu_t})$ remplace $E x_i$ par $E y_i$, y_i étant dans R_i , il est clair que $a_i^{\lambda_1} b_i^{\mu_1} \dots a_i^{\lambda_t} b_i^{\mu_t}$ remplace x_i par y_i , et inversement. Donc $\Gamma_i = \{a_i, b_i\}$ est semblable à Γ .

Considérons maintenant un groupe $\bar{G}$ ayant $t+1$ constituants transitifs $G^{(0)}, \dots, G^{(t)}$ semblables à $G^{(0)} = G$. Soit en général $\bar{s} = \Pi_0^t s^{(k)}$ la substitution de G qui répond aux substitutions $s^{(0)}, \dots, s^{(t)}$ de $G^{(0)}, \dots, G^{(t)}$. Désignons par $a^{(k)}, a_i^{(k)}, \varepsilon^{(k)}, \Gamma_i^{(k)}, \dots$ les objets jouant relativement à $G^{(k)}$ le rôle de $(a) = a^{(0)}, a_i = a_i^{(0)}, (\varepsilon) = \varepsilon^{(0)}, \Gamma_i = \Gamma_i^{(0)}$ relativement à $G = G^{(0)}$. Soit $\bar{a}_i = \Pi_0^t a_i^{(k)}, \bar{b}_i = \Pi_0^t b_i^{(k)}$ et $\bar{\Gamma}_i = \{\bar{a}_i, \bar{b}_i\}$. Soit K_i une représentation régulière du symétrique S_{t+1} de champ $1, \dots, t+1$ dans le champ de $\bar{\Gamma}_i$. Soit c_i la $s_2^{(t+1)}$ de K_i qui répond à $(t, t+1)$ de S_{t+1} , et $c = c_1 c_2$. On peut supposer que $K_i = \{\bar{\Gamma}_i, c_i\}$. Soit K le groupe ayant pour constituants K_1 et K_2 , et où la substitution s qui répond à s_i de K_i est $s_1 s_2$. Soit $\bar{\Gamma}$ le diviseur de K qui a pour constituants $\bar{\Gamma}_1$ et $\bar{\Gamma}_2$. Toute substitution $\bar{a}^{\lambda} \bar{b}^{\mu} c^{\nu} \bar{a}^{\lambda'} \bar{b}^{\mu'} c^{\nu'} \dots$ de K étrangère à $\bar{\Gamma}$ est régulière et remplace chaque $x_i^{(k)}$ par un $x_i^{(k')}$ d'indice supérieur différent⁽¹⁾. Donc la substitution correspondante $\bar{a}^{\lambda} \bar{b}^{\mu} c^{\nu} \bar{a}^{\lambda'} \bar{b}^{\mu'} c^{\nu'} \dots$ de $\{\bar{G}, c\}$, qui ne s'en distingue qu'en ce que certaines séquences de la forme $x_i^{(k)} x_i^{(l)}$ ($l \neq k$) sont remplacées par $x_i^{(k)} x_j^{(l)}$ ($j \neq i$), déplace aussi tous les symboles. De plus $\{\bar{G}, c\}$ est transitif, puisque K_i l'est entre $x_i^{(0)}, \dots, x_i^{(t)}$, et que $\bar{G}$ contient $(\bar{\varepsilon})$. Donc $\{\bar{G}, c\}$ est régulier. D'ailleurs $(\bar{\varepsilon}) c (\bar{\varepsilon}) = c_1 c_2 = c$. Donc $(\bar{\varepsilon})$, permutable à $\bar{a}$ et à $\bar{b}$, est normale dans $\{\bar{G}, c\}$.

$(c \bar{b}_0)^{t+1}$, qui correspond dans K à $(1, \dots, t+1)^{t+1}$, est égale à 1. Donc $(c \bar{b})^{t+1}$ est un produit de transpositions de la forme $(x_i^{(k)}, x_j^{(k)})$, et, comme $\{\bar{G}, c\}$ est régulier, $(c \bar{b})^{t+1}$ contient toutes ces transpositions, ou se réduit à 1. De même, $(\bar{a} c \bar{b}_0)^t$, qui correspond à $[(12)(1, \dots, t+1)]^t$, étant égale à 1, $(\bar{a} c \bar{b})^t$ est dans $(\bar{\varepsilon})$.

(¹) Soit, en général, $A = \Sigma a$ un diviseur d'un groupe $G = \Sigma g = \Sigma x = \Sigma z A$, et $\Sigma(x, xg)$ la représentation régulière de G où la substitution (x, xg) répond à g . Si g est hors de A , tout élément za d'un complexe quelconque zA sera remplacé par un élément zag d'un complexe $zAg \neq zA$.

Pour $1 \leq i \leq \tau$, $(c\bar{b}_0)^{-i} \bar{a} (c\bar{b}_0)^i$, qui correspond à la transformée de (12) par $(1, 2, \dots, t+1)^i$, coïncide avec $\bar{b}_0^{-i} \bar{a} \bar{b}_0^i$, qui correspond à la transformée de (12) par $(1, 2, \dots, t)^i$. D'après la règle usuelle de transformation, il est dès lors évident que les transformées de $\bar{a}$ par $(c\bar{b})^i$ et par $\bar{b}^i$ coïncident. Donc $\bar{a} (c\bar{b})^{-i} \bar{a} (c\bar{b})^i$ coïncide avec $\bar{a} \bar{b}^{-i} \bar{a} \bar{b}^i$.

Si $t = 2\tau + 1$, $\tau = \tau + 1$. Mais $(\bar{a} (c\bar{b})^{-\tau-1} \bar{a} (c\bar{b})^{\tau+1})^2$ est égale à $(\bar{\varepsilon})$ ou à 1 en même temps que $(\bar{a} (c\bar{b})^{-2} \bar{a} (c\bar{b})^2)^2$: cela résulte des équations que vérifie $\{\bar{G}, c\}$ (14).

Donc $\{\bar{G}, c\}$ est une représentation régulière de $\bar{X}$, qui, par suite, existe quand X existe.

Il reste à montrer que X existe pour $t = 4$. Or considérons le groupe $L(2, 3)$ des substitutions $\begin{vmatrix} \lambda\xi + \mu\eta \\ \lambda'\xi + \mu'\eta \end{vmatrix} \pmod{3}$. En posant

$$\begin{vmatrix} \xi \\ \xi - \eta \end{vmatrix} = a, \quad \begin{vmatrix} -\xi + \eta \\ -\xi - \eta \end{vmatrix} = b, \quad \begin{vmatrix} -\xi \\ -\eta \end{vmatrix} = \varepsilon.$$

on a

$$a^3 = 1, \quad b^3 = \varepsilon, \quad (ba)^3 = \varepsilon, \quad (ab^{-1}ab)^3 = \varepsilon, \quad (ab^{-2}ab^2)^2 = \varepsilon.$$

23. En posant $\alpha = \alpha'$, $\beta\gamma^{-1} = \beta'$, $\beta'^{-t}\gamma^t\varepsilon^t\alpha^m = \gamma'$ (d'où $\beta''\gamma' = \beta\varepsilon^t\alpha^m$, $\beta'^{t-1}\gamma' = \gamma\varepsilon^t\alpha^m$), $\alpha'^{-2}\varepsilon = \varepsilon'$, les équations de $\mathfrak{A}_0$ deviennent $\gamma' = 1$, $\varepsilon'^2 = 1$, α' et β' restant indéterminés. Donc le multiplicateur π de Γ est d'ordre $\mu = 2$. Les divers groupes infinis, dont le produit direct par $\mathfrak{A} = \{\varepsilon'\}$ ($\equiv \pi$) est $\mathfrak{A}_0$, sont contenus dans la formule

$$\mathfrak{A}_1 = \{\alpha'\varepsilon'^x, (\alpha'\varepsilon'^x)^{-1}, \beta'\varepsilon'^y, (\beta'\varepsilon'^y)^{-1}\}.$$

où x et y peuvent être pris indépendamment l'un de l'autre égaux à 0 ou à 1 (2). Les divers figuratifs de Γ , qui s'obtiennent en faisant $\mathfrak{A}_1 = 1$, sont donc fournis par les équations (3) où l'on fait (après avoir remplacé δ par α^3 si t est impair, par $\alpha\varepsilon$ si t est pair)

$$(29) \quad \alpha' = \varepsilon'^{-x}, \quad \beta' = \varepsilon'^{-y}, \quad \gamma' = 1, \quad \varepsilon'^2 = 1,$$

c'est-à-dire, en réduisant les exposants de ε' mod 2, et en remarquant que $\varepsilon' = \varepsilon$ (puisque $\alpha^2 = \alpha'^2 = 1$) et que $m \equiv \frac{t(t-1)}{2} \pmod{2}$,

$$(30) \quad \alpha = \varepsilon^x, \quad \beta = \varepsilon^{\frac{t(t-1)}{2}x + ty + t}, \quad \gamma = \beta\varepsilon^y, \quad \delta = \varepsilon^{x+t+1}.$$

En prenant au besoin $b\varepsilon^r$ pour b , on peut toujours annuler y . On a donc au plus deux figuratifs répondant aux choix $x = 0, 1$.

Le symétrique étant complet pour $t \neq 6$ (1), il résulte des n^{os} 9 et 10 que ces figuratifs sont distincts si $t \neq 6$. Mais on peut le voir directement, et même pour $t = 6$, comme il suit.

Soient $\mathfrak{G}$ un quelconque de ces figuratifs, et $\mathfrak{C}$ son commutant (isomorphe au $\mathfrak{g}^t$ alterné). $\mathfrak{A}$ ($< \mathfrak{C}$) est le central de $\mathfrak{G}$, et, dans l'homomorphisme de $\mathfrak{G}$ à Γ , $\mathfrak{C}$ répond au commutant $K (\equiv C)$ de Γ . Les transpositions de Γ sont toutes conjuguées, et à chacune d'elles répondent deux éléments de $\mathfrak{G}$ situés hors de $\mathfrak{C}$ et ayant pour carré $\alpha^2 = \alpha$. Donc tous les éléments de $\mathfrak{G}$ répondant aux s_2 impaires de Γ ont pour carré α , c'est-à-dire que, si $\mathfrak{C}Y$ est le système des e_2 de $\mathfrak{G} | \mathfrak{C}$, tous les e_2 de $\mathfrak{G}$ qui figurent dans $\mathfrak{C}Y$ ont pour carré α . Donc les deux déterminations de $\mathfrak{G}$, dans lesquelles α est un élément distinct de $\mathfrak{A}$, sont elles-mêmes distinctes.

26. Avant de faire une application aux cas $t = 4, 5$, je dois rappeler quelques résultats généraux.

Soit $\Gamma(2, \pi)$ ($\pi = p^M$; p premier, M entier) le groupe des substitutions $\begin{vmatrix} \lambda\xi + \mu\eta \\ \lambda'\xi + \mu'\eta \end{vmatrix}$, $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ parcourant le champ de Galois C_π d'ordre π ; $U(2, \pi)$ le diviseur de $L(2, \pi)$ formé des substitutions de $L(2, \pi)$ dont le déterminant est 1; $\mathfrak{L}(2, \pi)$ le groupe des substitutions $\left(\frac{\lambda\xi + \mu}{\lambda'\xi + \mu'} \right)$ où $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ parcourent C_π et ∞ ; $\mathfrak{U}(2, \pi)$ le diviseur de $\mathfrak{L}(2, \pi)$ formé des substitutions dont le déterminant est un carré.

Soit i une racine primitive de C_π . M. Schur a démontré (*Cr.*, t. 132, p. 113-123) que les diviseurs de $L(2, \pi^2)$ de la forme $G^{(p)} = U(2, \pi)$, $|\rho\xi, \rho i^{-1}\eta| = s$ pour lesquels s^2 est dans $U(2, \pi)$, c'est-à-dire pour lesquels $\rho^4 = i^2$, sont des figuratifs de $\mathfrak{L}(2, \pi)$. Comme $U(2, \pi)$, contient $|\xi, -\eta|$, $G^{(p)}$ a au plus deux déterminations, l'une $G'_\pi = G'$ répondant à $\rho^2 = i$, l'autre $G''_\pi = G''$ répondant à $\rho^2 = -i$ (d'où $\rho i^{-1} = -\rho^{-1}$). G' est dans $U(2, \pi^2)$ et n'a par suite qu'un e_2 . G'' a plusieurs e_2 ; car, pour que $\begin{vmatrix} \lambda\xi + \mu\eta \\ \lambda'\xi + \mu'\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho\xi \\ -\rho^{-1}\eta \end{vmatrix}$ ($\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1$) soit

(1) HÖLDER, *M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 333-345.

d'ordre 2, $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ étant dans C_π , il faut et suffit, on le voit directement, ou que $\mu\lambda'$ soit $\neq 0$ avec $\mu' = -i\lambda$ et $\mu\lambda' = -1 - i\lambda^2$, ou que $\mu = \lambda' = 0$ avec $\mu' = \lambda^{-1}$ et $i\lambda^2 = -1$ (ce qui exige que -1 soit non carré, donc que $\pi \equiv 3 \pmod{4}$) ⁽¹⁾.

Si $\pi \equiv 1 \pmod{4}$, $L(2, \pi)$ a un diviseur A formé des substitutions de déterminant ± 1 , dans lequel $U(2, \pi)$ est aussi d'indice 2. Mais A n'est pas un figuratif de $\mathcal{L}(2, \pi)$. En effet, -1 étant ici carré, $-1 - i\lambda^2$ est $\neq 0$, quel que soit λ , G'' a $\pi(\pi - 1)e_2$, et G' un seul, tandis que A en a $\pi + 2$, comme on le voit aussi directement. Si $\pi \equiv 3 \pmod{4}$, $-i$ est carré, et $\rho^2 = -i$ est résoluble dans C_π ; G'' est alors identique au groupe $\{U(2, \pi), [\xi, -\eta]\}$.

Pour $l = 4$ [$\tau = 2$; $\Gamma \equiv \mathcal{L}(2, 3)$], $L(2, 3) = U_3 = G_3''$ est le figuratif de Γ répondant au choix $x = 0$ (24). Celui répondant à $x = 1$ est G_3' ($i = -1$, $\rho^2 = -1$) (alors $i = -1$ et $\rho^2 = -1$). Car, en posant

$$b = \begin{vmatrix} -\rho\xi + \rho\eta \\ -\rho\xi - \rho\eta \end{vmatrix}, \quad a = \begin{vmatrix} \rho\xi + \rho\eta \\ -\rho\eta \end{vmatrix} \quad \left(\text{si } u = \begin{vmatrix} \xi + \eta \\ \eta \end{vmatrix}, \text{ } u^{-1}su \right),$$

on a

$$a^2 = \varepsilon, \quad b^4 = \varepsilon, \quad (ab)^3 = \varepsilon, \quad (ab^{-1}ab)^3 = 1, \quad (ab^{-2}ab^2)^2 = \varepsilon.$$

Pour $l = 5$ [$\tau = 2$; $\Gamma \equiv \mathcal{L}(2, 5)$], G_5' , qui n'a qu'un e_2 , répond à $x = 1$, et G_5'' à $x = 0$. On obtient des représentations des figuratifs dans C_5 en prenant

$$b = \begin{vmatrix} -\xi \\ -\xi - \eta \end{vmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} -\xi \\ -\eta \end{vmatrix}, \quad a = \rho \begin{vmatrix} \lambda\xi + \eta \\ \lambda'\xi - \lambda\eta \end{vmatrix} \\ (\theta = \pm 1, \lambda' = -\theta(\lambda^2 + 3));$$

pour $\rho^2 = 2$, le figuratif obtenu est G_5' ; pour $\rho^2 = 3$, il est G_5'' .

Aucun $g_{2,120}$ Δ du $g_{4,120}$ $L(2, 5)$ n'est isomorphe à G_5' ou à G_5'' . En effet, soit A le $g_{2,120}$ de $L(2, 5)$ formé des substitutions de déterminant ± 1 . X et A sont normaux dans L , et le plus grand commun diviseur Δ de X et de A est un $g_{1,20}$ normal dans L . Donc Δ coïncide avec U , sans quoi leur plus grand commun diviseur serait normal dans L et d'ordre > 2 , ce qui ne se peut. Donc X contient U . Mais

(1) SCHUR, *loc. cit.*

$L|U$, qui est un g_1 cyclique, n'a qu'un g_2 . Donc $X = A$. Or on a vu que A n'est pas un figuratif de $\mathfrak{L}(2, 5)$.

27. $\mathfrak{S}|\mathfrak{A}$ est isomorphe au g^t alterné, et $\mathfrak{S}$ contient $\mathfrak{A}$. Donc $\mathfrak{S}$ est une extension normale du g^t alterné (8). Donc le multiplicateur du g^t alterné est d'ordre ≥ 2 .

28. L'alterné Γ de degré $n \geq 4$ est défini, $t = n - 2$ étant sa transitivité, par les équations (S., 70).

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} b^t = c^2 = a^2 = (ba)^{t-1} = (ac)^3 = (ab^{-1}ab)^3 = (ab^{-j}ab^j)^2 = (cb^{-k}ab^k)^2 = 1; \\ j = 2, \dots, \tau, \tau \text{ étant le plus grand entier } \leq \frac{t}{2}; k = 1, \dots, t-2 = n-4; \\ \text{si } n \leq 5, \text{ il faut supprimer l'équation } (ab^{-j}ab^j)^2 = 1; \\ \text{si } n = 4, \text{ il faut en outre supprimer } (ab^{-1}ab)^3 = 1 \text{ et } (cb^{-k}ab^k)^2 = 1. \end{array} \right.$$

On en a une représentation A_n dans les symboles $1, \dots, n$, en prenant $a = 12.34$, $c = 132 = 12.23$, et $b = 34 \dots n$, si n est impair, $b = 12.34 \dots n$, si n est pair. b, c , contenant $123, 124, \dots, 12n$, coïncide avec A_n (S., 38) : on vérifie d'ailleurs directement que $a = cb^{-1}cbc$ pour n pair, et que $a = c^2b^{-1}cbc^2$ pour n impair.

Nous avons à considérer ici le groupe G_0 défini par les équations

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} a^2 = \alpha, \quad b^t = \beta, \quad (ba)^{t-1} = \gamma, \quad c^2 = x, \quad (ac)^3 = \zeta, \\ (ab^{-1}ab)^3 = \delta, \quad (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon_j, \quad (cb^{-k}ab^k)^2 = \eta_k, \\ \alpha, \beta, \gamma, x, \zeta, \delta, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\tau, \eta_1, \dots, \eta_{t-2} \text{ sont permutables à } a, b, c \text{ (donc} \\ \text{entre eux); } j = 2, \dots, \tau; k = 1, \dots, t-2; \text{ si } n \leq 5, \text{ il faut supprimer} \\ \text{l'équation } (ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon_j; \text{ si } n = 4, \text{ il faut en outre supprimer} \\ (ab^{-1}ab)^3 = \delta \text{ et } (cb^{-k}ab^k)^2 = \eta_k. \end{array} \right.$$

Je désignerai par $\mathfrak{A}_0$ le plus petit commun multiple de $\alpha, \beta, \gamma, x, \zeta, \delta, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\tau, \eta_1, \dots, \eta_{t-2}$. Comme au n° 12 on a, en posant $(ab^{-h}ab^h)^{\rho_h} = \varepsilon_h$ (h étant pris mod t ; $\rho_h = 3$, si $h \equiv \pm 1$; $\rho_h = 2$, si $h \not\equiv \pm 1$), $\varepsilon_h = \varepsilon_{-h}$. J'emploierai aussi dans le même sens l'expression « transformer $ab^h a$ ». Je dirai de même « transformer $cb^k a$ » pour « remplacer $cb^{-k} a$ par $b^{-k} a^{-1} b^k c^{-1} b^{-k} \eta_k = b^{-k} ab^k c^2 b^{-k} \eta_k \alpha^{-1} x^{-1}$ ». Comme $c^2 b^{-k} ab^k = c \cdot cb^{-k} ab^k$ devient, en transformant $cb^{-k} a$, $cb^{-k} ab^{-k} c^2 \eta_k \alpha^{-1} x^{-1}$ et, en transformant de nouveau $cb^{-k} a$,

$b^{-k}ab^kcb^{-k}\eta_k^2\alpha^{-2}x^{-1}$, je dirai encore « transformer $c^2b^{-k}a$ » pour « remplacer $c^2b^{-k}a$ par $b^{-k}ab^kcb^{-k}\eta_k^2\alpha^{-2}x^{-1}$ ».

Γ étant parfait, on sait à priori qu'il n'a qu'un figuratif (8).

29. Considérons un instant le groupe G'_0 défini par les équations (32 bis) formées des équations (32) jointes à $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = cb$. Des équations de G'_0 résultent, entre $\alpha, \beta, \gamma, x, \zeta, \delta, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\tau, \eta_1, \dots, \eta_{t-2}$ les équations (4) et, en outre,

$$(33) \quad \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{t-2}, \quad \eta_1^3 = \zeta^2 = \alpha^3 x^2.$$

Toute conséquence des équations de G'_0 entre $\alpha, \dots, \eta_{t-2}$ peut s'écrire, en tenant compte de $\delta = \alpha^3$, $\varepsilon_j = \alpha^2$, $\eta_k = \eta_1$,

$$\alpha^x \beta^y \gamma^z x^2 \eta_1^3 \zeta^2 = 1$$

et a une forme typique (*E.*, 17) où la somme $-2y - 3z - 2X$ des exposants de α et celle $-2y - 3x - 3z$ des exposants de c sont nulles. Donc $y \equiv 0 \pmod{3}$, et $x \equiv z \equiv 0 \pmod{2}$. Donc la conséquence considérée se ramène, en vertu de (33), à une conséquence entre $\alpha, \beta, \gamma, \eta_1$ seuls, et celle-ci se ramène à son tour, comme au n° 15, à la forme

$$\left(\alpha^{\frac{l(l-1)}{2}} \beta^{l-1} \gamma^{-l} \right)^\lambda \alpha^{-3u} \eta_1^{3u} = 1,$$

ou, d'après (4), à $\eta_1^{3u} = \alpha^{3u}$, ou, en remplaçant η_1^3 par $\alpha^3 x^2$, à $x^{2u} = 1$. Or, dans une telle conséquence mise sous forme typique, la somme des exposants de c est $-6u$. Donc $u = 0$. Donc les conséquences des équations de G'_0 entre $\alpha, \dots, \eta_{t-2}$ coïncident avec les conséquences de (4) et de (33).

30. Revenons maintenant à G_0 . Des équations $a^2 = \alpha$, $b^t = \beta$, $(ba)^{t-1} = \gamma$, $(ab^{-1}ab)^s = \delta$, $(ab^{-j}ab^j)^2 = \varepsilon_j$, qui font partie de (32), on déduit d'abord comme précédemment

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_j = \varepsilon_2 \text{ soit } = \varepsilon; \quad \varepsilon^2 = \alpha^4; \quad \delta = \alpha^3 \text{ pour } n \text{ impair}; \quad \delta = \alpha\varepsilon \text{ pour } n \text{ pair}; \\ \beta^{1-t} \gamma^t \varepsilon^l \alpha^m = 1, \quad l = \frac{\tau(\tau-1)}{2}, \quad m = -\frac{l(l-1)}{2} - 2l. \end{array} \right.$$

On a ensuite

$$(35) \quad \eta_k^3 = \eta_k c^{-1} \eta_k c \cdot c^{-2} \eta_k c^2 = (cb^{-k}ab^k)^2 c^{-1} (cb^{-k}ab^k)^2 \cdot c^{-1} (cb^{-k}ab^k)^2 c^2 = \alpha^3 x^3.$$

A la relation $(24)(56).(123).(24)(56) = (143)$ de A_n répond dans $\mathcal{G}_0$ (24.56) est la transformée de 34.56 par 132)

$$(36) \quad (c^{-1}ab^{-1}ab^2c)^{-1}.c^2.(c^{-1}ab^{-1}ab^2c) = ca\xi,$$

ξ étant dans $\mathcal{A}_0$, ou

$$\alpha^{-1}c^{-1}b^{-1}ab^2ac^2ab^{-1}ab^2c = ca\xi,$$

ou, en remplaçant ac^2a par $cac\zeta^{-1}\alpha^2x$, et en multipliant à droite par $a\alpha^{-1}$ et à gauche par c^{-1} ,

$$\alpha^{-1}\zeta^{-1}cb^{-1}ab^2cacb^{-1}ab^2ca = \xi,$$

ou, en remplaçant deux fois $cb^{-1}ab^2$ par $\eta_2 b^{-1}ab^2 c^{-1} \alpha^{-1}$,

$$\alpha^{-3}\zeta^{-1}\eta_2^2 b^{-2}ab^2ab^{-1}ab^2a = \xi$$

ou

$$\alpha^{-3}\zeta^{-1}\eta_2^2\varepsilon = \xi.$$

Or le cube de (36) est $x^2 = \zeta\xi^3$. Donc

$$x^2 = \zeta\alpha^{-9}\zeta^{-3}\eta_2^6\varepsilon^3 = \alpha^{-3}\varepsilon^3x^4\zeta^{-2}$$

ou

$$(37) \quad \zeta^2 = \alpha\varepsilon x^2 = \eta_2^3(\alpha^{-2}\varepsilon).$$

On voit que les équations de $\mathcal{G}_0$ ne peuvent entraîner la conséquence $\zeta^2 = \eta_2^3$, car elles entraîneraient aussi la conséquence $\varepsilon = \alpha^2$ contrairement à l'exemple construit au n° 24.

31. Supposons maintenant n impair. On aura d'abord (cf. 28)

$$a = x^{-1}ax = x^{-2}c^2.cac.c^2 = \alpha^{-1}\zeta x^{-3}c^2.ac^2a.c^2.$$

Or de $(b^{-k}ab^k c)^2 = \eta_k$ on déduit

$$c^2 = \eta_k^{-1}x b^{-k}ab^k c b^{-k}ab^k \quad \text{et} \quad c = \alpha^{-1}\eta_k x^{-1} b^{-k}ab^k c^2 b^{-k}ab^k.$$

Donc

$$c^2 = \alpha^{-2}\eta_k^{-1}\eta_{k+1} b^{-k}ab^k.b^{-k-1}ab^{k+1}c^2 b^{-k-1}ab^{k+1}.b^{-k}ab^k.$$

Par suite, en répétant la transformation pour $k = 1, 3, 5, \dots, n-6$,

$$\begin{aligned} a &= \alpha^{-2} \zeta x^{-2} \eta_1^{-1} x c^2 . a . b^{-1} a b . b^{-2} a b^2 . c^2 b^{-2} a b^2 . b^{-1} a b . a . c^2 \\ &= \dots \dots \dots \\ &= \alpha^{-2} \zeta x^{-2} \eta_1^{-1} \eta_2 \eta_3^{-1} \eta_4 \dots \eta_{n-6}^{-1} \eta_{n-5} \eta_{n-4}^{-1} \alpha^{5 \dots n} x \\ &\quad \times c^2 . a . b^{-1} a b . b^{-2} a b^2 \dots b^{4 \dots n} a b^{n-4} . c . b^{4 \dots n} a b^{n-4} \dots b^{-2} a b^2 . b^{-1} a b . a . c^2, \end{aligned}$$

ou, en posant

$$\begin{aligned} \eta_1 \eta_2^{-1} \eta_3 \eta_4^{-1} \dots \eta_{n-6}^{-1} \eta_{n-5} \eta_{n-4}^{-1} &= \theta \quad (\theta^3 = \alpha^3 x^2), \\ a &= \alpha^{3 \dots n} \zeta x^{-2} \theta^{-1} c^2 (a b^{-1})^{n-3} b^{n-3} c b^{3 \dots n} (b a)^{n-3} c^2 = \zeta x^{-2} \theta^{-1} c^2 b^{-1} c b c^2 \end{aligned}$$

ou

$$(38) \quad c^2 b^{-1} c b c^2 a^{-1} = \zeta^{-1} x^2 \theta.$$

Or, à la relation

$$\begin{aligned} [(12)(45 \dots n)]^{-1} . (13)(k+3, k+4) . (12)(45 \dots n) \\ = (132)^{-1} . (13)(k+4, k+5) . (132) \end{aligned}$$

entre les substitutions de Λ_n , répond dans $\mathfrak{G}_0$

$$(39) \quad (b a)^{-1} c b^{-k} a b^k . b a = c^{-1} . c b^{-k-1} a b^{k+1} c \check{\zeta}_k, \quad \check{\zeta}_k \text{ étant dans } \mathfrak{B}_0.$$

ou, en transformant $a b^{k+1} a$ au premier membre,

$$\alpha^{-2} \varepsilon a^{-1} b^{-1} c b a b^{-k-1} a b^{k+1} = b^{-k-1} a b^{k+1} \check{\zeta}_k.$$

ou, en se servant de $(b^{-k-1} a b^{k+1} c)^2 = \eta_{k+1}$,

$$\alpha^{-2} \varepsilon a^{-1} b^{-1} c b a = \alpha^{-1} c^{-1} \eta_{k+1} \check{\zeta}_k.$$

ou

$$\alpha^{-2} \varepsilon b^{-1} c b a c a = \eta_{k+1} \check{\zeta}_k.$$

ou, en se servant de $(a c)^3 = \zeta$,

$$\alpha^{-2} \varepsilon x^{-2} \zeta . b^{-1} c b c^2 a^{-1} c^2 = \eta_{k+1} \check{\zeta}_k.$$

ou, d'après (38),

$$\check{\zeta}_k = \alpha^{-2} \varepsilon \theta \eta_{k+1}^{-1}.$$

Or l'équation (39), élevée au carré, donne $\eta_k = \eta_{k+1} \check{\zeta}_k^2$. Donc

$$\eta_k = \eta_{k+1} \alpha^{-4} \varepsilon^2 \theta^2 \eta_{k+1}^{-1} = \eta_{k+1}^{-1} \theta^2.$$

De même

$$\eta_{k+1} = \eta_{k+2}^{-1} \theta^2.$$

Donc

$$\eta_k = \eta_{k+2} \quad \text{ou} \quad \eta_1 = \eta_3 = \dots = \eta_{n-4}; \quad \eta_2 = \eta_4 = \dots = \eta_{n-5}.$$

Donc, d'après la définition de θ ,

$$\theta = (\eta_1 \eta_2^{-1})^{\frac{n-5}{2}} \eta_1.$$

Si $n - 5 \equiv 0 \pmod{3}$, on a donc $\theta = \eta_1$ et, puisque $\eta_2 = \eta_1^{-1} \theta^2 = \eta_1^{-1} \theta^2$, $\eta_2 = \eta_1$.

Si $n - 5 \equiv 1 \pmod{3}$, on a $\theta^2 = \eta_1 \eta_2^{-1} \eta_1^2$ ou, puisque $\eta_1^3 = \theta^3$, $\theta = \eta_2$ et, comme $\eta_1 = \eta_2^{-1} \theta^2$, $\eta_1 = \eta_2$.

Si $n - 5 \equiv 2 \pmod{3}$ (ou $n \equiv 1 \pmod{6}$), on a $\theta = \eta_1^2 \eta_2^{-1}$ qui, jointe à $\theta^2 = \eta_1 \eta_2$, ne donne rien de nouveau. Mais l'analyse suivante, qui s'applique d'ailleurs quel que soit n impair $\neq 7$, va nous conduire au même résultat (sauf peut-être si $n = 7$).

$b^{-k} a c b^k$, qui correspond à $(2, 3 + k, 4 + k)$ ($k \leq n - 4$) de A_n , est permutable mod $\mathfrak{A}_0$, pour $k \geq 3$, à $c b^{-1} a b$, qui correspond à 13.45. On a donc une égalité de la forme

$$b^{-k} a c b^k \cdot c b^{-1} a b \cdot (b^{-k} a c b^k)^{-1} = c b^{-1} a b \omega \quad (3 \leq k \leq n - 4; \omega \text{ dans } \mathfrak{A}_0)$$

dont le carré est $\omega^2 = 1$. Écrivons-la

$$b^{-k} a c b^k c b^{-1} a b = c b^{-1} a b^{-k+1} a c b^k \omega.$$

ou, en transformant $a b^{-k+1} a$,

$$b^{-k} a c b^k c b^{-1} a b = c b^{-k} a b^{k-1} a b^{-k+1} c b^k \omega \alpha^2 \varepsilon.$$

On en tire, en transformant $c b^{-k} a$ et en divisant à gauche par $b^{-k} a$,

$$c b^k c b^{-1} a b = b^k c^2 b^{-1} a b^{-k+1} c b^k \omega \eta_k \alpha^{-3} \varepsilon^{-1} \varepsilon.$$

ou, en transformant $c b^{-1} a$ et $c^2 b^{-1} a$,

$$c b^{k-1} a b c^2 = b^{k-1} a b c b^{-k} c b^k \omega \eta_k \eta_1 \alpha^{-1} \varepsilon^{-1} \varepsilon.$$

ou, en faisant passer tous les a, b, c dans le premier membre

$$c b^{k-1} a b c^2 b^{-k} c^2 b^k c^2 b^{-1} a b^{-k+1} = \omega \eta_k \eta_1 \alpha^{-3} \varepsilon \varepsilon.$$

ou, en transformant $c^2 b^{-1} a$, puis en transformant par cb^{k-1} ,

$$(40) \quad abc^2 b^{-k} c^2 b^{k-1} abcb^{-k} cb^{k-1} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha^{-1} x^2 \varepsilon.$$

ou, en transformant $b^{-1} c^2 b$ et $b^{-1} cb$ (dans $b^{-k} c^2 b^{k-1}$ et $b^{-k} cb^{k-1}$) d'après (38),

$$abc^2 b^{-k+1} c^2 ac^2 b^{k-2} abcb^{-k+1} cacb^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} x^3 \varepsilon,$$

ou, en transformant $c^2 ac^2$ et cac d'après $(ca)^3 = \zeta$,

$$abc^2 b^{-k+1} acab^{k-2} abcb^{-k+1} ac^2 ab^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} x x^2 \varepsilon,$$

ou, en transformant $c^2 b^{-k+1} a$ et $cb^{-k+1} a$, et en employant $\eta_{k-1}^3 = \alpha^3 k^2$,

$$ab^{-k+2} ab^{k-1} cb^{-k+1} cab^{k-2} ab^{-k+2} ab^{k-1} c^2 b^{-k+1} c^2 ab^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha x^2 \varepsilon.$$

ou, en transformant par $ab^{-k+2} ab^{k-2}$,

$$(41) \quad bcb^{-k+1} cab^{k-2} ab^{-k+2} ab^{k-1} c^2 b^{-k+1} c^2 ab^{k-2} ab^{-k+2} ab^{k-2} = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha x^2 \varepsilon.$$

ou, en supposant d'abord $k - 2 \geq 2$ (donc $n > 7$, puisque k est $\leq n - 1$), et en transformant les deux $ab^{k-2} a$,

$$bcb^{-k+1} cb^{k-2} abc^2 b^{-k+1} c^2 b^{k-2} a = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha^2 x^2 \varepsilon^{-1}.$$

En transformant par $bcb^{-k+1} cb^{k-2}$, et en employant $\varepsilon^2 = \alpha^4$, on obtient une équation qui ne diffère de (40) qu'en ce que, *au premier membre*, k est remplacé par $k - 1$. On pourra répéter l'opération tant que, dans l'équation (41), $k - 2$ sera > 1 . Quand $k - 2$ sera égal à 1 ($n \geq 7$), l'équation (41) s'écrit (le second membre n'ayant pas changé)

$$(42) \quad bcb^{-2} cabab^{-1} ab^2 c^2 b^{-2} c^2 abab^{-1} ab = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha x^2 \varepsilon.$$

On en tire, en transformant les deux aba , et en employant $\delta^2 = \alpha^6$,

$$bcb^{-2} cbab^{-1} ababc^2 b^{-2} c^2 bab^{-1} aba = \omega \eta_k \eta_1^{-1} x x^2 \varepsilon.$$

ou, en transformant $b^{-1} cb$ et $b^{-1} c^2 b$ (dans $b^{-2} cb$ et $b^{-2} c^2 b$) d'après (38),

$$bcb^{-1} cacab^{-1} ababc^2 b^{-1} c^2 ac^2 ab^{-1} aba = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha^2 x^3 \varepsilon.$$

ou, en transformant $caca$ et $c^2 ac^2 a$ d'après $(ca)^3 = \zeta$,

$$bcb^{-1} ac^2 b^{-1} ababc^2 b^{-1} acb^{-1} aba = \omega \eta_k \eta_1^{-1} \alpha x^3 \varepsilon,$$

ou, en transformant $c^2 b^{-1} a$ et $cb^{-1} a$,

$$bcb^{-1}ab^{-1}abcabc^2b^{-1}ab^{-1}abc^2a = \omega\eta_k\eta_1^{-1}\alpha x^2\varepsilon,$$

ou, en transformant encore $cb^{-1} a$ et $c^2 b^{-1} a$, puis en transformant par a et en simplifiant,

$$bc^2b^{-2}abc bcb^{-2}abc^2 = \omega\eta_k\eta_1^{-1}\alpha^{-1}x^2\varepsilon.$$

ou, en transformant $c^2 b^{-2} a$,

$$b^{-1}ab^2cb^{-1}cbcb^{-2}abc^2 = \omega\eta_k\eta_1^{-1}\eta_2^{-2}\alpha x^3\varepsilon,$$

ou, en transformant $b^{-1}cb$ d'après (38), en transformant par c^{-2} et en employant $(ca)^3 = \zeta$, $\zeta^2 = \alpha\varepsilon x^2$, $\varepsilon^2 = \alpha^4$,

$$c^2b^{-1}ab^2acab^{-2}ab = \omega\eta_k\eta_1^{-1}\eta_2^{-2}\theta^{-1}\alpha^5x^3,$$

ou, en transformant $c^2 b^{-1} a$, en employant $\eta_1^3 = \alpha^2 x^2$, et en transformant par $b^{-1} a^{-1} b^2$,

$$b^{-1}cbaca = \omega\eta_k\eta_2^{-2}\theta^{-1}\alpha^2x^2.$$

ou, en transformant $b^{-1}cb$ d'après (38), et en employant $(ca)^3 = \zeta$, $\theta^2 = \eta_1\eta_2$, $\eta_2^3 = \alpha^3 x^2$,

$$\omega = \eta_k^{-1}\eta_1.$$

Or $\omega^2 = 1$. Donc $\eta_k^2 = \eta_1^2$. Or $\eta_k^3 = \eta_1^3$. Donc

$$\eta_k = \eta_1 \quad \text{pour} \quad k \geq 3 \quad (1).$$

Donc $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \dots = \eta_{t-2}$ ($t-2 = n-4$), sauf peut-être si $n=7$. On verra d'ailleurs bientôt que le cas $n=7$ ne constitue pas une exception.

D'ailleurs on va voir que si n est de la forme $6h > 6$, les équations (32) entraînent $\eta_k = \eta_1$, et, d'autre part, que l'ordre μ du multiplicateur π de A_n est 2 ou 6 selon que (32) entraîne $\eta_k = \eta_1$ ou non. On peut en conclure *a priori* que, si $n = 6h + 1 > 7$, (32) entraîne $\eta_k = \eta_1$. Car, sans cela, μ serait égal à 6. Or, 6 étant premier à l'indice $6h+1$ de A_{6h+1} , il résulte d'un théorème de M. Schur

(1) On aurait pu, dans le calcul précédent, négliger $\alpha, \zeta, x, \varepsilon$; car une relation de la forme $\eta_k \equiv \eta_1 \pmod{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, x, \varepsilon}$ entraîne nécessairement $\eta_k = \eta_1$, puisqu'elle doit résulter de (4) et de (33).

(Cr., t. 127, p. 49) que $\mathfrak{M}$ serait isomorphe à un diviseur du multiplicateur de A_{6k} . Or ce multiplicateur est d'ordre 2.

32. Soit maintenant n pair $= 2n'$. On a d'abord

$$(43) \quad a = ca \cdot c \cdot ac \alpha \zeta^{-1}.$$

Or, de $(b^{-k} ab^k c)^2 = \eta_k$ on déduit

$$c = \alpha^{-2} \eta_k \alpha^{-1} b^{-k} ab^k c^2 b^{-k} ab^k, \quad c^2 = \eta_k^{-1} \alpha b^{-k} ab^k cb^{-k} ab^k,$$

donc

$$c = \alpha^{-2} \eta_k \eta_{k+1}^{-1} b^{-k} ab^k \cdot b^{-k-1} ab^{k+1} cb^{-k-1} ab^{k+1} b^{-k} ab^k.$$

Remplaçant par cette valeur le second c de (43) en faisant $k = 1$, puis répétant une substitution analogue avec $k = 3, 5, \dots, n-5$, on obtient

$$a = c \cdot a \cdot b^{-1} ab \cdot b^{-2} ab^2 \dots b^{-n+5} ab^{n-5} \cdot b^{-n+3} ab^{n-3} \cdot c \cdot b^{-n+1} ab^{n-1} \dots b^{-1} ab \cdot a \cdot c \\ \times \alpha \zeta^{-1} \alpha^{1-n} \eta_1 \eta_2^{-1} \eta_3 \eta_4^{-1} \dots \eta_{n-5} \eta_{n-4}^{-1}.$$

ou, en posant $\theta = \eta_1 \eta_2^{-1} \eta_3 \eta_4^{-1} \dots \eta_{n-5} \eta_{n-4}^{-1}$, (d'où $\theta^2 = 1$),

$$a = c (ab^{-1})^{n-3} b^{n-3} cb^{3-n} (ba)^{n-3} c \alpha^{3-n} \zeta^{-1} \theta = \alpha^2 \zeta^{-1} \theta cb^{-1} cbc$$

ou

$$(44) \quad cb^{-1} cbc a^{-1} = \alpha^{-2} \zeta \theta^{-1} = \alpha^{-2} \zeta \theta^2.$$

Or à la relation

$$(45 \dots n)^{-1} \cdot (13)(k+3, k+4) \cdot (45 \dots n) = (13)(k+4, k+5)$$

de A_n répond dans $\mathcal{G}_0$

$$(45) \quad (ba)^{-1} \cdot cb^{-k} ab^k \cdot ba = cb^{-k-1} ab^{k+1} \zeta_k, \quad \zeta_k \text{ étant dans } \mathfrak{A}_0.$$

ou, en transformant $ab^{k+1} a$,

$$\varepsilon \alpha^{-2} a^{-1} b^{-1} cba = c \zeta_k,$$

ou

$$b^{-1} cba c^2 a \alpha^{-3} \varepsilon \alpha^{-1} = \zeta_k,$$

ou, en remplaçant $ac^2 a$ par $cac \zeta^{-1} \alpha^2$, et en employant (44),

$$\alpha^{-2} \varepsilon \theta^2 = \zeta_k.$$

Mais le carré de (45) est $\eta_k = \eta_{k+1} \zeta_k^2$. Donc

$$\eta_k = \eta_{k+1} \theta, \quad \text{donc} \quad \eta_k = \eta_{k+2} \theta^2 = \eta_{k+3}.$$

Le produit des relations $\eta_1 \eta_2^{-1} = \theta$, $\eta_3 \eta_4^{-1} = \theta$, ..., $\eta_{n-3} \eta_{n-2}^{-1} = \theta$ donne donc

$$\theta = \theta^{\frac{n-4}{2}} \quad \text{ou} \quad \theta^{\frac{n}{2}-3} = 1 \quad \text{ou} \quad \theta^{n'} = 1.$$

Donc, si n est $\not\equiv 0 \pmod{3}$, $\theta = 1$, et $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{n-4}$.

Si $n \equiv 0 \pmod{3}$ (donc $\equiv 0 \pmod{6}$) est > 6 , le produit des relations $\eta_1 = \eta_2 \theta$, $\eta_2 = \eta_3 \theta$, ..., $\eta_{n-3} = \eta_{n-2} \theta$ donne $\eta_1 = \eta_{n-4} \theta^{n-3} = \eta_{n-4}$. D'ailleurs $\eta_1 = \eta_4 = \dots = \eta_{3h+1}$, et $\eta_2 = \eta_5 = \dots = \eta_{3h+2}$. Comme ici $n-4 \equiv 2 \pmod{3}$, on a donc $\eta_1 = \eta_2$. Donc tous les η_k où k est $\not\equiv 0 \pmod{3}$ sont égaux à η_1 et tous les η_k où $k \equiv 0 \pmod{3}$ sont égaux à η_3 .
Donc

$$(46) \quad \theta = (\eta_3 \eta_4^{-1} \eta_5 \eta_6^{-1}) (\eta_9 \eta_{10}^{-1} \eta_{11} \eta_{12}^{-1}) \dots \\ \times (\eta_{6h+3} \eta_{6h+4}^{-1} \eta_{6h+5} \eta_{6h+6}^{-1}) \dots (\eta_{n-9} \eta_{n-8}^{-1} \eta_{n-7} \eta_{n-6}^{-1}) = 1.$$

Donc on a encore

$$\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{n-4}.$$

Si $n = 6$, $n-4 = 2$, et l'on n'a que $\eta_1 = \eta_2 \theta$ qui est une identité, la définition de θ étant ici $\theta = \eta_1 \eta_2^{-1}$. On ne peut donc rien conclure. On verra bientôt (34) que, pour $n = 6$, les équations (32) n'entraînent pas $\eta_1 = \eta_2$.

35. Ainsi, en exceptant les cas $n = 6, 7$, et en posant $\varepsilon_i = \varepsilon$, $\eta_i = \eta$, on a obtenu les conséquences suivantes de (32) entre $\alpha, \dots, \eta_{n-4}$

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta^{1-t} \gamma^t \varepsilon^t \alpha^m = 1, \quad t = \frac{\tau(\tau-1)}{2}, \quad m = -\frac{t(t-1)}{2} - 2t; \quad \varepsilon_i = \varepsilon; \quad \varepsilon^3 = \alpha^3; \\ \delta = \alpha^3, \text{ si } n \text{ est impair; } \quad \delta = \alpha \varepsilon, \text{ si } n \text{ est pair;} \\ \eta_i = \eta; \quad \eta^3 = \alpha^3 \alpha^2; \quad \zeta^2 = \eta^3 \varepsilon \alpha^{-2}. \end{array} \right.$$

Les conséquences de (32) entre $\alpha, \dots, \eta_{n-4}$ résultent toutes de celles-là. Car elles résultent toutes de (4) et de (33), et une conséquence de (4) et de (33) qui ne résulte pas de (47) se ramène évidemment (E., 17) à la forme $\zeta^2 = \eta^3$. Or on a vu (50) que cette équation ne résulte pas de (32).

On peut donc supposer que, dans les équations (32), δ est remplacé par α^3 , si n est impair, par $\alpha\varepsilon$, si n est pair, et que ε_i est remplacé par ε et η_i par η . On pourra alors omettre dans (47) les relations $\varepsilon_i = \varepsilon$, $\eta_i = \eta$, $\delta = \alpha^3$ ou $\alpha\varepsilon$. C'est ce que je ferai désormais.

Posons maintenant

$$(48) \left\{ \begin{array}{l} \beta\gamma^{-1} = \beta', \quad \beta^{1-t}\gamma^t\varepsilon'\alpha^m = \gamma' \quad (\text{d'où } \beta'\gamma' = \beta\varepsilon'\alpha^m, \beta'^{t-1}\gamma' = \gamma\varepsilon'\alpha^m), \\ \alpha^{-2}\varepsilon = \varepsilon', \\ \zeta^2\eta^{-3} = \varepsilon'\zeta', \quad \zeta\eta^{-1} = \eta' \quad [\text{d'où } \zeta = (\varepsilon'\zeta')^{-1}\eta'^3, \eta = (\varepsilon'\zeta')^{-1}\eta'^2], \\ \alpha^3\alpha^2\eta^{-3} = \alpha', \quad \alpha\alpha = \alpha' \\ (\text{d'où } \alpha\eta^{-3} = \alpha'^{-2}\alpha', \alpha\eta^3 = \alpha'^3\alpha'^{-1}; \text{ donc } \alpha = \alpha'^{-2}(\varepsilon'\zeta')^{-3}\eta'^6\alpha'). \end{array} \right.$$

Les relations (47) s'écrivent, avec les générateurs α' , β' , γ' , ε' , ζ' , η' , α' ,

$$(49) \quad \varepsilon'^2 = 1, \quad \gamma' = \zeta' = \alpha' = 1, \quad \alpha', \beta', \eta' \text{ restant indéterminés.}$$

Donc $\mathfrak{A}_0$ est le produit direct de $\mathfrak{A} = \langle \varepsilon' \rangle$ d'ordre $\mu = 2$ et d'un groupe $\mathfrak{A}_1$ dont les diverses déterminations sont données par

$$\mathfrak{A}_1 = \langle \alpha'\varepsilon'^x, (\alpha'\varepsilon'^x)^{-1}, \beta'\varepsilon'^y, (\beta'\varepsilon'^y)^{-1}, \eta'\varepsilon'^z, (\eta'\varepsilon'^z)^{-1} \rangle \quad (x, y, z = 0 \text{ ou } 1).$$

Les divers figuratifs de Γ [on sait *a priori* qu'il n'y en a qu'un (28): mais nous allons le retrouver], qui s'obtiennent en faisant $\mathfrak{A}_2 = 1$, sont fournis par (32) et (48) où l'on fait

$$\alpha' = \varepsilon'^{-x}, \quad \beta' = \varepsilon'^{-y}, \quad \eta' = \varepsilon'^{-z}, \quad \gamma' = \zeta' = \alpha' = 1, \quad \varepsilon'^2 = 1,$$

c'est-à-dire, en réduisant les exposants de ε' mod 2, et en remarquant que $\varepsilon' = \varepsilon$ (car $\varepsilon' = \alpha^{-2}\varepsilon$, et les équations précédentes jointes à (48) entraînent $\alpha^2 = 1$), et que $m \equiv \frac{\ell(\ell-1)}{2} \pmod{2}$,

$$(50) \quad \alpha = \varepsilon, \quad \beta = \varepsilon^{\frac{\ell(\ell-1)}{2} + l + l^2}, \quad \gamma = \beta\varepsilon^y, \quad \delta = \varepsilon', \quad \zeta = \varepsilon^{1+z}, \quad \eta = \varepsilon, \quad \alpha = \varepsilon^{1+x}.$$

En prenant au besoin $b\varepsilon^y$ pour b , $c\varepsilon^{x+y}$ pour c et $a\varepsilon^{x+z}$ pour a , on peut annuler x, y et z .

54. Si $n = 6$, et si les équations (32) n'entraînent pas la conséquence $\eta_2 = \eta$, (on verra tout à l'heure que c'est le cas), il faut, en continuant à poser $\eta_1 = \eta$, remplacer dans (47) l'équation $\eta_2 = \eta$

par $\eta_2^3 = \alpha^3 \alpha^2$. J'écrirai λ pour η_2 , et je poserai

$$(51) \quad \lambda \varepsilon' \eta'^{-2} = \lambda'.$$

Il faudra alors ajouter à (49) l'équation

$$(52) \quad \lambda'^3 = 1$$

[qui équivaut à $\lambda^3 = \alpha^3 \alpha^2$ en vertu de (48) et (49)]. $\mathfrak{A}_0$ est ici le produit direct de $\mathfrak{A} = \langle \varepsilon', \lambda' \rangle$ et de

$$\mathfrak{A}_1 = \langle \alpha' \varepsilon'^x \lambda'^{x'}, (\alpha' \varepsilon'^x \lambda'^{x'})^{-1}, \beta' \varepsilon'^y \lambda'^{y'}, (\beta' \varepsilon'^y \lambda'^{y'})^{-1}, \eta' \varepsilon'^z \lambda'^{z'}, (\eta' \varepsilon'^z \lambda'^{z'})^{-1} \rangle \\ (x, y, z = 0 \text{ ou } 1; x', y', z' = 0, 1, 2).$$

Les divers figuratifs de Γ , qui s'obtiennent en faisant $\mathfrak{A}_2 = 1$, sont fournis par (32), (48) et (51) où l'on fait

$$(53) \quad \begin{cases} \alpha' = \varepsilon'^{-x} \lambda'^{-x'}, & \beta' = \varepsilon'^{-y} \lambda'^{-y'}, & \eta' = \varepsilon'^{-z} \lambda'^{-z'}, \\ \gamma' = \zeta' = \alpha' = 1, & \varepsilon'^2 = 1, & \lambda'^3 = 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire, en réduisant les exposants de ε' mod 2 et ceux de λ' mod 3 (ici $l = 4$, $l = 1$, $m = -8$),

$$(54) \quad \begin{cases} \alpha = \varepsilon' \lambda'^{-x'}, & \beta = \varepsilon' \lambda'^{-y'}, & \gamma = \varepsilon'^{1+y}, & \delta = 1, & \varepsilon = \varepsilon' \lambda'^{x'}, \\ \zeta = \varepsilon'^{1+z}, & \eta = \varepsilon' \lambda'^{z'}, & \alpha = \varepsilon'^{1+x}, & \lambda = \varepsilon' \lambda'^{1+z'}, & \varepsilon'^2 = 1, & \lambda'^3 = 1. \end{cases}$$

En prenant au besoin $\alpha \varepsilon'^z \lambda'^{-z'}$ pour a , $b \varepsilon'^y \lambda'^{y'}$ pour b , $c \varepsilon'^x \lambda'^{-x'}$ pour c , on peut annuler x, y, z, x', y', z' .

Il reste à s'assurer que, pour $n = 6$, le multiplicateur est bien d'ordre 6. Or le groupe X défini par (32), (53) et $\varepsilon' = 1$ est d'ordre 3.360, et son central est $\Lambda = \langle \lambda' \rangle$. $X | \Lambda$ est isomorphe au g^6 alterné et contient un g_{60}^5 auquel répond dans X un $g_{3.60}$. Or un tel groupe est nécessairement le produit direct d'un $g_{60} A$ par $\Lambda^{(1)}$, et X est représentable relativement à Λ en g^{18} transitif. Dans cette représentation (avec laquelle j'identifierai désormais X), Λ est invariant et intransitif. Donc X est imprimitif et a 6 systèmes de degré 3. Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \dots; \alpha_6, \beta_6, \gamma_6$ ces systèmes et $\lambda = \Pi_1^6 \sigma_i$, σ_i désignant la substitution $(\alpha_i \beta_i \gamma_i)$. L'action de $X | \Lambda$ sur les 6 systèmes est

(1) Voir HÖLDER, *M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 354-355; *S.*, 93.

celle du g^6 alterné. Posons

$$a_\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, \quad \beta_\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6, \quad c_\alpha = \alpha_1 \alpha_3 \alpha_2,$$

et soient $a_\beta, b_\beta, c_\beta; a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma$ les substitutions déduites de $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ en y remplaçant α_i par β_i ou γ_i . Posons encore

$$a_0 = a_\alpha a_\beta a_\gamma, \quad b_0 = b_\alpha b_\beta b_\gamma, \quad c_0 = c_\alpha c_\beta c_\gamma;$$

$$x = \Pi_1^6 \sigma_i^{x_i}, \quad y = \Pi_1^6 \sigma_i^{y_i}, \quad z = \Pi_1^6 \sigma_i^{z_i}; \quad a = a_0 x, \quad b = b_0 y, \quad c = c_0 z.$$

Si X existe, il doit y avoir des valeurs de $x_i, y_i, z_i \pmod{3}$ telles que a, b, c vérifient les équations

$$b^4 = 1, \quad a^2 = 1, \quad (ba)^3 = 1, \quad (ab^{-1}ab)^3 = 1, \quad (ab^{-2}ab^2)^2 = 1, \quad (ab^{-3}ab^3)^2 = 1,$$

$$c^3 = 1, \quad (ca)^3 = 1, \quad (cb^{-1}ab)^2 = 1, \quad (cb^{-2}ab^2)^2 = 1.$$

On peut toujours supposer les y_i nuls. Car si b a la séquence $\alpha_i \beta_k$, elle doit avoir, pour être permutable à λ , les séquences $\beta_i \gamma_k$ et $\gamma_i \alpha_k$. Mais alors, dans $\sigma_k^{-1} b \sigma_k$, ces séquences sont remplacées respectivement par $\alpha_i \alpha_k, \beta_i \beta_k, \gamma_i \gamma_k$ [ceci suppose $k \neq i$; or c'est bien le cas, sans quoi b aurait le cycle $(\alpha_i \beta_i \gamma_i)$ et ne serait pas d'ordre 4] (').

Remarquons maintenant que, si s_α est une substitution quelconque des α_i , et si le produit de $s_\alpha, s_\beta = \lambda^{-1} s_\alpha \lambda, s_\gamma = \lambda^{-2} s_\alpha \lambda^2, s^{-1} x s$ se déduit de x , soit en laissant les x_i à leurs places et en opérant sur les σ_i la substitution s_σ qui se déduit de s en y écrivant σ_i pour α_i , soit en laissant les σ_i à leurs places et en opérant sur les x_i , la substitution s_x^{-1} ,

(¹) Au point de vue abstrait, cette observation se présente comme il suit. Il s'agit de trouver une substitution $u = \Pi_1^6 \sigma_i^{u_i}$ telle que $u b_0 y u^{-1} = b_0$. Or soit b_u ce que devient b_α quand on y remplace α_i par u_i , et supposons que b_u^{-1} remplace u_i par u_{h_i} . Cette équation devient (d'après la remarque qui suit dans le texte) $u_{h_i} + y_i - u_i \equiv 0 \pmod{3}$. Or, soit $(u_1, \dots, u_m)$ un cycle de b_u^{-1} . Les équations correspondantes sont

$$u_1 - u_2 \equiv -y_1, \quad u_2 - u_3 \equiv -y_2, \quad \dots, \quad u_m - u_1 \equiv -y_m \pmod{3}.$$

Elles sont résolubles toujours et seulement si $\sum_1^m y_i \equiv 0$. Or m divise l'ordre $t = mq$ de $b_0 y$, et la condition $(b_0 y)^t = 1$ ou

$$b_0' \cdot b_0^{-t+1} y b_0^{t-1} \cdot b_0^{-t+2} y b_0^{t-2} \dots b_0^{-1} y b_0 \cdot y = 1$$

donne $q \sum_1^m y_i \equiv 0$, d'où $\sum_1^m y_i \equiv 0$, puisque ici $t = 4$ est premier.

s_x se déduisant de s_x par le changement de x_i en x_i : car si s remplace x_i par x_k , elle transforme σ_i en σ_k , donc $\sigma_i^{v_i}$ en $\sigma_k^{v_i}$ et remplace par suite x_k par x_i dans $\Pi_i^6 \sigma_i^{v_i}$.

L'équation $a^2 = 1$ ou $a_0 x a_0 x = 1$ donne donc (en sous-entendant le module 3)

$$x_1 + x_2 \equiv 0, \quad x_3 + x_4 \equiv 0, \quad x_5 \equiv 0, \quad x_6 \equiv 0.$$

Les 6 équations fournies par $(ba)^3 = 1$ ou $ba_0 x ba_0 x ba_0 x = 1$ se réduisent à

$$x_4 = 0.$$

Celles fournies par $(b^{-2}ab^2a)^2 = 1$ ou $b_0^2 a_0 x b_0^2 a_0 x b_0^2 a_0 x b_0^2 a_0 x = 1$ et par $(bab^{-1}a)^3 = 1$ ou $b_0 a_0 x b_0^{-1} a_0 x b_0 a_0 x b_0^{-1} a_0 x b_0 a_0 x b_0^{-1} a_0 x = 1$ ne donnent rien de nouveau.

Celles fournies par $c^3 = 1$ ou $c_0 z c_0 z c_0 z = 1$ se réduisent à

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0.$$

Celles fournies par $(ca)^3 = 1$ ou $c_0 z a_0 x c_0 z a_0 x c_0 z a_0 x = 1$ se réduisent à

$$z_1 - z_4 \equiv x_1.$$

Celles fournies par $(cb^{-1}ab)^2 = 1$ ou $b_0 c_0 z b_0^{-1} a_0 x b_0 c_0 z b_0^{-1} a_0 x = 1$ se réduisent à

$$z_1 \equiv x_2, \quad z_5 \equiv 0.$$

Enfin celles fournies par $(cb^{-2}ab^2)^2 = \lambda$ ou $b_0^2 c_0 z b_0^{-2} a_0 x b_0^2 c_0 z b_0^{-2} a_0 x = \lambda$ se réduisent à

$$x_1 \equiv 1 + z_1, \quad z_4 \equiv -1, \quad z_5 \equiv 1.$$

Donc

$$x_1 \equiv -x_2 \equiv -1, \quad x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv x_6 \equiv 0, \quad z_1 \equiv -z_3 \equiv -z_4 \equiv z_5 \equiv 1, \quad z_6 \equiv 0,$$

et l'on peut faire $z_2 \equiv 0$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} b &= (\alpha_1 \alpha_2) (\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6) (\beta_1 \beta_2) (\beta_3 \beta_4 \beta_5 \beta_6) (\gamma_1 \gamma_2) (\gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6), \\ a &= (\alpha_1 \beta_2) (\beta_1 \gamma_2) (\gamma_1 \alpha_2) (\alpha_3 \alpha_4) (\beta_3 \beta_4) (\gamma_3 \gamma_4), \\ c &= (\alpha_1 \gamma_3 \gamma_2) (\beta_1 \alpha_3 \alpha_2) (\gamma_1 \beta_3 \beta_2) (\alpha_4 \gamma_4 \beta_4) (\alpha_5 \beta_5 \gamma_5). \end{aligned}$$

Donc X existe.

35. Au lieu de partir de la représentation de X relative au $g_{60} \Lambda$, on pourrait partir de celle relative au $g_{24} S = \langle a, b \rangle$ défini par $a^2 = 1$, $b^4 = 1$, $(ab)^3 = 1$, $(ab^{-1}ab)^3 = 1$, $(ab^{-2}ab^2)^2 = 1$, isomorphe au g^4 symétrique. X contient S , sans quoi les équations de X établiraient entre a et b des relations autres que les conséquences des équations de S , relations qui résulteraient évidemment aussi des équations de X où l'on fait $\lambda = 1$; or cela n'a pas lieu, puisque le groupe ainsi obtenu est isomorphe au g^6 alterné de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, qui contient le g^4 symétrique $\langle 12.3456, 12.34 \rangle$. S ne peut contenir Λ , puisque le g^4 symétrique n'a pas d' e_3 normal. Donc X est représentable, relativement à S , en g^{45} imprimitif admettant 15 systèmes de degré 3. L'action de $X|\Lambda$ sur ces systèmes est semblable à l'action du g^6 alterné de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6 sur les 15 combinaisons de symboles 2 à 2

12. 13. 14. 15. 23. 24. 25. 26. 34. 35. 36. 45. 46. 56.

que je désignerai respectivement par

$\alpha_1. \alpha_2. \alpha_3. \alpha_4. \alpha_5. \alpha_6. \alpha_7. \alpha_8. \alpha_9. \alpha_{10}. \alpha_{11}. \alpha_{12}. \alpha_{13}. \alpha_{14}. \alpha_{15}.$

L'action de la substitution 12.34, correspondant à a , sur ces combinaisons est

$$\alpha_x = \alpha_1. \alpha_{10}. \alpha_{15}. \alpha_2. \alpha_7. \alpha_3. \alpha_6. \alpha_4. \alpha_8. \alpha_5. \alpha_9. \alpha_{11}. \alpha_{13}. \alpha_{12}. \alpha_{14}.$$

Celle de 12.3456, répondant à b , est

$$b_x = \alpha_1. \alpha_2. \alpha_7. \alpha_4. \alpha_9. \alpha_3. \alpha_8. \alpha_5. \alpha_6. \alpha_{10}. \alpha_{13}. \alpha_{15}. \alpha_{12}. \alpha_{11}. \alpha_{14}.$$

Celle de 132, répondant à c , est

$$c_x = \alpha_{13}. \alpha_{14}. \alpha_{15}. \alpha_1. \alpha_2. \alpha_6. \alpha_3. \alpha_{10}. \alpha_7. \alpha_4. \alpha_{11}. \alpha_8. \alpha_5. \alpha_{12}. \alpha_9.$$

Soient encore $a_\beta, b_\beta, c_\beta; a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma$ les substitutions déduites de $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$ en y remplaçant α_i par β_i ou γ_i , et

$$\begin{aligned} a_0 &= a_\alpha a_\beta a_\gamma, & b_0 &= b_\alpha b_\beta b_\gamma, & c_0 &= c_\alpha c_\beta c_\gamma, \\ \sigma_i &= (\alpha_i \beta_i \gamma_i), & \lambda &= \prod_1^{15} \sigma_i, & x &= \prod_1^{15} \sigma_i^{\alpha_i}, & y &= \prod_1^{15} \sigma_i^{\beta_i}, & z &= \prod_1^{15} \sigma_i^{\gamma_i}, \\ a &= a_0 x, & b &= b_0 y, & c &= c_0 z. \end{aligned}$$

Les équations analogues à celles obtenues dans la représentation pré-

cédente permettent d'annuler x_i, x_{11}, z_i, z_8 . Elles donnent alors

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv x_4 \equiv x_8 \equiv x_{10} \equiv x_{11} \equiv x_{12} \equiv x_{13} \equiv x_{14} \equiv x_{15} \equiv 0, \\ x_2 &\equiv x_3 \equiv x_9 \equiv 1, & x_5 &\equiv x_6 \equiv x_7 \equiv -1; \\ z_1 &\equiv z_4 \equiv z_5 \equiv z_8 \equiv z_9 \equiv z_{11} \equiv z_{12} \equiv z_{13} \equiv 0, \\ z_2 &\equiv z_3 \equiv z_7 \equiv z_{10} \equiv z_{14} \equiv 1, & z_6 &\equiv z_{15} \equiv -1. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} b &= b_0, \\ a &= (\alpha_1)(\beta_1)(\gamma_1)(\alpha_{10})(\beta_{10})(\gamma_{10})(\alpha_{15})(\beta_{15})(\gamma_{15}) \\ &\quad \times (\alpha_2\gamma_7)(\beta_2\alpha_7)(\gamma_2\beta_7)(\alpha_3\gamma_6)(\beta_3\alpha_6)(\gamma_3\beta_6)(\alpha_5\beta_9)(\beta_5\alpha_9)(\gamma_5\beta_9) \\ &\quad \times (\alpha_4\alpha_8)(\beta_4\beta_8)(\gamma_4\gamma_8)(\alpha_{11}\alpha_{13})(\beta_{11}\beta_{13})(\gamma_{11}\gamma_{13})(\alpha_{12}\alpha_{14})(\beta_{12}\beta_{14})(\gamma_{12}\gamma_{14}), \\ c &= (\alpha_{13})(\beta_{13})(\gamma_{13})(\alpha_1\beta_2\alpha_6)(\beta_1\gamma_2\beta_6)(\gamma_1\alpha_2\gamma_6)(\alpha_3\beta_{10}\gamma_7)(\beta_3\gamma_{10}\alpha_7)(\gamma_3\alpha_{10}\beta_7) \\ &\quad \times (\alpha_4\alpha_{11}\alpha_8)(\beta_4\beta_{11}\beta_8)(\gamma_4\gamma_{11}\gamma_8) \\ &\quad \times (\alpha_5\alpha_{12}\alpha_9)(\beta_5\beta_{12}\beta_9)(\gamma_5\gamma_{12}\gamma_9)(\alpha_{14}\beta_{14}\gamma_{14})(\alpha_{15}\gamma_{15}\beta_{15}). \end{aligned}$$

56. Soit $n = 7$. Si (32) n'entraîne pas $\eta_2 = \eta_1$, je poserai encore $\eta_1 = \eta$, $\eta_2 = \lambda$. Il faut remplacer, dans (47), $\eta_2 = \eta$ par $\lambda^3 = \alpha^3\alpha^2$. On voit, comme au début du n° 54, que les divers figuratifs de Γ sont fournis par (32), (48), (51) et (53), c'est-à-dire, en réduisant les exposants de $\varepsilon' \bmod 2$ et ceux de $\lambda' \bmod 3$ (ici $l = 5, l = 1, m = -12$)

$$(55) \begin{cases} \alpha = \varepsilon' \lambda'^{-x'}, & \beta = \varepsilon'^{1+y} \lambda'^{y'-x'}, & \gamma = \varepsilon'^{-x'} \lambda'^{-y'}, & \delta = \varepsilon', & \varepsilon = \varepsilon' \lambda'^{x'}, \\ \zeta = \varepsilon'^{1+z}, & \eta = \varepsilon' \lambda'^{z'}, & \kappa = \varepsilon'^{1+x}, & \lambda = \varepsilon' \lambda'^{1+z'}, & \varepsilon'^2 = 1, & \lambda'^3 = 1. \end{cases}$$

En prenant au besoin $a\varepsilon'^{x+z}\lambda'^{-x'}$ pour a , $b\varepsilon'^y\lambda'^{y'-x'}$ pour b , $c\varepsilon'^x\lambda'^{x'+z'}$ pour c , on peut annuler x, y, z, x', y', z' .

Il reste à chercher si, pour $n = 7$, le multiplicateur est bien d'ordre 6. Faisons $\varepsilon = 1$, et cherchons à construire un groupe X d'ordre $\frac{3}{2}(7!)$ ayant pour central $\Lambda = \langle \lambda \rangle$. X contient $S = \langle a, b \rangle$ défini par $a^2 = b^3 = (ba)^4 = 1$, $(ab^{-1}ab)^3 = 1$, $(ab^{-2}ab^2)^2 = 1$, donc isomorphe au g_{120}^3 symétrique et premier à Λ . Considérons la représentation de X relative à S . Elle a 21 systèmes d'imprimitivité de degré 3, et, en identifiant X avec cette représentation, l'action de $X|\Lambda$ sur les 21 systèmes est semblable à celle du g^7 alterné sur les 21 combinaisons 2 à 2

$$\begin{aligned} 12, & 13, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27, \\ 34, & 35, 36, 37, 45, 46, 47, 56, 57, 67, \end{aligned}$$

que je désignerai respectivement par

$$\begin{array}{cccccccccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \end{array}$$

L'action de 12.34, qui répond à a , sur ces combinaisons, est

$$a\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_{12} \cdot \alpha_{19} \cdot \alpha_2 \alpha_8 \cdot \alpha_3 \alpha_7 \cdot \alpha_4 \alpha_9 \cdot \alpha_5 \alpha_{10} \cdot \alpha_6 \alpha_{11} \cdot \alpha_{13} \alpha_{16} \cdot \alpha_{14} \alpha_{17} \cdot \alpha_{15} \alpha_{18} \cdot \alpha_{20} \alpha_{21};$$

celle de 34 567, qui répond à b , est

$$b\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \cdot \alpha_7 \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10} \alpha_{11} \cdot \alpha_{12} \alpha_{16} \alpha_{19} \alpha_{21} \alpha_{15} \cdot \alpha_{13} \alpha_{17} \alpha_{20} \alpha_{14} \alpha_{18};$$

celle de 132, qui répond à c , est

$$c\alpha = \alpha_{16} \cdot \alpha_{17} \cdot \alpha_{18} \cdot \alpha_{19} \cdot \alpha_{20} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_1 \alpha_2 \alpha_7 \cdot \alpha_3 \alpha_{12} \alpha_8 \cdot \alpha_4 \alpha_{13} \alpha_9 \cdot \alpha_5 \alpha_{14} \alpha_{10} \cdot \alpha_6 \alpha_{15} \alpha_{11}.$$

Posons comme précédemment

$$\begin{aligned} a_0 &= a_\alpha a_\beta a_\gamma, & b_0 &= b_\alpha b_\beta b_\gamma, & c_0 &= c_\alpha c_\beta c_\gamma; \\ \sigma_i &= (\alpha_i \beta_i \gamma_i), & \lambda &= \prod_1^{21} \sigma_i, & x &= \prod_1^{21} \sigma_i^{\epsilon_i}, & y &= \prod_1^{21} \sigma_i^{\eta_i}, & z &= \prod_1^{21} \sigma_i^{\zeta_i}; \\ a &= a_0 x, & b &= b_0, & c &= c_0 z. \end{aligned}$$

Les conditions $a^2 = 1$, $b^5 = 1$, $(ba)^4 = 1$, $(ab^{-1}ab)^3 = 1$, $(ab^{-2}ab^2)^2 = 1$ donnent

$$(56) \quad \begin{cases} x_1 \equiv x_{12} \equiv x_{13} \equiv x_{14} \equiv x_{15} \equiv x_{16} \equiv x_{17} \equiv x_{18} \equiv x_{19} \equiv x_{20} \equiv x_{21} \equiv 0, \\ x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv x_6 \equiv -x_7 \equiv -x_8 \equiv -x_9 \equiv -x_{10} \equiv -x_{11}. \end{cases}$$

Mais les conditions $(cb^{-1}ab)^2 = 1$, $(cb^{-2}ab^2)^2 = \lambda$ donnent respectivement (entre autres) les deux congruences

$$(57) \quad x_1 + z_1 + x_{11} + z_2 \equiv 0, \quad x_1 + z_1 + x_{10} + z_2 \equiv 1$$

qui contredisent (56).

Donc X n'existe pas. Donc les équations (32) entraînent la conséquence $\eta_2 = \eta$.

37. On aurait pu, comme dans le cas $n=6$, considérer la représentation de X en g^{45} relative à un des g_{168} simples qu'il contient; mais la représentation correspondante A du g^7 alterné en g^{15} est moins facile à former, et la contradiction apparaît moins vite.

Je vais ici former A , non pour montrer comment cette contradiction

se présente, mais pour montrer *comment* $\gamma_2 = \gamma$ résulte de (32), et pour obtenir incidemment de nouvelles équations de A_7 . Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les symboles de A_7 et α_1 son g_{168} simple engendré par

$$(58) \quad x = 124.365, \quad y = 7123456, \quad z = 24.56$$

et défini par

$$y^7 = z^2 = (y^2 z)^3 = (yz)^4 = 1 \quad (x = zy^6zy^3zy^6) \quad (1).$$

A_7 contient les 30 conjugués de α_1 dans le symétrique S_7 de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [α_1 est maximum dans S_7 (2)]: mais ils forment dans A_7 deux systèmes conjugués de 15 g_{168} . Les 15 conjugués de α_1 sont, en posant $\sigma = 71234$,

$$\begin{aligned} \alpha_1, \quad \alpha_2 = \sigma^{-1} \alpha_1 \sigma, \\ \alpha_3 = x^{-1} \alpha_1 x, \quad \alpha_4 = x^{-2} \alpha_1 x^2, \quad \alpha_5 = x^{-3} \alpha_1 x^3, \\ \alpha_6 = x^{-4} \alpha_1 x^4, \quad \alpha_7 = x^{-5} \alpha_1 x^5, \quad \alpha_8 = x^{-6} \alpha_1 x^6, \\ \alpha_9 = \sigma \alpha_1 \sigma^{-1}, \\ \alpha_{10} = x^{-1} \alpha_9 x, \quad \alpha_{11} = x^{-2} \alpha_9 x^2, \quad \alpha_{12} = x^{-3} \alpha_9 x^3, \\ \alpha_{13} = x^{-4} \alpha_9 x^4, \quad \alpha_{14} = x^{-5} \alpha_9 x^5, \quad \alpha_{15} = x^{-6} \alpha_9 x^6 \end{aligned}$$

(on vérifie directement que ces 15 α_i sont distincts, en formant leurs g_7 conjugués de ceux de α_1). En écrivant maintenant

$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f, \quad g, \quad h, \quad i, \quad k, \quad l, \quad m, \quad n, \quad o, \quad p$
pour

$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \alpha_5, \quad \alpha_6, \quad \alpha_7, \quad \alpha_8, \quad \alpha_9, \quad \alpha_{10}, \quad \alpha_{11}, \quad \alpha_{12}, \quad \alpha_{13}, \quad \alpha_{14}, \quad \alpha_{15}$

et en identifiant chaque substitution ξ de A_7 , avec la substitution $(\alpha_i, \xi^{-1} \alpha_i \xi)$ que subissent les α_i quand on les transforme par ξ , c'est-à-dire avec la substitution correspondante de A , on obtient

$$\begin{aligned} a_0 = 12.34 &= am.bo.ch.ep.fn.gk.d.i.l, \\ b_0 = 34567 &= aehfm.bpdng.cloki, \\ c_0 = 132 &= aen.bfh.cpk.dli.gmo \end{aligned}$$

(1) Voir *J. M.*, 1902, p. 275-276. où le symbole 7 est seulement remplacé par o.

(2) *Loc. cit.*, p. 284.

(a_0, b_0, c_0 correspondent respectivement à a, b, c de $\mathfrak{G}_0$). α_0 , qui fixe f est engendré par

$$e_0 = (c_0 b_0)^{-1} = 1237654 = \text{ageniph.bodckm.f.}$$

$$f_0 = c_0 b_0^{-3} a_0 b_0^3 = 13.67 = \text{ap.bh.ce.il.kn.mo.d.f.g.}$$

car e_0 et f_0 satisfont aux équations $e_0^7 = f_0^2 = (e_0^2 f_0)^3 = (e_0 f_0)^4 = 1$ qui définissent α_0 .

Les substitutions

$$e'_0 = e_0^{-1} \quad \text{et} \quad f'_0 = a_0 c_0 b_0^{-2} a_0 b_0^2 a_0 = 24.56 = \text{bk.cm.dl.eg.fo.np.a.i.h}$$

engendrent aussi un $\mathfrak{g}_{168}$ défini par $e_0'^7 = f_0'^2 = (e_0'^2 f_0')^3 = (e_0' f_0')^4 = 1$; mais, comme il déplace tous les symboles, il appartient à l'autre système conjugué.

On voit que α_0 est transitif dans son champ. Le $\mathfrak{g}^{13}$ Γ qui y fixe o est engendré par

$$u_0 = f_0 e_0^2 = 165.274 = \text{bgn.cim.dlh.ekp.a.f.o.}$$

$$v_0 = e_0 f_0 e_0^{-1} = 24.37 = \text{bk.cn.dg.el.hi.mp.n.f.o.}$$

$$w_0 = u_0^{-1} v_0 u_0 = 27.34 = \text{bi.ce.dm.gp.hk.ln.a.f.o.}$$

On voit que Γ est un $\mathfrak{g}_{12}^{12}$ tétraédral régulier, défini par $u_0^3 = v_0^2 = w_0^2 = 1$, $v_0 w_0 = w_0 v_0$, $u_0^{-1} v_0 u_0 = w_0$, et que Λ est un $\mathfrak{g}^{15}$ 2 fois transitif de classe 12.

Adjoignons à α_0 la substitution $s_0 = f'_0$ qui a le cycle fo . Elle vérifie les équations

$$s_0^2 = 1, \quad s_0 v_0 s_0 = v_0, \quad s_0 w_0 s_0 = v_0 w_0, \quad s_0 u_0 s_0 = u_0^2, \quad s_0 e_0 s_0 = e_0^3 s_0 v_0 u_0^2 v_0 e_0^3,$$

et, comme $e_0 \Gamma$ contient un système de restes de $\alpha_0 \pmod{\Gamma, 1}$ (Γ étant transitif dans son champ, $e_0 \Gamma$ contient des substitutions remplaçant o par un symbole quelconque autre que o du champ de α_0), ces équations, jointes à celles de α_0 , définissent $\Lambda_7^{(1)}$.

Négligeons maintenant $\gamma, \beta, \gamma, \zeta, \kappa' = \mathfrak{B}$ ou, ce qui revient au même, réduisons-le à 1 (Λ_0 est alors d'ordre 3), et posons

$$e = (cb)^{-1}, \quad f = cb^{-3} ab^3,$$

$$u = fe^2 = cb^{-3} ab^2 c^2 b^{-1} c^2, \quad v = efe^{-1} = bab^3 cb, \quad w = u^{-1} vu, \quad s = acb^{-2} ab^2 a,$$

(¹) *J. M.*, 1902, p. 259.

d'où

$$(59) \quad v^2 = w^2 = f^2 = r_{11}, \quad s^2 = r_{12}^2.$$

Les éléments de $G_0 | \mathfrak{A}_0$ qui répondent à u, v sont $\mathfrak{A}_0 cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2$, $\mathfrak{A}_0 bab^3cb$. Donc à la relation $v_0 w_0 = w_0 v_0$ répond, dans G_0 , une relation de la forme

$$vw = wv\omega, \quad \omega \text{ étant dans } \mathfrak{A}_0.$$

ou

$$vu^{-1}vu, v^{-1}u^{-1}v^{-1}u = \omega,$$

ou

$$(60) \quad bab^3cb, cbcb^{-2}ab^3c^2, bab^3cb, cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2, \\ \times b^{-1}c^2b^2ab^{-1}, cbcb^{-2}ab^3c^2, b^{-1}c^2b^2ab^{-1}, cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2 = \omega.$$

Calculons ω . Les transformations que je vais employer étant les mêmes que précédemment [en y joignant $(ba)^4 = 1$], je me bornerai à indiquer les parties des formules que je transforme en les soulignant, et à séparer par un trait vertical les produits situés à droite ou à gauche du premier membre (ce premier membre sera toujours dans $\mathfrak{A}_0$) que je ferai passer à gauche ou à droite. On obtient ainsi successivement, en faisant d'abord passer à gauche la fin $c^2b^{-1}c^2$ du premier membre,

$$\begin{aligned} & \underline{c^2b^{-1}c^2}bab^3cbcbcb^{-2}ab^3c^2bab^3cbcb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2b^{-1}c^2b^2ab^{-1}cbcb^{-2}ab^3c^2b^{-1}c^2b^2ab^{-1}cb^2ab^2 = \omega, \\ & \quad c^2ac\underline{b^3cbcbcb^{-2}ab^3c^2}bab^3cb^{-2}ab^3c^2b^{-2}c^2b^{-1}c^2b^{-1}c^2b^2c^2acb^{-2}ab^3cac^2bc^2abab^2 = \omega r_1^{-1}, \\ & \underline{c^2ac}b^{-1}c(bb^{-1})a(bb^{-1})c^2bcb^{-2}ab^3c^2bab^3cb^{-2}ab^3cac^2b^{-2}ca(bb^{-1})c^2bc^2acb^{-2}ab^3cac^2bc^2b^{-1}ab^{-1}ab = \omega r_1^{-1}, \\ & \underline{ac^2b^{-1}ab}c^2ab^{-2}ab^3c^2babab^2c^2bcac^2b^{-2}ac^2a(bb^{-1})c^2bcab^{-2}ab^3cac^2bc^2b^{-1}ab^{-1}ab = \omega r_1^{-1}r_2^{-1}, \\ & \quad ab^{-1}abab^{-2}ab^{-1}a(bb^{-1})cbab^{-2}cb^{-2}ac^2abc^2b^{-2}ab^3cac^2bc^2|b^{-1}ab^{-1}ab = \omega r_1^{-1}r_2^{-1}, \\ & \quad b^{-1}(\underline{ab^{-1}ab})^2ab^{-2}ab^{-1}abac^2b^{-1}c(bb^{-1})acb^2ac^2ab^{-1}ab^2cbca^2bc^2 = \omega, \\ & \quad b^{-2}ab^{-1}cbac^2ab^{-1}ab^{-2}c^2abc^2 = \omega r_1^{-1}, \\ & \quad b^{-2}c(bb^{-1})ab^{-1}ab^{-2}c^2abc^2 = \omega r_1^{-1}, \\ & \quad b^{-1}c(bb^{-1})acb^{-1}ab^{-1}ab^{-2}c^2ab|c^2 = \omega r_1^{-1}, \\ & \quad \underline{ac}b^{-1}a(bb^{-1})c(bb^{-1})abab^{-1}c^2ab = \omega r_1^{-1}, \\ & \quad ab^{-1}abac\underline{b^{-1}abab^{-1}c^2}bb^{-1}ab = \omega r_1^{-1}, \\ & \quad 1 = \omega. \end{aligned}$$

Donc $vw = wv$. Donc $(vw)^2 = v^2w^2 = r_{11}^2$.

A la relation $s_0^{-1} \omega_0 s_0 = v_0 \omega_0$ répond, dans G_0 , une relation de la forme

$$(61) \quad s^{-1} u s = v w \varphi, \quad \varphi \text{ étant dans } A_0.$$

dont le carré donne $\varphi^2 = \eta_1^2$. Or l'équation (61), qui s'écrit

$$s^{-1} u^{-1} c u s u^{-1} c^{-1} u v^{-1} = \varphi,$$

donne successivement (avec les mêmes notations)

$$\begin{aligned} & \underline{ab^{-2}ab^2c^2a} \cdot \underline{cbcb^{-2}ab^3c^2} \cdot \underline{bab^3cb} \cdot \underline{cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2} \\ & \times \underline{acb^{-2}ab^2a} \cdot \underline{cbcb^{-2}ab^3c^2} \cdot \underline{b^{-1}c^2b^2ab^{-1}} \cdot \underline{cb^{-3}ab^2c^2b^{-1}c^2} \cdot \underline{b^{-1}c^2b^2ab^{-1}} = \varphi, \\ & b^{-2}ab^2cac^2bcb^{-2}ab^{-1}acb^{-1}cac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}ab^2c^2bcac^2bc^2abab^2c^2b^{-1}cac^2bab^{-1} = \varphi \eta_2^{-1}, \\ & b^{-2}ab^2cac^2bcb^{-1}ababcb^{-1}cac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}ab^{-1}cb^2abab^2c^2b^{-1}cac^2bab^{-1} = \varphi \eta_2^{-1} \eta_2^{-1}, \\ & \underline{b^{-2}ab^2c^2acbc^2abcb^{-1}cac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}ab^{-1}cbab^2c^2b^{-1}ca} \mid \underline{c^2bab^{-1}} = \varphi \eta_1^{-1} \eta_2^{-1}, \\ & c^2b \underline{ab^{-1}cb^{-2}ab^2a} (\underline{bb^{-1}}) \underline{cb^2c^2abcb^{-1}c} (\underline{bb^{-1}}) \underline{ac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2acb^{-1}c^2b^2c^2b^{-1}ca} = \varphi \eta_1^{-1}, \\ & c^2bc^2ab^2ab^2abcb^2ac b^{-1}ac^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2acb^{-2}ab^2c^2bcb^{-1}ca = \varphi \eta_1^{-1}, \\ & c^2bc^2ab^2ab^2ab^2ab^2c^2b^{-1}a (\underline{bb^{-1}}) \underline{c^2b^2ab^2c^2b^{-1}c^2ab^{-2}ab^2cb^2b^{-1}ca} = \varphi \eta_1^{-1} \eta_2^{-1}, \\ & c^2bc^2ab^2ab^2ababac^2bab^2c^2b^{-1}c^2ab^{-2}ab^{-2}cab^{-1}c (\underline{bb^{-1}}) a = \varphi \eta_2^{-1}, \\ & c^2bc^2ab^2abab^{-1}c^2bab^2c^2b^{-1}c^2b^{-2}ab^2abab^{-1}a = \varphi \eta_2^{-1} \eta_2^{-1}, \\ & c^2bc^2ab^2abcb^2c^2b^2ab^2cabab^{-1}a = \varphi, \\ & c^2bc^2ab^2abcb^2c^2b^2ab^2cbab^{-1}abab^{-1} = \varphi, \\ & c^2bc^2ab^2abcb^2c^2b^2ab^{-2}ac^2b^{-1}abab^{-1} = \varphi \eta_1^{-1}, \\ & \underline{c^2b} \underline{c^2ab^2abcb^{-1}ab^3cab^{-1}ab} \mid \underline{cab^{-1}} = \varphi \eta_1^{-1} \eta_2, \\ & \underline{acb^3c^2cb^{-1}abab^{-1}ab} \mid a = \varphi \eta_2, \\ & cb^{-1}a (\underline{bb^{-1}}) \underline{cb^2c^2ab^{-1}ab} = \varphi \eta_1^{-1} \eta_2, \\ & \eta_1 = \varphi \eta_1^{-1} \eta_2. \end{aligned}$$

Comme $\varphi^2 = \eta_1^2$, le carré de cette équation donne $\eta_2^2 = \eta_1^2$ et, puisque $\eta_2^3 = \eta_1^3$, $\eta_2 = \eta_1$.

58. Maschke a donné ⁽¹⁾ une représentation homogène du g^7

(1) *M. A.*, t. LI, 1899, p. 290.

alterné A de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, où

$$132, 12.34, 12.45, 12.56, 12.67$$

sont représentées respectivement par

$$c_0 = \begin{vmatrix} 61^2 x_1 \\ 61^2 x_2 \\ 61 x_3 \\ 61 x_4 \end{vmatrix}, \quad a_0 = \begin{vmatrix} x_1 + \sqrt{2} x_4 \\ x_2 + \sqrt{2} x_3 \\ \sqrt{2} x_2 - x_3 \\ \sqrt{2} x_1 - x_4 \end{vmatrix}, \quad f = \begin{vmatrix} \sigma x_4 \\ \sigma' x_3 \\ \sigma x_2 \\ \sigma' x_1 \end{vmatrix}, \quad g = \begin{vmatrix} \sqrt{3} x_3 + i\sqrt{2} x_4 \\ -i\sqrt{2} x_3 - \sqrt{3} x_4 \\ \sqrt{3} x_1 + i\sqrt{2} x_2 \\ i\sqrt{2} x_1 - \sqrt{3} x_2 \end{vmatrix}, \quad h = \begin{vmatrix} \rho x_3 \\ -\rho' x_4 \\ \rho x_1 \\ -\rho' x_2 \end{vmatrix},$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\rho = \sqrt{\frac{5}{12}} + i\sqrt{\frac{7}{12}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{3}{8}} + i\sqrt{\frac{5}{8}},$$

$$\rho' = \sqrt{\frac{5}{12}} - i\sqrt{\frac{7}{12}}, \quad \sigma' = \sqrt{\frac{3}{8}} - i\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Soit G le figuratif $\{a, b, c, \varepsilon\}$ de A, et $\{\varepsilon\} = E$. c_0 répond à Ec, a_0 à Ea, f à Eab $^{-1}$ ab, g à Eab $^{-2}$ ab 2 , h à Eab $^{-3}$ ab 3 , et comme

$$(12)(67).(12)(56).(12)(45).(12)(34) = (34567),$$

la substitution

$$b_0 = h g f a_0 = \begin{vmatrix} \rho' \sigma' \sqrt{6} x_1 - 2i\rho \sigma' x_2 - i\rho \sigma \sqrt{2} x_3 + \rho' \sigma \sqrt{3} x_4 \\ -2i\rho' \sigma x_1 + \rho \sigma \sqrt{6} x_2 + \rho \sigma' \sqrt{3} x_3 - i\rho' \sigma' \sqrt{2} x_4 \\ i\rho' \sigma \sqrt{2} x_1 - \rho \sigma \sqrt{3} x_2 + \rho \sigma' \sqrt{6} x_3 - 2i\rho' \sigma' x_4 \\ -\rho' \sigma' \sqrt{3} x_1 + i\rho \sigma' \sqrt{2} x_2 - 2i\rho \sigma x_3 + \rho' \sigma \sqrt{6} x_4 \end{vmatrix}$$

répond à Eb.

Considérons désormais les variables comme non homogènes, et posons

$$u = \left| \frac{x_1}{\sqrt{3}}, \frac{x_2}{\sqrt{3}}, \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \frac{x_4}{\sqrt{3}} \right|, \quad v = \left| \frac{x_1}{\sqrt{5}}, \frac{x_2}{\sqrt{5}}, \frac{x_3}{\sqrt{5}}, \frac{x_4}{\sqrt{5}} \right|, \quad w = |ix_1, ix_2, ix_3, ix_4|.$$

Les déterminants de $c_0, ua_0, f, vg, h, uvb_0$ sont égaux à 1. On vérifie d'ailleurs directement les équations

$$(62) \quad \begin{cases} (a_0 u)^2 = 1, & c_0^3 = 1, & (c_0 a_0 u)^3 = u^3, & (a_0 b_0^{-1} a_0 b_0 u)^3 = 1, \\ & (a_0 b_0^{-2} a_0 b_0^2 u)^2 = u^2, \\ & (c_0 b_0^{-1} a_0 b_0 u)^2 = (c_0 b_0^{-2} a_0 b_0^2 u)^2 = (c_0 b_0^{-3} a_0 b_0^3 u)^3 = 1. \end{cases}$$

Comme l'équation caractéristique de b_0 est $\frac{s^3+1}{s+1}=0$, on a $b_0^3=\omega^2$.

Le déterminant de $b_0 a_0$ étant égal à 1, $(b_0 a_0)^3=\gamma_0$, qui est une similitude à quatre variables, est dans $\{\omega\}$. Or, à la conséquence $\beta^4 \gamma^4 \varepsilon^4 \alpha^m=1$ des équations (32) répond, pour les équations (62) jointes à $b_0^3=\omega^2$, la conséquence $\gamma_0^3 \omega^2=1$ ou, puisque γ_0 est dans $\{\omega\}$, $\gamma_0=\omega^2$. Donc, en posant

$$a_1=a_0 \omega \omega, \quad c_1=c_0 \omega^2, \quad b_1=b_0.$$

on aura

$$\begin{aligned} a_1^3 &= c_1^3 = b_1^3 = (b_1 a_1)^3 = (a_1 b_1^{-1} a_1 b_1)^3 = (a_1 b_1^{-2} a_1 b_1^2)^3 = \omega^2, \\ (c_1 a_1)^3 &= (c_1 b_1^{-1} a_1 b_1)^3 = (c_1 b_1^{-2} a_1 b_1^2)^3 = (c_1 b_1^{-3} a_1 b_1^3)^3 = \omega^2 \end{aligned}$$

et a_1, b_1, c_1 fournissant une représentation du figuratif (correspondant à $x=y=z=x'=y'=z'=0$) où a_1 répond à a , b_1 à b , c_1 à c , ω^2 à ε .

