JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES RÉMOUNDOS

Sur la croissance des fonctions multiformes

Journal de mathématiques pures et appliquées 6^e série, tome 3 (1907), p. 267-298.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1907_6_3__267_0>

Sur la croissance des fonctions multiformes;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

Préface.

1. Ce travail est la suite d'un autre travail (1) publié dans le même Recueil : *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches* (*Journal de Mathématiques,* fasc. I, 1906), dans lequel j'ai fait une étude systématique de la croissance des fonctions algébroïdes (ayant un nombre fini de branches); j'y ai démontré qu'elle jouit de la plupart des propriétés fondamentales des algébroïdes uniformes (dites *fonctions entières* ou *méromorphes*). Je me propose d'exposer ici quelques nouveaux résultats concernant la croissance des algébroïdes multiformes et se rattachant à la recherche de la forme la plus générale, sous laquelle le théorème de M. Picard et ses généralisations s'étendent aux algébroïdes multiformes avec *un cas d'exception unique;* ce qui est intéressant, dans cette extension, c'est que la densité des zéros et des infinis n'est pas suffisante pour les algébroïdes *multiformes :* il nous faut aussi tenir compte d'autres éléments qui interviennent et jouent un rôle essentiel.

Mon but principal est de montrer la différence profonde qui existe

(1) Dont la connaissance est nécessaire pour l'intelligence du présent Mémoire; il sera mentionné, au cours de ce travail, par l'expression : Mémoire précédent.

entre la croissance des fonctions algébroïdes et celle des autres transcendantes multiformes; je présente des transcendantes non algébroïdes, qui jouissent de propriétés de croissance très singulières par rapport à celles auxquelles nous sommes habitués jusqu'ici. Pour y arriver, il m'a fallu étendre aux fonctions multiformes le théorème bien connu de Weierstrass sur l'existence d'une fonction entière admettant des zéros donnés; ici les ordres de multiplicité peuvent être aussi fractionnaires. Ce travail est le développement d'une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 3 septembre 1906.

L'extension du théorème de Weierstrass.

2. Je commencerai par établir l'extension précitée du théorème de Weierstrass : Il est bien connu que, étant donnée une série de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, on peut former une fonction entière (plus précisément, une algébroïde uniforme entière) admettant ces zéros; voyons maintenant s'il est possible de former une algébroïde multiforme admettant comme zéros les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$, avec des degrés de multiplicité respectivement égaux à $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$, qui peuvent être des nombres entiers ou fractionnaires. On dit que α_i est un zéro de la fonction $f(z)$ de degré de multiplicité égal à k_i, lorsque l'on a

$$f(z) = (z - \alpha_i)^{k_i} f_i(z), \qquad f_i(\alpha_i) \neq 0 \qquad \text{et fini.}$$

A cet effet, remarquons que, si l'on veut former une fonction multiforme à n branches, tous les dénominateurs des nombres K_i, supposés irréductibles, devront être inférieurs à n, et, par conséquent, le nombre $1.2.3\ldots n = n!$ sera certainement un multiple commun de tous les dénominateurs. Les produits $k_1 n!, k_2 n!, \ldots, k_n n!$ étant des nombres entiers, posons $k_i n! = \lambda_i$ et formons la fonction entière $G(z)$ admettant comme zéros les mêmes nombres α_i avec des degrés de multiplicité égaux aux nombres entiers λ_i; il est alors clair que la fonction multiforme $f(z) = G(z)^{\frac{1}{n!}}$ admet les zéros α_i avec des degrés de multiplicité égaux à $\frac{\lambda_i}{n!} = k_i$ et notre problème se trouve résolu.

Il est bien entendu que l'on pourrait employer le plus petit commun multiple des dénominateurs des nombres k_i au lieu de $n!$.

L'algébroïde multiforme ainsi obtenue correspond au produit canonique de Weierstrass relatif aux algébroïdes uniformes; il en résulte que toute algébroïde $F(z)$ peut se mettre sous la forme

$$F(z) = f(z)\, e^{\varphi(z)}. \tag{1}$$

Si nous appelons *algébroïde entière* toute algébroïde n'ayant pas d'infini à distance finie, nous avons aussi le corollaire suivant :

Toute algébroïde non entière peut se mettre sous la forme du quotient de deux algébroïdes entières.

La propriété exprimée par l'égalité (1) est fondamentale pour les considérations qui vont suivre.

Sur quelques transcendantes non algébroïdes.

Classe I.

3. Dans mon travail cité plus haut, j'ai démontré que les transcendantes algébroïdes jouissent, en particulier, de la propriété suivante : *Une fonction algébroïde n'a jamais son ordre de grandeur inférieur à celui de sa dérivée.*

Nous allons démontrer que c'est là une propriété essentielle, sinon caractéristique, des fonctions algébroïdes, en présentant des transcendantes non algébroïdes croissant beaucoup moins vite que leurs dérivées. Dans des travaux antérieurs (*voir* mon Mémoire précité), j'ai donné et justifié la définition de l'ordre de grandeur des transcendantes algébroïdes; celui des algébroïdes non entières est défini, ou bien directement, ou bien à l'aide du corollaire cité dans le numéro précédent par la forme du quotient de deux algébroïdes entières.

Si, par exemple, $F(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$, l'ordre de $F(z)$ est égal au plus grand des ordres de grandeur de $F_1(z)$ et $F_2(z)$.

Cela posé, considérons une algébroïde $F(z)$ quelconque et une

valeur exceptionnelle α, au sens ordinaire du mot, relatif à la densité des zéros et des infinis de $F(z) - \alpha$; j'entends par là que l'on a

$$F(z) - \alpha = f(z)\, e^{\varphi(z)}, \tag{2}$$

$f(z)$ étant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $F(z)$ et $\Phi(z)$ une fonction finie à distance finie; dans cette décomposition, le facteur $f(z)$ est, en général, un quotient de deux produits canoniques de facteurs primaires. Dans mon Mémoire précédent, j'ai démontré que le cas où l'exposant $\varphi(z)$ est aussi algébroïde est d'un caractère exceptionnel, puisqu'il est impossible que cette circonstance se présente pour deux valeurs de α; si $F(z)$ est une algébroïde uniforme, ce nouveau cas d'exception unique (double exception) coïncide avec le premier, parce que l'exposant $\varphi(z)$ est aussi uniforme pour tout nombre α, exceptionnel ou non.

Je veux actuellement établir que le résultat précité n'est qu'une circonstance particulière d'un autre résultat plus précis, et ce qui caractérise le cas d'exception unique tient à un fait général concernant la croissance de la dérivée $\varphi'(z)$, ou bien celle de la partie réelle et de la partie imaginaire de $\varphi(z)$.

4. Supposons que $F(z)$ croisse comme $e^{\mu(r)}$; j'entends par là que l'on a les relations

$$|F(z)| < e^{\mu(r)^{1+\alpha}}, \qquad \max.|F(z)| > e^{\mu(r)^{1-\alpha}}, \qquad \text{pour } |z| = r,$$

α étant un nombre positif quelconque, la première à partir d'une valeur de r et la seconde pour une infinité de valeurs de r croissantes indéfiniment. La fonction $\varphi(z)$ croissant comme $\mu(r)$ (1), je veux démontrer que cette fonction $\varphi(z)$ jouit, sauf pour une valeur de α, au plus, de deux propriétés suivantes : 1° elle n'est pas algébroïde; 2° sa dérivée croît comme $e^{\mu(r)}$, c'est-à-dire beaucoup plus vite que la fonction.

La première propriété est une conséquence de la seconde. La démon-

(1) *Voir* plus bas la preuve de cette assertion (n° 5); elle suppose une restriction que nous citons aussi dans le numéro suivant.

stration de ce théorème se fait par un procédé devenu classique depuis les travaux de M. Borel sur le théorème de M. Picard. Soient α_1 et α_2 deux valeurs de α; l'élimination de $F(z)$ entre les identités

$$F(z)-\alpha_1=f_1(z)\,e^{\varphi_1(z)}, \qquad F(z)-\alpha_2=f_2(z)\,e^{\varphi_2(z)}$$

nous conduit à l'identité

$$\alpha_2-\alpha_1=f_1(z)\,e^{\varphi_1(z)}-f_2(z)\,e^{\varphi_2(z)}.$$

Cette identité n'appartient pas tout à fait à la classe de celles que nous avons étudiées dans notre Mémoire précédent (*Journal de Mathématiques*, fasc. I, 1906), puisque les exposants $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ ne sont pas, en général, algébroïdes; mais, les dérivées de ces exposants étant algébroïdes, l'on pourrait établir l'impossibilité de cette identité par la même méthode que celle du Mémoire précédent, si les dérivées $\varphi_1'(z)$ et $\varphi_2'(z)$ croissaient moins vite que $e^{\mu(r)}$, c'est-à-dire s'il y a un nombre positif ϑ tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de r,

$$|\varphi_1'(z)|<e^{\mu(r)^{1-\vartheta}}, \qquad |\varphi_2'(z)|<e^{\mu(r)^{1-\vartheta}}, \qquad |z|=r.$$

En effet, la dérivation nous conduit à l'identité suivante

$$[f_1'(z)+f_1(z)\,\varphi_1'(z)]\,e^{\varphi_1(z)}-[f_2'(z)+f_2(z)\,\varphi_2'(z)]\,e^{\varphi_2(z)}=0,$$

dans laquelle les coefficients des exponentielles sont aussi algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$; dès lors, l'impossibilité se manifeste par des raisonnements bien connus [*Voir* les travaux de M. Borel, *Mémoire sur les zéros des fonctions entières* (*Acta Mathematica*, t. XX); aussi la thèse de M. Kraft : *Ueber ganze transcendante Functionen von unendlicher Ordnung*, et la mienne], grâce aux propriétés des fonctions algébroïdes, établies dans notre Mémoire précédent, qui assurent l'existence d'une suite indéfinie d'intervalles, dans lesquels le module maximum de l'exponentielle est supérieur à $e^{\mu(r)^{1-\varepsilon}}$, tandis que le module des coefficients est supérieur à $e^{-\mu(r)^{1-\varepsilon_1}}$, avec $\varepsilon_1>\varepsilon$.

Comme il existe des algébroïdes admettant plusieurs valeurs excep-

tionnelles ordinaires, le résultat auquel nous sommes arrivé (¹) nous fait connaître des fonctions non algébroïdes présentant la différence de croissance avec leurs dérivées ci-dessus signalée. D'une façon précise, nous avons établi le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *La dérivée $\varphi'(z)$ de l'exposant $\varphi(z)$ ne saurait croître moins vite que $e^{\mu(r)}$ pour plus d'une valeur de α.*

Il est clair que ce théorème s'étend de lui-même aux différences $F(z) - W(z)$, $W(z)$ désignant une algébroïde quelconque d'ordre de grandeur inférieur à celui de $F(z)$; il n'y a rien à changer dans nos procédés.

3. Nous avons plus haut émis l'assertion que l'exposant $\varphi(z)$ croît comme $\mu(r)$; j'entends par là que l'on a

$$\mu(r)^{1+\vartheta} > \max.|\varphi(z)| > \mu(r)^{1-\vartheta}, \tag{3}$$

avec quelques intervalles d'exclusion négligeables (ϑ étant arbitrairement petit). Or, cela n'est pas du tout évident, puisque la seule conséquence immédiate des inégalités

$$|e^{\varphi(z)}| < e^{\mu(r)^{1+\vartheta}}, \qquad \max.|e^{\varphi(z)}| > e^{\mu(r)^{1-\vartheta}}$$

consiste dans les inégalités

$$[\mu(r)]^{1+\vartheta} > \omega(r) > [\mu(r)]^{1-\vartheta}, \tag{4}$$

$\omega(r)$ désignant le maximum des valeurs positives de la partie réelle de $\varphi(z)$, satisfaites dans les mêmes conditions que les premières ; il est donc nécessaire de prouver que les inégalités (3) peuvent se déduire des inégalités (4) avec quelques intervalles d'exclusion négligeables. M. Borel y est arrivé pour les algébroïdes uniformes entières [Voir *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta Mathematica*, t. XX) et *Leçons sur les fonctions entières*, p. 63-69, Gauthier-Villars] ; nous

(¹) Combiné avec le fait qu'un choix convenable de l'algébroïde $F(z)$ nous permet d'affirmer que le module de l'exposant $\varphi(z)$ croît comme $\mu(r)$.

allons étendre ce résultat aux fonctions $\varphi(z)$, que nous considérons dans ce travail, en faisant une certaine hypothèse sur l'algébroïde primitive $F(z)$, dont nous sommes partis.

Supposons que l'algébroïde $u = \frac{F(z)-\alpha}{f(z)}$ soit définie par l'équation

$$(5) \qquad u^n + e^{H_1(z)}u^{n-1} + e^{H_2(z)}u^{n-2} + \ldots + e^{H_{n-1}(z)}u + e^{H_n(z)} = 0,$$

les exposants $H_1(z)$, $H_2(z)$, ..., $H_n(z)$ désignant des fonctions entières (algébroïdes *uniformes* entières); cette algébroïde

$$F_\alpha(z) = \frac{F(z)-\alpha}{f(z)}$$

est visiblement du même ordre de grandeur $e^{\mu(r)}$ que l'algébroïde $F(z)$.

Posons

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \varpi_1(z) + i\theta_1(z), \\ H_2(z) &= \varpi_2(z) + i\theta_2(z), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ H_n(z) &= \varpi_n(z) + i\theta_n(z), \end{aligned}$$

les ϖ_i désignant les parties réelles et les $i\theta_i$ les parties imaginaires des fonctions entières $H_i(z)$; posons aussi

$$u = F_\alpha(z) = R(r, \Im)\, e^{i\omega(r,\theta)},$$

$R(r, \theta)$ désignant le module de u, $\omega(r, \theta)$, son argument, et r, $\Im$ les coordonnées polaires du point z et remarquons que l'équation (5) prend ainsi la forme

$$(5') \quad \begin{cases} R^n e^{in\omega} + R^{n-1} e^{\varpi_1} e^{i[(n-1)\omega+\theta_1]} \\ \qquad + R^{n-2} e^{\varpi_2} e^{i[(n-2)\omega+\theta_2]} + \ldots + R e^{\varpi_{n-1}} e^{i(\omega+\theta_{n-1})} + e^{\varpi_n} e^{i\theta_n} = 0. \end{cases}$$

Or, on a

$$|\theta_i| < |H_i| < [\mu(r)]^{1+\beta},$$

d'après le résultat plus haut cité de M. Borel, établi pour les algé-

broïdes uniformes entières; on a, en effet,

$$|H_i| < (\max.|\varpi_i|)^{1+\beta} < \mu(r)^{1+\beta} \quad (^1).$$

On s'en rend aisément compte en remarquant que le maximum de e^{ϖ_i} n'est pas d'ordre de grandeur supérieur à $e^{\mu(r)}$, conformément à la définition de l'ordre de grandeur d'une algébroïde multiforme, donnée dans mon Mémoire précédent, et les résultats établis dans le même Mémoire. Nous y avons démontré que, si $e^{\mu(r)}$ est le plus grand des ordres de grandeur des coefficients de l'équation, qui définit une algébroïde multiforme $u = M(z)$, nous avons les inégalités

$$|M(z)| < e^{\mu(r)^{1+\beta}}, \qquad \max.|M(z)| > e^{\mu(r)^{1-\beta}}, \qquad |M(z)| > e^{-\mu(r)^{1+\beta}},$$

β étant arbitrairement petit, la première et la troisième pour toutes les branches et la deuxième pour une, au moins, des branches; il y a, bien entendu, des intervalles d'exclusion, pour lesquels je renvoie le lecteur au Mémoire précédent.

Supposons maintenant qu'il existe un nombre positif p tel que l'inégalité

$$\max.(\omega) > \mu(r)^{1+p} \tag{6}$$

soit satisfaite pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment. Les inégalités

$$|\theta_i| < [\mu(r)]^{1+\beta} \qquad \text{et} \qquad (n-i)|\theta_i| < \mu(r)^{1+\beta_1} \qquad (\beta_1 > \beta),$$

étant satisfaites quelque petits que soient les nombres positifs β et β_1 avec quelques intervalles d'exclusion d'étendue négligeable (*voir* les travaux plus haut cités de M. Borel), nous aurons l'inégalité

$$|(n-i)\omega_i + \theta_i| > [\mu(r)]^{1+p} - [\mu(r)]^{1+\beta_1},$$

satisfaite pour des points d'une infinité de cercles de rayon r croissant indéfiniment; il suffit, pour cela, que l'inégalité (6) soit satisfaite sur

---

(1) b et β étant des nombres positifs arbitrairement petits.

des intervalles d'une étendue supérieure à celle des intervalles d'exclusion, que comportent les identités $|\theta_i| < [\mu(r)]^{1+\beta}$. Nous avons

$$[\mu(r)]^{1+p} - [\mu(r)]^{1+\beta_1} > [\mu(r)]^{1+p_1},$$

p_1 étant un nombre quelconque inférieur à p, parce que β_1 est arbitrairement petit; il en résulte que, pour les points où ω a sa valeur maximum, les arguments de tous les termes de l'équation (5'), *sauf le dernier,* sont supérieurs à $[\mu(r)]^{1+p_1}$, p_1 étant un nombre quelconque inférieur à p.

Pour aller maintenant plus loin, il faut avoir recours à une propriété de l'argument d'une somme de nombres : Étant donnés les arguments $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ des nombres ayant comme affixes les points $M_1(\rho_1, \gamma_1)$, $M_2(\rho_2, \gamma_2)$, $\ldots$, $M_n(\rho_n, \gamma_n)$, l'argument de la somme de ces nombres sera de la forme

$$\gamma + 2k\pi i,$$

k étant un entier quelconque et γ un argument (angle) supérieur au plus petit des arguments $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; il est, en effet, clair que l'affixe de la somme sera un point M tel que le vecteur OM se trouve entre les vecteurs OM_1, OM_2, $\ldots$, OM_n. Si nous appelons $a(r)$ l'argument de la somme des n premiers termes de l'équation (5') et R_1 son module, nous aurons

$$R_1 e^{ai} = -e^{\omega_n} e^{i\theta_n}$$

et

$$a(r) = a_0(r) + 2\pi i D(r), \tag{7}$$

$a_0(r)$ étant une fonction continue de r supérieure toujours à l'argument $\omega + \theta_{n-1}$, qui est le plus petit parmi ceux des n premiers termes de l'équation (5'); on aura donc

$$a_0(r) > [\mu(r)]^{1+p_1}.$$

D'autre part, $D(r)$ ne saurait prendre que des valeurs qui soient des nombres entiers; nous en concluons que $D(r)$ sera une constante, puisque c'est la différence de deux fonctions $a(r)$ et $a_0(r)$ continues

de r. On en déduit immédiatement

$$|a(r)| > [\mu(r)]^{1+p_2},$$

p_2 étant un nombre quelconque inférieur à p_1.

Dès lors, l'égalité

$$R_1 e^{\alpha t} = e^{\omega_n} e^{i(\theta_n + \pi)}$$

entraîne la suivante

$$|\theta_n| > [\mu(r)]^{1+p_3} \qquad (p_3 < P_2 \text{ mais quelconque}),$$

ce qui est en contradiction avec le résultat plus haut cité de M. Borel exprimé par l'inégalité

$$|\theta_n| < [\mu(r)]^{1+\beta},$$

β étant arbitrairement petit.

Il est donc impossible qu'il y ait un nombre p tel que l'inégalité (6) soit satisfaite pour des intervalles d'étendue plus grande que celle qui a été donnée par M. Borel pour les intervalles d'exclusion que comporte son théorème, dont nous avons obtenu l'extension à la classe considérée d'algébroïdes multiformes. Nous avons le théorème suivant :

Si $M(z) = R e^{\omega i}$ *est une algébroïde multiforme définie par une équation de la forme* (5), *l'inégalité*

$$|\omega| < \mu(r)^{1+\beta}$$

sera satisfaite pour tout nombre positif β *avec quelques intervalles d'exclusion négligeables.* $M(z)$ *est supposée d'ordre de grandeur* $e^{\mu(r)}$.

Ce théorème entraîne comme corollaire le fait que la fonction

$$\Lambda(z) = \log M(z) = \log R + i\omega$$

satisfait aussi à l'inégalité

$$|\Lambda(z)| < [\mu(r)]^{1+\beta}.$$

Ainsi le théorème démontré par M. Borel pour le logarithme des fonctions de la forme $e^{H(z)}$, $H(z)$ étant une algébroïde uniforme entière, a été étendu ici au logarithme des algébroïdes multiformes $M(z)$ définies par une équation de la forme (5) qui n'admettent aussi aucun zéro et aucun infini et qui peuvent se mettre sous la forme

$$M(z) = e^{\varphi(z)},$$

$\varphi(z)$ étant une fonction finie à distance finie.

Le fait que ce théorème ne saurait être étendu à toutes les algébroïdes apparaît immédiatement sur les algébroïdes les plus élémentaires, qui n'appartiennent pas à la classe particulière plus haut considérée; considérons, en effet, la fonction $\log z = \log r + i\Im$ (1); le module de la partie imaginaire $i\Im$ ne dépend pas de r et prend des valeurs indéfiniment grandes pendant que r reste constant.

Les propriétés des fonctions de classe I.

6. Si nous faisons la substitution $u = \frac{F - \alpha}{f}$ sur l'équation (5), f désignant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $F(z)$, l'équation transformée ne sera plus de la forme (5); ses coefficients seront de la forme d'une somme de termes tels que $f_i(z)\, e^{H_i(z)}$, $H_i(z)$ étant une fonction (algébroïde uniforme) entière et $f_i(z)$ une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $H_i(z)$. Si l'algébroïde primitive $F(z)$, envisagée dans les paragraphes précédents, est de la forme de la transformée de (5), l'algébroïde $e^{\varphi(z)}$ est de la classe définie par les équations de forme (5), et, par conséquent, le module de $\varphi(z)$ croît comme $\mu(r)$, satisfaisant aux inégalités

$$(7') \qquad |\varphi(z)| < [\mu(r)]^{1+\beta}, \qquad \max.|\varphi(z)| > [\mu(r)]^{1-\beta}.$$

Si l'algébroïde $F(z)$ est définie par l'équation

$$(8) \quad \Psi(z, u) = u^n + B_1(z)u^{n-1} + \ldots + B_{n-1}(z)\,u + B_n(z) = 0,$$

(1) Log z est le logarithme de l'algébroïde $u = z = re^{\theta i}$.

dont les coefficients sont déterminés par les équations

$$\Psi(z, \alpha_1) = e^{\Pi_1(z)}, \qquad \Psi(z, \alpha_2) = e^{\Pi_2(z)},$$
$$\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots,$$
$$\Psi(z, \alpha_{n-1}) = e^{\Pi_{n-1}(z)}, \qquad \Psi(z, \alpha_n) = e^{\Pi_n(z)},$$

elle admet n valeurs exceptionnelles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et les coefficients $B_i(z)$ sont de la forme

$$B_i(z) = \lambda_{i,1} e^{\Pi_1(z)} + \lambda_{i,2} e^{\Pi_2(z)} + \dots + \lambda_{i,n} e^{\Pi_n(z)} \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

les $\lambda_{i,j}$ désignant des constantes; il est clair que la fonction $F(z) - \alpha$ [1], qui n'admet aucun zéro et aucun infini, satisfait à une équation analogue à (8).

Or, il est aisé de prouver que cette classe d'algébroïdes entières et dépourvues de zéros jouit de la même propriété que la classe définie par des équations de la forme (5). Cela tient à ce que l'argument de la somme

$$\lambda_1 e^{\Pi_1(z)} + \lambda_2 e^{\Pi_2(z)} + \dots + \lambda_n e^{\Pi_m(z)}, \tag{9}$$

les λ_i désignant des constantes, est donné encore par la formule

$$a(r) = a_0(r) + 2k\pi i,$$

$a_0(r)$ étant une quantité (variant d'une façon continue par rapport à r) comprise entre le plus grand et le plus petit argument des termes $\lambda_i e^{\Pi_i(z)}$. Si donc l'algébroïde considérée est de l'ordre de grandeur $e^{\mu(r)}$, les arguments de tous les termes de la somme (9) étant inférieurs à $[\mu(r)]^{1+\beta}$, il en sera de même de l'argument de la somme (9) et, par conséquent, de tous les coefficients de l'équation qui définit l'algébroïde en question $M(z)$.

Dès lors, les raisonnements, exposés dans le numéro précédent, montrent bien que l'argument ω de cette algébroïde $M(z)$ satisfait à l'inégalité

$$|\omega| < [\mu(r)]^{1+\beta_1} \qquad (\beta_1 \text{ arbitrairement petit})$$

---

[1] α est supposé égal à un des nombres exceptionnels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

et le théorème du numéro précédent se trouve généralisé et établi pour toutes les algébroïdes définies par une équation dont les coefficients sont de la forme (9), quel que soit l'entier m. Pour abréger le langage, nous appellerons *exponentielle* cette classe de fonctions algébroïdes.

Notons que, dans la somme (9), les exposants $H_i(z)$ peuvent bien être des *constantes*.

7. Si donc l'algébroïde primitive $F(z)$ est de la classe exponentielle, il en est de même de $F(z) - \alpha$, α étant un nombre quelconque; si α est une valeur exceptionnelle telle que

$$F(z) - \alpha = e^{\varphi_\alpha(z)}, \tag{10}$$

$\varphi_\alpha(z)$ croîtra comme $\mu(r)$ avec le sens plusieurs fois répété; or, nous avons vu, d'après le théorème I du paragraphe 4, que la dérivée $\varphi'_\alpha(z)$ ne saurait croître moins vite que $e^{\mu(r)}$ pour plus d'une valeur de α; *il y a donc là une source de fonctions croissant comme* $\mu(r)$, *dont la dérivée croît comme* $e^{\mu(r)}$, *c'est-à-dire beaucoup plus vite que la fonction;* leur existence est assurée par le fait qu'il y a des algébroïdes de la classe exponentielle admettant plusieurs valeurs exceptionnelles du caractère indiqué par l'équation (10) et consistant en l'absence totale de zéros et d'infinis; cela, qui est d'ailleurs visible, a été mis en évidence dans le numéro précédent.

Si l'algébroïde primitive $F(z)$ n'est pas de la classe exponentielle, l'ordre de grandeur de l'exposant $\varphi_\alpha(z)$ est inconnu; dans ce cas, les conséquences du théorème I donnent naissance à des fonctions $\varphi_\alpha(z)$ présentant une autre propriété aussi singulière que celle qui correspond au cas où $F(z)$ est de la classe exponentielle. En effet, l'exposant $\varphi_\alpha(z)$ ou bien sera d'ordre de grandeur $\mu(z)$ et alors nous aurons la même différence entre son ordre de grandeur et celui de sa dérivée que dans le cas précédent, ou bien il présentera la propriété suivante :

Si nous posons

$$\varphi_\alpha(z) = \varpi_\alpha(z) + i\,\omega_\alpha(z),$$

$\varpi_\alpha(z)$ *étant la partie réelle de* $\varphi_\alpha(z)$, *la fonction* $\omega_\alpha(z)$ *croîtra plus*

vite que la partie réelle $\varpi_\alpha(z)$; *j'entends par là que l'on aura*

$$|\omega_\alpha(z)| > [\mu(r)]^{1+p} \ (^1) \qquad (p \text{ étant un nombre positif}).$$

Nous avons donc le théorème général suivant :

THÉORÈME II. — *Si* $F(z)$ *est une algébroïde quelconque et* α *une valeur exceptionnelle telle que*

$$F(z) - \alpha = e^{\varphi_\alpha(z)},$$

$\varphi_\alpha(z)$ *étant toujours finie à distance finie, cette dernière fonction présente* (*sauf pour une valeur au plus de* α) *une des propriétés suivantes :* α! *ou bien,* $\varphi_\alpha(z)$ *croissant comme* $\mu(r)$, *la dérivée* $\varphi'_\alpha(z)$ *croît comme* $e^{\mu(r)}$; β! *ou bien sa partie imaginaire croît plus vite que sa partie réelle dans le sens plus haut indiqué.*

Nous pouvons même, en précisant, exprimer ces propriétés sous la forme suivante : ou bien $\varphi'_\alpha(z)$ croît plus vite que $\varphi_\alpha(z)$, ou bien la partie imaginaire $\omega_\alpha(z)$ de $\varphi_\alpha(z)$ croît plus vite que $e^{[\mu(r)]^{1-\varepsilon}}$, ε étant un nombre positif arbitrairement petit. Si, en effet, la seconde propriété existe, l'ordre de grandeur de $\varphi_\alpha(z)$ ne sera pas inférieur à $e^{\mu(r)}$, ainsi que celui de la dérivée $\varphi'_\alpha(z)$ (²) et, alors, nous n'avons plus les conditions de l'impossibilité de l'identité à laquelle nous conduit l'élimination (*voir* le n° 4) de $F(z)$ entre les équations

$$F(z) - \alpha = e^{\varphi_\alpha(z)} \qquad \text{et} \qquad F(z) - \alpha_1 = e^{\varphi_{\alpha_1}(z)}.$$

Remarquons encore que, lorsque $F(x)$ est de la classe exponentielle, il n'y a que le premier cas du théorème II qui se présente; dans ce cas, nous faisons l'hypothèse restrictive que la différence $F(z) - \alpha$ n'ait aucun zéro et aucun infini. Nous sommes affranchis de cette restriction dans le cas où $F(z)$ n'est pas de la classe exponentielle; la conclusion subsiste évidemment pour toute valeur exceptionnelle α,

(¹) Satisfaite pour une infinité de valeurs de r de module croissant indéfiniment remplissant des intervalles d'étendue assez grande.

(²) Nous ne pourrions rien conclure pour la croissance de la dérivée $\varphi'_\alpha(z)$.

mais on a moins de précision, puisque le second cas du théorème II peut se présenter aussi bien que le premier.

L'énoncé du théorème II s'applique au cas général exprimé par l'égalité

$$F(z) - \alpha = f_\alpha(z) e^{\varphi_\alpha(z)}$$

ou bien

$$F(z) - a(z) = f(z) e^{\varphi(z)},$$

$a(z)$ et $f_\alpha(z)$ désignant des algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$ et $\varphi_\alpha(z)$ et $\varphi(z)$ des fonctions toujours finies à distance finie. La chose se manifeste d'elle-même.

8. On comprend bien l'importance de ces résultats en remarquant que ce sont là des propriétés de croissance auxquelles nous ne sommes pas habitués; l'ordre de grandeur d'une fonction algébroïde n'est jamais inférieur à celui de sa dérivée et la partie réelle (sa valeur maximum) est du même ordre de grandeur que le module pour une algébroïde uniforme entière, d'après les résultats plus haut cités de M. Borel. Nous pouvons prouver ici qu'il en est de même pour toute algébroïde multiforme (1); considérons l'algébroïde $u = M(z)$ définie par l'équation

$$u^n + A_1(z) u^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(z) u + A_n(z) = 0$$

et supposons qu'elle soit d'ordre de grandeur $e^{\mu(r)}$; $\varpi_i(r, \theta)$ désignant la partie réelle de la branche u_i et $W_i(r, \theta) i$ la partie imaginaire. Nous remarquons tout d'abord que les parties réelles des coefficients $A_i(z)$ sont des fonctions algébriques entières des $\varpi_i(r, \theta)$ et $W_i(r, \theta)$; si donc on avait pour toutes les branches les inégalités

$$|\varpi_i| < M(r)^{1-p}, \qquad |W_i| < M(r)^{1-p}, \qquad M(r) = e^{\mu(r)},$$

il en serait de même de la partie réelle de tous les coefficients, pourvu que l'on remplace p par un nombre $p_1 < p$ et quelconque. On aurait donc

$$\text{partie réelle de } A_i(z) < [M(r)]^{1-p_1} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

(1) Appartenant à une classe très étendue, d'ailleurs.

ce qui est impossible d'après les résultats de M. Borel sur les fonctions entières (algébroïdes uniformes), puisque les coefficients $A_i(z)$ ne sont pas tous d'ordre de grandeur inférieur à $M(r) = e^{\mu(r)}$. On ne compte pas ici, bien entendu, quelques intervalles d'exclusion négligeables. Nous en concluons qu'il y aura une des inégalités

$$(11) \qquad \begin{cases} \max.\varpi_i > [M(r)]^{1-\varepsilon} \\ \max.W_i > [M(r)]^{1-\varepsilon} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui sera satisfaite, sauf les intervalles d'exclusion négligeables.

Ce résultat n'est pas visiblement complet, parce qu'il y a l'ambiguïté suivante : c'est la partie réelle ou bien la partie imaginaire d'une branche au moins qui satisfera à une inégalité de la forme (11)? Pour le moment, nous ne possédons pas le résultat complet que nous avons en vue. Il en est autrement, si nous faisons une légère restriction, en supposant que l'ordre de grandeur du coefficient $A_1(z)$ ne soit pas inférieur à $e^{\mu(r)}$; dans ce cas, notre but sera atteint. Si, en effet, on avait pour toutes les branches

$$|\varpi_i| < [M(r)]^{1-p} \qquad [M(r) = e^{\mu(r)}],$$

sauf des intervalles d'exclusion négligeables, on aurait aussi

$$\max.P(r, \theta) < [M(r)]^{1-p_1} \qquad (p_1 < p),$$

puisque l'on a

$$P(r, \theta) = \varpi_1(r, \theta) + \varpi_2(r, \theta) + \ldots + \varpi_n(r, \theta).$$

Or, cette dernière inégalité est absurde, parce que, conformément au résultat plus haut cité de M. Borel, nous avons l'inégalité

$$\max.P(r, \theta) > [M(r)]^{1-\varepsilon},$$

quelque petit que soit ε, à partir d'une valeur de r, sauf des intervalles d'exclusion négligeables. Nous sommes donc conduits à la conclusion que l'inégalité

$$\max.\varpi_i > [M(r)]^{1-\varepsilon}$$

---

(1) $P(r\theta)$ désignant la partie réelle du coefficient $A_1(z)$.

sera satisfaite pour une, au moins, des branches, ε étant arbitrairement petit. Nous avons donc obtenu le résultat voulu. Si nous faisons la substitution $u = i\chi$, nous démontrons que la partie imaginaire d'une branche au moins jouit aussi de la même propriété. Il n'est pas douteux qu'une nouvelle tâche pourra lever la petite restriction que nous venons de faire.

L'extension d'un théorème de M. Hadamard.

9. Dans le cours des considérations précédentes, nous avons fait de nombreuses applications du théorème bien connu de M. Hadamard sur la relation qui existe entre l'ordre de grandeur d'une algébroïde entière (dont une limite supérieure est donnée) et la densité des zéros, en supposant qu'il soit étendu aux algébroïdes multiformes. Je me propose d'exposer dans ce Chapitre la preuve de cette extension; pour faire la démonstration voulue, il faut d'abord remarquer que, si la fonction multiforme $u = \mathrm{M}(z)$ est définie par l'équation

$$(12) \quad \mathrm{A}_0(z)u^n + \mathrm{A}_1(z)u^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}(z)u + \mathrm{A}_n(z) = 0,$$

les zéros de $\mathrm{M}(z)$ coïncident avec ceux de $\mathrm{A}_n(z)$, qui est une fonction (uniforme) entière, et les infinis de $\mathrm{M}(z)$ coïncident avec les zéros de $\mathrm{A}_0(z)$; mais cela ne suffit pas pour faire une comparaison de l'ordre de grandeur du produit canonique des zéros et infinis de $\mathrm{M}(z)$ avec celui du produit canonique des zéros de $\mathrm{A}_n(z)$ et $\mathrm{A}_0(z)$; il faudra encore tenir compte de la différence des degrés de multiplicité. Pour nous en rendre compte, nous devons nous reporter au mode de formation du produit canonique des zéros et des infinis de $\mathrm{M}(z)$; considérons, à cet effet, un zéro $z = b_i$ de $\mathrm{M}(z)$ et supposons que son degré de multiplicité par rapport à $\mathrm{M}(z)$ soit égal à

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \ldots + \frac{p_k}{q_k} \qquad (q_1 < n;\ q_2 < n,\ \ldots,\ q_k < n),$$

$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}$ étant les degrés de multiplicité correspondant aux divers systèmes circulaires, dans lesquels se décompose l'ensemble des

branches de $u = \mathrm{M}(z)$ qui s'annulent en $z = b_i$; la fonction uniforme $\frac{\mathrm{A}_n(z)}{\mathrm{A}_0(z)}$ étant égale (au signe près) au produit des diverses branches de $\mathrm{M}(z)$, l'ordre de multiplicité du point $z = b_i$ par rapport à cette fonction, désigné par λ, satisfait à la relation

$$\lambda = p_1 + p_2 + \ldots + p_k,$$

si l'on suppose que les nombres $q_1, q_2, \ldots, q_k$ désignent exactement les nombres de branches qui constituent les divers systèmes circulaires correspondants, ce qui est bien légitime. D'autre part, conformément à ce que nous avons dit dans le n° 2 de ce travail, le produit canonique des zéros de $\mathrm{M}(z)$ est égal à $[\mathrm{G}(z)]^{\frac{1}{n!}}$, $\mathrm{G}(z)$ désignant le produit canonique *entier* formé avec les mêmes zéros b_i ayant un degré de multiplicité égal (pour le zéro $z = b_i$) à

$$p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \ldots + p_k\mu_k,$$

les μ_i donnés par les égalités suivantes :

$$\mu_1 = \frac{n!}{q_1}, \qquad \mu_2 = \frac{n!}{q_2}, \qquad \ldots, \qquad \mu_k = \frac{n!}{q_k}.$$

Les entiers μ_i étant supérieurs à l'unité, on a l'inégalité

$$p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \ldots + p_k\mu_k > p_1 + p_2 + \ldots + p_k,$$

laquelle montre que la densité des zéros de $\mathrm{G}(z)$ n'est pas inférieure à celle des zéros de $\frac{\mathrm{A}_n(z)}{\mathrm{A}_0(z)}$. De même, les entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ étant inférieurs à $n!$, nous aurons l'inégalité

$$(12) \qquad p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + \ldots + p_k\mu_k < n!(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)$$

qui montre que la densité des zéros de la fonction entière $\mathrm{G}(z)$ n'est pas supérieure à celle des zéros de la fonction $\left[\frac{\mathrm{A}_n(z)}{\mathrm{A}_0(z)}\right]^{n!}$ dont l'ordre de grandeur n'est pas supérieur à $e^{\mu(r)}$ [qui est l'ordre de grandeur de l'algébroïde $\mathrm{M}(z)$ donnée par l'équation (12)], puisqu'il en est ainsi

de la fonction $\frac{A_n(z)}{A_0(z)}$. Or, il est bien connu que M. Borel a montré que, si l'on prend les produits canoniques de genre fini ou *infini* d'une façon convenable, on a l'avantage que la densité des zéros atteint précisément la limite supérieure donnée par M. Hadamard comme conséquence de l'ordre de grandeur.

C'est là une propriété très importante des produits canoniques de facteurs primaires qui ne contiennent pas de facteurs exponentiels superflus; ce sont ces produits canoniques que j'envisage ici. Il en résulte que la densité des zéros de $G(z)$ n'est pas supérieure à celle que fournit, pour un ordre de grandeur égal à $e^{\mu(r)}$, le théorème classique de M. Hadamard précisé, de la façon précitée, par M. Borel [*voir* E. Borel, *Mémoire sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX, p. 379, 380 et 381)] (1). Les raisonnements ci-dessus exposés nous conduisent à la conclusion que l'algébroïde uniforme $G(z)$ ne saurait croître plus vite que $e^{\mu(r)}$; il en sera donc de même de la fonction $[G(z)]^{\frac{1}{n!}}$, c'est-à-dire du produit canonique des zéros de l'algébroïde $M(z)$. Le produit canonique des infinis de la même algébroïde jouit de la même propriété et nous sommes ainsi arrivés à établir le théorème suivant :

Théorème III. — *Le produit canonique des zéros et des infinis d'une algébroïde multiforme (ou uniforme) n'a jamais son ordre de grandeur supérieur à celui de la fonction.*

Nous avons ainsi acquis l'extension aux algébroïdes multiformes du théorème précité de MM. Hadamard et Borel; il en résulte que la décomposition de ces fonctions indiquée dans ce travail jouit aussi bien que celle des algébroïdes uniformes de la propriété avantageuse qui consiste en ce que les deux facteurs de la décomposition ne croissent pas plus vite que la fonction elle-même.

(1) Ce n'est pas surtout la densité des zéros qui nous occupe ici, parce qu'elle est étudiée et déterminée en détail dans ma thèse (*Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes*, Paris, Gauthier-Villars) et d'autres travaux. Il s'agit ici de l'ordre de grandeur du produit canonique multiforme, que nous présentons dans ce travail.

Dans ces recherches, pour fixer les idées, je me suis attaché à la définition de l'ordre de grandeur usuelle de MM. Hadamard et Borel, en mettant de côté les précisions de cette notion données par MM. Boutroux et Lindelöf pour le cas d'ordre fini et par M. Maillet pour le cas d'ordre infini. La généralisation de ces résultats serait, je pense, très aisée [*voir* mon travail *Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, fasc. III, 1905)].

Je termine ce Chapitre par la remarque que les développements et les progrès de la théorie des algébroïdes multiformes, accomplis d'une façon conforme à la théorie des fonctions dites *entières* ou *méromorphes*, demandent une dénomination plus précise de ces dernières fonctions que je me propose d'appeler *algébroïdes uniformes entières ou non*. L'ancienne dénomination est, évidemment, insuffisante.

Classe II.

10. Nous allons maintenant faire connaître la génération d'autres fonctions jouissant d'autres propriétés de croissance d'un caractère encore plus éloigné de celui qui caractérise les fonctions élémentaires.

Posons

$$\varphi(z) = e^{\zeta(z)},$$

c'est-à-dire

$$F(z) - \alpha = f(z)e^{e^{\zeta(z)}} \tag{13}$$

et remarquons que la fonction $\zeta(z)$ peut avoir des infinis, qui seraient des zéros de $\varphi(z)$, mais cela ne nous empêche pas de considérer l'ordre de grandeur de $\zeta(z)$ pour r croissant indéfiniment; il n'y a qu'à faire une exclusion du voisinage immédiat de ces points analogue à celle qui a été employée par MM. Borel et Boutroux, dans des circonstances analogues (¹), pour nous borner à la croissance relative à la singularité essentielle de laquelle on s'approche. La dérivation de l'équation (13)

(¹) E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières et méromorphes* (Gauthier-Villars). — Boutroux, *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (Thèse de doctorat, 1903).

nous donne

$$(14)\qquad \begin{cases} F'(z) = [f'(z) + f(z)e^{\zeta(z)}\zeta'(z)]e^{\varphi(z)} \\ \text{ou bien} \\ \zeta'(z) = \dfrac{F'(z)e^{-\varphi(z)} - f'(z)}{f(z)e^{\zeta(z)}}, \end{cases}$$

ce qui nous montre que la dérivée $\zeta'(z)$ n'est pas, en général, algébroïde, puisque, parmi les fonctions figurant dans le second membre de (14), il y en a une, $e^{\zeta(z)}$, qui ne saurait être algébroïde que dans le cas d'exception unique relatif à la classe précédente (classe I); l'ordre de grandeur de $\zeta'(z)$ a cependant un sens bien déterminé, parce qu'elle est une fonction rationnelle de fonctions d'ordre de grandeur bien déterminé; les fonctions $F'(z)$, $e^{-\varphi(z)}$, $f(z)$ et $f'(z)$ sont, en effet, algébroïdes et l'autre $\varphi(z) = e^{\zeta(z)}$ (1) a un ordre de grandeur déterminé égal à $\mu(r)$ si l'algébroïde primitive est de la classe exponentielle, hypothèse que nous ferons pour ce qui va suivre.

Des raisonnements identiques à ceux qui nous ont servi à la classe I montrent que la fonction

$$f'(z) + f(z)\varphi(z)\zeta'(z)$$

ne saurait croître moins vite que $e^{\mu(r)}$ pour plus d'une valeur de α; il en résulte qu'il en sera de même de $\zeta'(z)$, parce que toutes les autres fonctions $f(z)$, $f'(z)$ et $\varphi(z)$ croissent, par hypothèse, moins vite que $e^{\mu(r)}$. Remarquons seulement que $f(z)$ doit être supposée égale à une constante si l'on veut que l'ordre de grandeur de $\varphi(z)$ soit égal à $\mu(r)$; posons donc $f(z) = \gamma$ (γ étant une constante) et distinguons les deux cas suivants :

α! La fonction $\zeta(z)$ peut avoir son ordre de grandeur égal à $\log\mu(r)$

---

(1) Le module minimum de $\varphi(z)$ correspond au module minimum de $F(z) - \gamma$, qui est une fonction algébroïde; c'est pour cela que $\varphi(z)$ obéit aussi au théorème classique du module minimum de M. Hadamard. Nous voyons, d'ailleurs, que la partie réelle de $\varphi(z)$ est plus grande que $[\mu(r)]^{1-\varepsilon}$, lorsque l'on a

$$\left|\frac{F(z) - \alpha}{\gamma}\right| > e^{[\mu(r)]^{1-\varepsilon}}.$$

avec le sens indiqué par les inégalités suivantes :

$$(15)\qquad \begin{cases} (1-\beta)\log\mu(r) < \max.|\zeta(z)| < (1+\beta)\log\mu(r) \\ (\beta \text{ étant arbitrairement petit}) \end{cases}$$

que l'on déduit des inégalités (7') (*voir* le n° **6**) en prenant les logarithmes des deux membres; le maximum des valeurs positives de la partie réelle de $\zeta(r)$ satisfera, évidemment, aux inégalités (15), mais nous ne pouvons rien savoir, *a priori,* pour le maximum du module (valeur absolue) de la partie réelle, ni pour la croissance du module de la partie imaginaire de $\zeta(z)$. Si donc nous supposons que $\zeta(r)$ croisse comme $\log\mu(r)$ et que nous excluions le cas d'exception unique où $\zeta'(z)$ est d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$, nous obtenons *des fonctions* $\zeta(z)$ *d'ordre de grandeur* $m(r)=\log\mu(r)$ *dont la dérivée croît comme* $e^{e^{m(r)}}$. Il y a là une différence d'ordre de grandeur entre une fonction et sa dérivée qui est plus grande que dans la classe I.

β! La fonction $\zeta(z)$ peut avoir un ordre de grandeur supérieur à $\log\mu(r)$; si cet ordre de grandeur est inférieur à $e^{\mu(r)}$ (plus précisément à $e^{[\mu(r)]^{1-p}}$, p étant un certain nombre), il y aura encore une différence d'ordre de grandeur, entre les fonctions $\zeta(z)$ et $\zeta'(z)$, qui peut être plus faible que dans le cas précédent, mais toujours remarquable. Si l'ordre de grandeur du module de $\zeta(z)$ est égal ou supérieur à $e^{\mu(r)}$, *nous aurons alors une différence d'ordre de grandeur qui peut,* a priori, *être arbitrairement grande entre le maximum des valeurs positives de la partie réelle de* $\zeta(z)$ *et celui du module de la partie imaginaire, ou bien entre le maximum des valeurs positives de la partie réelle de* $\zeta(z)$ *et la même quantité pour la partie réelle de* $-\zeta(z)$. *D'une façon plus précise, dans cette hypothèse, si je pose* $\zeta(z)=\zeta_1+i\zeta_2$, ζ_1 *désignant la partie réelle de* $\zeta(z)$, *ou bien le maximum du* $|\zeta_2|$ *ou bien le maximum (algébrique) de* $-\zeta_1$ *aura un ordre de grandeur qui n'est pas inférieur à* $e^{m(r)}$,

$$m(r)=\log\mu(r)$$

désignant l'ordre de grandeur du maximum algébrique de ζ_1.

Nous pouvons même remarquer que, *a priori*, le maximum de $|\zeta_2|$ et le maximum algébrique de $-\zeta_1$ peuvent avoir un ordre de grandeur indéfiniment élevé. Tous ces résultats supposent l'exclusion du cas d'exception unique que comporte le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *La dérivée* $\zeta'(z)$ *ne saurait croître moins vite que* $e^{\mu(r)}$, *dans le sens plusieurs fois indiqué, pour plus d'une valeur de* α.

De ce théorème résultent comme conséquences les résultats ci-dessus développés sur la croissance des diverses parties de $\zeta(z)$.

11. Nous terminerons ce Chapitre par les remarques suivantes : En disant que $\zeta'(z)$ croît comme $e^{e^{m(r)}}$ dans le cas α!, nous entendons que $\zeta'(z)$ satisfait aux inégalités suivantes :

$$e^{e^{(1-\beta)\,m(r)}} > \max.|\zeta'(z)| < e^{e^{(1+\beta)\,m(r)}},$$

β étant arbitrairement petit. En sacrifiant une certaine précision, on pourrait remplacer ces inégalités par les suivantes :

$$e^{e^{[m(r)]^{1-\beta}}} < \max|\zeta'(z)| < e^{e^{[m(r)]^{1+\beta}}},$$

pour avoir une analogie plus parfaite avec les propriétés des fonctions de la classe I.

Il y a lieu de poursuivre cette recherche de transcendantes non algébroïdes présentant des propriétés de plus en plus éloignées de celles auxquelles nous sommes habitués par les transcendantes élémentaires, mais l'avancement à des classes supérieures demanderait des développements compliqués que je laisse pour un autre travail.

Autres transcendantes de la classe II.

12. Les fonctions $\zeta(z)$, que nous avons envisagées plus haut, ont l'inconvénient de n'être pas finies à distance finie; or, nous pouvons les remplacer par d'autres dépourvues de ce défaut et ayant des pro-

priétés analogues de croissance. A cet effet, remarquons que les zéros de $\varphi(z)$, qui coïncident avec les infinis de $\zeta(z)$, ne peuvent être que des points algébriques de $\varphi(z)$, puisque cette fonction, étant le logarithme d'une algébroïde n'admettant aucun zéro et aucun infini, n'a pas des singularités transcendantes; nous pouvons donc, d'après le résultat du n° **2**, former une algébroïde $a(z)$ admettant comme zéros ces points avec les mêmes degrés de multiplicité que $\varphi(z)$ et mettre $\varphi(z)$ sous la forme

$$\varphi(z) = a(z)\, e^{\sigma(z)}.$$

Or, les zéros de $\varphi(z)$ satisfont à l'équation $F(z) - \alpha = 1$, puisque nous maintenons l'hypothèse que $F(z)$ soit de la classe exponentielle (¹), hypothèse qui entraîne les relations

$$f(z) = 1, \qquad F(z) - \alpha = e^{\varphi(z)}.$$

Si donc l'algébroïde primitive $F(z)$ est choisie de façon que la densité des zéros de l'équation

$$F(z) = \alpha + 1$$

soit convenablement exceptionnelle, nous pouvons toujours nous arranger de sorte que l'algébroïde $a(z)$ ne croisse pas plus vite que $\mu(r)$; il en sera alors de même de $e^{\sigma(z)}$, ce que nous poursuivons. Mais laissons ces généralités et rappelons-nous que l'algébroïde $F(z)$ doit appartenir à la classe exponentielle, si l'on veut que la fonction $\varphi(z)$ croisse comme $\mu(r)$ d'une façon certaine; cette propriété de $F(z)$, d'appartenir à la classe exponentielle, sera réalisée, si $F(z)$ admet n valeurs exceptionnelles α_i, telles que les fonctions

$$F(z) - \alpha, \quad F(z) - \alpha_1, \quad F(z) - \alpha_2, \quad \ldots, \quad F(z) - \alpha_{n-1}$$

n'admettent aucun zéro; la résolution, en effet, des équations correspondantes par rapport aux coefficients $B_i(z)$ (*voir* les formules du n° **6**)

(¹) Et nous voulons qu'il en soit de même de l'algébroïde $\dfrac{F(z) - \alpha}{f(z)}$.

montre qu'ils auraient la forme qui caractérise la classe exponentielle.

Ici notre but exige que la valeur exceptionnelle α_1 soit égale à $\alpha + 1$. Cela posé, la fonction $\varphi(z)$ n'admettra aucun zéro et l'on aura $a(z) = 1$; dès lors, $\sigma(z)$ sera toujours finie à distance finie et, si nous posons

$$\sigma(z) = \sigma_1(z) + i\sigma_2(z),$$

sa partie réelle $\sigma_1(z)$ croîtra comme $m(r) = \log\mu(r)$ avec le sens indiqué dans le Chapitre précédent. Ainsi, en spécifiant davantage l'algébroïde primitive $F(z)$ en ce qui concerne ses valeurs exceptionnelles, nous obtenons le résultat désiré : *la fonction* $\zeta(z)$ *du Chapitre précédent devient une fonction* $\sigma(z)$ *toujours finie à distance finie*. La fonction $\sigma(z)$ jouit absolument des mêmes propriétés de croissance que $\zeta(z)$, ayant, en outre, l'avantage d'être toujours finie à distance finie; les raisonnements seront identiques à ceux du n° **10**.

13. Tous ces résultats peuvent, dans une certaine mesure, être étendus à des fonctions $F(z) - e^{h(z)}$, $h(z)$ étant une fonction entière; si, en effet, $F(z)$ est de la classe exceptionnelle, il en est de même de $F(z) - e^{h(z)}$.

On peut même les étendre aux fonctions $F(z) - E(z)$, $E(z)$ désignant une algébroïde de la classe exponentielle d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$. La différence $F(z) - E(z)$ sera, en effet, elle-même de la classe exponentielle; supposons, en effet, que $u = F(z)$ satisfasse à l'équation

$$\Psi(z, u) = 0 \tag{16}$$

et que $E(z)$ satisfasse à l'équation

$$\Sigma(z, E) = 0, \tag{17}$$

et faisons dans la première la substitution $u = E + F_1$, ou bien $u = E + u_1$, qui nous conduira à l'équation

$$\Psi_1(z, E, u_1) = 0, \tag{18}$$

dont les coefficients seront de la forme qui caractérise la classe exponentielle.

L'équation (18) ne définissant pas u_1 comme fonction de z seulement, nous éliminons la variable E entre les équations (17) et (18) et nous sommes conduits à une équation

$$\Phi(z, u_1) = 0,$$

dont les coefficients sont, eux aussi, de la forme caractérisant la classe exponentielle. La différence $u_1 = u - \mathrm{E}(z)$ sera donc aussi de la classe exponentielle; on se rend aisément compte de tout cela en se reportant au mode de l'élimination. On arrive, d'ailleurs, au même résultat par l'application de la propriété des arguments, utilisée dans l'étude des propriétés des fonctions de la classe I directement sur la relation $u = \mathrm{E} + u_1$; il n'y a qu'à remarquer que l'argument de u_1 ne saurait avoir un ordre de grandeur supérieur à celui des arguments des fonctions $u = \mathrm{F}(z)$ et $\mathrm{E}(z)$ qui satisfont aux inégalités

$$\arg.\mathrm{F}(z) < [\mu(r)]^{1+\beta}, \qquad \arg.\mathrm{E}(z) < [\mu(r)]^{1+\beta},$$

β étant arbitrairement petit, parce que les fonctions $\mathrm{F}(z)$ et $\mathrm{E}(z)$ sont, toutes les deux, de la classe exponentielle et d'ordre non supérieur à $e^{\mu(r)}$; nous entendons par là qu'il n'y a pas de nombre p, tel que l'on ait

$$\max.|\mathrm{F}(z)| > e^{[\mu(r)]^{1+p}}, \qquad \max.|\mathrm{E}(z)| > e^{[\mu(r')]^{1+p}}.$$

Cela posé, s'il y a deux algébroïdes E_1 et $\mathrm{E}_2(z)$ de la classe exponentielle et d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$ telles que, en posant

$$\mathrm{F}(z) - \mathrm{E}_1(z) = e^{\varphi_1(z)}, \qquad \mathrm{F}(z) - \mathrm{E}_2(z) = e^{\varphi_2(z)},$$
$$\varphi_1(z) = e^{\sigma_1(z)}, \qquad \varphi_2(z) = e^{\sigma_2(z)},$$

les $\varphi_1'(z)$ et $\varphi_2'(z)$ ou bien les $\sigma_1'(z)$ et $\sigma_2'(z)$ croissent moins vite que $e^{\mu(r)}$, une élimination nous conduirait à l'identité

$$\mathrm{E}_2(z) - \mathrm{E}_1(z) = e^{\varphi_1(z)} - e^{\varphi_2(z)},$$

qui remplit toutes les conditions nécessaires (¹) pour assurer son impossibilité.

Il n'existe donc pas plus d'une fonction algébroïde $E(z)$ *de la nature ci-dessus indiquée, telle que les fonctions* $\varphi'(z)$ *et* $\sigma'(z)$ [*ou bien* $\zeta'(z)$] *correspondantes croissent moins vite que* $e^{\mu(r)}$. *Nous avons donc encore un cas d'exception unique.*

De ce théorème découlent, par des raisonnements identiques à ceux des numéros précédents, les propriétés de croissance dont jouissent la partie réelle et la partie imaginaire des fonctions $\sigma(z)$ et $\zeta(z)$, lorsque l'on ne se trouve pas dans le cas d'exception unique.

Uniformité des résultats précédents. — Un théorème général et simple.

14. Tous les théorèmes de ce travail et du Mémoire précédent mettent en lumière l'origine profonde du *cas d'exception unique de M. Picard,* à laquelle nous devons nous reporter quand nous voulons en faire l'extension aux algébroïdes multiformes. Ce cas d'exception *unique,* qui est, au fond, une propriété de croissance des fonctions $\varphi(z)$, $\zeta(z)$ et $\sigma(z)$, étudiées dans ce travail, se réduit, quand on se borne aux algébroïdes uniformes, à un abaissement de la densité des zéros et des infinis. Dans des travaux antérieurs [*voir,* par exemple, notre Thèse (²) plus haut citée], en étudiant les algébroïdes multiformes, nous ne nous sommes attaché qu'à cette densité des zéros et des infinis, et cela n'a pu nous fournir un cas d'exception unique; nous en avons eu plusieurs, en général, et leur nombre maximum dépend du nombre des branches de l'algébroïde.

(¹) Elle remplit toutes les conditions nécessaires, puisque sa dérivation la ramène à une autre de la même forme avec des coefficients algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$.

(²) *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1905 et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*).

Remarquons encore que les théorèmes, établis dans ce travail et le précédent, qui comprennent comme cas particulier le théorème classique de M. Picard et ses généralisations concernant les algébroïdes uniformes, peuvent être énoncés sous une forme sommaire et simple comme une propriété de la dérivée logarithmique de la fonction $F(z)-\alpha$ ou bien $F(z)-E(z)$, $E(z)$ désignant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à celui de $e^{\mu(r)}$: il n'est pas, en effet, difficile de voir que le cas d'exception unique que comportent les théorèmes en question se caractérise toujours par la croissance de la dérivée logarithmique de $F(z)-\alpha$ ou $F(z)-E(z)$, dont l'ordre de grandeur est inférieur à celui de $F(z)$ lorsque l'on se trouve dans le cas d'exception unique; on s'en rend aisément compte en remarquant que, dans le cas d'exception, nous avons

$$F(z)-\alpha = f(z)e^{\varphi(z)} \qquad \text{ou bien} \qquad F(z)-E(z) = F_1(z)e^{\Lambda(z)},$$

les fonctions $f(z)$ et $F_1(z)$ étant des algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$ et $\varphi(z)$ et $\Lambda(z)$ toujours finies à distance finie. Nous avons encore, grâce à notre hypothèse,

$$F'(z) = [f'(z)+f(z)\varphi'(z)]e^{\varphi(z)},$$
$$F'(z)-E'(z) = [F_1'(z)+F_1(z)\Lambda'(z)]e^{\Lambda(z)},$$

les coefficients des exponentielles étant aussi des algébroïdes d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$. Il en résulte que les dérivées logarithmiques

$$\frac{F'(z)}{F(z)-\alpha}, \qquad \frac{F'(z)-E'(z)}{F(z)-E(z)}$$

sont aussi d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$, d'après la définition et les propriétés de l'ordre de grandeur des algébroïdes non entières.

Inversement, nous pouvons démontrer que, si la dérivée logarithmique de $F(z)-\alpha$ jouit de cette propriété, nous nous trouvons bien dans le cas d'exception unique.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$\frac{F'(z)}{F(z)-\alpha} = \omega(z),$$

$\omega(z)$ étant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$; l'intégration nous donnera

$$\log[F(z)-\alpha] = c + \int \omega(z)\,dz$$

ou

$$F(z)-\alpha = K e^{\int \omega(z)dz} \qquad [K = e^c],$$

K étant une constante. Les zéros et les infinis du second membre coïncident avec les infinis de l'exposant $\int \omega(z)\,dz$ et, par conséquent, avec les infinis de l'algébroïde $\omega(z)$, dont la densité est exceptionnelle pour un ordre de grandeur égal à $e^{\mu(r)}$ (c'est-à-dire, elle est inférieure à celle que le théorème de M. Hadamard, précisé par M. Borel, fait correspondre à un ordre de grandeur égal à $e^{\mu(r)}$], puisque cette fonction est supposée d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$.

La densité, donc, des zéros et des infinis de $F(z)-\alpha$ est bien exceptionnelle et nous aurons

$$F(z)-\alpha = f(z)\,e^{\varphi(z)},$$

$f(z)$ étant une algébroïde d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$ [$f(z)$ n'est qu'un produit canonique (multiforme, *voir* le n° **2**) de facteurs primaires analogue à celui qui est formé par les infinis de $\omega(z)$, qui sont nécessairement simples] et $\varphi(z)$ toujours finie à distance finie. Il en résulte

$$\frac{F'(z)}{F(z)-\alpha} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \varphi'(z) \qquad \text{et} \qquad \varphi'(z) = \frac{F'(z)}{F(z)-\alpha} - \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Les deux dérivées logarithmiques du second membre ayant, par hypothèse, leur ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$, il en sera de même de $\varphi'(z)$; nous obtenons donc ainsi toutes les conditions qui caractérisent le cas d'exception unique et entraînent les propriétés de croissance des fonctions $\varphi(z)$, $\zeta(z)$ et $\sigma(z)$ signalées dans ce travail. Nous avons donc le théorème général suivant :

THÉORÈME V. — *La dérivée logarithmique de* $F(z)-\alpha$ *ne saurait croître moins vite que* $F(z)$ *pour plus d'une valeur de* α.

Il en est bien de même de la fonction $F(z)-E(z)$.

Je crois utile de répéter ici que j'emploie l'ordre de grandeur de M. Borel, d'après lequel une fonction croissante $m(r)$ est d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$, lorsque l'on a l'inégalité

$$m(r) < e^{[\mu(r)]^{1-p}},$$

p étant un nombre positif quelconque.

Pour fixer les idées, je n'utilise pas dans ce travail les précisions d'ordre données récemment par quelques auteurs (Lindelöf, Boutroux, Maillet).

On obtient le sens de l'ordre de grandeur d'une algébroïde non entière à l'aide de l'exclusion du voisinage immédiat de ses infinis.

La démonstration de ce théorème peut se faire aussi directement de la façon suivante : supposons que, pour deux valeurs α_1 et α_2, l'on ait

$$F'(z) - \alpha_1 = F(z)\,q_1(z), \qquad F'(z) - \alpha_2 = F(z)\,q_2(z),$$

les algébroïdes $q_1(z)$ et $q_2(z)$ étant d'ordre de grandeur inférieur à celui de $F(z)$; l'élimination de $F'(z)$ entre ces deux relations nous fournirait l'identité suivante :

$$\alpha_2 - \alpha_1 = F(z)[q_1(z) - q_2(z)],$$

ce qui entraîne immédiatement

$$\alpha_1 = \alpha_2 \qquad \text{et} \qquad q_1(z) = q_2(z),$$

grâce aux propriétés générales des algébroïdes établies dans notre Mémoire précédent.

Il en est de même de la fonction $F(z) - E(z)$, $E(z)$ étant une algébroïde croissant moins vite que $e^{\mu(r)}$ dans le sens plusieurs fois indiqué.

15. Remarquons maintenant que ce dernier mode de démonstration du théorème ci-dessus énoncé suggère plusieurs généralisations intéressantes pour la théorie des équations différentielles. Considérons

une équation différentielle

$$\Sigma(z, y, y', \alpha) = 0, \tag{19}$$

la fonction $\Sigma(z, y, y', \alpha)$ étant algébrique en y, y' et α et transcendante algébroïde par rapport à z d'ordre de grandeur égal à $e^{\mu(r)}$ (j'entends par là que le plus grand des ordres de grandeur des divers coefficients est égal à $e^{\mu(r)}$). Envisageons deux valeurs α_1 et α_2 de la variable α, qui est considérée ici comme un paramètre, et cherchons l'intégrale commune des équations différentielles

$$\Sigma(y, y', z, \alpha) = 0, \qquad \Sigma(y, y', z, \alpha_2) = 0.$$

L'élimination de y' entre ces équations nous conduit à une équation

$$\mathrm{L}(y, z, \alpha_1, \alpha_2) = 0,$$

algébrique en y, α_1 et α_2, qui exprime que l'intégrale commune est une fonction algébroïde d'ordre de grandeur égal, en général, à $e^{\mu(r)}$; elle peut être aussi d'ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)}$ pour des valeurs de α_1 et α_2 satisfaisant à des équations algébriques en α_1 et α_2.

Appelons E_i l'équation différentielle de la famille définie par l'équation (19) correspondante à la valeur α_i de α et remarquons que les considérations précédentes nous conduisent à la conclusion suivante :

Étant donnée une équation différentielle E_1 *de la famille considérée* (19), *il n'y a qu'un nombre fini d'autres équations de la même famille admettant une intégrale commune avec l'équation* E_1 *d'ordre de grandeur inférieur à* $e^{\mu(r)}$.

Nous citons ce résultat comme un exemple de problèmes basés sur les mêmes principes que celui qui se rattache au théorème de M. Picard, dont toutes les généralisations et extensions aux algébroïdes multiformes (*avec un cas d'exception unique*) ont été résumées par le théorème du numéro précédent. Il est vrai que ce théorème se ramène à l'équation

$$\mathrm{F}'(z) - \alpha = \mathrm{F}(z)\, q_\alpha(z) \qquad \text{ou} \qquad y' - \alpha = y\, q_\alpha(z)$$

écrite plus haut, qui n'est pas, en général, algébrique en α, puisque le facteur $q_\alpha(z)$ dépend aussi de α d'une façon dont la complication est tout à fait imprévue; mais il arrive ici que les conditions exigées par le cas d'exception se décomposent en deux équations, dont l'une est *algébrique* en α_1 et α_2 ne contenant pas la variable z. Le théorème général que nous venons d'énoncer dans ce numéro comporte, en général, plusieurs cas d'exception, mais toujours en nombre *fini*.

Il y aurait une foule de problèmes analogues à celui que nous avons traité dans ce numéro, dont l'étude nous entraînerait très loin; c'est pour cela que je n'y insiste pas.