JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LAURENT

Sur les séries de polynômes

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 8 (1902), p. 309-328.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8__309_0>

Sur les séries de polynomes;

PAR M. H. LAURENT.

On sait qu'une fonction synectique dans un contour fermé peut, d'une infinité de manières, se développer, pour tous les points intérieurs à ce contour, en une série de polynomes. Les méthodes pour arriver au résultat consistent à développer (si l'on veut) d'abord $\frac{1}{z-x}$ et à faire usage de la formule de Cauchy

$$f(x) = \mathcal{L}\frac{f(z)}{z-x}.$$

Malheureusement les méthodes en question ne fournissent les polynomes ordonnateurs que sous la forme d'intégrales assez difficiles à calculer. Je me suis demandé s'il ne serait pas possible de se donner *a priori* ces polynomes ordonnateurs, et bien que la solution que j'ai trouvée présente encore bien des difficultés dans les applications, elle fournit un assez grand nombre de solutions de la question, comme on le verra dans ce qui suit :

D'après ce qui vient d'être dit, on peut se borner à chercher les développements de $\frac{1}{z-x}$ et c'est ce que j'ai fait.

On verra d'ailleurs que le développement d'une fonction suivant les polynomes n'est pas un pur objet de curiosité, et qu'il peut fournir, comme la formule de Taylor, des propriétés générales appartenant à toutes les fonctions synectiques.

THÉORÈME I. — *Étant données des séries convergentes en dehors du cercle de rayon* R *décrit de l'origine comme centre*

$$Q_1 = \frac{1}{x} + \frac{q_{12}}{x^2} + \frac{q_{13}}{x^3} + \ldots,$$

$$Q_2 = \frac{1}{x^2} + \frac{q_{23}}{x^3} + \frac{q_{24}}{x^4} + \ldots,$$

$$Q_3 = \frac{1}{x^3} + \frac{q_{34}}{x^4} + \frac{q_{35}}{x^5} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et où les q_{ij} *sont des coefficients indépendants de* x, *il existera toujours des polynomes entiers en* x, $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ *de degrés* 0, 1, 2, 3, ... *respectivement et tels que les résidus*

$$\mathcal{E}\, Q_{i+1} P_j \tag{1}$$

soient tous nuls, excepté si $i = j$; *dans ce cas on peut les supposer égaux à l'unité.*

En effet, soit

$$P_i = x^i + a_1 x^{i-1} + \ldots + a_i;$$

en égalant à zéro les coefficients de $\frac{1}{x}$ dans $P_i Q_1$, $P_i Q_2$, ..., $P_i Q_i$, on a

$$\left\{\begin{array}{r} a_i + q_{12} a_{i-1} + \ldots + q_{1\,i+1} = 0, \\ a_{i-1} + a_{i-2} q_{23} + a_{i-3} q_{24} + \ldots + q_{2\,i+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_1 + q_{i\,i+1} = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Ces équations, à partir de la dernière, déterminent sans ambiguïté $a_1, a_2, \ldots$; quant aux résidus de $P_i Q_{i+1}$, $P_i Q_{i+2}$, ..., ils sont évidemment $1, 0, 0, 0, \ldots$ respectivement. Notre théorème est donc démontré.

Si, au lieu de se donner les Q, on se donnait les P, les équations (2) détermineraient les q_{ij} et, par suite, les Q, mais rien ne prouve que les séries $Q_1, Q_2, \ldots$ sont convergentes; il faudra donc, après avoir calculé les q_{ij}, s'assurer que les Q sont convergents à l'extérieur d'un cercle de rayon nul ou fini. Donc :

THÉORÈME II. — *Étant donnés des polynomes* $P_0, P_1, P_2, \ldots$ *de degrés* $0, 1, 2, \ldots$, *il existera des séries* $Q_1, Q_2, \ldots$ *donnant lieu,* FORMELLEMENT, *aux formules*

$$\mathcal{L}\, Q_{i+1} P_j = 0,$$

excepté pour $i = j$; *ces séries ne seront pas toujours convergentes, mais leurs coefficients seront bien déterminés.*

Supposons les P donnés, formons la série

$$\varphi(x) = \frac{1}{P_0} + \frac{1}{P_0 P_1} + \ldots + \frac{1}{P_i P_{i+1}} + \ldots;$$

cette série ne sera pas, en général, convergente, mais on peut examiner le cas où elle l'est; en tout cas, on peut poser

$$(3) \qquad \varphi_{ij} = \frac{1}{P_j P_{j+1}} + \frac{1}{P_{j+1} P_{j+2}} + \ldots + \frac{1}{P_{i-1} P_i}.$$

D'après la théorie de l'élimination, il existe des polynomes N_0, $N_1, \ldots, N_i, \ldots$ des degrés $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ tels que

$$P_i N_{i+1} - N_i P_{i+1} = 1.$$

Mais alors il faut que P_i et P_{i+1} n'aient pas de facteur commun, et

$$\frac{N_{i+1}}{P_{i+1}} - \frac{N_i}{P_i} = \frac{1}{P_i P_{i+1}},$$

et par suite

$$\frac{N_{l+1}}{P_{l+1}} = \frac{N_0}{P_0} + \left(\frac{N_1}{P_1} - \frac{N_0}{P_0}\right) + \ldots + \left(\frac{N_{l+1}}{P_{l+1}} + \frac{N_l}{P_l}\right),$$

ou

$$\frac{N_{l+1}}{P_{l+1}} = \frac{N_0}{P_0} + \frac{1}{P_0 P_1} + \ldots + \frac{1}{P_l P_{l+1}},$$

et aussi

$$\frac{N_i}{P_i} - \frac{N_j}{P_j} = \frac{1}{P_j P_{j+1}} + \frac{1}{P_{j+1} P_{j+2}} + \ldots + \frac{1}{P_{i-1} P_i} = \varphi_{ji}.$$

Si l'on multiplie cette quantité φ_{ij} par $P_j P_i$, on obtient un résultat entier, donc

$$\mathcal{E}\, \varphi_{ji} P_i P_j = 0;$$

si on le multiplie par $P_k P_j$, k étant inférieur à i, on a évidemment

$$\mathcal{E}\, \varphi_{ji} P_k P_j = 0;$$

on a aussi

$$\mathcal{E}\, \varphi_{ji} P_j^2 = 1;$$

si k est compris entre i et j, on a

$$\mathcal{E}\, \varphi_{ji} P_j P_k = \mathcal{E}\, \varphi_{jk} P_j P_k + \mathcal{E}\, \varphi_{ki} P_j P_k.$$

Les deux derniers résidus sont nuls, en vertu des remarques précédentes, donc $\mathcal{E}\, \varphi_{ji} P_i P_k$ est nul toutes les fois que $k < i$, et, en particulier, on aura (excepté si $j = k$)

$$\mathcal{E}\, \varphi_{j\infty} P_i P_k = 0;$$

donc on pourra prendre

$$Q_{j+1} = \varphi_{j\infty} P_j. \tag{4}$$

(Il ne faut pas oublier que les P ont été supposés tels que P_j et P_{j+1}

n'ont pas de facteur commun. Ainsi, en prenant $P_1 = x$, $P_2 = x^2, \ldots,$ $P_j = x^j, \ldots$ et

$$Q_{j+1} = \frac{1}{x^{j+1}} + \frac{1}{x^{j+2}} + \ldots,$$

on n'aurait pas $\mathcal{L}\, Q_j x^k = 0$ si $k > j$.)

Lorsque, dans (4), on fait $j = 0$, on a $P_0 = 1$ et

$$Q_1 = \varphi_{0\infty} = \frac{1}{P_0 P_1} + \frac{1}{P_1 P_2} + \ldots = \varphi - 1,$$

et $\varphi = 1 + Q_1$; φ, on le voit, doit être convergent hors d'un cercle ayant son centre à l'origine.

Nous avons assujetti les polynomes P à satisfaire à la condition

$$\mathcal{L}\, P_i Q_{i+1} = 1;$$

on aurait pu les assujettir simplement à donner d'autres valeurs différentes de zéro et fonctions de l'indice i; on se donne ainsi plus de latitude.

Posons

$$\psi(x) = \frac{\alpha_0}{P_0} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{P_0 P_1} + \ldots + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}{P_{n-1} P_n} + \ldots,$$

on pourra choisir les α de manière à rendre la série ψ convergente si la série que nous avons désignée par φ ne l'est pas; et, si l'on pose

$$\psi_{ij} = \frac{\alpha_0 \ldots \alpha_{j+1}}{P_j P_{j+1}} + \ldots + \frac{\alpha_0 \ldots \alpha_{i+1}}{P_i P_{i+1}},$$

il existera des polynomes de degrés i et $i+1$ tels que

$$N_{i+1} P_i - N_i P_{i+1} = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{i+1},$$

ou

$$\frac{N_{i+1}}{P_{i+1}} - \frac{N_i}{P_i} = \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{i+1}}{P_{i+1} P_i};$$

et, par suite,

$$\frac{N_i}{P_i} = \frac{\alpha_0}{P_0} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{P_0 P_1} \cdots \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_i}{P_{i-1} P_i},$$

et

$$\frac{N_i}{P_i} - \frac{N_j}{P_j} = \frac{\alpha_1 \ldots \alpha_{j+1}}{P_j P_{j+1}} + \ldots + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{i+1}}{P_i P_{i+1}} \psi_{ij}.$$

On verra alors, comme plus haut, que

$$\mathcal{L} \psi_{j\infty} P_j P_k = 0 \qquad \text{si } j \gtrless k,$$

et que

$$\mathcal{L} \psi_{j\infty} P_j^2 = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{j+1}$$

si le coefficient de Hx^j dans P_j est égal à 1; alors, en faisant

$$\psi_{j\infty} P_j = Q_{j+1},$$

on aura

$$\mathcal{L} Q_{j+1} P_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \gtrless j, \\ \alpha_0 \ldots \alpha_{j+1} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Considérons maintenant une suite de fonctions entières $P_0 = 1$, P_1, P_2, ... des degrés 0, 1, 2, ... en x. Supposons, ce qui est toujours permis, que le coefficient de x^n dans P_n ait été réduit à l'unité. Supposons, enfin, qu'il ait été possible de choisir les constantes α_0, α_1, ... de manière à rendre la série

$$\frac{\alpha_0}{P_0} + Q_1 = \frac{\alpha_0}{P_0} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{P_0 P_1} + \ldots + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_i}{P_{i-1} P_i} + \ldots$$

convergente pour une certaine valeur r du module de x et pour des valeurs plus grandes $\Big($la série Q_1 étant ordonnée si l'on veut par rapport aux puissances de $\frac{1}{x}$, cette série sera convergente en dehors d'un cercle décrit de l'origine comme centre$\Big)$.

Tout polynome $F(x)$ du degré n pourra se mettre sous la forme

$$F(x) = g_0 P_0 + g_1 P_1 + \ldots + g_n P_n,$$

g_0, g_1, ... étant indépendants de x; alors en multipliant par Q_{i+1} et en prenant des résidus, on aura

$$\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{i+1}g_i = \mathcal{E}\,\mathrm{F}(x)\mathrm{Q}_{i+1},$$

et, par suite,

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{P}_0}{\alpha_0\alpha_1}\mathcal{E}\,\mathrm{F}(x)\mathrm{Q}_1 + \ldots + \frac{\mathrm{P}_n}{\alpha_0\ldots\alpha_{n+1}}\mathcal{E}\,\mathrm{F}(x)\mathrm{Q}_{n+1};$$

et, en particulier, si l'on pose

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}_1 &= \frac{q_{11}}{x} + \frac{q_{12}}{x^2} + \ldots, & q_{11} &= \alpha_0\alpha_1,\\
\mathrm{Q}_2 &= \frac{q_{22}}{x^2} + \frac{q_{23}}{x^3} + \ldots, & q_{22} &= \alpha_0\alpha_1\alpha_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mathrm{Q}_n &= \frac{q_{nn}}{x^n} + \frac{q_{nn+1}}{x^{n+1}} + \ldots, & q_{nn} &= \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n,
\end{aligned}$$

on aura

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
x^n &= \mathrm{P}_0\frac{q_{1n+1}}{\alpha_0\alpha_1} + \mathrm{P}_1\frac{q_{2n+1}}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} + \ldots + \mathrm{P}_n,\\
x^{n+1} &= \mathrm{P}_0\frac{q_{1n}}{\alpha_0\alpha_1} + \mathrm{P}_1\frac{q_{2n}}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} + \ldots + \mathrm{P}_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x &= \mathrm{P}_0\frac{q_{12}}{\alpha_0\alpha_1} + \mathrm{P}_1,\\
1 &= \mathrm{P}_0.
\end{aligned}\right.$$

On tire de là

$$(6)\qquad \mathrm{P}_n = \begin{vmatrix}
x^n & \frac{q_{1n+1}}{\alpha_0\alpha_1} & \frac{q_{2n+1}}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} & \ldots & \frac{q_{n,n+1}}{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}\\
x^{n-1} & \frac{q_{1n}}{\alpha_0\alpha_1} & \frac{q_{2n}}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} & \ldots & 1\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .\\
x & \frac{q_{12}}{\alpha_0\alpha_1} & 1 & \ldots & 0\\
1 & 1 & 0 & \ldots & 0
\end{vmatrix}.$$

Les α sont toujours arbitraires, à cela près que Q_1 doit être convergent, nous supposerons qu'on les ait choisis de telle sorte que non seulement Q_i soit convergent, mais encore de telle sorte que le produit $H = z\frac{Q_1(z)}{\alpha_0\alpha_1}z^2\frac{Q_2(z)}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}z^3\frac{Q_3(z)}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\cdots$ soit lui-même convergent et absolument convergent. La formule (6), en désignant toujours par r le module de x, par r'_{ij} celui de q_{ij} et par α'_i celui de α_i, donne

$$\operatorname{mod} P_n < (1 + r + \ldots + r^n)\left(1 + \frac{q'_{12}}{\alpha'_0\alpha'_1} + \ldots + \frac{q'_{n\,n+1}}{\alpha'_0\alpha'_1}\right)\ldots\left(1 + \frac{q'_{n,n+1}}{\alpha'_0\ldots\alpha'_n}\right).$$

Soit ρ le module de z, supposons le produit H convergent pour $z = 1$, soit η son module pour $z = 1$; la formule précédente donnera

$$\operatorname{mod} P_n < \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}\eta.$$

Considérons alors la série suivante où $\rho > r$:

$$(7) \qquad \frac{P_0(x)Q_1(z)}{\alpha_0\alpha_1} + \frac{P_1(x)Q_2(z)}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} + \ldots;$$

son terme général $\frac{P_0(x)Q_{n+1}(z)}{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n+1}}$ aura un module moindre que

$$\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}\eta\left(\frac{\varphi'_{n+1,n+1} + \ldots}{\alpha'_0\ldots\alpha'_{n+1}}\right)\frac{1}{\rho^{n+1}}.$$

Supposons $\rho > r$, la racine n de cette quantité finira par devenir inférieure à l'unité, la quantité entre parenthèses ayant pour limite *un*; la série (7) est donc convergente dans les hypothèses que nous avons faites. Sa valeur est facile à calculer; en effet, des formules (5) on tire

$$\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \ldots + \frac{x^n}{z^{n+1}} = P_0(x)\frac{Q_1(z)}{\alpha_0\alpha_1} + \ldots + P_n(x)\frac{Q_n(z)}{\alpha_0\ldots\alpha_{n+1}} + \lambda,$$

λ étant une quantité qui contient une partie des termes de l'expression (7) changés de signe, dans lesquels $\frac{1}{z^n}$ entre en facteur; λ tend vers zéro quand n croît indéfiniment, en sorte que, pour $n = \infty$, la formule précédente devient

$$(8) \qquad \frac{1}{z-x} = P_0(x)\frac{Q_1(z)}{\alpha_0\alpha_1} + P_1(x)\frac{Q_2(z)}{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} + \ldots$$

Il est hors de doute que cette formule en général doit avoir lieu avec des hypothèses moins restrictives que celles que nous avons faites. Supposons donc que, en procédant d'une manière quelconque, on ait trouvé pour chaque valeur de z, par exemple, la région dans laquelle se trouvent les valeurs de x qui rendent le second membre de (8) convergent, cette région R contiendra celle que nous avons trouvée R'; or, dans la région R, $\frac{1}{z-x}$ et le second membre de (8) sont synectiques, elles sont égales dans la région finie R', donc elles sont encore égales dans la région R.

Pour trouver des développements de $\frac{1}{z-x}$ en série de polynomes, on peut partir des Q ou des P; mais en partant des P, quoique la méthode paraisse plus féconde, on s'impose une obligation : P_i et P_{i+1} doivent être premiers entre eux (en réalité, on pourrait s'affranchir de cette obligation, mais ce serait au prix de complications gênantes). Nous allons maintenant faire quelques applications.

Supposons que l'on prenne $a_1 = \frac{1}{V_1}$, $Q_2 = \frac{1}{V^2}\cdots$, $V_1, V_2, \ldots$, désignant des polynomes entiers de degrés 1, 2, ... de la forme

$$V_n = (x - a_{n1})\ldots(x - a_{nn});$$

les a étant indépendants de x, on aura

$$z_n Q_n(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{a_{n1}}{z}\right)\cdots\left(1 - \frac{a_{nn}}{z}\right)}.$$

L'expression des P sera, en général, compliquée, et pour qu'ils soient d'une forme utile il faut restreindre la généralité des V. Aussi astreindrons-nous les P à être égaux aux V. Il faudra donc trouver des polynomes V tels que

$$\mathcal{L}\frac{V_i}{V_j} = 0 \quad \text{si} \quad i \gtrless j+1, \qquad \mathcal{L}\frac{V_i}{V_{i+1}} = 1;$$

la dernière condition est satisfaite d'elle-même, la première l'est si $j > i+1$. On a donc à satisfaire aux équations

$$\mathcal{L}\frac{V_2}{V_1} = 0,$$

$$\mathcal{L}\frac{V_3}{V_1} = 0, \qquad \mathcal{L}\frac{V_3}{V_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La première équation détermine V_2, les deux suivantes déterminent V_3, etc., mais V_1, V_2, ... conservent chacune un coefficient arbitraire. On peut donc poser

$$V_1 = x - a_1,$$

a_1 étant arbitraire; l'équation

$$\mathcal{L}\frac{V_2}{V_1} = 0$$

donne

$$\frac{V_2(a_1)}{V_1'(a_1)} = 0 \qquad \text{ou} \qquad V_2(a_1) = 0;$$

donc, on doit poser

$$V_2 = (x - a_1)(x - a_2);$$

a_2 est arbitraire. Les formules

$$\mathcal{L}\frac{V_2}{V_1} = 0, \qquad \mathcal{L}\frac{V_3}{V_2} = 0$$

donnent

$$\frac{V_3(a_1)}{V'(a_1)} = 0, \qquad \frac{V_3(a_1)}{V_2'(a_1)} + \frac{V_3(a_2)}{V_2'(a_2)} = 0$$

ou

$$V_3(a_1) = 0, \qquad V_3(a_2) = 0;$$

donc

$$V_3 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3),$$

et a_3 est arbitraire, et ainsi de suite. On a alors

$$\frac{z^n - x^n}{z^n(z-x)} = \mathcal{L}\frac{z^n - x^n}{z^n(z-x)}\frac{1}{x-a_1} + \dots$$
$$+ \left(\mathcal{L}\frac{z^n - x^n}{z^n(z-x)}\frac{1}{(x-a_1)\dots(x-a_{n+1})}\right)V_n$$

ou

$$\frac{1}{z-x}-\frac{x^n}{z^n(z-x)}=\frac{1}{z-a_1}+\frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)}+\ldots+\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(z-a_1)\ldots(z-a_{n+1})}$$
$$-\frac{1}{z^n}\left[\mathcal{L}\frac{x^n}{z-x}\frac{1}{x-a_1}+\ldots+V_n\mathcal{L}\frac{x^n}{z-x}\frac{1}{(x-a_1)\ldots(x-a_{n+1})}\right].$$

Et si la série, dont le terme général est $\frac{V_n(x)}{V_n(z)}$, est convergente, on aura, en faisant $n=\infty$,

$$\frac{1}{z-x}=\frac{1}{z-a_1}=\frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)}+\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}+\ldots.$$

On rencontre fréquemment en Analyse des polynomes P_n de degré n, liés entre eux par une équation aux différences finies de la forme

$$P_{n+1}=(\beta_{n+1}x+\gamma_{n+1})P_n-\alpha_{n+1}P_{n-1}$$

où les α, les β et les γ sont indépendants de x; il existe alors des polynomes N_n différents des P et tels que

$$N_{n+1}=(\beta_{n+1}x+\gamma_{n+1})N_n-\alpha_{n+1}N_{n-1},$$

N_n étant toujours de degré N, en éliminant $\beta_{n+1}x+\gamma_{n+1}$. On a

$$P_{n+1}N_n-N_{n+1}P_n=(P_nN_{n-1}-N_nP_{n-1})\alpha_{n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$=(P_1N_0-N_1P_0)\alpha_2\alpha_0\ldots\alpha_{n+1}.$$

Or N_0 et N_1 renfermant trois coefficients, on peut en disposer de telle sorte que $P_1N_0-N_1P_0=-\alpha_0\alpha_1$ et finalement on a

$$\frac{N_{n+1}}{P_{n+1}}-\frac{N_n}{P_n}=\frac{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n+1}}{P_nP_{n+1}}$$

et

$$\frac{N_i}{P_i}-\frac{N_j}{P_j}=\frac{\alpha_0\ldots\alpha_{j+1}}{P_jP_{j+1}}+\ldots+\frac{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_i}{P_{i-1}P_i}.$$

Si la série

$$\sum\frac{\alpha_0\ldots\alpha_i}{P_iP_j}$$

est convergente et si l'on pose

$$Q_{j+1} = P_j \left(\frac{\alpha_0 \ldots \alpha_{j+1}}{P_j P_{j+1}} + \frac{\alpha_0 \ldots \alpha_{j+2}}{P_{j+1} P_{j+2}} + \ldots \right),$$

on aura, comme plus haut,

$$\mathcal{L} Q_{j+1} P_i = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad i \gtrless j, \\ \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{j+1} \dfrac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}}, \end{cases}$$

λ_i désignant le coefficient de x^j dans P_j qui, ici, n'est plus égal à 1. Une discussion analogue à celle qui a déjà été faite permettra souvent de développer $\frac{1}{z-x}$, suivant une série de polynomes P.

Si l'on pose $P_n = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, P_{n+1} et P_{n-1} n'auront pas de facteur commun; la série

$$\sum \frac{1}{(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)}$$

et, par suite,

$$\sum \frac{x^2 - 1}{(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)} = \sum \frac{1}{P_n P_{n+1}}$$

sera convergente pour $\operatorname{mod} x > 1$ et le cercle de rayon 1, décrit de l'origine comme centre, sera pour cette série une coupure; la série

$$P_0(x) Q_1(z) + P_1(x) Q_2(z) + \ldots$$

sera convergente pour $\operatorname{mod} z > 1$ et $\operatorname{mod} x < 1$; elle représentera $\frac{1}{z-x}$.

Si l'on suppose que P_n soit le polynome de X_n de Legendre, on sait que la série $\sum \frac{1}{P_n P_{n+1}}$ est convergente pour $\operatorname{mod} x > 1$ et que $\frac{1}{z-x}$ est développable en série de polynomes P_n. M. Heine a donné une expression des coefficients; nos méthodes donnent une nouvelle expression de ces coefficients.

Supposons que l'on prenne

$$Q_1 = \frac{V'}{V}, \qquad Q_2 = \frac{d}{dx} \frac{V'}{V}, \qquad \ldots, \qquad Q_n = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{V'}{V}, \qquad \ldots,$$

V désignant un polynome entier ayant pour racines $a_1, a_2, \ldots, a_0$, nous n'aurons plus pour les Q_i des séries commençant par des termes dont les coefficients seront égaux à l'unité, mais nous poserons toujours

$$\mathcal{L}\, Q_{i+1} P_j = 0 \quad \text{si} \quad i \gtrless j,$$

$$\mathcal{L}\, Q_{i+1} P_i \text{ différent de } 0.$$

Si $i < j$ ces formules sont satisfaites. Supposons donc $i > j$ ou $i = j$; si nous intégrons par parties, nous avons

$$\mathcal{L}\, Q_{j+i} P_i$$

ou

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^j}{dx^j}\frac{V'}{V}\right) P_i = (-1)\,\mathcal{L}\left(\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\frac{V'}{V}\right) P_i' = \ldots;$$

$$(-1)^j\,\mathcal{L}\,\frac{V'}{V}\,P_i^j = (-1)^j\,\Sigma P_i^j(a_k),$$

et le dernier membre se réduit à $(-1)^j j!\, s$ si $i = j$. Le polynome P_i est donc déterminé par les relations

$$\Sigma P_i(a_k) = 0, \qquad \Sigma P_i'(a_k) = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma P_i^{i-1}(a_k) = 0;$$
$$\Sigma P_i^i(a_k) = (-1)^i\, i!\, s.$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$F(x) = g_0 P_0 + g_1 P_1 + \ldots + g_n P_n,$$

F désignant un polynome de degré n, on aura

$$\mathcal{L}\, Q_{i+1} F(x) = g_i (-1)^i\, i!\, s.$$

Or

$$\mathcal{L}\, Q_{i+1} F(x) = \mathcal{L}\, F(x)\,\frac{d^i}{dx^i}\frac{V'}{V} = (-1)^i\,\mathcal{L}\,\frac{V'}{V}\,F^i(x)$$
$$= (-1)^i\,\Sigma F^i(a_k);$$

de sorte que

$$\Sigma F^i(a_k) = g_i\, i!\, s, \qquad g_i = \frac{1}{i!\, s} \Sigma F_i(a_k),$$

et, par suite,

$$(1) \qquad F(x) = \frac{1}{s} \Sigma F(a_k) + \ldots + \frac{P_i}{i!\, s} \Sigma F^i(a_k) + \ldots.$$

Il est bon d'observer que cette formule ne se déduit pas directement de la formule de Taylor, laquelle donne

$$F(x) = F(a_k) + (x-a) F'(a_k) + \ldots + \frac{(x-a_k)^i}{i!} F^i(a_k) + \ldots,$$

et en faisant $k = 1, 2, \ldots$, ajoutant et divisant par s,

$$F(x) = \frac{1}{s} \sum F(a_k) + \ldots + \sum \frac{(x-a_k)^i}{i!\, s} F^i(a_k) + \ldots.$$

Cette formule ressemble beaucoup à celle que nous avons obtenue tout à l'heure, mais elle ne lui est pas identique, ou, pour parler plus exactement, elles ne sont pas composées des mêmes termes, car au fond les coefficients des mêmes puissances de x sont les mêmes.

Si dans (1) on fait $F(x) = 1, x, x^2, \ldots$, et si l'on pose $\Sigma a_k^p = \sigma_p$, on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} s &= \sigma_0, \\ sx &= \sigma_1 + P_1 \sigma_0, \\ sx^2 &= \sigma_2 + P_1 2\sigma_1 + P_2 \sigma_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ sx^n &= \sigma_n + \frac{n}{1} \sigma_{n-1} P_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} \sigma_{n-2} P_2 + \ldots + \sigma_n P_n, \end{aligned} \right.$$

ormules d'où l'on peut tirer P_n de proche en proche, ou sous forme de déterminant. Mais on peut obtenir P_n autrement.

Posons, en effet,

$$\varphi(x, t) = P_0 + P_1 \frac{t}{1} + \ldots + P_n^n \frac{t^n}{n!} + \ldots;$$

on a

$$\Sigma e^{ta} = \sigma_0 + \frac{t}{1}\sigma_1 + \ldots + \frac{t^n}{n!}\sigma_n + \ldots,$$

et, par suite,

$$\varphi(x, t)\Sigma e^{ta} = P_0\sigma_0 + \ldots + \frac{t^n}{n!}\left(\sigma_n P_0 + \frac{n}{1}\sigma_{n-1}P_1 + \ldots\right)$$
$$= s\left(1 + \ldots + \frac{t^n}{n!}x^n + \ldots\right) = se^{tx};$$

donc

$$\varphi(x, t) = \frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}}.$$

On a donc

$$P_n = \left(\frac{d^n}{dt^n}\frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}}\right)_{t=0},$$

ou encore

$$\frac{P_n}{n!} = \mathcal{E}\frac{1}{t^{n+1}}\frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}},$$

ou

(3) $$\frac{1}{n!}P_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{dt}{t^{n+1}}\frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}},$$

l'intégrale étant prise le long d'un cercle de rayon r décrit de l'origine comme centre.

Ces conclusions sont soumises à des restrictions : il faut que la fonction

$$\varphi(x, t) = \frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}}$$

soit développable suivant les puissances de t, pour une valeur positive de r. Cela exige que l'équation

$$\Sigma e^{ta} = 0$$

n'ait pas de racines de module inférieur à r, et la formule (2) n'aura lieu que si le cercle le long duquel on intègre a un rayon r moindre que le plus petit des modules des racines de $\Sigma e^{at} = 2$, équation qui ne devra pas avoir de racines réelles. Or Σe^{at} est égal à $\sigma_0 + t\frac{\sigma_1}{1}\cdots$, et comme σ_0 n'est jamais nul, cette circonstance ne se présentera pas, et la formule (2) sera exacte pour une valeur positive de r.

La formule (3) montre que

$$\frac{1}{n!}\frac{d\mathrm{P}_n}{dx} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{dt}{t^n}\frac{se^{tx}}{\Sigma e^{ta}} = \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{P}_{n-1},$$

donc

$$\frac{d\mathrm{P}_n}{dx} = n\mathrm{P}_{n-1}$$

et les polynomes $\frac{\mathrm{P}_n}{n!}$ sont les intégrales successives de l'unité, prises entre des limites qui varient avec chaque intégration.

Les constantes d'intégration se détermineront en exprimant que $\Sigma\mathrm{P}_n(a_k) = (-1)^n n!\, s$.

Maintenant supposons mod $a_k = \rho_k < 1$. Les formules (2) donneront pour P_n un déterminant dont le module sera inférieur à

$$\mathrm{S}\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\sum\frac{\rho^{n+1}-1}{\rho-1}\,\frac{1}{1}\sum\frac{d}{d\rho}\frac{\rho^{n+1}-1}{\rho-1}\,\frac{1}{1.2}\sum\frac{d^2}{d\rho^2}\frac{\rho^{n+1}-1}{\rho-1}\cdots,$$

r désignant toujours le module de x, et *a fortiori*

$$\mathrm{mod}\,\mathrm{P}_n < \mathrm{S}\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\sum\frac{1}{1-\rho}\sum\frac{1}{(1-\rho)^2}\sum\frac{1}{(1-\rho)^3}\cdots,$$

ou, en appelant ν la plus petite différence $1-\rho$,

$$\mathrm{mod}\,\mathrm{P}_n < \mathrm{S}^n\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\,\frac{1}{\nu}\,\frac{1}{\nu^2}\cdots\frac{1}{\nu^{n-1}}$$

ou

$$< \mathrm{S}^n\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\,\frac{1}{\nu^{\frac{n(n-1)}{2}}};$$

c'est, si r est suffisamment petit, le terme général d'une série absolument et uniformément convergente; on a $\sqrt[n]{\mathrm{P}_n} < 1$. Or $\frac{1}{i}\frac{d^i}{dz^i}\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}$, coefficient du terme général de la série $\frac{\mathrm{V}'(z+h)}{\mathrm{V}(z+h)}$, a aussi, pour des valeurs assez grandes de mod z, une racine $n^{\text{ième}}$ inférieure à 1; donc pour des valeurs convenables de x et z la série

$$y = \mathrm{P}_0\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}} - \mathrm{P}_1\frac{d}{dz}\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}} + \ldots,$$

où P_n est fonction de x et V fonction de z, est uniformément convergente. Or on a

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

donc y est fonction de $z - x$. Et, en suivant la marche indiquée dans le cas général, on a

$$y = \frac{1}{z-x}.$$

On en déduit facilement la généralisation de la formule (1).

La formule

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a_1} &+ \frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)} + \ldots \\ &+ \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(z-a_1)\ldots(z-a_{n-1})(z-a_n)} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

que j'ai rencontrée dans un Mémoire de M. Frobenius, est très remarquable, car elle fait connaître une propriété générale des fonctions synectiques; on peut, comme l'a fait M. Frobenius, l'arrêter au dernier terme écrit et la compléter par un reste de la forme

$$(2)\qquad \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}\,\frac{1}{z-x},$$

ce dont on se convainc aisément, en observant qu'on a les identités successives

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-x} &= \frac{1}{z-a_1} + \frac{x-a_1}{z-a_1}\,\frac{1}{z-x} \\ &= \frac{1}{z-a_1} + \frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)} + \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(z-a_1)(z-a_2)}\,\frac{1}{z-x} = \ldots; \end{aligned}$$

alors $a_1, a_2, \ldots$ sont tout à fait arbitraires. Si l'on veut que le second membre de (1) soit convergent et représente $z - x$, il faut que le reste (2) tende vers zéro; or le facteur qui multiplie $\frac{1}{z-x}$ dans le reste peut s'écrire

$$\left(1-\frac{z-x}{z-a_1}\right)\left(1-\frac{z-x}{z-a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z-x}{z-a_n}\right);$$

il tendra vers zéro si

$$\operatorname{Lim}\operatorname{mod}\left(1-\frac{z-x}{z-a_n}\right)=\varepsilon,$$

ε désignant un nombre inférieur à l'unité, ou si

$$\operatorname{Lim}\operatorname{mod}\frac{x-a_n}{z-a_n}=\varepsilon.$$

Pour cela, il faut et il suffit que les droites qui joignent x aux points a_n finissent par rester moindres que celles qui joignent le point z aux mêmes points d'une quantité finie.

Soit a un point vers lequel convergent les points $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$; si de ce point a comme centre on décrit deux cercles de rayons r et ρ, r étant moindre que ρ, le produit (2) tendra vers zéro si x reste intérieur au premier cercle et ρ extérieur au second.

Supposons qu'il en soit ainsi et soient $f(z)$ une fonction synectique à l'intérieur du second cercle, x un point intérieur au premier. Multiplions (1) par $f(z)$ et prenons les résidus, c'est-à-dire intégrons le long du cercle de rayon ρ; nous aurons

$$f(x)=f(a_1)+\ldots+\mathcal{E}\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}f(z)\ldots;$$

en posant pour abréger

$$F_n(z)=(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n),$$

on a

$$f(x)=f(a_1)+\ldots+(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(a_i)}{F'(a_i)}+\ldots.$$

Voici quelques réflexions que suggère cette formule :

1° La fonction synectique $f(x)$ dans une aire A, contenant les points $a_1, a_2, \ldots$ qui tendent vers un point fixe a de cette aire, est bien déterminée, non pas seulement, comme on a l'habitude de le dire, quand elle est donnée dans une portion finie de cette aire, mais quand elle est donnée en des points formant une succession discontinue tendant vers un point limite a contenu dans l'aire A.

2° En traitant la formule (1) comme M. Painlevé a traité la formule

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots,$$

qui n'en est qu'un cas particulier, on démontre que $f(x)$ est développable en une série de polynomes, mais on obtient un plus grand nombre de développements que par le procédé de M. Painlevé.

3° Supposons que la fonction $f(z)$ ne soit pas synectique autour du point a, et que le point soit essentiel. Décrivons autour de ce point un cercle de rayon $r' < r$, et supposons x compris dans la couronne de rayons r et r' ayant son centre en a. Sur le cercle r' on aura, z étant un point de la circonférence,

$$-\frac{1}{z-x} = \frac{1}{a-a_1} + \frac{z-a_1}{(x-a_1)(x-a_2)} + \ldots;$$

tandis que si z' est sur l'autre cercle, on aura

$$\frac{1}{z'-x} = \frac{1}{z'-a_1} + \frac{x-a_1}{(z'-a_1)(z'-a_2)} + \ldots;$$

de sorte que si l'on multiplie $\frac{1}{z-x}$ et $\frac{1}{z'-x}$ par $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}f(z)$ et par $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}f(z')$, et si l'on intègre le long des cercles de rayons r et r', on trouvera pour $f(x)$ un développement dont les termes seront de la forme

$$A(x-a_1)\ldots(x-a_n)$$

et

$$\frac{A'}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)},$$

A et A' désignant des constantes.

Donc, dans le voisinage d'un point essentiel, une fonction se compose d'une partie entière et d'une partie de la forme

$$\sum \frac{A}{(x-a_1)\ldots(x-a_n)},$$

$a_1, a_2, \ldots$ désignant des valeurs convergeant vers le point essentiel, et cela d'une infinité de manières.

La formule

$$F(x) = \frac{1}{s}\Sigma F(a_k) + \ldots + \frac{P_i}{r!s}\Sigma F_i(a_k)\ldots$$

montre que, $a_1, a_2, \ldots$ étant des valeurs quelconques et F une fonction synectique, si $\Sigma F(a)$, $\Sigma F'(a)$, ... sont nuls, $F(x)$ est nulle.