JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

EDM. MAILLET

Sur les fonctions entières et quasi entières

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série, tome 8 (1902), p. 329-386.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8__329_0>

Sur les fonctions entières et quasi entières ;

PAR M. EDM. MAILLET.

I. — Introduction.

Dans ce Mémoire nous étudions d'abord un certain nombre de propriétés nouvelles des racines des fonctions entières de genre fini; nous étendons ensuite un assez grand nombre de propriétés des fonctions entières et méromorphes aux fonctions que nous appelons *quasi entières* et *quasi méromorphes*.

I. *Fonctions entières.* — Nous reprenons d'abord, pour plus de clarté, la démonstration de quelques propriétés des fonctions entières. Nous établissons ensuite les résultats suivants :

1° Étant donné un produit canonique de facteurs primaires d'ordre ρ, et un nombre positif arbitraire ε; si l'on décrit autour de chaque zéro un cercle de rayon η fini ($\eta \leqq 1$ arbitraire), en tout point extérieur à ces cercles on a, pour $|z| = r$ assez grand, les inégalités

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

La même inégalité a lieu pour une fonction entière $f(z)$ quelconque, ρ désignant alors son ordre apparent;

2° Soient $f(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots$ une fonction entière d'ordre fini ρ', et

$$f_l(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l.$$

Dès que l dépasse une certaine limite finie, à toute racine de $f_l(z)$ de module inférieur à $\frac{1}{l^{\rho'+\varepsilon}}$ correspond une racine de $f(z)$, les modules des deux racines différant d'aussi peu qu'on veut pourvu que l soit assez grand;

3° Pour une fonction entière $F(z)$ d'ordre apparent ρ' fini, les sommes des inverses des puissances entières $m > \rho'$ des racines se calculent comme pour un polynome par les formules de récurrence de Newton.

On en conclut diverses applications aux conditions de réalité des racines de $F(z)$, aux conditions pour que ces racines soient toutes positives ou négatives, à la détermination du facteur exponentiel de $F(z)$, aux fonctions entières simples, à l'invariance de certaines fonctions des coefficients de $F(z)$ quand on multiplie $F(z)$ par un facteur exponentiel.

II. *Fonctions quasi entières et quasi méromorphes.* — Une fonction monodrome $f(z)$ n'ayant dans le plan des z d'autres points critiques que ∞, $a_0, \ldots, a_k$ (k fini) est développable en une série de la forme

$$f = \psi(z) + \psi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \ldots + \psi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

$\psi(z)$, $\psi_0(z)$, ..., $\psi_k(z)$ étant des fonctions entières. Mais on peut aussi la mettre sous la forme

$$f = \varphi(z)\,\varphi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)\ldots\varphi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

où $\varphi(z)$, $\varphi_0(z)$, ..., $\varphi_k(z)$ sont des fonctions entières; il y a réciprocité.

Nous montrons que, si $\psi(z)$, $\psi_0(z)$, ..., $\psi_k(z)$ sont d'ordres finis $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$, il en est de même respectivement de $\varphi(z)$, $\varphi_0(z)$, ..., $\varphi_k(z)$. La condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ soit alors à croissance régulière aux environs de $z = a_i$ est que $\psi_i(z)$ soit à croissance régulière (au sens de M. Borel). Quand $f(z)$ a ses ordres tous < 2, est réel et n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires,

la dérivée $f'(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires. Enfin, parmi les équations $f + \frac{\varphi_1}{\varphi} = 0$, où φ_1 et φ ont tous leurs ordres inférieurs à ceux de f, il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à ρ_i pour $z = a_i$, et, *a fortiori*, d'ordres réels tous inférieurs à $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$ respectivement. Il y a des extensions au cas où $f(z)$ est d'ordre infini.

Quand $k = 0$, $a_0 = 0$, on peut établir pour les fonctions quasi entières des propriétés correspondantes aux propriétés 1° et 2° ci-dessus.

Enfin, nous considérons les fonctions quasi méromorphes $F(z)$, quotients de deux fonctions quasi entières; si ρ et σ sont les ordres pour $z = \infty$ du numérateur et du dénominateur, τ le plus grand de ces deux nombres, nous disons que $F(z)$ est d'ordre τ pour $z = \infty$.

Ceci posé, parmi les équations

$$F = \varphi,$$

où φ est une fonction quasi méromorphe quelconque d'ordres tous inférieurs à $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$, il y en a au plus une pour laquelle tous les ordres réels sont inférieurs à ceux de F. Il y en a au plus deux pour lesquelles les exposants de convergence des suites des modules des racines sont inférieurs à $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$ à la fois.

Il est probablement possible d'étendre aux fonctions quasi entières les théorèmes relatifs : 1° à la réalité des racines des dérivées des fonctions entières quand l'ordre est quelconque; 2° aux racines des équations $F = \varphi$ (φ fonction entière quelconque d'ordre fini, F fonction entière donnée d'ordre infini), en suivant en partie la marche employée par M. Borel (1). Nous laissons provisoirement ces points de côté.

Pour pouvoir lire notre Mémoire, il suffit de connaître :

Cours d'Analyse de l'École Polytechnique;

Borel, *Leçons sur les fonctions entières;* Paris, 1900;

---

(1) Borel, *Leçons sur les fonctions entières,* Gauthier-Villars, 1900, p. 36 et suivantes, et *Acta mathematica,* t. XX, p. 357.

BOREL, *Annales de l'École Normale*, 1901, p. 215 et suivantes (quelques pages seulement).

Il sera bon néanmoins de lire PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. V, *passim*.

PREMIÈRE PARTIE.

II. — Fonctions entières.

Nous rappellerons d'abord, pour la clarté de ce qui suit, quelques-unes des définitions ou quelques-uns des théorèmes relatifs aux fonctions entières de genre fini.

Ordre. — Soit M_r la valeur maxima du module d'une fonction entière $F(z)$ de genre fini quand $|z| = r$: on sait que, quand $F(z)$ a une infinité de racines

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

il existe un nombre fini positif ρ, qui est l'*exposant de convergence* (1), et tel que

$$(1) \qquad \sum_0^\infty \frac{1}{r_n^{\rho-\varepsilon}} \qquad (r_n = |a_n|)$$

diverge, tandis que

$$(2) \qquad \sum_0^\infty \frac{1}{r_n^{\rho+\varepsilon}}$$

(ε positif aussi petit qu'on veut, mais fini) converge : ρ est aussi l'*ordre réel* (2) *de* $F(z)$.

(1) BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 18.

(2) BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 26.

On peut toujours écrire

$$F(z) = e^{Q(z)}\Pi(z), \tag{3}$$

$\Pi(z)$ étant un produit canonique de facteurs primaires et $Q(z)$ un polynome de degré q; le plus grand des deux nombres ρ et q est l'*ordre apparent* (1) ρ' de $F(z)$. Soit k le plus petit nombre entier tel que $\sum_0^\infty \frac{1}{r_n^{k+1}}$ converge; le plus grand des deux nombres entiers k et q est le *genre de* $F(z)$.

On a

$$|F(z)| < e^{r^{\rho'+\varepsilon_1}} \quad (2) \tag{4}$$

(ε_1 aussi petit qu'on veut et positif, mais fini), dès que r est suffisamment grand.

De même, pour une infinité de valeurs de $r = |z|$,

$$|F(z)| > e^{r^{\rho'-\varepsilon_2}} \tag{5}$$

(ε_2 aussi petit qu'on veut et positif, mais fini).

En effet, ceci est évident quand $\rho < \rho'$. Soit $\rho = \rho'$; admettons que, quand r dépasse une certaine limite,

$$|F(z)| < e^{r^\sigma}$$

avec $\sigma \leq \rho' - \zeta$ (ζ fini positif). On aura (3)

$$r_n > n^{\frac{1}{\sigma+\varepsilon_3}}, \tag{6}$$

$$r_n^{\sigma+\varepsilon_4} > n^{1+\eta}$$

---

(1) BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 74. Pour ce paragraphe, *voir* E. LINDELÖF, *Acta Societ. scient. fennicæ*, t. XXXI, n° 1, Helsingfors, 1902.

(2) BOREL, *loc. cit.*, p. 61.

(3) *Ibid.*, p. 74.

(η fini, ε_2, ε_4 finis positifs aussi petits qu'on veut pour n assez grand). La série

$$\sum_0^\infty \frac{1}{\dots} < \sum_0^\infty \frac{1}{n^{1+\varepsilon_4}}$$

converge; donc

$$\sigma + \varepsilon_4 > \rho - \varepsilon = \rho' - \varepsilon,$$

et $\sigma \leq \rho' - \zeta$ est impossible, dès que r dépasse une certaine limite.

VALEUR ASYMPTOTIQUE DES COEFFICIENTS. — *On peut écrire, si*

$$F(z) = \sum_0^\infty A_l z^l; \tag{7}$$

$$A_l = \left(\frac{1}{l}\right)^{l\left(\frac{1}{\rho'}-\varepsilon\right)} \tag{8}$$

pour une infinité de valeurs de l, les autres coefficients (sauf un nombre fini) ayant une valeur inférieure à celle indiquée par (8).

En effet, il suffit de modifier, en le précisant, le raisonnement qui conduit à l'inégalité de M. Poincaré (1) pour A_l.

Posons

$$J(z) = (\rho' + 2\varepsilon) \int_0^\infty e^{-r_1^{\rho'+\varepsilon}} F(r_1 z) r_1^h \, dr_1$$

(h positif arbitraire). A partir d'une certaine valeur de r_1,

$$|F(r_1 z)| < e^{|z| r_1^{\rho'+\varepsilon}},$$

et l'intégrale $J(z)$ a ses éléments inférieurs à ceux de

$$\int_0^\infty e^{-\beta r_1^{\rho'+2\varepsilon}} r_1^h \, dr_1,$$

(1) BOREL. *loc. cit.*, p. 53.

si

$$-|r_1|^{\rho'+2\varepsilon}.\beta = -r_1^{\rho'+2\varepsilon} + |z|_1^{\rho'+\varepsilon} r_1^{\rho'+\varepsilon},$$

ou

$$-\beta = -1 + \frac{|z|^{\rho'+\varepsilon}}{r_1^{\varepsilon}},$$

ε étant donné aussi petit qu'on veut, mais fini; β est aussi voisin de 1 qu'on veut, pourvu que r_1 soit assez grand. $J(z)$ est alors une fonction entière de z.

Soit

$$J(z) = B_0 + B_1 z + \ldots + B_l z^l + \ldots;$$

on a

$$B_l = A_l(\rho' + 2\varepsilon) \int_0^{\infty} e^{-r^{\rho'+2\varepsilon}} r^{l+h}\, dr.$$

Posons

$$r^{\rho'+2\varepsilon} = t,$$

$$\frac{dt}{t} = (\rho' + 2\varepsilon)\frac{dr}{r},$$

on a

$$B_l = A_l \frac{(\rho' + 2\varepsilon)}{\rho' + 2\varepsilon} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{l+h+1}{\rho'+2\varepsilon} - 1} dt = A_l \Gamma\left(\frac{l+h+1}{\rho'+2\varepsilon}\right),$$

valeur qui tend vers zéro avec $\frac{1}{l}$.

Si donc l'on prend

$$\frac{l+h+1}{\rho'+2\varepsilon} = \text{un entier},$$

$$\lim A_l . \left(\frac{l+h+1}{\rho'+2\varepsilon} - 1\right)_{l=\infty} ! = 0.$$

Choisissons pour h le plus petit nombre $< \rho' + 2\varepsilon$ te que

$$\frac{l+1+h}{\rho'+2\varepsilon} = \text{entier} = \lambda + 1;$$

on a

$$A_l \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi e} = \eta_l \qquad \left(\lim_{l=\infty} \eta_l = 0\right),$$

et, quel que soit l,

$$|A_l| \leq \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{\rho}{\rho'}(1+\varepsilon)}, \tag{9}$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{l}$.

Réciproquement, si

$$|A_l| \leq \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{l}{\sigma}}, \tag{10}$$

quel que soit l, dès que l dépasse une certaine limite, on a

$$\rho' \leq \sigma + \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ fini positif aussi petit qu'on veut}).$$

En effet, considérons, comme l'a fait à peu près M. Hadamard, les séries

$$\sum_0^\infty \frac{x^l}{l^l} \tag{11}$$

et

$$e^{x^{\sigma_1}} = \sum_0^\infty \frac{x^{m\sigma_1}}{m!}, \qquad \text{avec } \sigma_1 > \sigma. \tag{12}$$

Posons $\lambda = m\sigma_1$. Les nombres λ diffèrent entre eux de σ_1 : prenons parmi eux celui qui est immédiatement au moins égal à l,

$$m\sigma_1 = \lambda_1 \geq l,$$

avec

$$(m-1)\sigma_1 < l.$$

On a, pour $|x| > 1$,

$$\frac{|x|^{m\sigma_1}}{m!} = \frac{|x|^{\lambda_1}}{\left(\frac{m}{e}\right)^{m+\frac{1}{2}}\delta} > \frac{|x|^{l-k}}{(l-k)^{\frac{l-k}{\sigma}}} \qquad (\delta \text{ limité}), \tag{13}$$

si

$$(l-k)^{\frac{l-k}{\sigma}} > \left(\frac{m}{e}\right)^{m+\frac{1}{2}}\delta.$$

Or

$$m < \frac{l}{\sigma_1} + 1.$$

Il suffira

$$(l-k)^{\frac{l-k}{\sigma}} > \left(\frac{l+\sigma_1}{e\sigma_1}\right)^{\frac{l}{\sigma_1}+\frac{3}{2}}\delta,$$

ou

$$\left(\frac{l-k}{l+\sigma_1}\right)^{\frac{l-k}{\sigma}} > (l+\sigma_1)^{\frac{3}{2}+\frac{l}{\sigma_1}-\frac{l}{\sigma}+\frac{k}{\sigma}}\frac{\delta}{(e\sigma_1)^{\frac{l}{\sigma_1}+\frac{3}{2}}}.$$

Le premier membre est de la forme

$$\left(1-\frac{k+\sigma_1}{l+\sigma_1}\right)^{\frac{l-k}{\sigma}} = \left(1-\frac{k+\sigma_1}{l+\sigma_1}\right)^{(l+\sigma_1)\frac{l-k}{l+\sigma_1}\frac{1}{\sigma}}$$

et a pour limite $e^{-\frac{k+\sigma_1}{\sigma}}$, pour $l=\infty$; le second membre tend vers zéro avec $\frac{1}{l}$ dès que $\sigma_1 > \sigma$, et (13) a lieu.

Donnant à k au moins σ_1 valeurs consécutives,

$$0, 1, 2, \ldots, E(\sigma_1) = k' - 1,$$

on voit qu'à chacun des termes correspondants de (11) on peut faire correspondre un même terme de $e^{x\sigma_1}$ qui est plus grand. Donc

$$k' e^{x\sigma_1} > \left|\sum \frac{x^l}{\frac{l}{l^\sigma}}\right|.$$

L'ordre de cette dernière série est $\leq \sigma_1$; il en est de même *a fortiori* de celui de

$$F(z) = \sum_0^\infty A_l z^l.$$

Prenant $\sigma_1 = \sigma + \varepsilon$ (ε fini positif aussi petit qu'on veut), on a

$$\rho' \leq \sigma + \varepsilon. \tag{14}$$

En résumé, si $F(z)$ a pour ordre apparent ρ',

$$|A_l| \leq \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{l}{\rho'}(1+\varepsilon_1)}, \tag{15}$$

d'après (9); admettons que pour une infinité de valeurs de l on ait

$$|A_l| = \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{l}{\tau}(1+\varepsilon_1)}, \tag{16}$$

la valeur de τ correspondant aux autres coefficients étant plus petite : on a, d'après (14),

$$\rho' \leq \tau + \varepsilon_2.$$

D'après (15) et (16),

$$\frac{1+\varepsilon}{\rho'} \leq \frac{1+\varepsilon_1}{\tau},$$

Donc il faut dans (16)

$$\tau \leq \rho' + \varepsilon_3.$$

$$\tau = \rho' + \varepsilon_4$$

ε_4 fini, positif, aussi petit qu'on veut. C. Q. F. D.

III.

M. Hadamard a établi le théorème suivant (1) :

Étant donné un produit canonique $G(z)$ *de facteurs primaires d'ordre* ρ *et un nombre positif arbitraire* ε, *on peut trouver une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on a l'inégalité*

$$G(z) > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

On en conclut alors que si

$$f(z) = e^{\Pi(z)} G(z),$$

(1) Borel, *loc. cit.*, p. 76.

H étant un polynome de degré d, et si M_r est la valeur maxima de $f(z)$ pour $z = r$, on a, dès que r dépasse une certaine limite,

$$M_r < e^{r^{\rho'+\varepsilon'}}$$

(ε' aussi petit qu'on veut, mais fixe), ρ' étant le plus grand des deux nombres d et ρ, c'est-à-dire l'ordre apparent.

On peut modifier le théorème de M. Hadamard en lui donnant une précision et une importance plus grandes, et en faire des applications à la détermination des racines des fonctions entières et des fonctions à point singulier essentiel. Nous l'énoncerons ainsi qu'il suit :

THÉORÈME I (¹). — *Étant donné un produit canonique* $G(z)$ *de facteurs primaires d'ordre* ρ *et un nombre positif arbitraire* ε, *si l'on décrit autour de chaque zéro un cercle de rayon* η *fini* ($\eta \leq 1$ *arbitraire*), *en tout point extérieur à ces cercles on a, pour* $|z|$ *assez grand, l'inégalité*

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

La même inégalité a lieu pour une fonction entière $f(z)$ *quelconque,* ρ *désignant alors son ordre apparent.*

Il nous suffit de suivre presque pas à pas la démonstration qui figure dans la théorie des fonctions entières de M. Borel (²).

Prenons d'abord $\rho < 1$.

Soit $G(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ une fonction entière d'ordre < 1, r_n le module de a_n; nous supposons la série $\sum \frac{1}{r_n^{\sigma}}$ ($\sigma < 1$) convergente, et, à partir d'une certaine valeur de n,

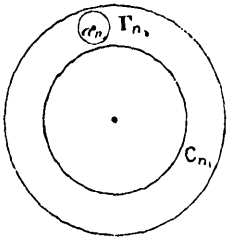
$$r_n > n^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{1}$$

(¹) Certaines de nos démonstrations ressemblent d'assez près à celles des *Leçons sur les fonctions entières* de M. Borel, et même les comprennent comme cas particuliers. Nous avons cru néanmoins souvent indispensable de sacrifier la concision à la clarté en reprenant avec détails les raisonnements de M. Borel, de façon à rendre plus attrayante la lecture de notre Mémoire.

(²) Page 76.

Notre méthode consiste à considérer non pas les points extérieurs aux couronnes C_n comprises entre deux cercles de rayon $r_{n_1}-1$ et $r_{n_1}+1$ et ayant l'origine pour centre, mais le cercle Γ_{n_1} de rayon $\eta \leq 1$

Fig. 1.



décrit du point a_{n_1} comme centre et qui est compris dans cette couronne.

Prenons un point extérieur aux cercles Γ_{n_1}. On a pour ce cercle

$$|z-a_{n_1}| \geq \eta. \tag{2}$$

Soit r le module de z, et m et n tels que

$$r_m \leq 2r \leq r_{m+1}, \tag{3}$$

$$n^{\frac{1}{\sigma}} \leq 2r < (n+1)^{\frac{1}{\sigma}}, \tag{4}$$

$$r_{n+1} > (n+1)^{\frac{1}{\sigma}} > 2r \geq r_m, \tag{5}$$

$$n \geq m, \tag{6}$$

$$G(z) = ABC, \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned} A &= \prod_{1}^{m} i\left(1-\frac{z}{a_i}\right), \\ B &= \prod_{m+1}^{n} i\left(1-\frac{z}{a_i}\right), \\ C &= \prod_{n+1}^{\infty} i\left(1-\frac{z}{a_i}\right), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

avec les notations de M. Borel. On a

$$A = \prod_{1}^{m} i \frac{a_i - z}{a_i};$$

d'où, en vertu de (2), (5) et (8),

$$\begin{cases} |A| > \frac{\eta^m}{(2r)^m}, \\ |B| > \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}, \\ |C| > \prod_{n+1}^{\infty} i\left(1 - \frac{r}{i^\sigma}\right). \end{cases}$$

Quand $a < \frac{1}{2}$, $1 - a > e^{-2a}$; donc

$$|C| > e^{-2r \sum_{n+1}^{\infty} i^{-\frac{1}{\sigma}}}.$$

Or, si $\sigma < 1$,

$$\sum_{n+1}^{\infty} i^{-\frac{1}{\sigma}} < \int_{n}^{\infty} x^{-\frac{1}{\sigma}} dx = \frac{\sigma}{1-\sigma} n^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} < \frac{\sigma}{1-\sigma} (2r)^{\sigma-1},$$

$$|C| > e^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}(2r)^\sigma},$$

$$G(z) = |ABC| > \frac{\eta^m}{(2r)^m} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} e^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}(2r)^\sigma} > e^{-n\log 2 - m\log r - \frac{\sigma}{1-\sigma}(2r)^\sigma + m\log\eta}.$$

D'après (4) et (6), $m \leq n \leq (2r)^\sigma$,

$$\begin{aligned} &m\log r + n\log 2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}(2r)^\sigma - m\log\eta \\ &< r^\sigma \left[2^\sigma \log\frac{r}{\eta} + 2^\sigma \log 2 + 2^\sigma \frac{\sigma}{1-\sigma} \right]. \end{aligned}$$

On peut prendre r assez grand, si petits que soient η et ε donnés à l'avance, pour que

$$2^\sigma \left(\log\frac{r}{\eta} + \log 2 + \frac{\sigma}{1-\sigma} \right) < r^\varepsilon,$$

d'où

$$|G(z)| > e^{-r^{\sigma+\varepsilon}}.$$

Tel est le résultat que nous voulions obtenir. Si la suite des a_n a ρ pour exposant de convergence, on peut prendre $\sigma = \rho + \varepsilon_1$ quelque petit que soit le nombre ε_1 donné à l'avance, et $|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon_1}}$.

Ceci s'étend aux fonctions de genre quelconque fini : soient $\rho \geq 1$, q un entier supérieur à ρ et ω une racine primitive de

$$\omega^q = 1, \qquad z^q = y, \qquad r^q = \mathrm{R} = |y|,$$
$$\Phi(y) = \mathrm{F}(z) = \mathrm{G}(z)\mathrm{G}(\omega z)\ldots\mathrm{G}(\omega^{q-1}z).$$

$\Phi(y)$ a pour ordre apparent

$$\frac{\rho}{q} \qquad (q > \rho) \qquad \text{et} \qquad |\Phi(y)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon_1}}$$

pour les points extérieurs aux cercles Γ_1 de rayon $\eta_1 < 1$ dans le plan des y. Si $\eta < 1$ est convenablement choisi, η_1 étant suffisamment petit, aux points du plan des z extérieurs à des cercles Γ de rayon η et ayant pour centres les zéros a_n, $a_n\omega$, ..., $a_n\omega^{q-1}$ de $\mathrm{F}(z)$ correspondent dans le plan des y des points extérieurs aux cercles Γ_1. Or

$$|\mathrm{G}(\omega z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon_1}}, \qquad \ldots, \qquad |\mathrm{G}(\omega^{q-1}z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon_1}}$$

pour les points extérieurs à ces cercles, en sorte que

$$|\mathrm{G}(z)| > e^{-qr^{\rho+\varepsilon_1}} = e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Pour une autre valeur $q' > \rho$ de q, la même inégalité a lieu pour les points du plan des z extérieurs aux cercles Γ_2 de rayon $\eta \leq 1$ et de centres a_n, $a_n\omega'$, ..., $a_n\omega'^{q'-1}$.

Si l'on prend pour n supérieur à une certaine limite

$$|a_n(\omega^\alpha - \omega'^\beta)| > 3\eta_1,$$

quels que soient α et β ($0 < \alpha < q$, $0 < \beta < q'$), ce qui est toujours possible si q et q' sont premiers entre eux, on voit finalement que le

théorème a lieu pour tous les points extérieurs aux cercles de rayon η et de centres a_n, les cercles Γ et Γ_2 n'ayant d'autres points communs que ceux des cercles de centre a_n.

Ceci s'étend immédiatement aux fonctions entières f quelconques d'ordre fini :

$$f(z) = G(z)e^{H(z)}$$

donne, si ρ' est l'ordre apparent,

$$|f(z)| > e^{-r^{\rho'+\varepsilon}}$$

pour tous les points extérieurs aux cercles de rayon η décrits des points a_n comme centre quand n est suffisamment grand. On peut prendre η et ε aussi petits qu'on veut, pourvu que n soit supérieur à une limite convenable.

Ceci va nous permettre d'obtenir le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Soit* $f(z) = A_0 + A_1 z + \dots$ *une fonction entière de genre fini et d'ordre apparent* ρ',

$$f_l(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_l z^l.$$

Dès que l *dépasse une certaine limite finie, à toute racine de* $f_l(z)$ *de module inférieur à* $l^{\frac{1}{\rho'+\varepsilon}}$ *correspond une racine de* $f(z)$, *les modules des deux racines différant d'aussi peu qu'on veut, pourvu que* l *soit assez grand.*

La démonstration se décompose en plusieurs parties :

1° Considérons d'abord les racines dont le module est suffisamment grand, $> L$, par exemple. Soit

$$f(z) = f_l(z) + \Psi_{l+1}(z).$$

Soit z_1 un zéro de $f_l(z)$. On aura

$$f(z_1) = \Psi_{l+1}(z_1).$$

Si $|z_1| < \varphi_l$,

$$|\Psi_{l+1}(z_1)| < \psi_l.$$

Si z_1 est intérieur aux cercles Γ et dépasse une certaine limite L indépendante de l, il y a un zéro ζ_1 de f qui diffère de z_1 d'aussi peu qu'on veut (plus exactement $|\zeta_1| - |z_1| \leq \eta$). Sinon il faudra

$$r^{-\overline{\gamma}^{l+1}} < |f(z_1)| < \psi_l.$$

Ceci posé, on sait que, quand $r = |z|$ dépasse une certaine limite finie L, on a, pour une infinité de valeurs de l,

$$\sqrt[l]{\Lambda_l} = \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{\rho'}+\varepsilon_1}$$

(ε_1 aussi petit qu'on veut, positif ou négatif), les autres valeurs de $\sqrt[l]{\Lambda_l}$ étant plus petites.

Prenons alors

$$|z_1| \leq l^{\varpi} = \varphi_l,$$

où ϖ est une constante. On aura

$$\begin{aligned}
|\Psi_{l+1}(z_1)| &\leq |\Lambda_{l+1}|\, l^{\varpi(l+1)} + |\Lambda_{l+2}|\, l^{\varpi(l+2)} + \dots \\
&\leq \frac{l^{\varpi(l+1)}}{(l+1)^{\left(\frac{1}{\rho'}+\varepsilon_1\right)(l+1)}} + \frac{l^{\varpi(l+2)}}{(l+2)^{\left(\frac{1}{\rho'}+\varepsilon_1\right)(l+2)}} + \dots \\
&= \left[\frac{l^{\varpi}}{(l+1)^{\left(\varepsilon_1+\frac{1}{\rho'}\right)}}\right]^{(l+1)} + \left[\frac{l^{\varpi}}{(l+2)^{\left(\varepsilon_1+\frac{1}{\rho'}\right)}}\right]^{(l+2)} + \dots .
\end{aligned}$$

Prenons $\varpi = \varepsilon_1 + \frac{1}{\rho'} - \varepsilon'$, ε' étant positif et aussi petit qu'on veut, mais fini.

On a

$$\frac{l^{\varpi}}{(l+l)^{\varepsilon_1+\frac{1}{\rho'}}} < \frac{1}{l^{\varepsilon'}},$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_{l+1}(z_1)| &\leq \left[\frac{l^{\varpi}}{(l+1)^{\varepsilon_1+\frac{1}{\rho'}}}\right]^{l+1} \left[1 + l^{-\varepsilon'} + l^{-2\varepsilon'} + \dots\right] \\
&\leq \left[\frac{l^{\varpi}}{(l+1)^{\varepsilon_1+\frac{1}{\rho'}}}\right]^{l+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{l^{\varepsilon'}}} \\
&\leq \left[\frac{l^{\varpi}}{(l+1)^{\varepsilon_1+\frac{1}{\rho'}}}\right]^{l+1} \frac{l^{\varepsilon'}}{l^{\varepsilon'}-1} \leq 2\, l^{-\varepsilon'(l+1)}.
\end{aligned}$$

Il faut

$$e^{-l^{(\rho'+\varepsilon)\varpi}} < 2l^{-\varepsilon'(l+1)},$$

$$\varepsilon'(l+1)\log l < \log 2 + l^{(\rho'+\varepsilon)\varpi},$$

ce qui est impossible si

$$(\rho'+\varepsilon)\varpi = (\rho'+\varepsilon)\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\rho'} - \varepsilon'\right) = \rho'\varepsilon_1 + \varepsilon\varepsilon_1 + 1 + \frac{\varepsilon}{\rho'} - \varepsilon'(\rho'+\varepsilon) \leq 1.$$

Il est toujours possible de choisir ε, puis ε_1 assez petits et finis pour que ceci ait lieu pour toute valeur positive de ε' choisie *a priori* aussi petite qu'on veut.

Il en résulte que pour une valeur donnée de $\eta \leq 1$, dès que l dépasse une certaine limite, les racines de $f_l(z)$ de module supérieur à la limite finie L et inférieur à $l^{\frac{1}{\rho'}-\varepsilon_2}$ (ε_2 fini, positif, aussi petit qu'on veut) sont intérieures aux cercles Γ.

2° Considérons maintenant les valeurs des zéros de $f(z)$ de module inférieur à la limite L ci-dessus visée qui dépend de η. Leur nombre est limité et $\leq \nu$ pour la fonction $f(z)$ donnée.

Si $2\eta_1$ est la limite inférieure de la distance de deux des zéros de mod $<$L, pour tout point extérieur aux cercles de rayon $\frac{\eta_1}{2}$ décrit autour de chaque zéro comme centre, $|f(z)|$ a évidemment une limite inférieure finie F, et il faut

$$F < \psi_l,$$

si ψ_l est une limite supérieure de $|\Psi_{l+1}(z_1)|$, z_1 n'étant pas à l'intérieur d'un des cercles de rayon η_1. Or, quand η_1 est donné (η_1 étant d'ailleurs fini), on peut toujours prendre l assez grand pour que ψ_l soit aussi petit qu'on veut et, par suite, pour que l'inégalité précédente soit impossible : on peut prendre η_1 aussi petit qu'on veut, pourvu que l soit suffisamment grand.

Il résulte de ce qui précède qu'à toute racine z_1 de $f_l(z)$ correspond une racine de $f(z)$ dont le module en diffère d'aussi peu qu'on veut pour l suffisamment grand, pourvu que le module de z_1 soit $\leq l^{\frac{1}{\rho'}-\varepsilon_2}$ (1).

(1) Ceci n'établit pas, toutefois, qu'à chaque racine de $f_l(z) = 0$ corresponde une et une seule racine de $f(z) = 0$.

Application. — L'équation $e^z = 0$ n'a d'autre racine que $z = -\infty$. Par suite, les racines du polynome

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^m}{m!} = 0$$

vont toutes en croissant indéfiniment avec m.

IV.

Soient

$$(1) \qquad F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots$$

une fonction entière d'ordre apparent fini ρ' et d'ordre réel ρ : $\rho' \geq \rho$, et la fonction (1)

$$(2) \qquad G(z) = f(z) f(\omega z) \ldots f(\omega^{m-1} z)$$

avec $m > \rho'$.

Posons

$$a_n^m = A'_n, \qquad z^m = Z;$$

on aura

$$(3) \qquad G(z) = c \prod \left(1 - \frac{Z}{A'_n}\right),$$

c étant une constante et le second membre étant une fonction entière de Z d'ordre < 1. Si $R_n = |A'_n|$, la série $\sum \frac{1}{R_n}$ converge, par suite aussi la série $\sum \frac{1}{A'_n}$. Les séries

$$\sum_0^\infty \frac{1}{a_n^{m+k}} \qquad (k \geq 0)$$

sont toutes convergentes. On aura

$$(4) \qquad G(z) = B_0 + B_1 Z + B_2 Z^2 + \ldots,$$

---

(1) ω est une racine primitive de $x^m = 1$ (m quelconque $> \rho'$). Pour ce paragraphe, *comp.* Laggi, *Nouvelles Annales*, 1900-1902.

avec

$$c = B_0, \qquad B_1 = -B_0 \sum \frac{1}{A_n}, \qquad \dots \tag{5}$$

D'autre part, considérons le produit

$$\begin{cases} G(z) = (A_0 + A_1 z + \dots + A_m z^m + \dots) \\ \qquad \times (A_0 + A_1 \omega z + \dots + A_m \omega^m z^m + \dots) \dots \end{cases} \tag{6}$$

On a

$$B_0 = A_0^m,$$

et B_1 ne dépendra que des coefficients $A_0, A_1, \dots, A_m$.

Formons le produit

$$\begin{cases} G_1(z) = (A_0 + A_1 z + \dots + A_m z^m) \\ \qquad \times (A_0 + A_1 \omega z + \dots + A_m z^m) \dots, \end{cases} \tag{7}$$

déduit de $G(z)$ en supprimant dans le deuxième membre tous les termes en z de degré $> m$, et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les racines de

$$A_0 + A_1 z + \dots + A_m z^m = 0. \tag{8}$$

On a

$$\begin{aligned} G_1(z) &= A_0^m \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\alpha_m}\right) \left(1 - \frac{\omega z}{\alpha_1}\right) \cdots \\ &= A_0^m \left(1 - \frac{z^m}{\alpha_1^m}\right) \cdots \\ &= C_0 + C_1 z^m + C_2 z^{2m} + \dots. \end{aligned}$$

Les coefficients de $G_1(z)$, jusqu'à celui de z^m exclusivement, sont évidemment les mêmes que ceux de $G(z)$. Donc

$$C_0 = A_0^m = B_0, \qquad C_1 = -A_0^m \sum \frac{1}{\alpha_1^m} = B_1. \tag{9}$$

C_1 peut se calculer à l'aide des formules connues de Newton (¹) en

(¹) *Voir,* par exemple, NIEWENGLOWSKI, *Cours d'Algèbre,* t. II, 2e édition, 1891, p. 254.

partant de l'équation (8). Si, dès lors, on pose

$$(10)\qquad \begin{cases} A_0 s'_1 + A_1 = 0, \\ A_0 s'_2 + A_1 s'_1 + 2A_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_0 s'_m + A_1 s'_{m-1} + \dots + m A_m = 0, \end{cases}$$

on aura

$$s'_m = -\frac{C_1}{A_0^m} = -\frac{B_1}{A_0^m},$$

ce qui donnera B_1 en fonction de $A_0, A_1, \dots, A_m$. Ceci s'applique pour toute valeur de $m > \rho'$; les mêmes formules (10) serviront à calculer les sommes

$$\sum_0^\infty \frac{1}{A'_n} = \sum_0^\infty \frac{1}{a_n^m} = -\frac{B_1}{B_0} = -\frac{B_1}{A_0^m} = s'_m$$

pour toute valeur de $m > \rho'$.

On remarque en même temps que la somme des inverses des puissances $m_1^{\text{ièmes}}$ des racines de $F(z)$ est égale à la somme des inverses des puissances $m_1^{\text{ièmes}}$ des racines de $F_m(z)$ ou de (8), quel que soit m dès que $m \geqq m_1 > \rho'$. D'où ce théorème :

Théorème III. — *Pour une fonction entière* $F(z)$ *d'ordre apparent* ρ' *fini, les sommes des inverses des puissances entières* $m > \rho'$ *des racines se calculent comme pour un polynome par les formules de récurrence de Newton.*

Si $F_m(z)$ *désigne le polynome formé des termes de* $F(z)$ *de degré* $\leqq m$, *la somme des inverses des puissances* $m_1^{\text{ièmes}}$ *des racines de* $F_m(z)$ *et* $F(z)$ *sont égales quand* $m \geqq m_1 > \rho'$.

On déduit de là un certain nombre d'applications.

I. *Conditions de réalité des racines de* $F(z) = 0$. — Les équations qui donnent $s_m (m > \rho')$ permettent de préciser certaines conditions de réalité des racines de $F(z) = 0$.

Pour que toutes les racines soient réelles, il faudra que

$$s_{2\nu} = s'_{2\nu} (2\nu > \rho')$$

soit > 0.

Soit $\rho' < 2$; on peut prendre $\nu = 1, 2, \ldots$. En particulier,

$$s_2 = s'_2 = + \frac{A_1^2}{A_0^2} - \frac{2A_2}{A_0} = - \frac{2A_2A_0 - A_1^2}{A_0^2} > 0$$

ou

$$2A_2A_0 - A_1^2 < 0.$$

Utilisant ce théorème connu :

Si une fonction entière d'ordre apparent < 2 a toutes ses racines réelles, il en est de même de toutes ses dérivées, nous obtenons la condition générale connue (1)

$$(n+1)A_{n+1}A_{n-1} - nA_n^2 < 0.$$

En faisant varier ν, on obtient une infinité de conditions de réalité pour toute fonction entière d'ordre fini. Ainsi, pour les fonctions d'ordre apparent < 2, on obtient les conditions

$$s_2 > 0, \qquad s_4 > 0, \qquad s_6 > 0, \qquad \ldots$$

II. *Conditions pour que toutes les racines soient positives ou négatives.* — Il faudra non seulement $s_{2\nu} > 0$ comme ci-dessus, mais encore $s_{2\nu+1} > 0$, dès que $2\nu + 1 > \rho'$ pour que les racines soient toutes positives.

Pour les fonctions d'ordre apparent < 1, il faudra $s_1 = s'_1 > 0$, c'est-à-dire

$$A_0A_1 < 0.$$

Les dérivées devant satisfaire aux mêmes conditions (2), il faudra,

---

(1) BOREL, *loc. cit.*, p. 35.

(2) En effet,

$$F(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum \frac{1}{z - a_n};$$

si a_0 est la plus petite racine, qui est positive, pour $z < a_0$ $\frac{F'}{F}$ est toujours négatif, F est toujours positif. Donc $F'(z)$ est toujours négatif et ne peut s'annuler, sauf pour $z = -\infty$.

plus généralement,

$$A_n A_{n+1} < 0 :$$

l'équation $F(z) = 0$ *ne doit présenter que des variations.*

On déduit de là, par le changement de z en $-z$:

Pour que l'équation $F(z) = 0$ *d'ordre apparent* < 1 *ait toutes ses racines négatives, il faut que* $F(z)$ *ne présente que des permanences.*

III. *Détermination du facteur exponentiel de* $F(z)$. — On peut rattacher à ce qui précède une remarque intéressante relative à la détermination du facteur exponentiel de

$$F(z) = e^{G(z)}\Pi(z),$$

Π étant un produit de facteurs primaires. On a

$$G(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_d z^d;$$

Π est le produit des facteurs primaires

$$\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^k}{k a_n^k}}.$$

Nous prendrons $k \leq d \leq \rho'$, certains des coefficients $\alpha_d, \alpha_{d-1}, \ldots$ pouvant être nuls.

Si l'ordre apparent ρ' n'est pas entier, il est égal à l'ordre réel ρ : on a

$$d < \rho', \qquad k = E(\rho') < \rho'.$$

Si l'ordre apparent ρ' est entier, il est égal au plus grand des deux nombres k ou $k+1$ et δ, α_δ étant le premier des coefficients α_d, $\alpha_{d-1}, \ldots$ qui ne s'annule pas : l'ordre réel ρ est $\leq \rho'$.

Ceci posé, on a, pour $|z|$ très petit,

$$\log F(z) = G(z) + \sum\left[\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^k}{k a_n^k}\right]$$

$$= G(z) - \sum\left[\frac{z^{k+1}}{(k+1)a_n^{k+1}} + \ldots\right],$$

$$F(z) = e^{G(z) + \sum\left[\frac{z^{k+1}}{(k+1)a_n^{k+1}} + \ldots\right]}.$$

Les séries $\frac{1}{k+1}\sum\frac{1}{a_n^{k+1}}$, $\frac{1}{k+2}\sum\frac{1}{a_n^{k+2}}$, ... étant convergentes, en égalant dans les deux membres les $k+1$ premiers coefficients, on obtient $k+1$ équations permettant de déterminer $k+1$ coefficients de $G(z)$.

On a

$$\log F(z) = G(z) - \frac{z^{k+1}}{k+1}\sum\frac{1}{a_n^{k+1}} - \frac{z^{k+2}}{k+2}\sum\frac{1}{a_n^{k+2}} - \dots$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_k z^k + \left(\alpha_{k+1} - \frac{s_{k+1}}{k+1}\right) z^{k+1} + \dots$$

$$+ \left(\alpha_d - \frac{s_d}{d}\right) z^d - \frac{s_{d+1}}{d+1} z^{d+1} - \dots.$$

La somme $s_{d+i}\,(i \geqslant 0)$ est donc, au facteur $d+i$ près, le coefficient de z^{d+i} dans le développement de $\log F(z)$. Ces quantités sont données par les formules de récurrence de Newton (10).

Quant aux quantités $s'_1, s'_2, \dots, s'_d$ données par ces mêmes formules (10), on peut en donner une interprétation élégante. Cherchons d'une autre manière les coefficients des d premières puissances de z dans le développement de $\varphi = \log F(z)$. On a, par des dérivations successives

$$\begin{cases} \varphi' F - F' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ (\varphi' F)^{(m)} - F^{(m+1)} \\ \quad = \varphi^{(m+1)} F + C_m^1 \varphi^{(m)} F' + C_m^2 \varphi^{(m-1)} F'' + \dots + \varphi' F^{(m)} - F^{(m+1)} = 0. \end{cases}$$

Pour $z = 0$, on obtient les formules de récurrence

$$\begin{cases} \varphi'_0 F_0 - F'_0 = \varphi'_0 A_0 - A_1 = 0, \\ \varphi''_0 A_0 + \varphi'_0 A_1 - 2A_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ \varphi_0^{(m+1)} A_0 + C_m^1 \varphi_0^{(m)} A_1 + C_m^2 \varphi_0^{(m-1)} 2! A_2 + \dots \\ \qquad + \varphi'_0 m! A_m - (m+1)! A_{m+1} = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs

$$\varphi = \log F(z) = \varphi_0 + \frac{z}{1}\varphi'_0 + \dots + \frac{\varphi_0^{(m)} z^m}{m!} + \dots$$

Si l'on pose

$$\frac{\varphi_0^{(m)}}{m!} = -\frac{\sigma_m}{m},$$

les formules de récurrence ci-dessus deviendront

$$\begin{cases} \sigma_1 A_0 + A_1 = 0, \\ \sigma_2 A_0 + \sigma_1 A_1 + 2A_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ m!\sigma_{m+1} A_0 + C_m^1 A_1 (m-1)!\sigma_m + C_m^2 2! A_2 (m-2)!\sigma_{m-1} + \dots \\ \quad + C_m^i i! A_i \sigma_{m-i+1}(m-i)! + \dots + \sigma_1 m! A_m + (m+1)! A_{m+1} = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire, après réductions,

$$\begin{cases} \sigma_1 A_0 + A_1 = 0, \\ \sigma_2 A_0 + \sigma_1 A_1 + 2A_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \sigma_{m+1} A_0 + \sigma_m A_1 + \sigma_{m-1} A_2 + \dots \\ \quad + \sigma_{m-i+1} A_i + \dots + \sigma_1 A_m + (m+1) A_{m+1} = 0. \end{cases}$$

Si l'on compare ces formules avec les formules (10), on voit que les quantités σ_i coïncident avec les quantités s_i' données par (10). Donc

$$\varphi = \log F(z) = \log A_0 - \frac{z}{1} s_1' - \dots - \frac{z^m}{m} s_m' - \dots,$$

et, par suite,

$$\begin{cases} \alpha_0 = \log A_0, \quad \alpha_1 = -s_1', \quad \dots, \quad \alpha_k = -s_k', \\ \alpha_{k+1} - \frac{s_{k+1}}{k+1} = -\frac{s_{k+1}'}{k+1}, \quad \dots, \quad \alpha_d - \frac{s_d}{d} = -\frac{s_d'}{d}, \\ s_{d+1} = s_{d+1}', \quad \dots, \quad s_{d+i} = s_{d+i}', \quad \dots. \end{cases}$$

Ceci constitue une nouvelle démonstration de l'exactitude des formules (10) pour le calcul de $s_{d+1}, \dots, s_{d+i}, \dots$. Mais ceci montre de plus que les formules (10) donnent $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Dans le cas particulier où $k = d$, le facteur exponentiel de $F(z)$ est

complètement déterminé. Ceci a toujours lieu quand l'ordre apparent ρ' n'est pas entier (¹).

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Soit la fonction entière d'ordre fini*

$$F(z)=\sum_{0}^{\infty}A_l z^l$$

mise sous la forme

$$e^{G(z)}\prod\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}+\ldots+\frac{z^k}{ka_n^k}}$$

où $G(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_d z^d$ *est un polynome de degré* d, Π *un produit convergent de facteurs primaires,* k *le plus petit nombre entier tel que la série*

$$\sum\frac{1}{a_n^{k+1}}$$

converge.

Les formules de Newton

$$\begin{cases} A_0 s'_1+A_1=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_0 s'_m+A_1 s'_{m-1}+\ldots+mA_m=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

donnent :

1° *Les valeurs*

$$\alpha_1=-s'_1,\qquad\ldots,\qquad\alpha_k=-s'_k$$

des k *coefficients de* $G(z)$ *qui suivent* $\alpha_0=\log A_0$;

2° *Les valeurs*

$$s_{d+1}=s'_{d+1},\qquad\ldots,\qquad s_{d+i}=s'_{d+i},\qquad\ldots$$

des sommes des puissances $(d+1)^{ièmes}$, ..., $(d+i)^{ièmes}$, ... *des inverses des racines de* $F(z)$;

(¹) Une fonction à croissance irrégulière ne peut avoir son ordre réel plus petit que son ordre apparent.

3° *Les valeurs des quantités*

$$(k+1)\alpha_{k+1} - s_{k+1} = -s'_{k+1}, \qquad \ldots, \qquad d\alpha_d - s_d = -s'_d,$$

$s_{k+1}, \ldots, s_d$ *étant les sommes des puissances* $(k+1)^{\text{ièmes}}, \ldots, d^{\text{ièmes}}$ *des inverses des racines de* $F(z)$.

On obtient ainsi la valeur complète de $G(z)$ *quand l'ordre apparent n'est pas entier.*

IV. *Propriété d'invariance de certaines fonctions des coefficients de* $F(z)$. — D'après ce qui précède, pour les fonctions d'ordre fini ρ', s_i peut se calculer par les formules de Newton (10) dès que $i > \rho'$.

Soit $G(z)$ un polynome de degré d quelconque; $e^{G(z)}F(z)$ est d'ordre d ou ρ', et

$$e^{G(z)}F(z) = \sum_0 A'_i z^i.$$

On a, pour $i > d$, $i > \rho'$,

$$s_i = \psi_i(A_0, A_1, \ldots) = \psi_i(A'_0, A'_1, \ldots),$$

la deuxième fonction se déduisant de la première par la substitution de $A'_0, A'_1, \ldots$ à $A_0, A_1, \ldots$. La fonction ψ_i conservant la même valeur, quel que soit le polynome $G(z)$ de degré d, est un invariant absolu dans toutes les transformations correspondantes.

On peut le vérifier directement dans les cas les plus simples. Nous citerons à titre d'exemple $e^{az^2+bz+c}F(z)$, où $F(z)$ est d'ordre < 3. On peut d'abord supposer $c = 0$ et $A_0 = 1$, les formules (10) restant les mêmes. Le calcul direct montre que

$$s_3 = 3A_1A_2 - A_1^3 - 3A_3 = 3A'_1A'_2 - A'^3_1 - 3A'_3.$$

V. *Théorème de M. Picard.* — Supposons que $F(z) = 0$ n'ait, $A_1, A_2, \ldots$ étant donnés, aucune racine : on peut montrer, d'après ce qui précède, que A_0 n'a qu'un nombre limité de valeurs.

En effet, on a, pour $m > \rho'$, d'après (10),

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & A_0 & A_1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & A_0 & A_1 & 2A_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_0 & A_1 & \dots & \dots & \dots & (m-1) & A_{m-1} \\ A_{1+i} & A_{2+i} & \dots & \dots & \dots & (m+i) & A_{m+i} \end{vmatrix} = 0.$$

Le coefficient de la plus haute puissance de A_0 (qui est A_0^{m-1}) est $\pm (m+i)\, A_{m+i}$: il n'est pas nul en général; par conséquent, A_1, A_2, ... étant donnés, il y a au plus un nombre fini de valeurs possibles pour A_0, en général au plus m.

C'est une partie d'un théorème connu de M. Picard.

VI. *Fonctions entières simples.* — MM. Cesàro, Vivanti et Bassi ont étudié (1) d'une manière particulière les fonctions entières *simples*, c'est-à-dire privées de facteur exponentiel. Il peut donc être intéressant de signaler en passant à quels critères on reconnaîtra les fonctions de cette nature.

D'après le théorème IV, remarquant qu'ici les coefficients de $G(z)$ $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont nuls, on aura, par les formules de récurrence de Newton, $A_1 = A_2 = \dots = A_k = 0$.

Cette condition est nécessaire et suffisante.

THÉORÈME V. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction entière* $F(z)$ *d'ordre fini soit simple est que*

$$F(z) = A_0 + A_{k+1} z^{k+1} + A_{k+2} z^{k+2} + \dots,$$

k étant le plus petit nombre entier tel que

$$\sum \frac{1}{a_n^{k+1}}$$

converge.

Si l'ordre apparent ρ' de $F(z)$ n'est pas entier, $k = E(\rho')$.

---

(1) BOREL, *loc. cit.*, p. 47.

Remarque. — D'après les théorèmes IV et V, on peut toujours déterminer le facteur exponentiel d'une fonction entière d'ordre fini non entier et, par suite, la fonction entière simple qui a les mêmes racines. Ceci pourra, dans certains cas, faciliter l'étude des racines de la fonction entière proposée.

DEUXIÈME PARTIE.

V. — Fonctions quasi entières.

Considérons la fonction de la forme

$$(1) \qquad \Phi(z) = e^{H(z)+K\left(\frac{1}{z}\right)} f(z)\,\varphi\left(\frac{1}{z}\right),$$

$H(z)$ et $K(z)$ étant des polynomes de degrés h et k, $f(z)$ et $\varphi(z)$ des produits de facteurs primaires d'ordres finis ρ et ρ_1 respectivement. Cette fonction $\Phi(z)$ n'a en général d'autres points critiques à distance finie qu'un point singulier essentiel à l'origine; elle a un point essentiel à l'infini : comme cas particulier, $f(z)$ et $\varphi(z)$ pourront se réduire l'un ou l'autre ou tous deux à un ou des polynomes.

Si ρ' est le plus grand des deux nombres h et ρ, ρ'_1 le plus grand des nombres k et ρ_1, nous dirons que $\Phi(z)$ est d'ordres réels (ρ, ρ_1), et d'ordres apparents (ρ', ρ'_1).

$\Phi(z)$ est développable d'après la série de Laurent sous la forme

$$(2) \qquad \Phi(z) = \ldots + B_l z^{-l} + \ldots + B_1 z^{-1} + A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots.$$

Pour une valeur assez grande de z $\left(\text{ou de } \frac{1}{z}\right)$ de module r, $|\Phi| \leqq e^{r^{\rho'+\varepsilon}}$ $\left(\text{ou} \leqq e^{r^{\rho'_1+\varepsilon}}\right)$ d'après (1). D'après (2), $|\Phi| \leqq e^{r^{\rho''+\varepsilon_1}}$ $\left(\text{ou} \leqq e^{r^{\rho''_1+\varepsilon_1}}\right)$, si ρ'' et ρ''_1 sont les ordres des fonctions entières

$$(3) \qquad \begin{cases} A(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots, \\ B(z) = \quad B_1 z + \ldots + B_l z^l + \ldots. \end{cases}$$

D'ailleurs, ces inégalités sont vraies pour ε_1, ε'_1 positifs : elles ne le sont plus pour une infinité de valeurs de r quand une de ces valeurs est négative. On en conclut

$$\rho' = \rho'', \qquad \rho'_1 = \rho''_1. \tag{4}$$

Inversement, considérons une fonction $\Phi(z)$ de la forme (2), où $A(z)$ et $B(z)$ sont des fonctions entières d'ordres finis, ρ', ρ'_1.

Soient b_1, ..., b_n, ... les zéros de $\Phi(z)$ de module < 1; a_1, ..., a_n, ... les zéros de $\Phi(z)$ de module ≥ 1, rangés, les premiers par ordre de grandeur décroissante, les seconds par ordre de grandeur croissante.

On sait (1) que l'on peut former un produit $\Pi\left(\frac{1}{z}\right)$ ayant pour facteurs primaires

$$P_\nu = \left(1 - \frac{b_\nu}{z}\right) e^{\frac{b_\nu}{z} + \frac{1}{2}\frac{b_\nu^2}{z} + \ldots + \frac{1}{p_\nu - 1}\frac{b_\nu^{p_\nu - 1}}{z^{p_\nu - 1}}},$$

p_ν étant fini ou non, et tel que

$$\Pi\left(\frac{1}{z}\right) = P_1 P_2 \ldots P_\nu \ldots$$

converge.

De même, en posant

$$Q_\nu = \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\frac{z}{a_\nu} + \ldots + \frac{1}{p'_\nu - 1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{p'_\nu - 1}},$$

$$\Pi_1(z) = Q_1 Q_2 \ldots Q_\nu \ldots$$

sera convergent (2).

---

(1) *Voir*, par exemple, BOREL, *loc. cit.*, p. 9 et suivantes, ou PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 144.

La formule $\Phi = \Pi(z)\Pi_1\left(\frac{1}{z}\right)e^{\Phi_1}$ reste évidemment vraie quand A et B sont d'ordres infinis.

(2) Il suffira de donner à p_ν une valeur égale au genre de la fonction entière la plus simple ayant pour zéro les quantités $\frac{1}{b_\nu}$, c'est-à-dire égale au plus petit entier contenu dans l'exposant de convergence ρ de la suite $\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_\nu}, \ldots$. Si ρ est entier, ce sera ρ ou $\rho - 1$.

$\Pi\left(\frac{1}{z}\right)\Pi_1(z)$ a les mêmes zéros que Φ.

Alors $\frac{\Pi.\Pi_1}{\Phi}$ n'a plus de zéros, sauf peut-être aux points o et ∞ :

$$\log\frac{\Phi}{\Pi.\Pi_1} = \Phi_1,$$
$$\Phi = \Pi\Pi_1 e^{\Phi_1},$$

Φ_1 n'ayant d'autres points critiques que les points o et ∞. Soient

$$\Phi_1 = \log\Psi_1,$$
$$\Psi_1 = \rho e^{i\psi},$$
$$\Phi_1 = \log\rho + i(\psi + 2k\pi).$$

Considérons un chemin quelconque environnant l'origine dans le plan des z, chemin issu d'un point A et aboutissant à un point B. Si

Fig. 2.

l'on suit ce chemin en partant de A avec la valeur $\log\rho + i\psi$ de Φ_1 pour aboutir en B, on obtiendra en ce point la même valeur qu'en suivant un certain nombre de lacets identiques issus de A et environnant l'origine, puis la droite AB. Supposons qu'après avoir décrit le lacet la valeur de $\log\rho + i\psi$ devienne $\log\rho + i(\psi + 2\lambda\pi)$, λ étant évidemment entier. La fonction

$$\Psi_1 z^{-\lambda} = X_1$$

est telle que

$$\log X_1 = \log\rho + i\psi - \lambda\log z$$

ne change pas de valeur quand on suit un, par suite un nombre quelconque de lacets issus de A. Autrement dit, $\log X_1$ est *monodrome dans tout le plan*. C'est une fonction à laquelle on peut appliquer la

formule de Laurent, et qui est de la forme

$$\log X_1 = \Phi_2 = \ldots + B'_l z^{-l} + \ldots + B'_1 z^{-1} + A'_0 + \ldots + A'_l z^l + \ldots.$$

On en conclut

$$\Phi = \Pi\left(\frac{1}{z}\right) \Pi_1(z)\, e^{\Phi_1} = \Pi\Pi_1 z^\lambda e^{\Phi_1},$$

Φ_2 étant de la même forme que Φ. Soient

$$B_1(z) = \quad B'_1 z + \ldots + B'_l z^l + \ldots,$$
$$A_1(z) = A'_0 + A'_1 z + \ldots + A'_l z^l + \ldots.$$

Ici $\Pi(z)$, $\Pi_1(z)$, $B_1(z)$, $A_1(z)$ sont des fonctions entières; il en est de même de (1)

$$z^\lambda \Pi_1(z) e^{A_1(z)}, \qquad \Pi(z) e^{B_1(z)}.$$

Or nous savons que, pour les grandes valeurs de z,

$$|\Phi(z)| \leqq e^{r^{\rho'+\varepsilon}}.$$

Pour ces grandes valeurs,

$$\Pi\left(\frac{1}{z}\right) e^{B_1\left(\frac{1}{z}\right)} = C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \ldots$$

est très voisin de $\frac{C_\mu}{z^\mu}$, si C_μ est le premier des coefficients du second membre qui ne s'annule pas. Donc, pour les grandes valeurs de z,

$$|z^\lambda \Pi_1(z)\, e^{A_1(z)}| < e^{r^{\rho'+\varepsilon_1}},$$

c'est-à-dire que $z^\lambda \Pi_1 e^{A_1}$ est une fonction entière d'ordre fini $\leqq \rho'$.

Il y a d'ailleurs une infinité de valeurs de z telles que

$$|\Phi(z)| \geqq e^{r^{\rho'-\varepsilon}},$$

par suite telles que

$$|z^\lambda \Pi_1(z) e^{A_1(z)}| \geqq e^{r^{\rho'-\varepsilon_1}}.$$

---

(1) Ceci suppose λ positif; si λ était négatif, on considérerait

$$\Pi_1 e^{A_1} \quad \text{et} \quad z^{-\lambda} \Pi(z) e^{B_1(z)}$$

Donc $z^{\lambda}\Pi_1 e^{A_1}$ est une fonction entière d'ordre ρ'. De même, $\Pi(z)e^{B_1(z)}$ est d'ordre ρ'_1.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Toute fonction*

$$\Phi(z) = M(z)N\left(\frac{1}{z}\right),$$

où $M(z)$ *et* $N(z)$ *sont des fonctions entières d'ordres apparents finis* ρ *et* ρ_1, *est de la forme*

$$\Phi(z) = B\left(\frac{1}{z}\right) + A(z),$$

où $B(z)$ *et* $A(z)$ *sont des fonctions entières d'ordres apparents finis* ρ_1 *et* ρ ; *réciproquement, toute fonction de la seconde forme est aussi de la première.*

A cause de ces analogies des propriétés de $\Phi(z)$ avec celles des fonctions entières et des autres analogies que nous trouverons plus loin, nous dirons que $\Phi(z)$ est une *fonction quasi entière d'ordres finis* ρ, ρ_1, *à deux points critiques essentiels* o *et* ∞.

On peut étendre à la fonction $\Phi(z)$ le théorème I du § III :

THÉORÈME II. — *Étant donné la fonction* $\Phi(z)$ *quasi entière d'ordres finis* ρ, ρ_1, *et un nombre positif arbitraire* ε, *si l'on décrit autour de chaque zéro d'ordre assez grand* (*assez petit et de* mod < 1) *un cercle de rayon* $\eta < 1$ *arbitraire* ($2\eta b_n^2$), *en tout point extérieur à ces cercles* Γ *on a, pour* $|z|$ *assez grand* (*assez petit*),

$$|\Phi(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}} \qquad [\Phi(z) > e^{-r^{\rho_1+\varepsilon}}].$$

En effet, soit

$$\Phi(z) = M(z)N\left(\frac{1}{z}\right).$$

Pour des valeurs de z assez grandes, on aura, comme tout à l'heure,

$$\left|N\left(\frac{1}{z}\right)\right| \geq \frac{2C_\mu}{r^\mu} \qquad (r = |z|).$$

D'autre part,

$$|M(z)| \geq e^{-r^{\rho+\varepsilon}}$$

pour tous les points extérieurs aux cercles de rayon $\eta < 1$ décrits des a_n comme centres. Donc

$$\left|\mathrm{M}(z)\,\mathrm{N}\left(\frac{1}{z}\right)\right| \geq e^{-r^{\rho+\varepsilon}}\frac{2\mathrm{C}_\mu}{r^\mu} \geq e^{-r^{\rho+2\varepsilon}}.$$

De la même manière, on aura, dès que $|z| \leq \frac{1}{r}$,

$$\left|\mathrm{N}\left(\frac{1}{z}\right)\right| \geq e^{-r^{\rho_1+\varepsilon_1}}$$

pour tous les points z extérieurs aux courbes de rayons tels que

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{b_n}\right| \leq \eta \qquad (\eta < 1).$$

On vérifie facilement que ces courbes sont des cercles intérieurs aux cercles de rayon $2\eta_1 b_n^2$ (¹) décrits des points b_n comme centre.

(¹) Considérons la transformation $\zeta = \frac{1}{z}$ et les points extérieurs aux cercles C_n de rayon η_1 et de centre $\frac{1}{b_n} = \beta_n$ dans le plan des ζ. Si $\zeta = \xi + \eta_1 i$, ces points sont ceux pour lesquels

$$|\zeta - \beta_n| > \eta_1.$$

A ces points correspondent dans le plan des z les points tels que

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{b_n}\right| > \eta_1.$$

Pour étudier ces points, rien n'empêche de supposer b_n réel. Il faut trouver les points tels que

$$|b_n - z| > \eta_1 |b_n z|$$

ou

$$(x) \qquad (b_n - x)^2 + y^2 > \eta_1^2 b_n^2 (x^2 + y^2).$$

Considérons le cercle

$$b_n^2 - 2b_n x + (x^2 + y^2)(1 - \eta_1^2 b_n^2) = 0.$$

Son centre est sur l'axe Ox; $\eta_1^2 b_n^2$ est < 1 si b_n^2 est petit et $\eta_1^2 < 1$. Les points pour lesquels (x) a lieu sont les points extérieurs au cercle. Ce cercle coupe

Nous étendrons de la même manière à $\Phi(z)$ le théorème II du § III :

THÉORÈME III. — *Soit la fonction quasi entière*

$$\Phi(z) = \ldots + B_l z^{-l} + \ldots + B_1 z^{-1} + A_0 + A_1 z + \ldots + A_l z^l + \ldots$$

considérée au théorème précédent. Dès que l dépasse une certaine limite finie, à toute racine de

$$\Phi_l(z) = B_l z^{-l} + \ldots + B_1 z^{-1} + A_0 + \ldots + A_l z^l = 0$$

de module inférieur à $l^{\frac{1}{\rho}-\varepsilon_2}$ *(supérieur à* $l^{-\left(\frac{1}{\rho_1}-\varepsilon_2'\right)}$*)* ($\varepsilon_2$, ε_2' *finis positifs, aussi petits qu'on veut) correspond une racine de* $\Phi(z)$, *les modules des deux racines correspondantes différant d'aussi peu qu'on veut.*

Considérons les racines de

$$\Phi_l(z) = 0$$

de modules $> L$ (L fini convenablement choisi). On a, pour une infinité de valeurs de l' et l_1',

$$\sqrt[l']{A_{l'}} = \left(\frac{1}{l'}\right)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}, \qquad \sqrt[l_1']{B_{l_1'}} = \left(\frac{1}{l_1'}\right)^{\frac{1}{\rho_1}+\varepsilon_1},$$

---

l'axe Ox en deux points tels que

$$b_n^2 - 2b_n x + x^2(1 - \eta^2 b_n^2) = 0,$$

$$x = \frac{b_n \pm \sqrt{b_n^2 - (1-\eta_1^2 b_n^2) b_n^2}}{(1-\eta_1^2 b_n^2)},$$

$$x = \frac{b_n}{1-\eta_1^2 b_n^2}\left(1 \pm \sqrt{\eta^2 b_n^2}\right) = \frac{b_n}{1-\eta_1^2 b_n^2}(1 \pm \eta_1 b_n),$$

$$x = b_n(1 \pm \eta_1 b_n)^{-1}.$$

Son centre est encore $\frac{b_n}{1-\eta_1^2 b_n^2}$, son rayon est $\frac{\eta_1 b_n^2}{1-\eta_1^2 b_n^2}$. On voit de suite que, si $\eta_1 b_n^2$ est inférieur à une limite finie, ce cercle a tous ses points intérieurs au cercle de centre b_n et de rayon $2\eta_1 b_n^2$, car

$$\frac{|b_n|}{1+\eta_1 b_n} > |b_n| - k\eta_1 b_n^2, \qquad \frac{|b_n|}{1-\eta_1 b_n} < |b_n| + k\eta_1 b_n^2,$$

dès que $k \geq 2$.

les autres valeurs de $A_{l'}$ et $B_{l'_1}$ étant respectivement plus petites que ne l'indiquent ces formules.

Prenons alors

$$|z_1| \leq l^{\varpi},$$

z_1 étant un zéro de $\Phi_l(z)$ de module $> L$, et ϖ convenablement choisi.

On aura

$$\Phi(z_1) = \Phi_l(z_1) + \Psi_{l+1}(z_1) = \Psi_{l+1}(z_1),$$

si

$$\Phi(z) = \Phi_l(z) + \Psi_{l+1}(z),$$

et $\Psi_{l+1}(z_1)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{l}$; en effet,

$$\begin{aligned} |A_{l+1} z_1^{l+1} + \ldots| &\leq A_{l+1} l^{\varpi(l+1)} + A_{l+2} l^{\varpi(l+2)} + \ldots \\ &\leq \frac{l^{\varpi(l+1)}}{(l+1)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)(l+1)}} + \frac{l^{\varpi(l+2)}}{(l+2)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)(l+2)}} + \ldots \\ &= \left(\frac{l^{\varpi}}{(l+1)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}\right)^{l+1} + \left(\frac{l^{\varpi}}{(l+2)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}}\right)^{l+2} + \ldots. \end{aligned}$$

Prenons

$$\varpi = \varepsilon + \frac{1}{\rho} - \varepsilon',$$

ε' étant positif, aussi petit qu'on veut, mais fini. On aura, comme dans la démonstration du théorème II du § III,

$$|A_{l+1} z_1^{l+1} + \ldots| \leq 2 l^{-\varepsilon'(l+1)}.$$

D'autre part,

$$\left|\frac{B_{l+1}}{z_1^{l+1}} + \frac{B_{l+2}}{z_1^{l+2}} + \ldots\right| \leq \frac{2}{(l+1)^{\left(\frac{1}{\rho_1}+\varepsilon_1\right)(l+1)}},$$

puisque $|z_1| > L$. Donc, ρ_1 étant fini,

$$|\Psi_{l+1}(z_1)| \leq 3 l^{-\varepsilon'(l+1)}.$$

Mais, à l'extérieur des cercles de rayon η, pour $|z_1| > L$,

$$|\Phi(z_1)| \geq e^{-r_1^{\rho+\varepsilon'}}, \qquad r_1 = |z_1|.$$

Si z_1 est extérieur à ces cercles, il faut

$$3l^{-\varepsilon'(l+1)} \geqq e^{-l^{\varpi(\rho+\varepsilon'')}},$$

$$\log 3 + l^{\varpi(\rho+\varepsilon'')} \geqq \varepsilon'(l+1)\log l,$$

ce qui est impossible dès que

$$(\rho+\varepsilon'')\left(\varepsilon + \frac{1}{\rho} - \varepsilon'\right) \leqq 1.$$

ε' étant ici choisi arbitrairement, il est toujours possible de prendre ε'', puis ε, assez petits pour que cette inégalité ait lieu, L étant alors assez grand, mais ne dépendant pas de l.

On en conclut que z_1 est intérieur aux cercles de rayon η.

La considération de l'équation $\Phi_l\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ conduira à des résultats analogues pour les racines de module inférieur à $\frac{1}{L}$, mais supérieur à $l^{-\left(\frac{1}{\rho_1}-\varepsilon'''\right)}$.

Il nous reste à considérer les valeurs des zéros de $\Phi(z)$ dont le module est compris entre L et $\frac{1}{L}$: le raisonnement est le même qu'au théorème II du § III. C. Q. F. D.

VI.

Les fonctions quasi entières considérées jusqu'ici n'ont que deux points singuliers essentiels, l'un à l'origine, l'autre à ∞ dans le plan des z.

On peut considérer des fonctions analogues plus générales et jouissant de propriétés semblables.

DÉFINITION. — *Soit la fonction*

$$\psi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \psi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \ldots + \psi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) + \psi_{k+1}(z),$$

où $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, ..., $\psi_k(z)$, $\psi_{k+1}(z)$ *sont des fonctions entières,*

$a_0, a_1, \ldots, a_k$ étant des nombres finis distincts en nombre fini : nous dirons que cette fonction est une fonction quasi entière à $k+2$ points singuliers essentiels.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant qui généralise le théorème de Laurent :

THÉORÈME I. — *Si une fonction monodrome $f(z)$ n'a, dans le plan, d'autres points critiques que les points ∞, a_0, a_1, ..., a_k (k fini), elle est développable en une série de la forme*

$$f(z) = \psi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \psi_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \ldots + \psi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) + \psi_{k+1}(z),$$

où $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$, ..., $\psi_{k+1}(z)$ sont des fonctions entières.

Il suffira d'employer un raisonnement analogue au raisonnement classique (1) par lequel on établit la série de Laurent.

Considérons dans le plan des z des cercles c_0, c_1, ..., c_k de petits rayons ayant pour centres les points a_0, a_1, ..., a_k, un cercle γ de petit rayon ayant pour centre un point quelconque extérieur à ces cercles, un cercle A de rayon R aussi grand que l'on veut (2), ayant pour centre l'origine et comprenant tous les cercles précédents dont les rayons sont assez petits pour que ces cercles ne se coupent pas. On a

$$\int_A \frac{f(z)}{z-t}\,dz = \int_{c_0} + \ldots + \int_{c_k} + \int_\gamma .$$

Le long de A :

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{t}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z} + \ldots\right),$$

car $\left|\frac{t}{z}\right| < 1$.

(1) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* Comp. JORDAN, *Cours d'Analyse imprimé*, t. II, 1883, p. 319.

(2) Le théorème reste vrai à l'intérieur de A quand on suppose R fini, la fonction pouvant ne pas être monodrome à l'extérieur de ce cercle. Mais alors $\psi_i(z)$ n'est plus forcément une fonction entière.

Le long de c_i :

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{t-a_i}\,\frac{1}{\dfrac{z-a_i}{t-a_i}-1} = -\frac{1}{t-a_i}\left(1+\frac{z-a_i}{t-a_i}+\ldots\right),$$

car on y a

$$\left|\frac{z-a_i}{t-a_i}\right| < 1.$$

Dès lors

$$\int_\gamma = 2\pi i f(t),$$

$$\int_A = \int_A \frac{f(z)}{z}\,dz + \frac{t}{1}\int_A \frac{f(z)\,dz}{z^2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_{c_i} = -\frac{1}{t-a_i}\int_{c_i} f(z)\,dz - \frac{1}{(t-a_i)^2}\int_{c_i} f(z)(z-a_i)\,dz - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On vérifiera sans peine la convergence de ces séries : ainsi, pour $\int_{c_i}$, le reste est

$$R = \int_{c_i} \frac{f(z)(z-a_i)^{n+1}}{(t-a_i)^{n+1}(z-t)}\,dz.$$

Soit M le maximum de $|f(z)|$ sur le cercle c_i, $|z-a_i| = \sigma_i =$ rayon du cercle c_i, $t-a_i = \tau > \sigma_i$, $|t-z| \geq \tau - \sigma_i$. On a

$$|R| \leq \frac{M\sigma_i^{n+1}}{\tau^{n+1}(\tau-\sigma_i)}\,2\pi\sigma_i,$$

qui tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

On obtient ainsi l'expression de $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \psi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \ldots + \psi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) + \psi_{k+1}(z),$$

pour tous les points t du plan intérieurs à A, mais extérieurs aux cercles $c_0, c_1, \ldots, c_k$.

Le rayon de convergence de chacune des séries $\psi_0(z), \ldots, \psi_k(z)$, $\psi_{k+1}(z)$ est alors aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire que ce sont des fonctions entières. C. Q. F. D.

Ceci posé, considérons les fonctions de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi(z) = e^{\Pi(z)+\Pi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)+\ldots+\Pi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)} f(z) f_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)\cdots f_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) \\ \qquad = \varphi(z)\varphi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)\cdots \varphi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right); \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi\ (z) = e^{\Pi(z)} f(z), \\ \varphi_0(z) = e^{\Pi_0(z)} f_0(z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_k(z) = e^{\Pi_k(z)} f_k(z) \end{cases}$$

étant des fonctions entières d'ordres finis $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$ (d'ordre infini). On peut appliquer à $\Phi(z)$ le théorème précédent, et l'on en conclut

$$(3)\qquad \Phi(z) = \chi(z) + \chi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \ldots + \chi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

$\chi(z), \chi_0(z), \ldots, \chi_k(z)$ étant des fonctions entières.

Aux environs d'un quelconque des points critiques $a_0, \ldots, a_k$, par exemple de a_i, $\Phi(z)$ est de l'ordre de $\chi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ et de $\varphi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$; de même aux environs du point critique $z=\infty$. Par conséquent, $\chi(z), \ldots, \chi_i(z), \ldots$ sont d'ordres finis ou infinis en même temps que $\varphi(z), \ldots, \varphi_i(z), \ldots$ respectivement. Si $\chi_i(z)$ est d'ordre apparent fini ρ, il en est de même de $\varphi_i(z)$, et réciproquement.

Inversement, considérons la fonction (3), $\chi(z), \chi_0(z), \ldots, \chi_k(z)$ étant des fonctions entières d'ordres apparents finis $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_i$.

Nous diviserons les zéros de $\Phi(z)$ en $k+2$ catégories

$$(4)\quad \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots;\quad \alpha_0^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0, \ldots;\quad \ldots;\quad \alpha_0^k, \alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k, \ldots,$$

telles que chacune d'elles comprenne les zéros qui environnent respectivement les points critiques $\infty, a_0, a_1, \ldots, a_k$ (1).

(1) Pour fixer les idées, nous décrirons un cercle arbitraire comprenant à son intérieur tous les points critiques sauf ∞; les zéros extérieurs seront rattachés au point critique ∞, les autres au point critique le plus voisin ou à l'un des plus voisins, s'il y en a plusieurs.

Nous formerons alors un produit de facteurs primaires

$$\Pi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)=\Pi P_\nu^i,$$

avec

$$P_\nu^{(i)}=\left(1-\frac{\alpha_\nu^i-a_i}{z-a_i}\right)e^{\frac{\alpha_\nu^i-a_i}{z-a_i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_\nu^i-a_i}{z-a_i}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p_\nu-1}\left(\frac{\alpha_\nu^i-a_i}{z-a_i}\right)^{p_\nu-1}},$$

p_ν pouvant rester ou non fini, mais étant choisi de façon que

$$\Pi P_\nu^{(i)}=P_1^{(i)}P_2^{(i)}\ldots P_\nu^{(i)}\ldots$$

converge.

Nous opérerons ainsi pour chacune des $k+2$ catégories de zéros (4).

Le produit

$$\Pi.\Pi_0.\Pi_1\ldots\Pi_k=\varpi$$

a les mêmes zéros que $\Phi(z)$, et, par suite,

$$\frac{\Phi}{\Pi.\Pi_0\ldots\Pi_k}=\frac{\Phi}{\varpi}$$

n'a plus de zéros, sauf peut-être aux points ∞, a_0, ..., a_k. On peut poser

$$\Phi=\varpi e^{\Phi_1},$$

Φ_1 n'ayant d'autres points critiques que ces points ∞, a_0, ..., a_k.

Soit

$$\Phi_1=\log\Psi_1=\log\rho+i(\psi+2k_1\pi);$$

soient A et B deux points du plan des z, et un système de lacets allant du point A à chacun des points a_0, ..., a_k. Tout chemin issu de A et aboutissant à B, quand on fait varier z le long de ce chemin et que l'on étudie la variation correspondante de Φ_1, équivaut à la droite AB (ou à un chemin infiniment voisin de cette droite) et à un certain nombre des lacets en question.

Or, quand on suit le lacet environnant a_i, en partant de A et revenant en A, $\log\rho+i\psi$ devient $\log\rho+i(\psi+2\lambda_i\pi)$, λ_i étant entier.

Dès lors, la fonction

$$\Phi_2 = \log \Psi_1 - \lambda_0 \log(z - a_0) - \ldots - \lambda_k \log(z - a_k)$$

est monodrome dans tout le plan. Elle est, d'après le théorème I, de la même forme que Φ. Donc

$$e^{\Phi_1} = e^{\log \Psi_1} = e^{\Phi_2}(z - a_0)^{\lambda_0} \ldots (z - a_k)^{\lambda_k}$$

et

$$\Phi = \varpi e^{\Phi_2}(z - a_0)^{\lambda_0} \ldots (z - a_k)^{\lambda_k} \quad (5) \quad (^1)$$

est de la forme (1).

Nous savons qu'aux environs du point critique a_i la fonction Φ est d'ordre ρ_i. D'après (5) et (1), Φ est aussi de l'ordre de φ_i. Donc $\varphi_i(z)$ est une fonction entière d'ordre ρ_i.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant, qui comprend le théorème I du § V.

Théorème II. — *Toute fonction quasi entière* $\Phi(z)$ *de la forme*

$$\gamma(z) + \gamma_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) + \ldots + \gamma_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$$

($a_0, \ldots, a_k$ *différents et* $\neq \infty$), $\gamma(z), \gamma_0(z), \ldots, \gamma_k(z)$ *étant des fonctions entières d'ordres finis* $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$, *est aussi de la forme*

$$\varphi(z)\varphi_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) \ldots \varphi_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right),$$

$\varphi(z), \varphi_0(z), \ldots, \varphi_k(z)$ *étant des fonctions entières d'ordres finis* $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$; *réciproquement, toute fonction de la deuxième forme est aussi de la première.*

---

(1) Suivant que λ_i est positif ou négatif, on pourra faire rentrer $(z - a_i)^{\lambda_i}$ dans $\varphi(z)$ ou $\varphi_i\left(\frac{1}{z - a_i}\right)$.

La propriété ci-dessus est indifféremment vraie pour les fonctions quasi entières d'ordres finis ou infinis : elle a été indiquée, ainsi que le théorème I, avec d'autres procédés de démonstration et sans distinction d'ordre, par Weierstrass (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1876). *Comp.* Mittag-Leffler, *Acta math.*, t. IV, 1884.

VII.

Les analogies de propriétés entre les fonctions entières et les fonctions quasi entières d'ordres finis sont nombreuses. Nous allons en donner plusieurs exemples :

THÉORÈME III. — *Tout étant posé comme au théorème II, la condition nécessaire et suffisante pour que* $\Phi(z)$ *soit à croissance régulière aux environs du point critique* a_i, *où* $\Phi(z)$ *est d'ordre fini, est que la distribution de ses zéros y soit régulière, c'est-à-dire que* $\varphi_i(z)$ *et, par suite,* $\chi_i(z)$ *soient à croissance régulière.*

Si $\Phi(z)$ est d'ordre ρ_i aux environs du point critique $z = a_i$ (ou pour $z = a_i$), on a, pour $r = \left|\frac{1}{z - a_i}\right|$ assez grand,

$$|\Phi(z)| \leqq e^{r^{\rho_i + \varepsilon}}.$$

Nous dirons que $\Phi(z)$ est *à croissance régulière aux environs de* $z = a_i$ si $\frac{\log\log M_r}{\log r}$ tend vers une limite quand z tend vers a_i, M_r étant la valeur maxima de $|\Phi(z)|$ pour $|z - a_i| = \frac{1}{r}$.

D'après le théorème II, la condition nécessaire et suffisante pour que la croissance de $\Phi(z)$ soit régulière aux environs de $z = a_i$ est que celle de $\chi_i\left(\frac{1}{z - a_i}\right)$ le soit; autrement dit, que $\chi_i(z)$ soit une fonction entière à croissance régulière. On peut dire la même chose pour $\Phi(z)$ et $\varphi_i\left(\frac{1}{z - a_i}\right)$.

D'autre part, on sait que la condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_i(z)$ ait sa croissance régulière est que la distribution de ses zéros soit régulière, c'est-à-dire que le module r_n du $n^{\text{ième}}$ zéro soit $r_n = n^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon}$, ε aussi petit qu'on veut, pourvu que n soit assez grand. *Si nous convenons de dire que la distribution des zéros de* $\varphi_i\left(\frac{1}{z - a_i}\right)$ *est régulière aux environs de* $z = a_i$ (*ou pour* $z = a_i$) *quand celle*

de $\varphi_i(z)$ l'est (au sens de M. Borel), le théorème résulte de ce qui précède (¹).

On peut encore étendre aux fonctions quasi entières les théorèmes que Laguerre et Chio ont établis au sujet des rapports entre les racines des fonctions entières et celles de leurs dérivées au point de vue de la réalité.

Soit (théorème II)

$$\Phi(z) = \varphi(z)\,\varphi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)\cdots\varphi_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) \tag{6}$$

une fonction quasi entière à points singuliers essentiels et réels. Admettons que $\varphi_i(z)$ soit, quel que soit i, d'ordre apparent < 2. On aura

$$\varphi_i(z) = e^{h_i z}\prod\left(1-\frac{z}{\alpha_n^{(i)}}\right)e^{\frac{z}{\alpha_n^{(i)}}}, \tag{7}$$

avec les notations de M. Borel (²).

$$\log\Phi(z) = \log\varphi(z) + \log\varphi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \ldots,$$

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{1}{(z-a_0)^2}\frac{\varphi_0'\left(\frac{1}{z-a_0}\right)}{\varphi_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right)} - \ldots, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right) - \left(\frac{1}{(z-a_0)^2}\frac{\varphi_0'}{\varphi_0}\right)' - \ldots. \tag{9}$$

On a encore

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = k + \sum\left(\frac{1}{z-\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_n}\right), \tag{10}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right) = -\sum\frac{1}{(z-\alpha_n)^2}. \tag{11}$$

(¹) Nous excluons ici le cas où ρ_i est entier.

(²) *Leçons sur les fonctions entières*, p. 32.

D'autre part, soit $y = \frac{1}{z - a_i}$:

$$-\frac{1}{(z-a_i)^2}\frac{\varphi_i'\left(\frac{1}{z-a_i}\right)}{\varphi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)} = \frac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}y',$$

$$\left(-\frac{1}{(z-a_i)^2}\frac{\varphi_i'\left(\frac{1}{z-a_i}\right)}{\varphi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)}\right)' = \frac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}y'' + \left(\frac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}\right)'y'^2,$$

avec

$$y' = -\frac{1}{(z-a_i)^2}, \qquad y'' = +\frac{2}{(z-a_i)^3},$$

par suite

$$\left(\frac{\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)}y'\right)' = \frac{2}{(z-a_i)^3}\left[k_i + \sum\left(\frac{1}{y-z_n^i} + \frac{1}{z_n^i}\right)\right] + \frac{1}{(z-a_i)^4}\left[-\sum\left(\frac{1}{y-z_n^i}\right)^2\right].$$

Aux environs d'une racine de $\varphi(z)$, $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ passe, quand z croît, par ∞, du négatif au positif. D'ailleurs, dès que z dépasse une certaine limite, c'est $\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)$ qui donne son signe à $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)$; en effet, $\sum\frac{1}{(y-z_n^i)^2}$ est fini; si $\varphi_i(z)$ est d'ordre <1, il en est de même de $\sum\frac{1}{y-z_n^i}$ et $\sum\frac{1}{z_n^i}$; si $\varphi_i(z)$ est d'ordre ≥ 1,

$$\sum\left(\frac{1}{y-z_n^i} + \frac{1}{z_n^i}\right) = y\sum\frac{1}{z_n^i(y-z_n^i)}$$

est aussi fini. Il en résulte, d'après un théorème connu, que $\Phi'(z)$ a toujours une racine réelle entre deux racines de $\Phi(z)$, et une seule.

Le changement de variables $u = \frac{1}{z-a_i}$ permet de vérifier le théorème aux environs de chaque point essentiel a_i : dès que z est suffisamment voisin de a_i, entre deux racines de $\Phi(z)$ voisines de a_i il y a toujours une racine réelle, et une seule, de $\Psi'(z)$.

Il reste encore à examiner ce qui a trait aux racines imaginaires de $\Psi'(z)$. On emploiera un procédé analogue à celui de M. Chio; on a

$$(12)\qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = k + \sum\left(\frac{x-\alpha_n}{(x-\alpha_n)^2+y^2} + \frac{1}{\alpha_n}\right) - i\sum\frac{y}{(x-\alpha_n)^2+y^2}.$$

De même, soit

$$\zeta = \xi + \eta i = \frac{1}{z-a_i} = \frac{1}{x-a_i+yi} = \frac{(x-a_i)-yi}{(x-a_i)^2+y^2},$$

$$\frac{\varphi_i'\left(\frac{1}{z-a_i}\right)}{\varphi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)} = k_i + \sum\left(\frac{\xi-\alpha_n^{(i)}}{(\xi-\alpha_n^{(i)})^2+\eta_i^2} + \frac{1}{\alpha_n^{(i)}}\right) - i\sum\frac{\eta_i}{(\xi-\alpha_n^{(i)})^2+\eta_i^2};$$

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{(z-a_i)^2}\,\frac{\varphi_i'\left(\frac{1}{z-a_i}\right)}{\varphi_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)} &= A + i\{(\eta_i^2-\xi^2)\sum\frac{\eta_i}{(\xi-\alpha_n^{(i)})^2+\eta_i^2}\\ &\quad + 2\xi\eta_i\left[k_i + \sum\left(\frac{\xi-\alpha_n^{(i)}}{(\xi-\alpha_n^{(i)})^2+\eta_i^2} + \frac{1}{\alpha_n^{(i)}}\right)\right]\}.\end{aligned}\right.$$

Considérons le coefficient de i dans le deuxième membre : d'après (12), le coefficient de $\xi\eta$ est la partie réelle de $\frac{\varphi_i'(\zeta)}{\varphi_i(\zeta)}$, c'est-à-dire $\leq \left|\frac{\varphi_i'(\zeta)}{\varphi_i(\zeta)}\right|$. Si z est grand, cette partie réelle reste limitée, car $|\zeta|$ est petit. De même le coefficient de $\eta(\eta^2-\xi^2)$ est $\sum\frac{1}{(\xi-\alpha_n^{(i)})^2+\eta_i^2}$, qui est très voisin de $\sum\frac{1}{\alpha_n^{(i)2}}$ et est limité, puisque $\varphi_i(z)$ est d'ordre <2.

Ceci posé, admettons que $\Psi'(z)$ ait une racine imaginaire de module très grand, $z = x+yi$, et que $y = |z|^\mu (\mu \leq 1)$.

Le coefficient de i dans (13) est de la forme

$$g_i\eta_i(\eta_i^2-\xi^2) + h_i\xi\eta_i,$$

où g_i et h_i sont finis, c'est-à-dire, au plus, de l'ordre de

$$\frac{|y|}{|z^2|}\left[g_i\left(\frac{|z|^\mu}{|z^3|} + \frac{|x-a_i|^2}{|z^4|}\right) + h_i\frac{|x-a_i|}{|z^3|}\right].$$

Le coefficient de $\frac{|y|}{|z^2|}$ tend vers zéro quand $|z|$ croît indéfiniment.

Considérons, au contraire, le coefficient de i dans (12); on a

$$(x-\alpha_n)^2+y^2=x^2-2\alpha_n x+\alpha_n^2+y^2<3(x^2+y^2+\alpha_n^2),$$

puisque

$$|2\alpha_n x|<2\alpha_n^2+2x^2;$$

de plus,

$$\alpha_n^2+x^2+y^2\leq 2\alpha_n^2(x^2+y^2)$$

dès que $\alpha_n^2\geq 1$, et, dans ce cas,

$$(x-\alpha_n)^2+y^2<6\alpha_n^2(x^2+y^2).$$

Quand $\alpha_n^2<1$,

$$(x-\alpha_n)^2+y^2<6(x^2+y^2).$$

On en conclut

$$\sum\frac{|y|}{(x-\alpha_n)^2+y^2}>\frac{k'|y|}{6|z^2|}+\frac{|y|}{6(x^2+y^2)}\sum\frac{1}{\alpha_n^2},$$

ou

$$\sum\frac{|y|}{(x-\alpha_n)^2+y^2}>\frac{|y|}{|z^2|}\left(\frac{k'}{6}+\frac{1}{6}\sum\frac{1}{\alpha_n^2}\right)=\frac{|y|}{z^2}\theta,$$

k' et θ étant des quantités indépendantes de z, positives et, la première au moins, $\neq 0$.

Le coefficient de i dans $\frac{\Phi'}{\Phi}$ est $\frac{|y|}{|z|^2}(-\theta_1+\varepsilon)$, où θ_1 est fini et positif, et ε aussi petit qu'on veut dès que $|z|$ est suffisamment grand. Il ne peut être nul que si $y=0$.

Donc le nombre des racines imaginaires est limité.

La démonstration précédente s'applique encore quand on suppose que $\Phi(z)$ possède un nombre limité q de racines imaginaires; il suffira de remplacer dans les calculs $\Phi(z)$ par $X.\Phi(z)$, $\Phi(z)$ n'ayant que des racines réelles et étant de la forme (6), et X étant un polynome en z de degré q pair n'ayant que des racines imaginaires.

On aura

$$\frac{(X\varphi)'}{X\varphi}=\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{X'}{X},$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{X'}{X}+\frac{\varphi'}{\varphi}\right)=-\sum\frac{1}{(z-\alpha_n)^2}+\frac{XX''-X'^2}{X^2}.$$

Si

$$\begin{cases} X = A_0 z^q + A_1 z^{q-1} + \dots, \\ X' = q A_0 z^{q-1} + \dots, \\ X'' = q(q-1) A_0 z^{q-2} + \dots. \end{cases}$$

$$X''X = q(q-1) A_0^2 z^{2q-2} + \dots,$$

$$X'^2 = q^2 A_0^2 z^{2q-2} + \dots,$$

$$X''X - X'^2 = -q A_0^2 z^{2q-2} + \dots.$$

Dès que z dépasse une certaine limite finie, $X''X - X'^2$ est constamment négatif. Donc $\frac{X'}{X} + \frac{\varphi'}{\varphi}$ est toujours décroissant dans ses intervalles de continuité quand z est réel, et il ne peut s'annuler qu'une fois dans chacun de ces intervalles. Il en est de même de $\frac{X'}{X} + \frac{\Phi'}{\Phi}$.

D'autre part, $\frac{X'}{X}$ est évidemment réel quand z l'est, et l'on voit encore par la même démonstration que, si $\Phi'(x + yi) = 0$, y est nul dès que $|z$ dépasse une certaine limite (¹).

Finalement, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Soit $\Phi(z)$ une fonction quasi entière à $k+1$ points singuliers essentiels d'ordres apparents < 2; si $\Phi(z)$ n'a qu'un nombre limité de racines imaginaires, il en est de même de $\Phi'(z)$, $\Phi''(z)$, ... Entre deux racines réelles de $\Phi(z)$, de module supérieur à une limite finie, il y a une racine réelle de $\Phi'(z)$, et une seule.*

On pourrait chercher de la même manière à étendre au cas où les ordres apparents sont quelconques, mais finis, les théorèmes analogues de Laguerre pour les fonctions entières d'ordre fini et la démonstra-

(¹) Il suffira de distinguer les valeurs de y supérieures au module de la plus grande racine de $X = 0$, et les autres, pour lesquelles $\frac{x}{y}$ est très grand. Le coefficient de i dans $\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{X'}{X}$ est toujours de la forme $-\frac{y}{|z^2|}\theta_1$, où θ_1 est fini et positif.

tion qu'en a donnée M. Borel (¹). Nous laisserons ce point de côté pour le moment.

On peut encore établir, pour les fonctions quasi entières d'ordre fini, un autre théorème connu de la théorie des fonctions entières (²) :

THÉORÈME V. — *Parmi toutes les fonctions quasi entières*

$$\varphi(z)\mathrm{F}(z)-\varphi_1(z),$$

où $\mathrm{F}(z)$ *est une fonction quasi entière à* $k+1$ *points singuliers essentiels* $a_0, a_1, \ldots, a_k$ *d'ordres apparents* $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$, $\varphi(z)$ *et* $\varphi_1(z)$ *des fonctions quasi entières ayant les mêmes points singuliers essentiels, mais d'ordres apparents plus petits respectivement que ceux de* $\mathrm{F}(z)$ *pour un même point singulier essentiel* a_i, *il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à* ρ_i *pour* $z=a_i$.

En effet, on peut toujours prendre $a_i=\infty$, par exemple.

Supposons qu'il y en ait deux

$$(14)\qquad \begin{cases} \varphi(z)\mathrm{F}(z)-\varphi_1(z)=\Phi(z)e^{\mathrm{P}(z)}, \\ \psi(z)\mathrm{F}(z)-\psi_1(z)=\Psi(z)e^{\mathrm{Q}(z)}, \end{cases}$$

Φ et Ψ étant des produits canoniques de facteurs primaires d'ordres inférieurs à ρ pour $z=\infty$, et

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}(z)=\mathrm{X}(z)+\mathrm{X}_0\left(\dfrac{1}{z-a_0}\right)+\ldots+\mathrm{X}_k\left(\dfrac{1}{z-a_k}\right), \\ \mathrm{Q}(z)=\mathrm{Y}(z)+\mathrm{Y}_0\left(\dfrac{1}{z-a_0}\right)+\ldots+\mathrm{Y}_k\left(\dfrac{1}{z-a_k}\right), \end{cases}$$

$\mathrm{X}(z)$, $\mathrm{Y}(z)$ étant des polynomes en z de degrés ρ; $\mathrm{X}_0(z), \ldots, \mathrm{X}_k(z)$ d'une part, $\mathrm{Y}_0(z), \ldots, \mathrm{Y}_k(z)$ d'autre part, des fonctions entières ou des polynomes en z (ρ doit alors évidemment être entier). En éliminant F entre les deux équations (14), on obtient

$$(16)\qquad \varphi\Psi e^{\mathrm{Q}}-\psi\Phi e^{\mathrm{P}}=\psi\varphi_1-\psi_1\varphi.$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 36 et suiv.

(²) BOREL, *loc. cit.*, p. 95.

Considérons ce qui se passe aux environs du point critique essentiel $z = \infty$.

Soient, aux environs de ce point, λ le plus grand des ordres de $\varphi\Psi$, $\psi\Phi$, $\psi\varphi_1$, $-\psi_1\varphi$ qui sont des fonctions quasi entières d'ordres apparents $< \rho$ aux environs de $z = \infty$. Nous poserons

$$(17) \qquad \begin{cases} X(z) = A(z) + B(z), \\ Y(z) = A_1(z) + B_1(z), \end{cases}$$

$A(z)$, $A_1(z)$ désignant l'ensemble des termes de X et Y de degrés $> \lambda$.

On peut vérifier alors directement l'impossibilité de (16), d'abord si A et A_1 n'ont pas leurs termes de degrés les plus élevés identiques, ensuite si l'on n'a pas $A = A_1 = 0$. On peut aussi prendre les dérivées des deux membres de (16) et vérifier que la relation ainsi obtenue, jointe à (16), est impossible. (*Voir* la démonstration de M. Borel pour les fonctions entières.)

COROLLAIRE I. — *Parmi les fonctions* $\varphi F - \varphi_1$, *où* φ *et* φ_1 *sont d'ordres apparents tous plus petits respectivement que ceux de* $F(z)$, *il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à* ρ, *une d'ordre inférieur à* ρ_0, ..., *une d'ordre réel inférieur à* ρ_k, *enfin une au plus d'ordre réel inférieur à la fois à* $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$.

Soit, dans un quelconque des cas ci-dessus, χ le produit convergent ayant pour racines les racines communes à φ et φ_1 : on aura le même théorème ou le même corollaire pour les fonctions

$$\frac{\varphi}{\chi} F + \frac{\varphi_1}{\chi};$$

par suite, parmi les équations

$$(18) \qquad F + \frac{\varphi_1}{\varphi} = 0$$

il y en a une au plus dont l'ordre réel est inférieur à ρ_i aux environs de $z = a_i$.

COROLLAIRE II. — *Tout étant posé comme dans l'un des cas du*

théorème V ou de son corollaire I, parmi les équations

$$F + \frac{\varphi_1}{\varphi} = 0$$

il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à ρ_i *pour* $z = a_i$, *et* a fortiori *une au plus d'ordre réel inférieur à la fois à* $\rho, \rho_0, \ldots, \rho_k$.

Ce qui précède peut s'étendre à certaines catégories de fonctions quasi entières d'ordre infini. Ainsi (¹), soit $F(z)$ une fonction quasi entière vérifiant pour les grandes valeurs de z l'inégalité

$$|F(z)| < e^{e^{r^m}} \tag{19}$$

pour $|z| = r$, m étant une constante, ou des inégalités analogues aux environs de $z = a_i$, si $\left|\frac{1}{z - a_i}\right| = r$. Soient encore $\varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1$ des fonctions quasi entières d'ordres finis aux environs du point critique $z = a_i$ et telles que $\varphi\psi_1 - \psi_1\varphi \neq 0$.

Si les deux fonctions entières $\varphi F - \varphi_1$, $\psi F - \psi_1$ sont d'ordres réels finis aux environs du point critique $z = a_i$ (on pourra, par exemple, supposer $a_i = \infty$), $F(z)$ doit y être d'ordre fini, à moins que ces deux fonctions ne diffèrent que par un facteur constant.

En effet, soient

$$\begin{cases} \varphi F - \varphi_1 = \theta e^{G}, \\ \psi F - \psi_1 = \chi e^{H}, \end{cases} \tag{20}$$

où θ et χ sont des fonctions quasi entières d'ordres réels finis aux environs de $z = \infty$, G et H des fonctions quasi entières. Aux environs d'un point critique quelconque, θe^{G} et χe^{H} satisfont à des inégalités de la forme (19). Donc G et H sont d'ordres finis aux environs de ce point.

D'ailleurs, éliminant F entre les deux équations (20), on aura

$$\varphi\chi e^{H} - \psi\theta e^{G} = \psi\varphi_1 - \varphi\psi_1 \tag{21}$$

(¹) *Comparer* BOREL, *loc. cit.*, p. 100.

Cette relation est de la forme

$$Ae^{u} + Be^{G} = C,$$

où A, B, C sont des fonctions quasi entières d'ordres finis pour $z = \infty$. En prenant la dérivée des deux membres, on est conduit, comme dans le cas des fonctions entières, à une impossibilité (*voir* BOREL, *loc. cit.*); nous concluons donc :

THÉORÈME VI. — *Soient* $F(z)$ *une fonction quasi entière à* $k+1$ *points singuliers essentiels* $a_0, a_1, \ldots, a_k$; φ, φ_1 *des fonctions quasi entières d'ordres finis aux environs du point critique* $z = a_i$.

Si $\left|\frac{1}{|z-a_i|}\right| = r$, *et si, dès que* r *dépasse une limite finie,*

$$|F(z)| < e^{e^{r^m}}$$

pour $|z| = r$, m *étant une constante, parmi toutes les fonctions* $\varphi F - \varphi_1$ *qui diffèrent autrement que par un facteur constant il y en a une au plus d'ordre réel fini aux environs de* $z = a_i$, *à moins que* $F(z)$ *n'y soit d'ordre fini.*

COROLLAIRE I. — *Si* F, φ, φ_1 *jouissent des mêmes propriétés aux environs de tous les points critiques, parmi les fonctions* $\varphi F - \varphi_1$ *il y en a une au plus d'ordres réels tous finis, à moins que* $F(z)$ *n'ait tous ses ordres finis.*

COROLLAIRE II. — *Tout étant posé comme au théorème VI et au corollaire I, si* F *n'est pas d'ordre fini aux environs de* $z = a_i$ (*aux environs de tous les points critiques*), *parmi les équations*

$$F - \frac{\varphi_1}{\varphi} = 0$$

il y en a une au plus d'ordre réel fini aux environs de ce point aux environs de tous les points critiques).

On pourrait aller plus loin et considérer les fonctions quasi entières $F(z)$ d'ordre $\leq e^{e^{r^m}}$ aux environs de $z = a_i$. Des raisonnements de même nature conduisant à des résultats analogues paraissent applicables : nous ne nous y arrêterons pas pour le moment.

DÉFINITION. — *Une fonction monodrome qui, en dehors de $k+2$ points singuliers essentiels ∞, a_0, a_1, ..., a_{k+1}, n'a d'autres points critiques que des pôles sera dite une* fonction quasi méromorphe.

On peut former une fonction quasi entière Φ ayant pour pôles les pôles de cette fonction : $F\Phi$ est alors une fonction quasi entière Ψ; donc

$$F = \frac{\Psi}{\Phi} \quad (^1).$$

THÉORÈME VII. — *Toute fonction quasi méromorphe est le quotient de deux fonctions quasi entières.*

On peut encore étendre aux fonctions quasi méromorphes certains résultats relatifs aux fonctions méromorphes (²) et en indiquer de nouveaux.

Supposons que les ordres

$$\rho, \quad \rho_0, \quad \ldots, \quad \rho_k,$$
$$\sigma, \quad \sigma_0, \quad \ldots, \quad \sigma_k$$

de Ψ et Φ soient tous finis : si

$$\tau, \quad \tau_0, \quad \ldots, \quad \tau_k$$

sont les plus grands des nombres ρ et σ, ρ_0 et σ_0, ..., ρ_k et σ_k, nous dirons que F est d'ordres finis τ, τ_0, ..., τ_k.

Soient φ_1 et ψ_1 deux fonctions quasi méromorphes distinctes et

$$(22) \qquad \begin{cases} F - \varphi_1 = 0e^G \quad (^3), \\ F - \psi_1 = \eta e^H; \end{cases}$$

(¹) WEIERSTRASS, *loc. cit.*

(²) BOREL, *Ann. de l'École Normale*, 1901, p. 215.

(³) e^G est d'ordre τ aux environs de $z = \infty$, car, sinon,

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \theta = \frac{\gamma}{\delta}, \qquad \varphi_1 + 0e^G = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma e^G}{\beta\delta},$$

φ_1 et θ étant d'ordres $< \tau$, il en serait de même de $\alpha\delta + \beta\gamma e^G$.

supposons que les ordres de φ_1 et ψ_1 soient tous inférieurs respectivement à ceux de F et que θ et η soient les quotients de produits de facteurs primaires relatifs à $F-\varphi_1$ et $F-\psi_1$.

G et H sont des expressions de la forme (15) :

$$G = X(z) + X_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \dots,$$

$$H = Y(z) + Y_0\left(\frac{1}{z-a_0}\right) + \dots,$$

où $X(z)$, $X_0(z)$, ..., $Y(z)$, $Y_0(z)$, ... sont des polynomes.

Les ordres de θ et η, qui sont les ordres réels de $F-\varphi_1$ et $F-\psi_1$, étant supposés inférieurs à ceux de F, ces derniers sont égaux aux degrés des polynomes $X(z)$ et $Y(z)$, $X_0(z)$ et $Y_0(z)$, ...

(22) donne

$$\psi_1 - \varphi_1 = \theta e^{G} - \eta e^{H}. \tag{23}$$

Écrivons encore, comme dans (17),

$$\begin{cases} X(z) = A(z) + B(z), \\ Y(z) = A_1(z) + B_1(z), \end{cases}$$

A et A_1 désignant l'ensemble des termes de X et Y de degrés $> \lambda$, λ étant le plus grand des ordres de φ_1, ψ_1, θ, η; il suffit maintenant de remarquer que (23), quand on y chasse les dénominateurs, se ramène à la forme

$$Ae^{G} + Be^{H} = C,$$

où A, B, C sont des fonctions quasi entières d'ordres $< \tau, \tau_0, \dots, \tau_k$; nous avons vu qu'une relation de cette nature est impossible [équations (16) et (21)].

Nous en concluons ce théorème :

THÉORÈME VIII. — *Parmi toutes les fonctions quasi méromorphes* $F-\varphi_1$ *d'ordres finis, où* F *est une fonction quasi méromorphe d'ordres* $\tau, \tau_0, \dots, \tau_k$ *finis, à* $k+2$ *points singuliers essentiels*

(*dont* $z = \infty$), φ_1 *une quelconque des fonctions quasi méromorphes d'ordres tous plus petits,* F *et* φ_1 *ayant les mêmes points critiques essentiels, il y en a une au plus dont tous les ordres réels sont inférieurs à ceux de* F (¹).

Nous allons de même établir pour les fonctions quasi méromorphes un théorème de MM. Picard et Borel pour les fonctions méromorphes :

Théorème IX. — *Étant donné une fonction quasi méromorphe* $F(z)$ *d'ordres* $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$ *à* $k+2$ *points singuliers essentiels (dont* $z = \infty$), *parmi les équations*

$$F(z) = \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ *désigne une fonction quasi méromorphe d'ordres tous inférieurs à* $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$, *il y en a au plus deux qui soient exceptionnelles, c'est-à-dire telles que l'un au moins des exposants de convergence des suites des modules de leurs racines soit inférieur à l'ordre correspondant parmi les nombres* $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$.

Il suffit de suivre à peu près la même marche que M. Borel pour les fonctions méromorphes.

On considère encore les diverses fonctions

$$g(z) = \frac{MF + N}{M'F + N'},$$

avec $MN' - M'N \neq 0$, M, M', N, N' étant des fonctions quasi entières d'ordres tous inférieurs à $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$. On distingue trois cas :

(¹) Un théorème semblable, par analogie avec le théorème V et ses corollaires, a évidemment lieu aux environs de chaque point critique, F étant une fonction quasi méromorphe d'ordre fini aux environs d'un point critique seulement : nous n'insistons pas. Ces résultats et ceux du théorème VIII sont nouveaux, même pour les fonctions méromorphes.

PREMIER CAS. — *Aucune des transformées $g(z)$ n'est une fonction quasi entière* (1) *aux environs d'aucun des points critiques* ∞, $a_0, \ldots, a_k$.

Dans ce cas,

$$F(z) = -\frac{N'}{M'}$$

admet $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$ comme exposants de convergence de ses racines.

En effet, ceci revient à dire, si $F = \frac{F_1}{F_2}$, F_1 et F_2 étant des fonctions quasi entières, que

$$M'F_1 + N'F_2$$

est une fonction quasi entière d'ordres réels $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$. Si l'ordre de cette fonction aux environs de $z = a_i$ était $< \tau_i$, on pourrait trouver une fonction entière M d'ordres $< \tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$ et ayant les mêmes zéros aux environs de $z = a_i$;

$$g(z) = \frac{MF(z)}{M'F(z) + N'} = \frac{MF_1}{M'F_1 + N'F_2}$$

n'a plus d'infinis aux environs de $z = a_i$: c'est une fonction quasi entière aux environs de ce point, contrairement à l'hypothèse faite.

DEUXIÈME CAS. — *Parmi les transformées $g(z)$ il y a des fonctions quasi entières aux environs d'un au moins des points critiques a_i, mais ces fonctions quasi entières sont toutes d'ordre réel τ_i.*

Soit

$$\gamma(z) = \frac{\mu F + \nu}{\mu_1 F + \nu_1}$$

(1) Nous dirons que

$$g(z) = \varphi(z)\,\varphi_0\left(\frac{1}{z - a_0}\right) \cdots \varphi_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$$

(théorème II), où $\varphi(z)$, $\varphi_0(z)$, ..., $\varphi_k(z)$ sont des fonctions méromorphes de z, est quasi entière aux environs du point critique a_i si $\varphi_i(z)$ n'a qu'un nombre limité de pôles.

(μ, μ_1, ν, ν_1 fonctions quasi entières d'ordres inférieurs à $\tau, \tau_0 \ldots, \tau_k$, avec $\mu\nu_1 - \nu\mu_1 \neq 0$) une des transformées de $F(z)$ qui soit fonction entière aux environs de $z = a_i$.

En raisonnant comme M. Borel, on voit que les équations

$$F = -\frac{N}{M}$$

ou

$$g(z) = \frac{MF + N}{M} = 0$$

admettent τ_i comme exposant de convergence de la suite des modules de leurs zéros aux environs de $z = a_i$, à moins que l'on n'ait

$$\frac{N}{M} = \frac{\nu_1}{\mu_1}.$$

Si la même circonstance se présente aux environs de plusieurs des points critiques, en nombre k', on devra avoir à la fois

$$\frac{N}{M} = \frac{\nu_1}{\mu_1} = \frac{\nu_2}{\mu_2} = \ldots = \frac{\nu_{k'}}{\mu_{k'}}.$$

Finalement, dans le cas supposé ici, il y a au plus une équation exceptionnelle.

Troisième cas. — *Parmi les transformées $g(z)$ il y a des fonctions quasi entières aux environs d'un au moins des points critiques a_i, mais une au moins de ces fonctions y est d'ordre réel inférieur à τ_i.*

Il nous suffira de considérer le cas où $a_i = \infty$. L'ordre apparent de cette fonction γ est τ et

$$\gamma = MA\, e^{P(z)},$$

où P est un polynome de degré τ, M une fonction entière de z d'ordre $< \tau$, A une fonction quasi méromorphe d'ordres $\leq \tau_0, \ldots, \tau_k$ n'ayant pour points critiques essentiels que $a_0, \ldots, a_k$.

On a

$$F = \frac{\mu MA e^{P} + \nu}{\mu_1 MA e^{P} + \nu_1}, \tag{24}$$

avec $\mu\nu_1 - \nu\mu_1 \neq 0$, μ, μ_1, ν, ν_1 étant des fonctions quasi entières d'ordres $< \tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$, $0 = F(z) + \frac{N'}{M'}$ équivaut à

$$\frac{M'(\mu MA e^{P} + \nu) + N'(\mu_1 MA e^{P} + \nu_1)}{M'(\mu_1 MA e^{P} + \nu_1)} = 0. \tag{25}$$

Supposons d'abord que le numérateur et le dénominateur aient des racines communes, elles satisfont à

$$M'^2(\mu MA e^{P} + \nu) = 0,$$
$$M'(\mu_1 MA e^{P} + \nu_1) = 0;$$

comme on suppose $M' \neq 0$, $N' \neq 0$, elles devront satisfaire soit à $\mu\nu_1 - \nu\mu_1 = 0$, soit à $M' = 0$, c'est-à-dire à des équations d'ordres inférieurs à $\tau, \tau_0, \ldots, \tau_k$.

Ceci posé, considérons le numérateur de (25) qui est de la forme

$$(M'\mu + N'\mu_1) MA e^{P} + M'\nu + N'\nu_1 = 0.$$

Si $M'\mu + N'\mu_1 \neq 0$, $M'\nu + N'\nu_1 \neq 0$, appliquons-lui le théorème V en chassant le dénominateur de A : parmi les fonctions quasi entières d'ordre inférieur à τ aux environs de $z = \infty$, et de la forme

$$\varphi e^{P} - \varphi_1,$$

il y en a une au plus d'ordre réel inférieur à τ pour $z = \infty$. Ici cette fonction est évidemment (à un facteur constant près) φe^{P}; si φ et φ_1 sont $\neq 0$, $\varphi e^{P} - \varphi_1$ est d'ordre τ. Donc, quand $M'\mu + N'\mu_1 \neq 0$, $M'\nu + N'\nu_1 \neq 0$, le numérateur de (25) est d'ordre réel τ, et l'exposant de convergence de la suite des modules de ses racines est τ.

Si

$$M'\mu + N'\mu_1 = 0,$$

on a

$$\frac{N'}{M'} = -\frac{\mu}{\mu_1};$$

le rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$ étant parfaitement déterminé d'après (24), on a une équation correspondante unique exceptionnelle.

De même pour $M'\nu + N'\nu_1 = 0$: on a ainsi deux équations exceptionnelles.

Si l'une de ces circonstances se présente aux environs de plusieurs points critiques, on aura des valeurs analogues $\frac{\mu'}{\mu_1'}, \frac{\nu'}{\nu_1'}, \ldots$, qui devront être égales chacune à l'un des rapports $\frac{\mu}{\mu_1}, \frac{\nu}{\nu_1}$. En tout cas, on aura encore au plus deux équations exceptionnelles. C. Q. F. D.