

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. D'ADHÉMAR

**Première mémoire. Sur l'application du calcul fonctionnel à l'étude
d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre**

Journal de mathématiques pures et appliquées 6^e série, tome 5 (1909), p. 293-326.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1909_6_5__293_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

PREMIER MÉMOIRE.

*Sur l'application du calcul fonctionnel à l'étude
d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre;*

PAR M. R. D'ADHÉMAR.

INTRODUCTION.

Je rappelle d'abord, rapidement, quel a été le développement des théories auxquelles je voudrais apporter quelques compléments.

Soit une équation du *second* ordre, linéaire, à deux variables,

$$(1) \quad s + ap + bq + cz + f = 0;$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y};$$

a, b, c, f dépendent de x et y seuls.

Riemann ⁽¹⁾ avait résolu le problème de Cauchy pour une équation de ce type, mais plus simple; M. Darboux ⁽²⁾ a étendu la méthode de Riemann à l'équation (1).

M. Picard ⁽³⁾, dans des travaux immédiatement devenus classiques, et par l'emploi des approximations successives, a intégré l'équation (1)

⁽¹⁾ *Œuvres*, trad. française (Gauthier-Villars).

⁽²⁾ *Leçons sur les surfaces*, t. II, 1889.

⁽³⁾ *Journal de Mathématiques*, 1890 et 1893; Note dans les *Leçons* de M. Darboux, t. IV, 1896; *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1899; *Société mathématique de France*, 1894.

et même celle-ci, plus générale,

$$(2) \quad s = f(x, y, z, p, q).$$

Les données de Cauchy, z et une dérivée première, sont portées par un arc de courbe, dans le plan (x, y) , coupé en *un seul point* par une parallèle quelconque aux axes.

Ou bien encore on peut se donner z seul si cet arc de courbe est formé par des droites parallèles aux axes, des caractéristiques.

Ceci n'est déjà plus *le problème de Cauchy*.

M. Picard s'en éloigne encore davantage en se donnant z sur l'axe ox et sur la bissectrice $y = x$.

MM. Goursat et Hadamard étendent considérablement ces résultats.

Pour des équations du second ordre, de forme très générale, M. Goursat montre d'abord qu'il existe une solution *analytique* contenant deux courbes tangentes respectivement aux deux directions caractéristiques, en leur point d'intersection.

Puis il montre qu'il suffit que l'une de ces deux courbes soit tangente à une caractéristique ⁽¹⁾.

Enfin, par la solution d'une équation fonctionnelle, M. Goursat, dans deux Mémoires ⁽²⁾ du plus grand intérêt, obtient une solution de l'équation (2), contenant deux courbes qui se coupent à l'origine et qui ont leurs projections situées dans le premier quadrant.

Si ces deux projections ne sont pas situées dans le même quadrant, on a alors à se poser des problèmes nouveaux, comme M. Picard l'a remarqué.

M. Hadamard a apporté ici des résultats importants et a appelé *problème mixte* celui où l'on a, sur une portion de courbe, les données de Cauchy et, sur une autre partie, des données autres ⁽³⁾.

On rencontre, dans cet ordre d'idées, des *prolongements non analytiques*, très naturels.

Le présent Mémoire se relie aux travaux de M. Goursat, mais est relatif aux équations du *troisième* ordre.

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1895 et 1897, et *Leçons sur les équations du second ordre* (Hermann).

⁽²⁾ *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2^e série, t. V et VI.

⁽³⁾ *Soc. math. de France*, t. XXVIII, XXXI, XXXII.

Récemment, M. E. Holmgren ⁽¹⁾ a brillamment étendu la méthode de Riemann aux équations du troisième ordre du type

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = \varphi_2(u),$$

φ_2 contenant des dérivées premières et secondes.

Je me propose d'étudier la même équation en posant, non plus le problème de Cauchy, mais celui-ci : *trouver une solution contenant trois courbes données.*

J'ai à résoudre, non plus *une équation fonctionnelle*, mais un *système fonctionnel*.

Supposons d'abord que les courbes données se projettent sur le plan xOy suivant les courbes planes.

Dans ce cas, le système fonctionnel peut être ramené à une équation unique et l'on trouve que le problème peut comporter des *conditions de possibilité*.

On est ramené à l'étude d'une équation transcendante très intéressante.

Si maintenant on a une donnée plane et deux données gauches (ce qui est un cas suffisamment général), alors le *système fonctionnel* ne paraît pas pouvoir être réduit à *une équation unique*. Il faudra procéder autrement.

J'ai, pour ce cas, montré comment on formera les *conditions de possibilité*, et je continuerai cette étude dans un second Mémoire.

Comme on pouvait s'y attendre, le cas où a est *nul* est infiniment plus simple que le cas où a est *constant*.

Le cas où a est une fonction de x et y est encore un peu plus compliqué.

On sait que M. Picard a, le premier, appliqué au calcul fonctionnel ses méthodes d'approximations successives ⁽²⁾.

⁽¹⁾ *Arkiv för Matematik*, Stockholm, 1904 et 1909. Je me permets de renvoyer le lecteur à mon Volume de la collection *Scientia* et à mes *Exercices et Leçons d'Analyse* (Gauthier-Villars). Signalons ici les travaux de MM. Delassus, Le Roux, etc.

⁽²⁾ *Acta mathematica*, t. XVIII et XXIII.

Je montre qu'on pourra avantageusement les faire intervenir ici, pour l'étude de mes équations fonctionnelles.

Bien entendu, les approximations successives s'imposeront si nous voulons étudier la même équation avec un second membre contenant des dérivées d'ordre *un* et *deux* (').

Mes premiers résultats ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 22 mars 1909.

Recherche d'une solution générale de l'équation aux dérivées partielles. — Cherchons une solution, avec le maximum d'arbitraire, pour l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = f(x, y).$$

Posons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = V,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

d'où, comme il est bien connu,

$$V(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(x', y') dx' dy' + F(x) + G(y).$$

Maintenant

$$\frac{\partial u}{\partial x} = V(x, y)$$

donne de suite

$$u = H(y) + \int_0^x V(\xi, y) d\xi,$$

$$V(\xi, y) = \int_0^\xi \int_0^y f(x', y') dx' dy' + F(\xi) + G(y);$$

(¹) Nous devons mentionner la thèse de M. Leau, sur les systèmes fonctionnels, mais ses beaux résultats n'ont pu nous servir ici. Signalons enfin l'introduction, dans ces questions, d'équations intégrales voisines de celles de M. Volterra : Voir E. PICARD, *Comptes rendus*, 1907, et A. MYLLER, *Société des Sciences de Bucarest*, 1908.

d'où, enfin,

$$u(x, y) = H(y) + L(x) + x G(y) + \int_0^x d\xi \int_0^\xi dx' \int_0^{x'} f(x', y') dy',$$

ayant posé

$$L(x) = \int_0^x F(\xi) d\xi.$$

Ce qui donne, bien entendu,

$$L(0) = 0.$$

Si nous voulons que u soit *nul* à l'origine, il faut avoir aussi

$$H(0) = 0.$$

Traitons le même problème pour l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = f(x, y) \quad (a = \text{const.}),$$

Soit, d'abord,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}\right) u = V.$$

Les caractéristiques sont données par

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{V};$$

V est connu comme précédemment.

Nous avons une intégrale première

$$y - ax = C_1.$$

Posons

$$V(x, ax + C_1) = W_x \quad (1);$$

il vient alors

$$du = W_x dx,$$

$$u - \int_0^x W_\xi d\xi = C_2;$$

(1) Nous écrirons parfois W_x au lieu de $W(x)$.

alors, $\mathcal{F}$ étant le symbole d'une fonction arbitraire,

$$u - \int_0^x W_{\xi} d\xi = \mathcal{F}(y - ax);$$

voilà la solution cherchée u .

V contient deux arbitraires : F et G .

Donc

$$W_x = \text{fonction connue} + F_x + G(ax + C_1),$$

$$\int_0^x W_{\xi} d\xi = \text{connu} + \int_0^x F_{\xi} d\xi + \int_0^x G(a\xi + C_1) d\xi.$$

Nous posons

$$\int_0^x F_{\xi} d\xi = L(x), \quad L(0) = 0,$$

$$(a \neq 0), \quad \frac{1}{a} \int_0^z G(\lambda) d\lambda = \Gamma(z) - \Gamma(0).$$

Ceci donnera

$$\int_0^x G(a\xi + y - ax) d\xi = \frac{1}{a} \int_0^{ax} G(\lambda + y - ax) d\lambda$$

$$= \Gamma(ax + y - ax) - \Gamma(y - ax).$$

Finalement nous avons

$$u(x, y) = \text{fonction connue} + L(x) + H(y) + M(y - ax).$$

Pour que u soit *nul* à l'origine, nous prendrons H et M tels qu'on ait

$$H(0) = M(0) = 0.$$

CHAPITRE I.

PREMIER PROBLÈME. — ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE
N'AYANT QUE DEUX CARACTÉRISTIQUES.

Soit $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = f(x, y)$; la solution générale, nous l'avons vu, contient
trois fonctions arbitraires, sous la forme

$$H(y) + L(x) + xG(y).$$

Si nous voulons une solution de l'équation passant par trois courbes situées dans les plans

$$y = x, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x,$$

nous avons un *système fonctionnel* à résoudre [nous écrivons f_x au lieu de $f(x)$ pour simplifier],

$$A_x = H_x + L_x + x G_x,$$

$$B_x = H_{\alpha x} + L_x + x G_{\alpha x},$$

$$C_x = H_{\beta x} + L_x + x G_{\beta x};$$

A, B, C sont *donnés*.

Représentons $x G_x$ par Γ_x , d'où

$$\alpha x G_{\alpha x} = \Gamma_{\alpha x}, \quad \beta x G_{\beta x} = \Gamma_{\beta x};$$

d'où la forme nouvelle

$$A_x = H_x + L_x + \Gamma_x,$$

$$B_x = H_{\alpha x} + L_x + \frac{1}{\alpha} \Gamma_{\alpha x},$$

$$C_x = H_{\beta x} + L_x + \frac{1}{\beta} \Gamma_{\beta x}.$$

Les éliminations sont faciles, en formant

$$A_{\alpha x}, \quad A_{\beta x}, \quad \dots$$

On a, pour H, l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} (H) \quad \text{Fonction connue} &= -\frac{1}{\beta} (B - A)_{\beta x} + \frac{1}{\alpha} (C - A)_{\alpha x} + (B - C)_x \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) H_{\alpha\beta x} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) H_{\beta x} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) H_{\alpha x}. \end{aligned}$$

Pour Γ , on trouve l'équation analogue,

$$\begin{aligned} (\Gamma) \quad &\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \Gamma_{\alpha\beta x} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \Gamma_{\beta x} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \Gamma_{\alpha x} \\ &= (B - A)_{\beta x} - (C - A)_{\alpha x} - (B - C)_x. \end{aligned}$$

Pour L, on a une équation analogue (L), qui est écrite plus loin.

L'une des fonctions H, Γ, L étant connue, les autres s'en déduisent facilement.

Faisant une remarque sur les termes en x dans l'expression connue de nos équations fonctionnelles.

A, B, C ne renferment pas de constante; supposons les *analytiques*

$$A = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 \dots,$$

$$B = \mu_1 x \dots,$$

$$C = \nu_1 x \dots$$

Dans l'équation (H) *il n'y a pas* de terme en x .

Dans les équations (Γ) et (L) le coefficient de x , dans l'expression connue, est *le même*, à un facteur constant près, dépendant du mode de formation de l'équation

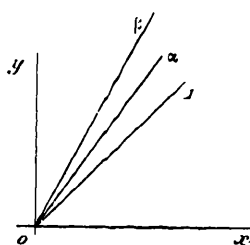
$$(\mu_1 - \lambda_1)\beta - (\nu_1 - \lambda_1)\alpha - (\mu_1 - \nu_1) = X_1.$$

Nous sommes donc amené à étudier l'équation fonctionnelle

$$f(G) \equiv G(mx) + a G(px) + b G(x) = F(x) \text{ fonction connue;}$$

m, a, b, p sont des constantes, F est supposé *analytique*.

Fig. 1.



Nous pouvons supposer $\beta > \alpha > 1$; alors

$$m = \beta, \quad p = \frac{\beta}{\alpha}, \quad m = p\alpha > p,$$

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} > 0;$$

d'où

$$\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta-\alpha} = a < 0,$$

$$\frac{\beta(\alpha-1)}{\beta-\alpha} = b > 0.$$

Nous étudierons l'équation de deux manières.

Méthode directe pour la solution de l'équation fonctionnelle

$$f(G_x) = F_x.$$

Nous n'avons qu'à résoudre successivement les équations

$$f(G_x) = \text{constante}, \quad f(G_x) = x, \quad f(G_x) = x^2, \quad \dots$$

Soit

$$f(G_x) = x^n.$$

Nous aurons la solution

$$G_x = K_n x^n,$$

K_n étant donné par l'équation simple

$$K_n(m^n + ap^n + b) = 1.$$

Il faut et il suffit, pour que ceci soit possible, que la courbe

$$Y = m^x + ap^x + b$$

ne coupe l'axe des x en aucun point dont l'abscisse soit un entier positif.

Or

$$Y(0) = Y(1) = 0;$$

c'est immédiat.

Donc F ne doit contenir ni constante ni terme en x .

La première condition est remplie d'avance; la seconde nous donne

$$X_1 = 0.$$

Ceci exprime évidemment que les trois courbes données, passant par l'origine, ont leurs trois tangentes situées dans un même plan.

Étudions la dérivée

$$Y'_x = \xi m \cdot m^x + a \xi p \cdot p^x.$$

Elle ne peut avoir qu'une racine et cette racine est sûrement située entre 0 et 1.

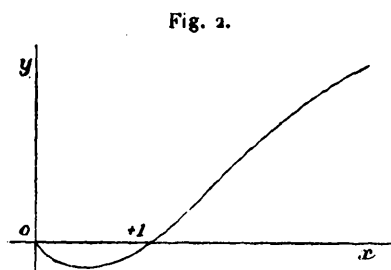
Étudions la dérivée seconde

$$Y'' = (\xi m)^2 m^x + a(\xi p)^2 p^x.$$

Il y a une racine, donc un seul point d'inflexion, et, comme on a

$$Y(+\infty) = +\infty,$$

la forme de la courbe est la suivante :



Donc Y est positif pour $x = +2, +3, \dots$

Nous n'avons bien qu'une condition de possibilité

$$X_1 = 0,$$

et, puisque $Y(0) = 0$, chaque solution est connue à une constante additive près, qu'on choisira constamment nulle pour avoir

$$G(0) = 0.$$

Résolution par approximations successives de l'équation fonctionnelle

$$f(G_x) = F_x.$$

Les approximations successives donnent un moyen de passer à des cas plus généraux.

Pour bien montrer leur application, qui nous a été suggérée par

les travaux de M. Picard, nous allons traiter le cas le plus simple, déjà résolu directement.

La chaîne des approximations sera

$$\begin{aligned} G_1(mx) + 0 + 0 &= F(x), \\ G_2(mx) + a G_1(px) + b G_1(x) &= F(x), \\ G_3(mx) + a G_2(px) + b G_2(x) &= F(x), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La solution est $G_\infty(x)$, si cette limite existe.

Premier cas. — Soit, d'abord,

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv x; \\ G_1(mx) &= x, & G_1(x) &= \frac{x}{m}, \\ G_2(mx) &= x \left(1 - \frac{ap+b}{m}\right) = x \omega_1, & G_2(x) &= \frac{x}{m} \omega_1, \\ G_3(mx) &= x \left(1 - \frac{ap+b}{m} \omega_1\right) = x \omega_2, & G_3(x) &= \frac{x}{m} \omega_2, \\ G_4(mx) &= x \left(1 - \frac{ap+b}{m} \omega_2\right) = x \omega_3, & G_4(x) &= \frac{x}{m} \omega_3, \\ &\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

d'où,

$$G_{q+1}(x) - G_q(x) = \frac{x}{m} (\omega_q - \omega_{q-1}),$$

et l'on a

$$\omega_q - \omega_{q-1} = - \frac{ap+b}{m} (\omega_{q-1} - \omega_{q-2}).$$

$G_q(x)$ a une limite pour $q = \infty$ si la série

$$\sum (G_{q+1} - G_q)$$

est convergente, c'est-à-dire si l'on a

$$\left| \frac{ap+b}{m} \right| < 1.$$

Mais, avec nos *données*, nous avons

$$\frac{ap+b}{m} = \frac{\beta(\alpha - \alpha\beta) + \alpha(\alpha\beta - \beta)}{\alpha\beta(\beta - \alpha)} = -1.$$

Il y a *divergence*, donc G_q n'a pas de limite; nous retrouvons la condition

$$X_1 = 0.$$

Deuxième cas. — Soit

$$F(x) \equiv x^2.$$

Les calculs se présentent de même, sauf que

$$\frac{ap+b}{m} \quad \text{est remplacé par} \quad \frac{ap^2+b}{m^2}.$$

Cas général. — Soit

$$F(x) = x^k.$$

On voit immédiatement que $\frac{ap+b}{m}$ est remplacé par

$$\frac{ap^k+b}{m^k}.$$

Donc, il n'y a, pour le problème général, qu'une seule condition de possibilité si l'on a

$$\left| \frac{ap^k+b}{m^k} \right| < 1 \quad \text{pour} \quad k \geq 2.$$

Traçons donc la courbe

$$Z = \frac{b}{m^x} - c \left(\frac{p}{m} \right)^x,$$

$$c = -a > 0, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{\beta} < 1, \quad \frac{p}{m} = \frac{1}{\alpha} < 1, \quad \beta > \alpha;$$

d'où

$$\frac{1}{m} < \frac{p}{m};$$

donc

$$Z(0) = b - c = -1,$$

$$Z(1) = -1,$$

$$Z(+\infty) = \text{infinitement petit négatif}.$$

La dérivée Z' s'annule si l'on a

$$c(\xi m - \xi p)p^x = b\xi m.$$

Il y a *une* racine, puisqu'on a

$$\xi m - \xi p > 0.$$

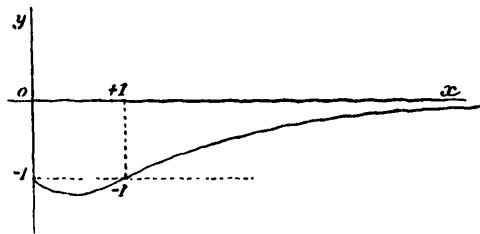
Cette racine est évidemment entre 0 et 1.

De même, la dérivée seconde a *une* racine (d'où un *point d'inflexion*) fournie par l'équation

$$c(\xi m - \xi p)^2 p^x = b(\xi m)^2,$$

et, lorsque Z' est *nul*, Z'' est *positif*; donc nous avons un *minimum* entre 0 et 1.

Fig. 3.



La forme de la courbe montre qu'on a bien

$$|Z(2)| < 1, \quad |Z(3)| < 1, \quad \dots$$

DEUXIÈME PROBLÈME. — EXTENSION DU PRÉCÉDENT.

Supposons enfin les trois courbes données, par lesquelles passe la solution, tout à fait quelconques. Au lieu de $\alpha.x$ ($\alpha = \text{const.}$), nous avons une fonction $\alpha(x)$ et notre système fonctionnel devient

$$\begin{aligned} A_x &= H_x + L_x + xG_x, \\ B_x &= H_{\alpha(x)} + L_x + xG_{\alpha(x)}, \\ C_x &= H_{\beta(x)} + L_x + xG_{\beta(x)}. \end{aligned}$$

Nous supposons

$$\alpha(\beta_x) \neq \beta(\alpha_x);$$

sans cela nous retomberions sur le cas des lignes droites ($\alpha = \text{const.}$).

Soient γ_x et δ_x des fonctions telles qu'on ait

$$\alpha[\beta(\gamma_x)] = x = \beta[\alpha(\delta_x)]$$

(c'est une sorte de plus petit commun multiple). Nous écrivons ceci :

$$\alpha\beta\gamma_x = x = \beta\alpha\delta_x.$$

On a, sans peine,

$$B_{\beta\gamma_x} - C_{\alpha\delta_x} = (\beta\gamma_x - \alpha\delta_x)G + L_{\beta\gamma_x} - L_{\alpha\delta_x}.$$

Écrivons ceci symboliquement,

$$B_{\beta\gamma} - C_{\alpha\delta} = (\beta\gamma - \alpha\delta)G + L_{\beta\gamma} - L_{\alpha\delta}.$$

De même on a, sans peine,

$$(\beta\gamma)C_{\alpha\delta} - (\alpha\delta)B_{\beta\gamma} = (\beta\gamma - \alpha\delta)H + (\beta\gamma)L_{\alpha\delta} - (\alpha\delta)L_{\beta\gamma}.$$

Nous en tirons G et H, que nous portons dans la première équation, d'où

$$\begin{aligned} A_x + \frac{1}{\beta\gamma - \alpha\delta}(\alpha\delta B_{\beta\gamma} - \beta\gamma C_{\alpha\delta}) + \frac{x}{\beta\gamma - \alpha\delta}(C_{\alpha\delta} - B_{\beta\gamma}) \\ = L_x + \frac{1}{\beta\gamma - \alpha\delta}(\alpha\delta L_{\beta\gamma} - \beta\gamma L_{\alpha\delta}) + \frac{x}{\beta\gamma - \alpha\delta}(L_{\alpha\delta} - L_{\beta\gamma}). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots, \\ \beta(x) &= \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots, \\ \gamma(x) &= \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots, \\ \delta(x) &= \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \dots \end{aligned}$$

ce qui suppose les courbes $\alpha(x)$, ... analytiques, les coefficients α_h , β_h , ... étant des constantes.

On a, de suite,

$$\beta\gamma_x = \beta_1\gamma_1 x + \dots$$

avec

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = 1, \quad \beta_1\alpha_1\delta_1 = 1$$

(il suffit de commencer les identifications d'après la définition de γ_x et de δ_x).

Donc

$$\beta\gamma_x = \frac{1}{\alpha_1}x + \dots,$$

$$\alpha\delta_x = \frac{1}{\beta_1}x + \dots$$

Notre équation prend donc la forme

$$\begin{aligned} & A_x + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_1} + \Phi_1} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha_1} + \Phi_1 \right) C\left(\frac{1}{\beta_1}x + \Phi_2\right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{\beta_1} - 1 + \Phi_1 \right) B\left(\frac{1}{\alpha_1}x + \Phi_2\right) \right] \\ &= L_x + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_1} + \Phi_1} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha_1} + \Phi_1 \right) L\left(\frac{1}{\beta_1}x + \Phi_2\right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{\beta_1} - 1 + \Phi_1 \right) L\left(\frac{1}{\alpha_1}x + \Phi_2\right) \right]. \end{aligned}$$

Φ_1 et Φ_2 désignant des séries de puissances entières en x , la première commençant par un terme en x , la seconde par un terme en x^2 .

Or, avec α et β constants, nous aurions, pour équation en L ,

$$\begin{aligned} & A_x + \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) C\left(\frac{x}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) B\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right] \\ &= L(x) + \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) L\left(\frac{x}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) L\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right]. \end{aligned}$$

C'est bien le cas particulier de la forme précédente.

Dans un second Mémoire, je reprendrai l'étude de cette équation fonctionnelle.

CHAPITRE II.

TROISIÈME PROBLÈME. — ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIÈME ORDRE
AYANT TROIS CARACTÉRISTIQUES DISTINCTES.

Nous avons donc, pour l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

a étant une constante non nulle, la solution générale contenant comme fonctions arbitraires,

$$L(x) + H(y) + M(y - ax).$$

Supposons la solution astreinte à passer par trois courbes situées dans les plans

$$y = x, \quad y = \alpha x, \quad y = \beta x;$$

nous aurons à résoudre le système fonctionnel

$$\begin{aligned} A(x) &= L(x) + H(x) + M(x - ax), \\ B(x) &= L(x) + H(\alpha x) + M(\alpha x - ax), \\ C(x) &= L(x) + H(\beta x) + M(\beta x - ax); \end{aligned}$$

A, B, C sont donnés ainsi que a , α , β . Les inconnues sont les symboles L, H, M.

Posons, pour simplifier,

$$M(\varphi x) = N\left(\frac{\varphi x}{1-a}\right);$$

nous aurons alors, avec

$$\alpha' = \frac{\alpha - a}{1 - a}, \quad \beta' = \frac{\beta - a}{1 - a},$$

$$A_x = L_x + H_x + N_x,$$

$$B_x = L_x + H_{\alpha x} + N_{\alpha'x},$$

$$C_x = L_x + H_{\beta x} + N_{\beta'x},$$

α' et β' étant des constantes, comme α et β . On fait de suite l'élimination de L et H :

$$B_{\beta x} = L_{\beta x} + H_{\alpha\beta x} + N_{\alpha'\beta x},$$

$$B_{\beta x} - B_x = L_{\beta x} - L_x + H_{\alpha\beta x} - H_{\alpha x} + N_{\alpha'\beta x} - N_{\alpha'x},$$

$$C_{\alpha x} = L_{\alpha x} + H_{\beta\alpha x} + N_{\beta'\alpha x},$$

$$C_x - C_{\alpha x} = L_x - L_{\alpha x} + H_{\beta x} - H_{\beta\alpha x} + N_{\beta'x} - N_{\beta'\alpha x},$$

$$A_{\alpha x} - A_{\beta x} = L_{\alpha x} - L_{\beta x} + H_{\alpha x} - H_{\beta x} + N_{\alpha x} - N_{\beta x}.$$

Il suffit d'ajouter membre à membre et l'on a

$$\begin{aligned} \text{Fonction connue} &= B_{\beta x} - B_x + C_x - C_{\alpha x} + A_{\alpha x} - A_{\beta x} \\ &= N_{\alpha'\beta x} - N_{\beta'\alpha x} + N_{\beta'x} - N_{\alpha'x} + N_{\alpha x} - N_{\beta x}. \end{aligned}$$

On peut faire de même pour H et N.

D'ailleurs, *une* des fonctions étant connue, on a pour une autre une équation fonctionnelle plus simple, si l'on veut.

La discussion de l'équation en N sera très nette si nous supposons A, B, C analytiques. Nous avons alors, en posant

$$\alpha'\beta = \delta, \quad \beta'\alpha = \gamma,$$

les γ_n étant des constantes connues,

$$f(N) = N\delta_x - N\gamma_x + N\beta_x - N\alpha'_x + N\alpha_x - N\beta_x = \sum_0^{\infty} X_n x^n.$$

Si l'équation est résolue *séparément* pour un second membre égal à $x^0, x, x^2, x^3, \dots$, nous avons de suite la solution complète. Étudions successivement tous ces cas.

Soit, d'abord,

$$(N) = 1;$$

alors

$$N = K_0 = \text{const.}$$

et il vient

$$0 = 3K_0 - 3K_0 = 1.$$

Ceci est impossible, mais cela ne nous embarrasse pas, car nous supposons nos trois courbes passant par l'origine; donc A, B, C ne contiennent pas de constante.

D'où l'équation

$$3K_0 - 3K_0 = 0;$$

K_0 est arbitraire et sera pris nul si l'on veut que N ne contienne pas de constante.

Soit maintenant

$$f(N) = x;$$

nous avons alors la solution

$$N_x = K_1 x,$$

et il vient

$$K_1(\delta - \gamma + \beta' - \alpha' + \alpha - \beta) = 1.$$

Mais le coefficient de K_1 est *nul*; on le vérifie aisément.

Donc, en aucun cas le second membre ne pourra contenir un terme en x . La fonction

$$\sum_1^n X_n x^n = B_{\beta x} - B_x + C_x - C_{\alpha x} + A_{\alpha x} - A_{\beta x},$$

qui ne contient pas de constante, ne doit pas avoir de terme en x . C'est une *condition de possibilité*, prévue d'avance : les trois tangentes aux courbes doivent être situées dans un même plan.

On voit de même que pour l'équation $f(N) = x^p$ on a la solution

$$N_x = K_p x^p,$$

à condition que

$$\delta^p - \gamma^p + \beta'^p - \alpha'^p + \alpha^p + \beta^p$$

ne soit pas nul.

Telle est donc la question à étudier avec soin.

Tout revient à chercher les racines d'une équation transcendante.

Nous supposons les données fixes, avec $\alpha > \beta > 1$, et nous ferons mouvoir la caractéristique $\gamma = \alpha x$, pour examiner les divers cas.

Remarquons, d'abord, que

$$\delta^2 - \gamma^2 + \beta'^2 - \alpha'^2 + \alpha^2 - \beta^2$$

est toujours *positif*; nous avons en effet

$$\beta^2(\alpha - a)^2 - \alpha^2(\beta - a)^2 + (\beta - a)^2 - (\alpha - a)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)(1 - a)^2,$$

qui se réduit à

$$(\alpha - \beta)(1 + \alpha\beta - \alpha - \beta).$$

Or

$$\alpha = 1 + p, \quad \beta = 1 + q, \quad \alpha > \beta,$$

d'où

$$(\alpha - \beta)pq > 0.$$

Ceci ne suppose rien sur la valeur de a , mais il faut maintenant distinguer plusieurs cas.

Premier cas : $0 < a < 1$.

Nous avons alors

$$\alpha' > 0, \quad \beta' > 0, \quad \delta > 0, \quad \gamma > 0$$

et

$$\delta > \gamma,$$

car $\beta < \alpha$ donne $-a\beta > -a\alpha$, d'où

$$(\alpha - a)\beta > (\beta - a)\alpha,$$

d'où

$$\delta > \gamma.$$

Posons

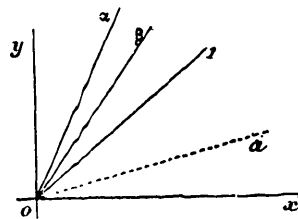
$$u = \delta^p - \gamma^p + \beta'^p - \alpha'^p + \alpha^p - \beta^p;$$

nous avons

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 & \text{pour } p &= 0, \\ u_1 &= 0 & \text{pour } p &= 1, \\ u_{+\infty} &= +\infty & \text{pour } p &= +\infty. \end{aligned}$$

Montrons que u est *positif* pour $p \geq 2$.

Fig. 4.



Nous remarquons d'abord (nous l'avons déjà dit) que

$$\delta + \beta' + \alpha \equiv \gamma + \alpha' + \beta,$$

car on a

$$\beta(\alpha - a) + \beta - a + \alpha(1 - a) \equiv \alpha(\beta - a) + \alpha - a + \beta(1 - a).$$

Ensuite

$$\delta\beta'\alpha = \alpha'\beta\beta'\alpha \equiv \gamma\alpha'\beta.$$

La *somme* et le *produit* sont les mêmes pour

$$\delta, \beta', \alpha \quad \text{et} \quad \gamma, \alpha', \beta.$$

Cette remarque est *capitale*.

Désignons les trois premiers nombres par e_1, e_2, e_3 , sans préciser lequel est $e, \dots$

Soient g_1, g_2, g_3 les trois autres. Nous avons à comparer des fonctions symétriques en e et en g .

Les e sont racines de

$$z^3 - sz^2 + \lambda z - p = 0;$$

s est la somme, p le produit, λ la somme des doubles produits.

Les g sont racines de

$$z^3 - sz^2 + \mu z - p = 0.$$

Nous avons vu qu'on a, dans tous les cas,

$$\sum_1^3 e^2 > \sum_1^3 g^2.$$

Or

$$\sum e^2 = s^2 - 2\lambda,$$

$$\sum g^2 = s^2 - 2\mu.$$

D'où l'*inégalité fondamentale* $\lambda < \mu$.

De sorte que notre problème est celui-ci :

Soit l'équation

$$z^3 - sz^2 + \lambda z - p = 0.$$

Soit

$$S_n = \sum_1^3 e^n;$$

lorsque n est supérieur ou égal à 2, S_n *croît* lorsque le paramètre λ *décroît*, ou encore on a

$$\frac{dS_n}{d\lambda} < 0.$$

Il sera commode, ici, d'introduire l'*intégrale logarithmique de Cauchy* qui, on le sait, donne une démonstration si simple du théorème de d'Alembert.

L'emploi des imaginaires est bien souvent, sinon indispensable, du moins rapide.

Soit Γ un contour, dans le plan de la variable complexe, qui entoure les trois racines e ; on a

$$2\pi i S_n = \int_{\Gamma} z^n \frac{3z^2 - 2sz + \lambda}{z^3 - sz^2 + \lambda z - p} dz.$$

Dérivons en λ , désignons par F le premier membre de l'équation

$$2\pi i \frac{dS_n}{d\lambda} = \int_{\Gamma} z^n \left[\frac{1}{F(z)} - z \frac{F'(z)}{F(z)^2} \right] dz.$$

Intégrons par parties le second terme, d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^{n+1} d\frac{1}{F} &= 0 - (n+1) \int_{\Gamma} z^n \frac{dz}{F}, \\ 2\pi i \frac{dS_n}{d\lambda} &= -n \int_{\Gamma} z^n \frac{dz}{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}. \end{aligned}$$

D'ailleurs la théorie des résidus, de Cauchy, donne

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^n \frac{dz}{F} &= 2\pi i \left[\frac{e_1^n}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)} + \frac{e_2^n}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)} + \frac{e_3^n}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)} \right] = 2\pi i \sigma_n, \\ \frac{dS_n}{d\lambda} &= -n \sigma_n. \end{aligned}$$

Nous voulons donc montrer que σ_n est *positif* pour $n \geq 2$,

$$\sigma_n = \frac{e_1^n(e_3-e_2) + e_2^n(e_1-e_3) + e_3^n(e_2-e_1)}{(e_1-e_2)(e_2-e_3)(e_3-e_1)};$$

e_1, e_2, e_3 sont supérieurs à un , dans notre cas actuel.

Soit

$$e_1 > e_2 > e_3 > 1.$$

Soit

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &= h_1 > 0, \\ e_2 - e_3 &= h_2 > 0, \\ e_1 - e_3 &= h_1 + h_2 = h_3. \end{aligned}$$

Le numérateur de σ_n doit être *négatif* pour $n \geq 2$.

Ceci donne

$$\sigma_n = -h_2(e_3 + h_3)^n + h_3(e_3 + h_2)^n - h_1 e_3^n < 0.$$

Développons par la formule du binôme,

$$(e_3 + h_3)^n = e_3^n + C_n^1 e_3^{n-1} h_3 + C_n^2 e_3^{n-2} h_3^2 + \dots + h_3^n,$$

$$(e_3 + h_3)^n = e_3^n + C_n^1 e_3^{n-1} h_3 + C_n^2 e_3^{n-2} h_3^2 + \dots + h_3^n.$$

Le coefficient de e_3^n est *nul* dans v_n .

Le coefficient de e_3^{n-1} est *nul*.

Celui de e_3^{n-2} sera

$$h_3 h_3^2 - h_3 h_3^2 = h_3 h_3 (h_3 - h_3).$$

Celui de e_3^{n-3} sera

$$h_3 h_3^2 - h_3 h_3^2 = h_3 h_3 (h_3^2 - h_3^2).$$

Tous les coefficients, dans v_n , sont *négatifs* pour $n \geq 2$.

Le premier cas est élucidé, on a

$$u > 0 \quad \text{pour} \quad p \geq 2.$$

Donc on peut toujours calculer les constantes $K_2, K_3, \dots, K_n, \dots$

Il n'y a aucune difficulté parce que *la caractéristique est en dehors des courbes données*.

Faisons une remarque.

Si nous posons

$$S_n = \sum_1^3 e^n \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_1^3 g^n,$$

nous avons montré que $S_n - S'_n$ ne s'annule pas, en représentant cette différence par

$$(\mu - \lambda) \times \text{valeur moyenne de la dérivée.}$$

Or nous avons

$$\mu - \lambda = \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{(1 - \alpha)^2} (1 + \alpha\beta - \alpha - \beta).$$

Si α devient *nul*, la différence $\mu - \lambda$ devient *nulle* aussi. Mais cela ne nous embarrasse pas, puisque nous avons traité déjà le cas : $\alpha = 0$.

Maintenant nous allons faire passer la caractéristique entre les plans

des courbes données et nous rencontrerons des difficultés à élucider pour les cas où n est *impair*.

Dans les cas nouveaux que nous allons étudier, on ne pourrait plus se servir avantageusement de l'*intégrale logarithmique de Cauchy*, sauf pour le cas où n est *pair*.

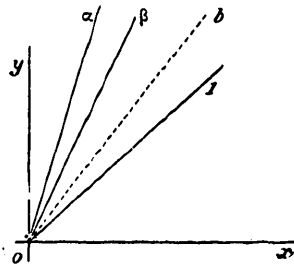
Nous procéderons autrement.

Deuxième cas : $1 < b < \beta$.

La question est plus difficile parce que certains termes sont *négatifs*, et nous étudierons, d'une manière nouvelle, la quantité

$$t = \delta^p - \gamma^p + \beta'^p - \alpha'^p + \alpha^p - \beta^p.$$

Fig. 5.



Première hypothèse. — p est *impair*.

$$\delta = \beta \frac{\alpha - b}{1 - b} < 0, \quad \delta_1 = |\delta| = \beta \frac{\alpha - b}{b - 1},$$

$$\gamma = \alpha \frac{\beta - b}{1 - b} < 0, \quad \gamma_1 = \alpha \frac{\beta - b}{b - 1},$$

$$\beta' = \frac{\beta - b}{1 - b} < 0, \quad \beta'_1 = \frac{\beta - b}{b - 1},$$

$$\alpha' = \frac{\alpha - b}{1 - b} < 0, \quad \alpha'_1 = \frac{\alpha - b}{b - 1}.$$

D'où l'expression de t , p étant égal à $2n + 1$,

$$t = -\left(\beta \frac{\alpha - b}{b - 1}\right)^p + \left(\alpha \frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p - \left(\frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p + \left(\frac{\alpha - b}{b - 1}\right)^p + \alpha^p - \beta^p.$$

Regardons l'équation $t = 0$ comme une équation en α , les autres

paramètres étant fixes, et cherchons s'il peut exister une racine α supérieure à β , ayant, bien entendu,

$$\beta - b > 0, \quad b - 1 > 0.$$

D'abord on a

$$t(\beta) \equiv 0.$$

Étudions la valeur de $t(+\infty)$ et les valeurs des deux premières dérivées en α .

On peut poser

$$t(\alpha) = u\alpha^p + v(\alpha - b)^p + w,$$

$$u \equiv \left(\frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p + 1,$$

$$v \equiv \frac{1 - \beta^p}{(b - 1)^p}.$$

Remarquons qu'on a

$$u + v < 0,$$

c'est-à-dire

$$(\beta - b)^p + (b - 1)^p + 1 - \beta^p < 0.$$

En effet, posons

$$\beta - b = H, \quad b - 1 = K,$$

$$\beta = 1 + K + H;$$

d'où

$$H^p + K^p < (1 + K + H)^p - 1.$$

Cette inégalité a lieu, H et K étant *positifs*.

Or, $t(+\infty)$ a le signe de $(u + v)$, donc sera *négatif*.

De même, les dérivées première et seconde t' et t'' seront *négatives* à l'infini,

$$\frac{1}{p} t'(\alpha) = u\alpha^{p-1} - v_1(\alpha - b)^{p-1},$$

v est négatif (v_1 est le module de v).

On a $u < v_1$, donc l'équation

$$t'(\alpha) = 0$$

peut avoir deux racines *positives* :

$$\frac{1}{2np} t''(\alpha) = u\alpha^{2n-1} - v_1(\alpha - b)^{2n-1}.$$

Donc l'équation

$$t''(\alpha) = 0$$

ne peut avoir qu'une racine positive.

D'ailleurs u est positif, d'où

$$t'(b) > 0, \quad t''(b) > 0.$$

Donc t'' s'annule entre b et $+\infty$ et une fois seulement. La courbe $t(\alpha)$ a une inflexion entre b et $+\infty$.

Donc encore t' s'annule, et seulement une fois, entre b et $+\infty$.

Donc, si la valeur $t'(\beta)$ est *négative*, la courbe $t(\alpha)$ ne coupe pas l'axe des α entre β et $+\infty$.

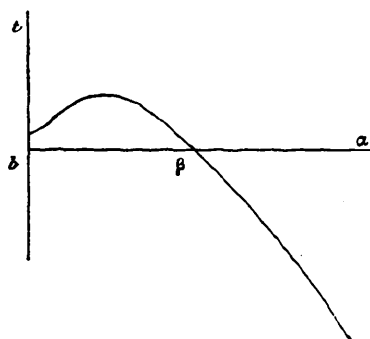
Donc t sera différent de zéro pour

$$\alpha > \beta > b > 1.$$

Si, au contraire, $t'(\beta)$ est *positif*, la courbe $t(\alpha)$ coupera une fois l'axe des α entre β et $+\infty$.

Donc, $b, \beta, p = 2n + 1$ étant donnés, il y aura alors *une* valeur de α telle que t s'annule.

Fig. 6.

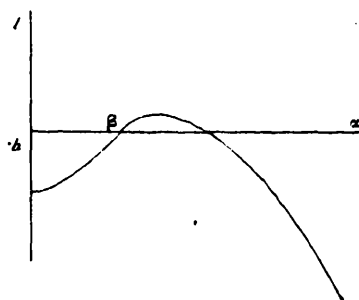


Le problème comportera une condition relative au nombre impair p .

Représentons deux des formes possibles pour la courbe $t(\alpha)$.

Dans le cas de la figure 6, il n'y a pas de condition. Dans le cas de la figure 7, il y a une condition.

Fig. 7.



Étudions la condition $t'(\beta) > 0$.

$$u\beta^{2n} - v_1(\beta - b)^{2n} > 0,$$

$$[(\beta - b)^{2n+1} + (b - 1)^{2n+1}]\beta^{2n} - (\beta^{2n+1} - 1)(\beta - b)^{2n} > 0.$$

Si $\beta - b$ est très petit, elle est remplie.

Nous avons bien vérifié que le cas de la figure (7) peut se présenter, p étant impair. Il peut exister des conditions de possibilité.

Deuxième hypothèse. — p est pair.

Soit $p = 2n$. On a alors

$$\delta^p = \delta_1^p, \quad \dots$$

D'où la nouvelle expression de t

$$t = \left(\beta \frac{\alpha - b}{b - 1}\right)^p - \left(\alpha \frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p + \left(\frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p - \left(\frac{\alpha - b}{b - 1}\right)^p + \alpha^p - \beta^p$$

$$= u\alpha^p + v(\alpha - b)^p + w,$$

$$u \equiv 1 - \left(\frac{\beta - b}{b - 1}\right)^p,$$

$$v \equiv \frac{\beta^p - 1}{(b - 1)^p}.$$

Étudions le signe de $(u + v)$ ou de

$$\beta^p - 1 + (b - 1)^p - (\beta - b)^p.$$

Soit

$$b = 1 + K, \quad \beta = 1 + K + H.$$

Nous avons

$$(1 + K + H)^p - 1 + K^p - H^p > 0.$$

Donc $(u + v)$ est *positif*.

Donc, pour $\alpha = +\infty$, t , t' , t'' sont *positifs*.

La dérivée $t'(\alpha)$ ne peut avoir qu'une racine donnée par

$$u \alpha^{2n-1} + v(\alpha - b)^{2n-1} = 0.$$

Si donc on a $t'(\beta) > 0$, comme on a, ici encore, $t(\beta) = 0$, $t(\alpha)$ sera *positif* entre β et $+\infty$.

Notre problème ne comportera aucune condition pour les exposants *pairs*. C'est ce qui a lieu.

Écrivons, en effet, la condition $t'(\beta) > 0$.

$$u \beta^{2n-1} + v(\beta - b)^{2n-1} > 0,$$

$$[(b-1)^{2n} - (\beta-b)^{2n}] \beta^{2n-1} + (\beta^{2n} - 1)(\beta-b)^{2n-1} > 0,$$

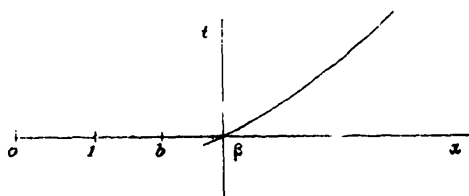
$$(K^{2n} - H^{2n})(1+H+K)^{2n-1} + H^{2n-1}[(1+H+K)^{2n} - 1] > 0,$$

$$H^{2n-1}[(1+H+K)^{2n-1}(1+K) - 1] + K^{2n}(1+H+K)^{2n-1} > 0.$$

Or ceci est toujours vrai.

La courbe $t(\alpha)$ a toujours la forme ci-dessous :

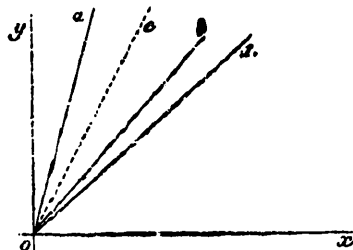
Fig. 8.



Aucune condition. — On le verrait aussi bien par l'intégrale de Cauchy.

Troisième cas : $\beta < c < \alpha$.

Fig. 9.



Nous avons maintenant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{\alpha - c}{1 - c} < 0, & \alpha'_1 &= |\alpha'| = \frac{\alpha - c}{c - 1}, \\ \beta' &= \frac{\beta - c}{1 - c} = \frac{c - \beta}{c - 1} > 0, \\ \delta &= \beta\alpha' < 0, & \delta_1 &= \beta \frac{\alpha - c}{c - 1}, \\ \gamma &= \alpha\beta' = \alpha \frac{c - \beta}{c - 1} > 0.\end{aligned}$$

Nous avons encore à distinguer les cas de p pair et impair dans l'étude de

$$w = \delta^p - \gamma^p + \beta'^p - \alpha'^p + \alpha^p - \beta^p.$$

Première hypothèse. — $p = 2n + 1$, *impair*.

$$w = -\left(\beta \frac{\alpha - c}{c - 1}\right)^p - \left(\alpha \frac{c - \beta}{c - 1}\right)^p + \left(\frac{c - \beta}{c - 1}\right)^p + \left(\frac{\alpha - c}{c - 1}\right)^p + \alpha^p - \beta^p.$$

Regardons w comme une fonction de β et cherchons à tracer la courbe entre les points $\beta = 1$ et $\beta = c$.

D'abord $w(1) = 0$, puis écrivons

$$w(\beta) = -M\beta^p - N(c - \beta)^p + P,$$

$$M \equiv 1 + \left(\frac{\alpha - c}{c - 1}\right)^p,$$

$$N \equiv \frac{\alpha^p - 1}{(c - 1)^p},$$

$$\frac{1}{p} w'(\beta) = -M\beta^{2n} + N(c - \beta)^{2n}.$$

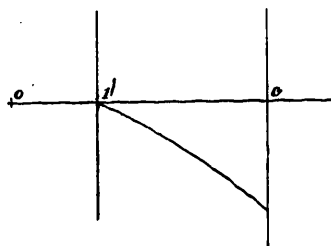
La dérivée première a *deux* racines et l'on a

$$\begin{aligned} \omega'(c) &< 0, \\ \frac{1}{2np} \omega''(\beta) &= -M\beta^{2n-1} - N(c-\beta)^{2n-1}. \end{aligned}$$

La dérivée seconde est *négative*.

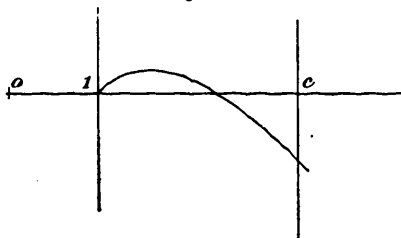
Si nous avons la relation $\omega'(1) < 0$, la courbe est celle de la figure 10; $\omega(\beta)$ ne s'annule pas entre 1 et c .

Fig. 10.



Si nous avons $\omega'(1) > 0$ et $\omega(c) < 0$, nous avons la courbe de la figure 11. Alors $\omega(\beta)$ s'annule dans l'intervalle.

Fig. 11.



La condition $\omega'(1) > 0$ donne

$$\begin{aligned} -M + N(c-1)^{2n} &> 0, \\ (\alpha^p - 1)(c-1)^{2n} - (c-1)^p - (\alpha - c)^p &> 0 \end{aligned}$$

ou

$$X > 0.$$

La condition $\omega(c) < 0$ donne

$$\left(\frac{\alpha - c}{c - 1}\right)^{2n+1} (1 - c^{2n+1}) + \alpha^{2n+1} - c^{2n+1} < 0$$

ou

$$Y < 0.$$

Supposons α assez grand et $2n$ assez grand.

X aura le signe de

$$\alpha^{2n+1}[(c-1)^{2n}-1]$$

et Y aura le signe de

$$\alpha^{2n+1} \left[\frac{1-c^{2n+1}}{(c-1)^{2n+1}} + 1 \right].$$

Si l'on a, par exemple, $c = 3$, on aura

$$X > 0 \quad \text{et} \quad Y < 0.$$

Donc le cas de la figure 11 peut être réalisé.

Deuxième hypothèse. — $p = 2n$, pair.

Ici $\delta^{2n} = \delta_1^{2n}$, nous avons

$$\begin{aligned} \omega(\beta) &= \left(\beta \frac{\alpha-c}{c-1} \right)^{2n} - \left(\alpha \frac{c-\beta}{c-1} \right)^{2n} + \left(\frac{c-\beta}{c-1} \right)^{2n} - \left(\frac{\alpha-c}{c-1} \right)^{2n} + \alpha^{2n} - \beta^{2n} \\ &= P\beta^{2n} + Q(c-\beta)^{2n} + R, \end{aligned}$$

$$P \equiv \left(\frac{\alpha-c}{c-1} \right)^{2n} - 1,$$

$$Q \equiv \frac{1-\alpha^{2n}}{(c-1)^{2n}} < 0,$$

$$\frac{1}{2n} \omega'(\beta) = P\beta^{2n-1} - Q(c-\beta)^{2n-1},$$

$$\frac{1}{2n(2n-1)} \omega''(\beta) = P\beta^{2n-2} + Q(c-\beta)^{2n-2}.$$

1° Supposons $P > 0$; alors on aura

$$\omega'(\beta) > 0.$$

Or $\omega(1) = 0$. La fonction croît, à partir de zéro; elle ne s'annule pas.

2° Supposons $P < 0$. On aura par suite

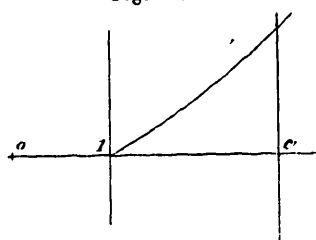
$$\omega''(\beta) < 0.$$

Examinons le signe de $\omega(c)$. On a

$$\omega(c) = \left(\frac{\alpha - c}{c - 1}\right)^{2n} (c^{2n} - 1) + \alpha^{2n} - c^{2n} > 0.$$

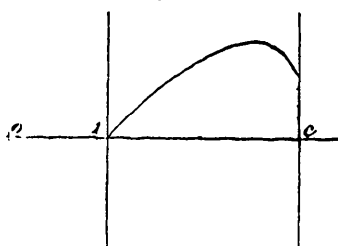
Donc, ici encore, $\omega(\beta)$ ne s'annule pas, entre 1 et c .

Fig. 12.



La figure 12 correspond à $P > 0$ et la figure 13 à $P < 0$.

Fig. 13.



Le cas où p est *pair* n'entraîne donc aucune difficulté dans notre problème fonctionnel.

La même méthode peut servir à retrouver la conclusion de l'étude du premier cas : *pas de conditions*.

Cette méthode consiste à étudier, non plus l'équation *transcendante*

$$\sum_1^3 e^x - \sum_1^3 e^x = 0,$$

mais une équation *algébrique*, x étant *fixe* et l'un de nos paramètres *variant seul*, entre les limites permises par la nature de la question.

CONCLUSION.

En résumé, la conclusion est la suivante :

Quand la caractéristique est située *entre* les projections des courbes données, l'équation

$$\sum_1^s e^x - \sum_1^s g^x = 0,$$

qui a toujours la racine $x = 1$, peut avoir d'autres racines. Il est facile de trouver une valeur de x après laquelle il ne pourra plus exister aucune racine.

D'autre part, un beau théorème de Laguerre (1) nous donne une limite supérieure du nombre des racines. En voici l'énoncé :

Soit l'équation

$$A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + A_n e^{\alpha_n x} = 0,$$

les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ allant en décroissant; le nombre de ses racines positives est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$\begin{aligned} &A_1, \\ &A_1 + A_2, \\ &A_1 + A_2 + A_3, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Nous savons donc, par des tâtonnements, en nombre limité, trouver les racines de l'équation transcendante, c'est-à-dire les *conditions de possibilité* de notre problème, avec le degré d'indétermination de la solution. La question posée est donc résolue lorsque les courbes données sont planes.

Il nous reste beaucoup de questions à traiter. Il faut examiner le cas où la caractéristique coïncide avec la projection de l'une des courbes données (ce cas est simple).

(1) LAGUERRE, *Œuvres*, t. I, p. 28. Ceci se déduit de l'extension de la *règle de Descartes*.

Il faut passer au cas où les courbes données sont *gauches*.

On peut aussi étudier le problème appelé *mixte* par M. Hadamard, où l'on a les données de Cauchy dans l'angle xOy et d'autres données dans l'angle adjacent. Ce sera l'objet d'un *second Mémoire*. Nous allons cependant, dès maintenant, indiquer les conditions de possibilité, pour le cas des données gauches.

Soient les projections de ces données

$$\begin{aligned} y = \alpha(x) &= \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots, \\ y = \beta(x) &= \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots \end{aligned}$$

Nous avons alors le système fonctionnel

$$\begin{aligned} A_x &= L_x + H_x + M[x(1-a)], \\ B_x &= L_x + H_{\alpha(x)} + M[\alpha(x) - ax], \\ C_x &= L_x + H_{\beta(x)} + M[\beta(x) - ax]. \end{aligned}$$

Il paraît impossible de faire ici l'*élimination*; prenons la question directement.

D'abord posons

$$M[x(1-a)] = N(x).$$

Soient alors

$$\begin{aligned} L_x &= l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + \dots, \\ H_x &= h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + \dots, \\ N_x &= n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \dots \end{aligned}$$

Faisant l'identification, on trouve que l_p , h_p , n_p sont connus en fonction des coefficients dont l'indice est plus petit que p , à condition qu'un certain *déterminant* ne s'annule pas.

Or ce déterminant est identique à

$$\sum_1^3 e^p - \sum_1^3 g^p,$$

où les constantes α et β du problème précédent seraient remplacées par

$$\alpha_1 \quad \text{et} \quad \beta_1,$$

coefficients de x dans $\alpha(x)$ et $\beta(x)$.

Ainsi les discussions précédentes nous donnent ici encore les valeurs de p pour lesquelles il y aura une *condition de possibilité*.

Et l'on forme facilement lesdites conditions, qui ont une expression forcément plus compliquée que dans le cas précédent, où nous avons

$$0 \equiv \alpha_2 = \alpha_3 = \dots,$$

$$0 \equiv \beta_2 = \beta_3 = \dots$$

Il restera à prouver la convergence des fonctions L, H, N.

Il était intéressant de noter, dès maintenant, que les *conditions* dépendent seulement de α_1 et β_1 , c'est-à-dire des *tangentes à l'origine des projections des courbes données*, et qu'on forme facilement ces conditions, après l'étude du problème où les données sont *planes*, étude achevée ici.