

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SÉGUIER

Sur les équations de certains groupes

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série, tome 8 (1902), p. 253-308.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8_253_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur les équations de certains groupes ;

PAR M. DE SÉQUIER.

L'objet de ce Travail est l'extension de la méthode indiquée par M. Jordan (*Traité des substitutions*, p. 32) pour la recherche des groupes plusieurs fois transitifs, avec des applications aux groupes connus d'ordre $\frac{1}{2}p(p^2-1)$, $p^n(p^n-1)$, $p^n(p^{2n}-1)$. J'ai été ainsi amené à reprendre et à compléter les recherches de Mathieu sur les groupes de degré $q = 2p+1$, q et p étant premiers.

J'établirai d'abord certains théorèmes relatifs à la définition des groupes (finis ou non). Ils ont déjà été énoncés ⁽¹⁾; je ne crois pas qu'ils aient été démontrés rigoureusement.

Soit S un système d'équations $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, ... entre les générateurs $a_1, a_2, \dots$ définissant un groupe G. Les F_i pourront contenir des a_i^{-1} . Chacune de ses conséquences peut, par des transformations identiques (c'est-à-dire ne supposant aucune équation autre que $a_i a_i^{-1} = 1$ entre des produits formellement distincts), être mise sous la forme typique $\Pi_{V,F} V^{-1} F V = 1$, F parcourant un système de F_i^{-1} où le même peut revenir plusieurs fois, V parcourant, indépendamment de F, des produits quelconques de a_i et de a_i^{-1} , et V^{-1} étant écrit de manière que $V^{-1} V = 1$ identiquement (il en sera toujours de même pour les autres lettres affectées de l'exposant -1). En effet, S est sous forme typique. Supposons qu'on en ait déduit un

(1) Cf. YOUNG, A. J., t. XV, 1893; HÖLDER, M. A., t. XLIII, 1893.

système de conséquences sous forme typique formant avec S un système S' . La transformation qui ramène une équation à la forme typique étant identique n'altère pas sa valeur logique, et l'on pourra, dans toute déduction, prendre sous forme typique chaque équation dont on se sert. Il suffit donc de montrer que toute conséquence de S' peut être mise sous forme typique. Or on ne peut déduire une conséquence d'un système d'équations que par la répétition de deux opérations : multiplier les deux membres d'une équation par un même facteur, substituer à un produit d'éléments un autre produit égal (identiquement ou non). Le résultat de la multiplication des deux membres de $IV^{-1}FV = 1$ par Λ s'écrit identiquement $\Pi\Lambda^{-1}V^{-1}FVA = 1$ qui a la forme typique. Soient $ABC = 1$, $\Phi = 1$ deux équations de S' , la seconde équivalant identiquement à $B = D$. Φ sera de l'une des formes $B^{-1}D$, DB^{-1} , BD^{-1} , $D^{-1}B$. Le résultat de la substitution de D à B s'écrit donc identiquement, ou $ABCC^{-1}B^{-1}DC = 1$, c'est-à-dire $ABC.C^{-1}\Phi^{\pm 1}C = 1$, ou $ADB^{-1}A^{-1}.ABC = 1$, c'est-à-dire $\Lambda\Phi^{\pm 1}\Lambda^{-1}.ABC = 1$, donc toujours sous forme typique.

Supposons que, dans les équations d'un système S définissant un groupe G , figurent deux séries de générateurs $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ et désignons d'une manière générale par $X(a_i) = X(a)$, $X(b_i) = X(b)$ des produits des $a^{\pm 1}$ seuls ou des $b^{\pm 1}$ seuls, par $S_{a=1}$, $S_{b=1}$, ce que devient le produit de générateurs X ou le système d'équations X , quand on y remplace les a ou les b par 1. Il est clair que, si $\Phi = 1$ résulte de S , $\Phi_{b=1} = 1$ résultera de $S_{b=1}$, et plus généralement si, dans $\Phi = 1$, on fait quelques-uns des b égaux à 1 ou entre eux, le résultat obtenu résultera du système obtenu en faisant les mêmes changements dans S (il suffit pour le voir de faire les mêmes changements dans toutes les déductions conduisant à $\Phi = 1$). Si donc $\Phi = 1$ ne contient que les a , elle résultera de $S_{b=1}$; mais une conséquence de $S_{b=1}$ ne résulte pas en général de S .

Supposons que $S_{a=1}$ définisse un groupe B ; en général, $S_{a=1}$ ne résultant pas de S , les conséquences de $S_{a=1}$ ne le seront pas de S , c'est-à-dire que la table de multiplication de B ne fera pas partie de celle de G et que G ne contiendra pas B . S_a étant le système des équations de S où ne figurent que les $a^{\pm 1}$, supposons encore que S_a définisse un groupe A . Ici, S_a résultant de S , les conséquences de S_a le seront de S ;

mais G ne contiendra encore pas nécessairement A , parce que S peut identifier des $\alpha(a)$ laissés distincts par S_a . On observera que les conséquences de S dans A résultant toutes de $S_{b=1}$, G contiendra A si $S_{b=1}$ résulte de S_a . Je me bornerai au cas important où S a la forme

$$A_i(a) = 1, \quad B_j(b) = A'_j(a), \quad b_k^{-1} a_l b_k = A_l^{b_k}(a) \\ (i, j, k, l = 1, 2, \dots).$$

Si $A'_j = 1$, G contiendra B , car alors $S_{a=1}$ équivaut au système S_b des $B_j = 1$. Si $A'_j = 1$, $A_l^{b_k} = a_l$, G contient A . En posant $A_l^{b_k}(A_m^{b_n}) = A_l^{b_k b_n}$, et généralement $A_l^{\beta(b)}(A_i^{\gamma(b)}) = A_l^{\beta(b)\gamma(b)}$, d'où $A_l^{\beta(b)[\gamma(b)\delta(b)]} = A_l^{[\beta(b)\gamma(b)]\delta(b)}$, on aura

$$\beta(b)^{-1} a_l \beta(b) = A_l^{\beta(b)}, \quad \beta(b)^{-1} \alpha(a) \beta(b) = \alpha(A_l^{\beta(b)}).$$

On pourra donc, en faisant passer les b à droite et les a à gauche, ou inversement, ramener tout élément de G à la forme $\alpha(a)\beta(b)$ ou $\beta(b)\alpha(a)$. Je dis qu'on aura chaque élément de G au moins une fois dans la forme $\alpha\beta$ (ou $\beta\alpha$) en faisant parcourir à α les éléments distincts de A et à β les *éléments distincts de* B (c'est-à-dire les produits que $S_{a=1}$ laisse distincts). En effet, tout $\beta(b)$ est égal dans B (c'est-à-dire en vertu de $S_{a=1}$) à un élément β_b de B , les diverses écritures qui représentent β_b dans B représentant en général plusieurs éléments de G . Dans la forme typique $WV^{-1}B_j^{\pm 1}V = 1$ de $\beta\beta_b^{-1} = 1$, remplaçons B_j par $B_j A_j'^{-1}$; l'égalité subsistera en vertu de $B_j = A'_j$. En faisant passer tous les b à gauche, on voit que $WV^{-1}B_j^{\pm 1}V$, donc $\beta\beta_b^{-1}$ sera un $\alpha(a)$; donc $\beta = \alpha\beta_b$. α dépendra en général de l'écriture choisie pour β_b dans B . Mais le système des éléments distincts de $A\beta_b$ n'en dépendra pas et coïncidera avec le système des éléments distincts de $A\beta$. Ainsi β_b parcourant B avec une écriture quelconque, $\Sigma A\beta_b$ (et de même $\Sigma\beta_b A$) fournira au moins une fois chaque élément de G . Si $\beta_b \neq \beta'_b$ dans B , $A\beta_b$ et $A\beta'_b$ n'ont aucun élément commun, car de $\alpha\beta_b = \alpha'\beta'_b$ on déduirait, en remplaçant les a par 1, que $\beta_b = \beta'_b$ dans B . Donc, si un élément $\alpha\beta_b$ est répété, ce sera dans le système $A\beta_b$ où il se trouve, c'est-à-dire sous la forme $\alpha'\beta_b$, α et α' étant distincts *dans* A , c'est-à-dire en vertu de S_a , mais égaux *dans* G ,

c'est-à-dire en vertu de S. Cela n'aura lieu que si S établit entre les a d'autres conséquences que S_a , c'est-à-dire si G ne contient pas A. En adjoignant à S_a toutes les conséquences que S établit entre les a , S et G ne changent pas; mais S_a deviendra un système S'_a définissant un groupe A' contenu dans G et dans A. Alors, α' parcourant A', on aura, *sans répétition d'éléments*, $G = A'B = BA'$.

Pour que S n'établisse pas entre les a d'autres relations que S_a , deux conditions sont évidemment nécessaires (').

1° Comme S donne $A_i(a_i) = A_i(b_k^{-1} a_i b_k) = 1$, il faut que, dans A, $A_i(A_i^{b_k}) = 1$ et que les $A_i^{b_k}$ (b_k restant fixe) ne vérifient dans A aucune relation $\Phi(A_i^{b_k}) = 1$ qui ne résulte des $A_i(A_i^{b_k}) = 1$; sans quoi S donnant $b_k^{-1} \Phi(a_i) b_k = \Phi(A_i^{b_k})$ donnerait $\Phi(a) = 1$, qui ne résulte pas de S_a . Cette condition sera dite *d'isomorphisme*. On observera que, $A_i(A_i^{b_k}) = 1$ résultant des $A_i(a) = 1$, $A_i(A_i^{b_k^{b_m}})$ résultera de $A_i(A_i^{b_k}) = 1$, c'est-à-dire de $A_i(a) = 1$, et plus généralement que $A_i(A_i^{\beta^{b_m}}) = 1$ résultera de S_a .

2° Il faut que, dans A, $A_j^{\pm 1} a_i A_j^{\pm 1} = A_i^{\beta_j^{\pm 1}}$; si G est fini, l'équation répondant aux signes inférieurs résulte de l'autre, comme on le voit en répétant la transformation par A_j' . Cette condition sera dite *de fermeture*. Si les A_j' se réduisent à 1, ces deux conditions suffisent pour que toute conséquence de S entre les a résulte du système S' des seules équations $A_i = 1$, $b_k^{-1} a_i b_k = A_i^{b_k}$. En effet, S' donne $b_k^{-1} A_j^{-1} b_k a_i b_k^{-1} A_j b_k = A_i^{b_k^{-1} b_j b_k}$. Donc ici, *en vertu de S'*, $b_k^{-1} B_j b_k$ et, de même, tout $\beta^{-1} B_j \beta = \mathfrak{B}$ est permutable à a_i , donc à $b_i^{-1} a_i b_i$ (car $b_i^{-1} a_i b_i \mathfrak{B} = b_i^{-1} a_i b_i \mathfrak{B} b_i^{-1} b_i = b_i^{-1} b_i \mathfrak{B} b_i^{-1} a_i b_i = \mathfrak{B} b_i^{-1} a_i b_i$). Donc, dans une conséquence $\Phi = \Pi V_F F^{\pm 1} V_F = 1$ de S (F parcourant les premiers membres des équations de S ramenées à la forme typique), $V_F F^{\pm 1} V_F$ se ramène à la forme $\alpha^{-1} A_i(A_i^{\beta})^{\pm 1} \alpha$, si $F = A_i$, et à la forme $\alpha^{-1} \beta^{-1} B_j^{\pm 1} \beta \alpha$, si $F = B_j$. En faisant passer à gauche tous les $\beta^{-1} B_j^{\pm 1} \beta$, on voit que $\Phi = 1$ prend, *en vertu de S'*, la forme $\mathfrak{B} \Phi' = 1$, $\mathfrak{B}$, Φ' étant les premiers membres de deux conséquences de $S_{a=1}$, S' respectivement. Or $\mathfrak{B}$, si l'on y intercale des $b_k^{-1} b_k$ à des places convenables, présente tous les b de Φ dans l'ordre où ils s'y rencontrent.

(¹) M. Hölder (*loc. cit.*) semble affirmer qu'elles sont suffisantes. C'est sur ce point que sa démonstration (en particulier le § 16) m'a laissé quelques doutes.

Ils se détruisent identiquement si $\Phi = 1$ ne lie que les a , et alors $\Phi = 1$, qui équivaut *en vertu de S'* à une conséquence $\Phi' = 1$ de S' , résulte de S' . Si B est cyclique, S donne $b_i^{-1} A'_i b_i = A'_i$, donc $A'_i (A'_i)^k = A'_i$ doit résulter de S_a . J'appellerai cette nouvelle condition *condition de permutabilité*. Si elle est vérifiée ainsi que les deux autres, toute conséquence $\Phi = 1$ (sous forme typique) de S entre les a résulte encore de S' . En effet, d'après les hypothèses, $F_i = B_i A_i^{-1}$ sera, *en vertu de S'*, permutable aux a et à b_i . On pourra donc, dans Φ , faire passer à gauche d'abord tous les F_i qui y formeront un produit F'_i , puis, A'_i étant permutable à b_i , tous les B_j qui y formeront un produit ψ . Comme plus haut, on devra avoir $k = 0$. Donc F_i disparaît en vertu de S' et $\Phi = 1$ résulte de S' .

Or, toutes les fois que S n'établit pas entre les a d'autres conséquences que S' , les conditions d'isomorphisme et de fermeture suffisent pour que G contienne A . En effet, en appelant b'_k la substitution $(a_i, A_i^{b'_k})$, a'_k la substitution $(a_i, a_i a_k)$, le groupe engendré par les a' , b' (les b' ne sont pas nécessairement tous distincts) vérifie S' et contient le groupe $A' \equiv A$ ⁽¹⁾ engendré par les a'_k . Quand les $A'_j = 1$, la condition de fermeture exprime évidemment que les isomorphismes $(a_i, A_i^{b'_k})$ engendrent un groupe homomorphe à B .

1. Soient G un groupe de champ (j'entends par là l'ensemble des symboles) $1, 2, \dots, n$; A le diviseur fixant 1 , B un diviseur quelconque. Si dans les deux éléments $x_\alpha = (1 \alpha \dots)$, $x_\beta = (1 \beta \dots)$ de G ($\alpha, \beta \geq 1$), α et β appartiennent à un même système d'intransitivité de B , on a

$$x_\alpha \equiv x_\beta \pmod{A, B}.$$

Car $b = (\alpha \beta \dots)$ étant dans B , $x_\alpha b x_\beta^{-1} = (1) \dots$ est dans A , donc x_α dans $A x_\beta B$. Réciproquement les éléments de $A x_\beta B$ substituent évidemment à 1 les symboles d'un même système d'intransitivité de B , système qui peut être choisi arbitrairement si G est transitif. Donc,

(1) Je représente par cette notation l'isomorphisme holoédrique. Je dirai d'ailleurs désormais, avec M. Klein, *homomorphe* pour *isomorphe*, et *isomorphe* pour *holoédriquement isomorphe*.

si G est transitif, $(G; A, B)$ ⁽¹⁾ est le nombre des systèmes d'intransitivité de G dans la représentation de G relative à A (chaque symbole non déplacé par B étant ainsi compté comme système d'intransitivité).

Tout groupe $A = \Sigma \alpha_\lambda$ de substitutions entre les symboles $1, \dots, n$, $\tau (\geq 0)$ fois transitif divise d'autres groupes de substitutions, par exemple les symétriques dont le champ contient $1, \dots, n$. Mais on peut se proposer de chercher s'il existe un groupe G , $l + \tau$ fois transitif entre les symboles $1, \dots, n, \sigma_1, \dots, \sigma_\tau$, où A soit le diviseur fixant $\sigma_1, \dots, \sigma_\tau$. Soit d'abord $l = 1$, $G_1 = G$, $\sigma_1 = \sigma$. Si G existe, on aura la décomposition $(\text{modd } A, A) \ G = AXA$, $X = \Sigma_i^m x_i (x_i = 1)$, chaque $x_i \neq 1$ substituant à σ un élément α_i d'un système d'intransitivité distinct de A , m étant le nombre de ces systèmes d'intransitivité (dans le champ effectif de G : l'un d'eux se réduit à σ) qui se réunissent avec σ en un seul système d'intransitivité de G , et $(AXA)^2 = AXA$ ou $XAX = AXA$. Il suffit évidemment qu'on puisse trouver des x_i vérifiant ces conditions, et, si G est primitif, donc A maximum dans G , on aura $G = \langle A, x_i \rangle$.

La recherche de X par tâtonnement est abordable lorsque l'on sait *a priori* que G doit contenir des substitutions du second ordre $(\sigma \alpha_i)$, ..., qu'on pourra prendre pour x_i . Bornons-nous à ce cas, et soit $F_i = \Sigma_i^{F_i, 1} f_{i\mu}$ de générateurs $f_{ik}^0 (k = 1, \dots, N)$, le diviseur de $A = \Sigma_i^{A, F_i} F_i r_{i\nu} (r_{i1} = 1)$ qui fixe α_i ; on aura

$$x_i F_i x_i = F_i.$$

Les conditions d'existence de G deviennent

$$(1) \quad x_i^2 = 1, \quad x_i f_{ik}^0 x_i = f_{i\nu}, \quad x_i r_{i\nu} x_i = a_{\nu'} x_i a_{\nu''}, \quad x_i a_{\lambda} x_j = a_{\lambda'} x_k a_{\lambda''},$$

μ' dépendant de $i, k; \nu', \nu'', i'$ de $i, \nu; \lambda', \lambda'', k$ de $i, j, \lambda; i = 2, \dots, m; k = 1, \dots, N; \nu = 1, \dots, (A, F_i); \lambda = 1, \dots, (A, 1)$; et l'on peut mettre $a_{\lambda'} x_k a_{\lambda''}$ sous la forme $r_{k\beta}^{-1} x_k r_{k\gamma}^{-1} f_{k\delta}$. Si A est transitif, $i' = i$.

⁽¹⁾ Je désignerai par (G, A) l'indice de A dans G , par $(G; A, B)$ le nombre des éléments incongrus de $G \pmod{A, B}$ (cf. FROBENIUS, *Crelle*, t. 101).

Le groupe G' défini par le système S , formé de ces équations et de celles de A , est précisément G (certaines équations de S peuvent d'ailleurs résulter des autres).

En effet, désignons un instant par G, A les groupes abstraits représentés jusqu'ici par les groupes de substitutions G, A . Les équations (1) donnent $G' = AXA$, donc $(G', 1) \leq (G, 1)$. Mais, comme G les vérifie, on a aussi $(G', 1) \geq (G, 1)$, donc $G' \equiv G$. Ainsi S exprime toutes les relations qui existent entre les substitutions génératrices de A et les x_i ; autrement dit, toute relation que l'on peut obtenir en formant avec ces substitutions des produits égaux à 1 résulte de S , sans quoi ces substitutions engendreraient un groupe d'ordre $< (G, 1)$.

Si A est transitif, donc $\tau \geq 1$, $m = 2$, G étant au moins deux fois transitif sera d'ordre pair et contiendra une s_2 (¹) s ; une conjuguée de s déplacera σ et pourra être prise pour x_2 .

Soit $t > 1$ et A transitif. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un groupe G_t , $t + 1$ fois transitif entre les symboles $1, \dots, n$, $\tau_1, \dots, \tau_t$, où A est le groupe fixant $\tau_1, \dots, \tau_t$, F le groupe fixant $1, \tau_1, \dots, \tau_t$, sont qu'il existe des substitutions d'ordre 2, $s_h = (\tau_{h-1}, \tau_h), \dots$ ($\tau_0 = 1$ et les symboles non écrits faisant partie de $2, \dots, n$) telles que*

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_h^2 = 1, \quad s_h f s_h = f_h, \quad s_i r s_i = a' s_i a'', \\ s_i a s_i = a_i, \quad (s_i s_{i+1})^3 = f_{i1}, \quad (s_j s_{j+k})^2 = f_{jk} \\ (h = 1, \dots, t; i = 1, \dots, t-1; j = 1, \dots, t-2; k = 2, \dots, \\ t-j; l = 2, \dots, t; f \text{ parcourt les générateurs de } F, a \text{ ceux} \\ \text{de } A \text{ qui sont hors de } F; r \text{ un système de restes } \not\equiv 1 \text{ de} \\ A \bmod F; a', a'', a_i \text{ sont dans } A \text{ hors de } F; f_{i1}, f_{jk} \text{ dans } F), \end{array} \right.$$

(¹) J'écrirai, d'une manière générale, g^n pour « groupe de degré n », s^n pour « substitution de degré n », en entendant par *degré* d'une substitution le nombre des symboles qu'elle déplace, g_n pour « groupe d'ordre n », s_n pour « substitution d'ordre n ». J'appellerai *pair* un groupe dont toutes les substitutions sont paires. J'appellerai *constituant* d'un groupe intransitif le groupe auquel il se réduit lorsqu'on ne considère que son action sur certains systèmes d'intransitivité.

et ces équations, jointes à celles de A , définissent G_t . Il suffit de montrer que le théorème subsiste lorsqu'on remplace t par $t + 1$ [la première ligne de (2) se confond avec (1) pour $t = 1$, $m = 2$]. Or, si G_{t-1} existe, il y a, on l'a vu, une substitution de la forme

$$s_{t+1} = (1)(\sigma_1) \dots (\sigma_{t-1})(\sigma_t \sigma_{t+1}) \dots,$$

telle que

$$s_{t+1}^2 = 1, \quad s_{t+1} G_{t-1} s_{t+1} = G_{t-1}, \quad s_{t+1} G_{t-1} s_t G_{t-1} s_{t+1} \leq G_t s_{t+1} G_t$$

(les restes $\neq 1, \text{ mod } G_{t-1}$ de $G_t = G_{t-1} + G_{t-1} s_t G_{t-1}$ sont tous dans $G_{t-1} s_t G_{t-1}$) et ces équations développées définissent G_{t+1} . Puisque s_{t+1} fixe 1, $\sigma_1, \dots, \sigma_{t-1}$, il résulte de $s_{t+1} G_{t-1} s_{t+1} = G_{t-1}$ que $s_{t+1} F s_{t+1} = F$, $s_{t+1} A s_{t+1} = A$, et $(s_i s_{t+1})^3$, $(s_j s_{t+1})^2$ ($j < t$) sont évidemment dans F . Inversement, si (2) est vérifié quand on y remplace t par $t + 1$, on aura, puisque $G_h = \{A, s_1, \dots, s_h\}$,

$$s_{t+1} G_{t-1} s_{t+1} = G_{t-1};$$

et l'équation $(s_i s_{t+1})^3 = f_{it}$ donne

$$s_{t+1} (G_{t-1} s_t G_{t-1} s_{t+1}) = G_{t-1} s_{t+1} s_t s_{t+1} G_{t-1} = G_{t-1} s_t s_{t+1} s_t G_{t-1} \leq G_t s_{t+1} G_t.$$

Comme $G_t = A + A s_t A$, on aura $(s_2 A s_2 = A)$:

$$\begin{aligned} G_2 &= G_1 + G_1 s_2 G_1 \\ &= A + A s_2 + A s_1 A + A s_1 s_2 A + A s_2 s_1 A + A s_1 s_2 A s_1 A. \end{aligned}$$

Chaque complexe du second membre où A figure p fois contiendra, α désignant l'ordre de A , α^p éléments distincts ne figurant dans aucun autre complexe, car $s_p \alpha^p = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)$ est précisément l'ordre de G_2 .

En observant que $s_1 A s_1 \leq A s_1 A$, donc que $s_1 A s_1 \cdot A$ est $\leq A s_1 A$ et $A s_1 A \cdot s_1 A \geq s_1 A$, en sorte que

$$A s_1 s_2 A s_1 A = A s_2 s_1 A s_1 A = A s_2 \cdot A s_1 \cdot A$$

coïncide avec $\Lambda s_3 s_1 \Lambda$, on a de même

$$\begin{aligned} G_3 = & \Lambda + \Lambda s_1 + \Lambda s_2 + \Lambda s_2 s_3 + \Lambda s_3 s_2 + \Lambda s_2 s_3 s_2 + \Lambda s_1 \Lambda + \Lambda s_1 s_2 \Lambda \\ & + \Lambda s_2 s_1 \Lambda + \Lambda s_1 s_2 \Lambda + \Lambda s_1 s_2 s_3 \Lambda + \Lambda s_3 s_2 s_1 \Lambda + \Lambda s_1 s_3 s_2 \Lambda \\ & + \Lambda s_3 s_2 s_1 \Lambda + \Lambda s_1 s_2 s_3 s_2 \Lambda + \Lambda s_2 s_3 s_1 s_2 \Lambda + \Lambda s_2 s_3 s_2 s_1 \Lambda \\ & + \Lambda s_1 s_2 \Lambda s_1 \Lambda + \Lambda s_1 s_3 \Lambda s_1 \Lambda + \Lambda s_1 s_2 s_3 \Lambda s_1 \Lambda + \Lambda s_1 s_3 s_2 \Lambda s_1 \Lambda \\ & + \Lambda s_1 s_2 s_3 \Lambda s_1 s_2 \Lambda + \Lambda s_1 s_2 s_3 s_2 \Lambda s_1 \Lambda + \Lambda s_2 s_3 s_1 s_2 \Lambda s_1 \Lambda \\ & + \Lambda s_1 s_2 s_3 \Lambda s_1 s_2 \Lambda s_1 \Lambda, \end{aligned}$$

aucun élément n'étant répété dans le second membre.

En prenant $\Lambda = 1$, $\sigma_{h-1} = h$, $s_h = (h, h+1)$, on obtient immédiatement, pour les équations du symétrique de champ 1, 2, ..., l ,

$$(3) \quad \begin{cases} s_h^2 = (s_i s_{i+1})^2 = (s_j s_{j+k})^2 = 1, \\ (h=1, \dots, l-1; \quad i=1, \dots, l-2; \quad j=1, \dots, l-3; \quad k=2, \dots, l-j-1). \end{cases}$$

Ces équations exprimant toutes les relations qui lient les $(h, h+1)$, il en résulte certainement, puisque

$$(12)(23)\dots(l-1, l) = (1, 2, \dots, l),$$

en posant $s_1 = a$, $s_1 \dots s_{l-1} = b$, que

$$b^l = 1, \quad s_h = b^{l-h} a b^{h-1},$$

donc aussi

$$(4) \quad \begin{cases} b^l = a^2 = (ab^{-1}ab)^2 = (ab^{-j}ab^j)^2 = 1; \\ j=2, 3, \dots, \frac{l}{2}, \text{ si } l \text{ est pair; } j=2, 3, \dots, \frac{l-1}{2}, \text{ si } l \text{ est impair.} \end{cases}$$

Inversement de (4) on déduit (3) en observant que

$$\begin{aligned} b^{-h} \cdot ab^{-h} ab^h \cdot b^h &= b^{-h} ab^h \cdot b^{-h-h} ab^{h+h}, \\ ab^j \cdot ab^{-j} ab^j \cdot b^{-j} a &= ab^j ab^{-j} \end{aligned}$$

et en posant

$$b^{l-h} ab^{h-1} = s_h.$$

Donc (4) définit le symétrique de degré t (*Comparer* MOORE, *P. L. M. S.*, t. XXVIII, 1896, p. 357).

Prenons pour A l'alterné de champ 1, 2, 3 engendré par

$$c = (123) = (12)(13).$$

En adjoignant les substitutions

$$s_i = (12)(i+2, i+3) \quad (i = 1, \dots, n-3; n \geq 4)$$

qui vérifient

$$(5) \quad \begin{cases} c^3 = (cs_i)^3 = (cs_l)^3 = s_i^2 = (s_j s_{j+1})^3 = (s_i s_{i+k})^2 = 1, \\ i = 1, \dots, n-3; & j = 1, \dots, n-4; \\ k = 2, \dots, n-i-3; & l = 2, \dots, n-3 \end{cases}$$

(on supprimera les équations où s aurait un indice > 1 si $n = 4$, ou > 2 si $n = 5$), on a un g^n $n-2$ fois transitif. C'est donc l'alterné $\mathfrak{A}_n$ de degré n , et $\mathfrak{A}_n$ est défini par (1). $\mathfrak{A}_n$ contient une substitution $b = s_{n-3} s_{n-4} \dots s_2 s_1$ de la forme $(34 \dots n)$ ou $(12)(34 \dots n)$, selon que n est impair ou pair et $b^{-i} s_i b^i = s_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-4$. Donc les équations suivantes (où a est mis pour s , et où n est supposé > 5)

$$(6) \quad \begin{cases} b^{n-2} = c^3 = a^2 = (ac)^3 = (ab^{-1}ab)^3 = (ab^{-x}ab^x)^2 = (cb^{-y}ab^y)^2 = 1, \\ x = 2, \dots, \frac{1}{2}(n-2) \quad \text{si } n \text{ est pair,} \\ x = 2, \dots, \frac{1}{2}(n-3) \quad \text{si } n \text{ est impair,} \\ y = 2, \dots, n-3 \end{cases}$$

résultent de (5), qui exprime toutes les relations liant les

$$(12)(i+2, i+3) \quad (i = 0, \dots, n-3).$$

Inversement de (6) on déduit (5), en observant que

$$b^{-h}.ab^{-k}.ab^k.b^h = b^{-h}.ab^h.b^{-h-k}.ab^{h-k}, \quad ab^x.ab^{-x}ab^x.b^{-x}a = ab^x.ab^{-x}$$

(cf. MOORE, *loc. cit.*).

2. Prenons $\Lambda = \{ (z, iz) \}$, z parcourant un corps de Galois $C(p^m)$ d'ordre p^m (p premier) dont i est racine primitive. Λ fixe le symbole α . Une détermination de G , sera le groupe $G = \Sigma(z, \alpha z + \beta)$, β parcourant C , et $\alpha \in C$ sauf α . C'est d'ailleurs la seule. En effet, dans un $g_{p^m(p^m-1)}G'$ deux fois transitif, de classe $p^m - 1$, il y a $p^{m-1}s_p^{p^m}$ formant avec l'unité un groupe normal H dont tous les éléments sont d'ordre p et conjugués dans G' , donc permutable. Donc tout diviseur Λ' de G' , qui fixe un symbole, divise le groupe J des isomorphismes de H . Or les éléments de H peuvent se mettre sous la forme $h = |x_i, x_i + a_i|$ ($i = 1, \dots, m$), x_i, a_i parcourant les entiers réels mod p , et celles de s sous la forme

$$j = |x_i, \sum_k \alpha_{ik} x_k| \pmod{p} \quad (i, k = 1, \dots, m).$$

Soit Λ' cyclique. Pour que j soit un générateur de Λ' , donc d'ordre $p^m - 1$, il faut et il suffit que sa congruence caractéristique soit irréductible et appartienne à l'exposant $p^m - 1$ (JORDAN, *Traité*, n° 159). Un changement de variables ramène alors j à la forme

$$|X_i, \rho_i X_i| \quad (i = 0, \dots, m-1, \rho_i = \rho^{p^i})$$

et h a la forme $|X_i, X_i + A_i|$. Les X_i étant conjugués, G' est isomorphe au groupe engendré par $|X_0, \rho X_0|$ et par les $|X_0, X_0 + A_0|$. Or $X_0 = \sum_0^{m-1} \rho^i y_i$, $A_0 = \sum_0^{m-1} \rho^i b_i$, les y étant des fonctions linéaires indépendantes des x et les b des a (puisque les X sont indépendants et de même les A). Donc $G' = \Lambda'H \equiv \Sigma(z, \alpha z + \beta) \equiv G$.

Cherchons les équations de G par la méthode précédente. On aura $G = \{a, b\}$, $a = (iz)$, $b = (\alpha 1) \dots$ étant du second ordre et de la forme $(\alpha z + \beta)$; donc $b = (1 - z)$, et G sera défini par les équations

$$a^{p^{m-1}} = b^2 = 1, \quad ba^{\zeta}b = a^{\eta}ba^{\zeta},$$

où $\xi = 1, \dots, p^m - 2$ et où η, ζ sont à déterminer en fonction de ξ .

Or on a

$$ba^{\xi}b = (i^{\xi}z + 1 - i^{\xi}) = (i^{-\xi}(i^{\xi} - 1), 0, 1 - i^{\xi}, \dots),$$

donc

$$\alpha^n = (i^{-\frac{1}{2}}(i^{\frac{1}{2}} - 1), 1, \dots), \quad \alpha^r = (1, 1 - i^{\frac{1}{2}}, \dots);$$

d'où les deux conditions

$$i^{n-\frac{1}{2}}(i^{\frac{1}{2}} - 1) \equiv 1 \pmod{p}, \quad i^{\frac{1}{2}} \equiv 1 - i^{\frac{1}{2}},$$

la dernière déterminant ζ et montrant que, pour $\xi < m$, ζ est $\geq m$, la première donnant ensuite

$$\eta + \zeta - \xi \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}(p^m - 1) & \text{si } p > 2 \\ 0 & \text{si } p = 2 \end{cases} \pmod{p^m - 1}.$$

Certaines des équations ainsi obtenues pour G pourront résulter des autres et être supprimées : de $ba^{\frac{1}{2}}b = \alpha^n ba^{\frac{1}{2}}, b^2 = 1$, par exemple, on déduit $ba^{-\frac{1}{2}}b = \alpha^{-n}ba^{-\frac{1}{2}}, ba^{\frac{1}{2}}b = \alpha^{\frac{1}{2}}ba^{-\frac{1}{2}}, ba^{-\frac{1}{2}}b = \alpha^{\frac{1}{2}}ba^{-\frac{1}{2}}, ba^{\frac{1}{2}}b = \alpha^{-\frac{1}{2}}ba^{\frac{1}{2}}, ba^{-\frac{1}{2}}b = \alpha^{-\frac{1}{2}}ba^{\frac{1}{2}}$, et, si $p = 2$, on a

$$ba^{2^{\frac{1}{2}}}b = \alpha^n ba^{2^{\frac{1}{2}}}ba^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}}ba^{\frac{1}{2}}ba^{\frac{1}{2}} = \alpha^{2^{\frac{1}{2}}}ba^{2^{\frac{1}{2}}},$$

d'où, par récurrence,

$$ba^{2^{i\frac{1}{2}}}b = \alpha^{2^{i\frac{1}{2}}}ba^{2^{i\frac{1}{2}}}.$$

On obtient plus facilement un autre système d'équations comme il suit. Si l'on pose

$$(z + i^y) = c_y = a^{-y}c_0a^y, \quad c_0 = c,$$

il est clair que tout élément de G est contenu une fois, et une fois seulement, dans la forme

$$a^x c_0^{y_0} \dots c_{m-1}^{y_{m-1}} \quad (x = 0, \dots, p^m - 2; y_0, \dots, y_{m-1} = 0, \dots, p - 1).$$

Si $i^m = \sum_0^{m-1} \alpha_s i^s$, les α_s étant réels, $\alpha, c_0, \dots, c_{m-1}$ vérifieront les équations

$$\alpha^{p^m-1} = c_p^p = 1, \quad c_p c_\sigma = c_\sigma c_p, \quad p, \sigma = 0, 1, \dots, m-1; \\ \alpha^{-1} c_\tau a = c_{\tau+1}, \quad \tau = 0, \dots, m-2; \quad \alpha^{-1} c_{m-1} a = c_0^{\alpha_0} \dots c_{m-1}^{\alpha_{m-1}};$$

d'où $c_0, \dots, c_{m-1}$ s'éliminent immédiatement. Or ces équations définissent un $\mathfrak{g}_{p^m(p^m-1)}$. Donc les *substitutions* $a, c_0, \dots, c_{m-1}$ ne vérifient aucune équation qui ne résulte des précédentes.

Soient $p = 3, m = 2$. Les deux polynômes irréductibles appartenant à l'exposant 4 sont $z^2 \pm z - 1$. Soit $i^2 \equiv 1 - i$. Pour $\xi = 1, \zeta = 2, \eta = 3$, et des équations

$$a^3 = b^2 = 1, \quad bab = a^3 ba^2,$$

on déduit des équations analogues pour $\xi = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, en particulier $ba^3b = aba^6$, dont le produit avec $bab = a^3ba^2$ donne $ba^4b = a^4ba^4$. Il est donc inutile de faire $\xi = 4$ et le groupe est défini par trois équations. En prenant $i^2 \equiv 1 + i$, on aurait eu $bab = a^2ba^3$, ce qui revient à changer a en a^{-1} . En écrivant 1, 2, ..., 9 pour 1, $i, i^2, \dots, i^7, 0$, on a

$$a = 12345678, \quad b = 19.23.47.68.$$

Pour $p = 2$, on a ce théorème (W. BURNSIDE, *M. M.*, 1896, p. 187) que les équations

$$a^2 = b^2 = 1, \quad bab = a^{1-m}ba^m$$

définissent un groupe d'ordre $2^{m'} \lambda (m' \leq m)$ contenant un diviseur normal abélien d'ordre $2^{m'}$ dont tous les éléments $\neq 1$ sont d'ordre 2. En effet, posons

$$a^{-i}ba^i = b_i \quad (b_0 = b).$$

On aura $b_i b_{i+1} = b_{m+i}$ pour $i = 0$; cela résulte de la troisième équation, qui s'écrit

$$ba^{-1}b = a^{-m}ba^{m-1} \quad \text{ou} \quad ba^{-1}ba = a^{-m}ba^m,$$

et, si cela est vrai pour $i \leq j$, de $b_j b_{j+1} = b_{m+j}$ on déduit

$$a^{-1}b_j b_{j+1}a = a^{-1}b_{m+j}a \quad \text{ou} \quad b_{j+1}b_{j+2} = b_{m+j+1}.$$

En outre

$$\begin{aligned} b_i b_{i+k} &= b_i b_{i+1} \cdot b_{i+1} b_{i+2} \dots b_{i+k-1} b_{i+k} = b_{m+i} b_{m+i+1} \dots b_{m+i+k-1} \\ &= a^{-m} b_i a^m \cdot a^{-m-1} b_i a^{m+1} \dots = a^{-m} b_i b_{i+1} \dots b_{i+k-1} a^m. \end{aligned}$$

Supposons alors prouvé que $\{b, b_1, \dots, b_j\} = B_j$ est abélien et a tous ses éléments d'ordre 1 ou 2. Il en sera de même de B_{j+1} ; car, pour $i \leq j$, $b_i b_{j+1} = a^{-m} b_i b_{i+1} \dots b_j a^m$ et $b_i b_{j+1}$ est d'ordre 1 ou 2; donc, ou bien $b_{j+1} = b_i$, ou bien $b_i b_{j+1} = b_{j+1} b_i$. Enfin $b_m, \dots, b_\lambda$ sont dans B_{m-1} , car $b_{(k+1)m+i} = b_{km+i} b_{km+i+1}$ (pour $i = m-1$, le second membre contient $b_{(k+1)m}$ qu'on réduit par la même formule où $i = 0$); $b, b_1, \dots, b_{m-1}$ pouvant n'être pas indépendants, B_{m-1} est d'ordre $2^{m'}$, $m' \leq m$.

En revenant donc aux notations précédentes, si à $\xi = 1$ répond $\zeta = m$, donc $\eta = 1 - m$, les équations $a^{2^m-1} = b^2 = 1$, $bab = a^{1-m} b a^m$ définissent un groupe G' d'ordre $\leq 2^m(2^m - 1)$. D'ailleurs, G' est $\geq G$, dont les équations comprennent celles de G' . Donc $G' = G$.

Pour $p = 2$, $m = 3, 4, 6, 7$, il est facile de vérifier que i défini par $i^m \equiv 1 + i \pmod{2}$ est racine primitive. Pour $m = 6$, par exemple, on aura

$$\begin{aligned} i^8 &\equiv i^2 + i^3, & i^{10} &\equiv i^4 + i^5, \\ i^{60} &\equiv (1 + i)^{10} \equiv 1 + i^2 + i^8 + i^{10} \equiv 1 + i^3 + i^4 + i^5, \\ i^{61} &\equiv 1 + i^4 + i^5, & i^{62} &\equiv 1 + i^5, & i^{63} &\equiv 1, \end{aligned}$$

et i^7, i^9, i^{11} sont $\not\equiv 1$. Pour $m = 7$, on aura

$$\begin{aligned} i^8 &\equiv i + i^2, & i^9 &\equiv i^2 + i^3, \\ i^{63} &\equiv (1 + i)^9 \equiv 1 + i + i^8 + i^9 \equiv 1 + i^3, \\ i^{126} &\equiv (1 + i^3)^2 \equiv 1 + i^6, & i^{127} &\equiv 1, \end{aligned}$$

et 127 est premier. Pour $m = 5$, i défini par $i^5 \equiv i + 1$ donne $i^{31} \not\equiv 1$ [aussi bien $z^5 + z + 1 \equiv (z^2 + z + 1)(z^3 + z^2 + 1)$ n'est pas irréductible]. Mais, en formant successivement les polynômes réductibles de degré 1, 2, 3, 4, 5, on trouve que les irréductibles sont

$$\begin{aligned} z + 1, & \quad z^2 + z + 1, \quad z^5 + z^2 + 1, \quad z^3 + z + 1, \quad z^4 + z + 1, \\ z^4 + z^3 + 1, & \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1, \quad z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + 1, \\ z^5 + z^4 + z^3 + z + 1, & \quad z^5 + z^4 + z^2 + z + 1, \quad z^5 + z^3 + z^2 + z + 1, \\ & \quad z^5 + z^3 + 1, \quad z^5 + z^2 + 1. \end{aligned}$$

Soit $i^5 \equiv i^2 + 1$; on aura $i^{18} \equiv i + 1$ et G d'ordre $2^5(2^5 - 1)$ sera défini par $a^{31} = b^2 = 1$, $bab = a^{14} b a^{18}$.

Pour définir le groupe $\mathfrak{L}(2, p) = \mathfrak{L} = \Sigma \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right)$ d'ordre $p^m(p^{2m}-1)$ où les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parcourent C avec la condition $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, z parcourant C et la valeur ∞ , il faut ajouter un générateur c représenté par une substitution de $\mathfrak{L}$ de la forme $(0 \infty) \dots$ ou $\left(\frac{\beta}{z} \right)$ et vérifiant $c^2 = (cb)^3 = 1$, $cac = a^\tau$, τ étant à déterminer. Or

$$(cb)^3 = \left(\frac{z(1-2\beta) + \beta(\beta-1)}{z(1-\beta) - \beta} \right).$$

Donc $\beta = 1$, $cac = a^{-1}$ et les équations de $\mathfrak{L}$ s'obtiennent en adjoignant, à celles de G , $c^2 = (cb)^3 = (ca)^2 = 1$. On peut d'ailleurs réduire à deux le nombre des générateurs, car les deux équations $ba^\xi b = a^\eta ba^\xi$, $ca^\tau c = a^{-\tau}$ donnent $ca^\tau cba^\xi b = ba^\xi$; d'où, en posant $cb = d$, $b = a^{-\xi} d^2 a^{-\eta} da^\xi$, $c = db = da^{-\xi} d^2 a^{-\eta} da^\xi$, $d^3 = 1$.

Pour $p = 2$, $m = 3$, $p^m(p^{2m}-1) = 504$, $\mathfrak{L}$ est simple et défini par

$$(7) \quad a^\tau = b^2 = c^2 = (ca)^2 = (cb)^3 = 1, \quad bab = a^{-2}ba^3,$$

ou, en posant $cb = d$ et en remplaçant $(ca)^2 = 1$ ou $cac = a^{-1}$ par $ca^{-2}c = a^2$, $b^2 = 1$ par $(a^{-1}ba)^2 = 1$, $c^2 = 1$ par $a^{-1}ca = 1$, $bab = a^{-2}ba^3$ par $ba^6b = a^1ba^2$ d'où $b = ad^3a^3da^2$,

$$(8) \quad \begin{cases} a^\tau = 1, & d^3 = 1, & (d^3a^3da^3)^2 = 1, \\ (da d^2a^3d)^2 = 1, & (a^6da d^2a^3da^2)^2 = 1. \end{cases}$$

La troisième et la quatrième donnent

$$d^2a^3da^3 = a^1d^2a^1d, \quad dad^2a^3d = d^2a^1da^6d^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} a^6da \cdot d^2a^3da^3 &= a^6da^3d^2a^1d = a^6da^3 \cdot d^2a^4da^6da^5 \cdot (a^6da^5)^{-1} \\ &= a^6da^5 \cdot dad^2a \cdot (a^6da^5)^{-1} \end{aligned}$$

et le système équivalent à

$$(9) \quad a^\tau = d^3 = (d^2a^3da^3)^2 = (d^2ad^2a^3) = (dad^2a)^2 = 1.$$

Si l'on pose $a = (iz)$, $b = (1 - z)$, $c = (z^{-1})$, ou, en écrivant 1, 2, ..., 9 pour 1, i , i^2 , ..., i^6 , 0, ∞ respectivement, $a = 1234567$, $b = 18.24.37.56$, $c = 89.27.36.45$, (5) exprime toutes les relations qui lient ces trois substitutions, et (8) toutes celles qui lient a et $d = cb = 189.235.467$. Or, en posant

$$beba = \alpha = \left(\frac{iz}{z-1}\right) = 1927635, \quad aba^0 = \beta = (i^0 - z) = 13.26.45.78,$$

on vérifie les égalités

$$(10) \quad \alpha^7 = \beta^2 = (\alpha\beta)^3 = (\alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^2\beta)^2 = 1,$$

$$(11) \quad \alpha^3\beta\alpha^5 = d, \quad (\beta\alpha^2\beta d)^2 = (\beta\alpha^2\beta\alpha^3\beta\alpha^5)^2 = a,$$

en formant les substitutions $\alpha\beta$, $\alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^2\beta$, ... Inversement (9) ou, ce qui revient au même, (8) résulte de (10). Considérons en effet (11) comme définissant a et d . On aura d'abord $d = \alpha^2.\alpha\beta.\alpha^5$, donc $d^3 = 1$, puis, en observant que (10) donne $\beta\alpha^0\beta = \alpha\beta\alpha$ (dont le carré et le cube sont $\beta\alpha^5\beta = \alpha\beta\alpha^2\beta\alpha$, $\beta\alpha^4\beta = \alpha\beta\alpha^2\beta\alpha^2\beta\alpha$), $\alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^3\beta = \beta\alpha^4\beta\alpha^2\beta\alpha^4$,

$$\begin{aligned} a &= \beta\alpha^2.\beta\alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^2.\beta\alpha^3\beta\alpha^5 = \beta\alpha^0\beta.\alpha^2\beta\alpha^4.\beta\alpha^0\beta.\alpha^3\beta\alpha^5 \\ &= \alpha.\beta\alpha^3\beta\alpha^5\beta.\alpha^4\beta\alpha^5 = \alpha^5\beta\alpha^2\beta\alpha^4.\beta\alpha\beta.\alpha^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12) \quad a &= \alpha^4.\alpha\beta\alpha^2\beta\alpha.\alpha^2\beta\alpha^4, \\ \alpha^3\alpha\alpha^4 &= \beta\alpha^4.\alpha\beta\alpha^2\beta\alpha = \beta\alpha^4\beta\alpha^5\beta, \\ \beta\alpha^4\beta\alpha^3.a.\alpha^4\beta\alpha^3\beta &= \beta\alpha\beta\alpha\beta = \alpha, \\ \alpha^x &= \alpha^4\beta\alpha^3\beta.\alpha^x.\beta\alpha^4\beta\alpha^3; \end{aligned}$$

donc $\alpha^7 = 1$ et

$$\begin{aligned} \alpha^4 &= \alpha^4\beta\alpha^3.\beta\alpha^4\beta\alpha^4\beta\alpha^2.\alpha = \alpha^4.\beta\alpha\beta.\alpha^3\beta\alpha^3\beta\alpha \\ &= \alpha^2.\alpha\beta\alpha^2\beta\alpha.\alpha^2\beta\alpha = \alpha^2\beta\alpha^5\beta\alpha^2\beta\alpha \\ &= \alpha^2\beta\alpha^5.\beta\alpha^2\beta\alpha^3\beta\alpha^5.(\alpha^2\beta\alpha^3)^{-1}; \end{aligned}$$

donc $(\beta\alpha^2\beta d)^7 = 1$, $(\beta\alpha^2\beta d)^3 = \beta\alpha^2\beta d$, ou $\alpha^4 = \beta\alpha^2\beta d$.

Cela établi, on a

$$d^3\alpha^3 d\alpha^3 = d^2\alpha^{-1} d\alpha^{-4} = d\beta\alpha^5\beta\beta\alpha^5\beta = \alpha^3\beta\alpha^5\beta\alpha^3\beta,$$

qui est du second ordre d'après (10). Ce résultat donne immédiatement, d'après (12),

$$\begin{aligned} ad^2 a^3 da^3 &= \alpha^5 \beta x^2. \beta x \beta. \alpha^3 \beta = \alpha^5. \beta x \beta. \alpha^2 \beta \\ &= \alpha^1. \beta x \beta = \alpha^3 \beta x^6 = dx. \end{aligned}$$

Donc

$$dad^2 a^3 d = a^3 (a^1 d. ad^2 a^3 da^3) a^1 = a^3 (a^1 d^3 x) a^1,$$

et, puisque $a^1 = \beta x^2 \beta d$,

$$dad^2 a^3 d = a^3 \beta x. x \beta x. a^1 = a^3 \beta x. \beta. x^6 \beta a^1,$$

qui est du second ordre. Enfin, d'après (12) encore,

$$\begin{aligned} a^6 d. ad^2 a^3 da^3 &= \alpha^3 \beta x^4 \beta x^5 \beta x^4 \beta x^5, \\ \alpha^5. a^6 dad^2 a^3 da. \alpha^2 &= \alpha \beta x. \alpha^3 \beta x^5 \beta x^4 \beta = \beta x^6 \beta. \alpha^3 \beta x^5 \beta x^3 \beta. \beta x \beta, \end{aligned}$$

qui est du second ordre. Donc (10) définit $\mathfrak{L}$ (cf. BURNSIDE, *M. A.*, t. LII; FRICKE, *ibid.*, 1899).

3. Cherchons encore les équations d'un groupe $\mathfrak{G}$ deux fois transitif de degré $p+1$ (p premier > 2) et d'ordre $\frac{1}{2}p(p^2-1)$. Le groupe G_2 fixant un symbole est d'ordre $\frac{1}{2}p(p-1)$, contient un seul diviseur d'ordre p et divise le groupe métacyclique; donc G_2 est semi-métacyclique. De plus G_2 ne contient aucun diviseur normal dans $\mathfrak{G}$. Donc $\mathfrak{G}$ contient $p+1$ diviseurs d'ordre p . On va voir que, sauf si $p=7$, $\mathfrak{G}$ est nécessairement le groupe $\mathfrak{O}_1(2, p) = \mathfrak{O}$, formé des substitutions de $\mathfrak{L}(2, p)$ où $\alpha\delta - \beta\gamma$ est un carré. Si $p=7$, $\mathfrak{G}$ a une seconde forme possible.

En posant $b = (z+1)$, $a = (i^2 z)$, i étant racine primitive de p , G_2 est défini par

$$b^p = a^{\frac{p-1}{2}} = 1, \quad a^{-1}ba = b^{i^4}$$

(d'où $a^{-x}b^y a^x = b^{y^{i^{2x}}}$, équation dont l'usage sera constamment soutenu dans la suite). Les symboles étant $\infty, 0, 1, i, \dots, i^{p-1}$, on a

$$b = (0, 1, 2, \dots, p-1), \quad a = (i^0, i^2, i^4, \dots, i^{p-3})(i, i^3, \dots, i^{p-2});$$

si $p = 3$, $\alpha = 1$. Cherchons une substitution du second ordre $c = (0\infty) \dots$ telle que $\eta = (G_2, c)$ soit deux fois transitif, G_2 étant le diviseur fixant ∞ . Le groupe fixant 0 , ∞ étant de classe $p - 1$, c sera de degré $\geq p - 1$. Si le degré de c est $p - 1$, η d'ordre $\frac{1}{2}(p - 1)$ et de degré $p - 1$, doit contenir une substitution d'ordre 2 conjuguée de c ; donc $p \equiv 1 \pmod{4}$. Si donc $p = 3$, $c = 0\infty.12 = (-z^{-1})$, η est défini par

$$b^3 = c^2 = (bc)^3 = 1$$

et contient normalement le groupe quadratique $\{c, b^{-1}cb\}$; donc $G = \mathfrak{O}$. Supposons désormais $p \geq 5$. Il faut $cac = a^2$ et $c^2ac^3 = a$; donc $\alpha^2 = 1$.

Soit d'abord $\alpha = 1$. — Si c transforme en lui-même chaque cycle de a , on aura, c étant de degré > 2 ,

$$c = (0, \infty)(i^{2x}, i^{2x+2\rho})(i^{2x+4}, i^{2x+2\sigma+4}), \quad x = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}(p-3),$$

ρ et σ étant des entiers inconnus $< \frac{1}{2}(p-1)$. Le cycle $(i^{2x+2\rho}, i^{2x+4\rho})$ coïncidant avec $(i^{2x}, i^{2x+2\rho})$, on a $4\rho \equiv 0 \pmod{p-1}$, et, puisque $4\rho < 2(p-1)$, $4\rho = p-1$. De même $4\sigma = p-1$ et $p \equiv 1 \pmod{4}$,

$c = (0, \infty)(z, -z)(z \not\equiv 0) = (0, \infty)a^{\frac{1}{4}(p-1)}$. Donc η contiendrait $(0, \infty)$ et sa classe serait $< p-1$. Ainsi c échange les deux cycles de a , et l'on aura $c = (0, \infty)(i^{2x}, i^{2x+\rho})$, $x = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}(p-3)$,

ρ impair $< \frac{1}{2}(p-1)$, ou $c = (0, \infty)\left(z, r^{\left(\frac{z}{p}\right)}z\right)(r = i^\rho, z \not\equiv 0)$, $\left(\frac{z}{p}\right) = z^{\frac{p-1}{2}}$ représentant $+1$ si z est carré, sinon -1 : c n'est évidemment pas dans $\mathfrak{O}(2, p)$. Il faut maintenant que $cb^\beta c$ soit, pour

$\beta = 1, \dots, p-1$, de la forme $b^x a^y c b^{x'} a^{y'}$, ou, c étant permutable à $\{a\}$ et a à $\{b\}$, de la forme $b^x c b^{x'} a^y$, ou encore, en remplaçant $\{a\}$ par un de ses conjugués dans G_2 , $cb^\beta c = b^x c b^{x'} b^{-t} a^y b^t$; et cela suffit. Faisons, en particulier $\beta = 1$, $t = r$,

$$cbc = \left(\infty, r, \dots, kr^{\left(\frac{k}{p}\right)}, (k+1)r^{\left(\frac{k+1}{p}\right)}, \dots, -r^{\left(\frac{-1}{p}\right)}\right),$$

$b^{-t} a^y b^t$ fixera r et l'on devra avoir

$$x = r^{\left(\frac{-1}{p}\right)}, \quad x' = r, \quad cbc = b^{r^{\left(\frac{-1}{p}\right)}} c a^y b^r.$$

Pour déterminer γ , observons que $b^{r(\frac{-1}{p})}$ change $kr^{(\frac{k}{p})}$ ($k \neq -1$) en $kr^{(\frac{k}{p})} + r^{(\frac{-1}{p})} = u (\neq 0)$, que $c = (u, r^{(\frac{u}{p})}u)$, et que, finalement, on a

$$(1) \quad ur^{(\frac{u}{p})}i^2\gamma + r = (k+1)r^{(\frac{k+1}{p})} \quad \text{si } k > 0, \quad = 0 \quad \text{si } k = 0.$$

De là, pour $k = 0$,

$$\rho \left[\left(\frac{-1}{p} \right) - 2 \right] + 2\gamma \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p-1}.$$

Donc $\frac{p-1}{2}$ est impair comme ρ , $\left(\frac{-1}{p} \right) = -1$ (donc $p \geq 7$) et $2\gamma = 3\rho + \frac{p-1}{2}$.

Cela posé, la suite S des termes $\left(\frac{1}{p} \right)$, $\left(\frac{2}{p} \right)$, ..., $\left(\frac{p-1}{p} \right)$ présente (JORDAN, *Traité*, p. 158) $\frac{p-1}{2}$ variations de signe exactement, c'est-à-dire $\frac{p-1}{2}$ termes suivis d'un terme de signe contraire et, en particulier, $\frac{1}{4} \left[p - \left(\frac{-1}{p} \right) - 4 \right] (\geq 1 \text{ pour } p \geq 7)$ non carrés suivis d'un carré. Soit donc k non carré, $k+1$ carré. On aura $u = (k+1)r^{-1}$, (1) donnera

$$2k \equiv -1 \pmod{p}, \quad k \equiv \frac{p-1}{2},$$

et comme il y a $\frac{p-1}{2}$ carrés, S présentera $3 = \frac{p-1}{2}$ variations de signe. Donc $p = 7$. On obtient ainsi un groupe $\mathfrak{G}$ de degré 8 et d'ordre 168, $\cong \mathfrak{O}(2, 7)$, défini, en prenant $i = 3$, $\rho = 1$, par

$$b^7 = a^3 = c^2 = 1, \quad a^{-1}ba = b^2, \quad cac = a, \quad cbc = b^5cb^3$$

(les équations répondant à $\beta = 2, \dots, 6$ résultent de celles-ci; cf. n° 1), et engendré par

$$0123456 = b, \quad 124.365 = a, \quad 0\infty.13.26.45 = c.$$

Il contient un diviseur normal D d'ordre 8 formé des $b^{-x}cb^x$ et de l'unité, et divise par conséquent le groupe linéaire total à trois variables dans $C(2)$; en désignant respectivement $\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ par les points 000, 100, 010, 001, 110, 011, 111, 101, on a

$$c = |x + 1, y, z|, \quad b = |z, x + z, y|, \quad a = |x, z, y + z|.$$

Le diviseur normal $|D, c| = |b, c|$ est le groupe d'ordre $2^3(2^3 - 1)$ du n° 2. On a évidemment $\mathfrak{G} = D |a, b|$, et D est le seul diviseur normal minimum possible dans un groupe primitif de degré 8. Le groupe fixant deux symboles $|a|$ a 28 conjugués et est, par suite, permutable aux seules substitutions du groupe Γ de générateur

$$ac = 164325.0\infty$$

composé des six substitutions permutant entre eux 0, ∞ . Deux substitutions γ, γ' d'ordre $\neq 2$ de Γ ne peuvent être conjuguées dans $\mathfrak{G}$, car si $s^{-1}\gamma s = \gamma'$, s doit permuter entre eux 0, ∞ , donc être dans Γ . Donc chaque substitution d'ordre $\neq 2$ de Γ a 28 conjuguées. $|b|$ étant permutable aux seules substitutions de $|a, b|$, b n'a pas d'autre conjuguée dans $|a, b|$ par les opérations de $\mathfrak{G}$ que par celles de $|a, b|$; donc pas d'autres que b, b^2, b^4 . Ainsi dans $\mathfrak{G}$ les opérations d'ordre 3, 6, 7 forment respectivement deux systèmes conjugués de 28, deux de 28, deux de 24. Les opérations d'ordre 2 forment un système de 7. $|a|$ et $|b|$ ne divisant normalement aucun diviseur normal, les facteurs de composition de $\mathfrak{G}$ sont 3, 7, 2, 2, 2, 1 dans cet ordre unique.

Soit maintenant $\alpha = -1$. Si c transforme chaque cycle de α en lui-même, $c = (0, \infty)(i^{2x}, i^{2\rho-2x})(i^{2x+1}, i^{2\sigma-2x-1})$, $x = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}(p-3)$, $\rho, \sigma < \frac{1}{2}(p-1)$, ou $c = (z, \xi z^{-1})$, ξ étant égal à $i^{2\rho} = r$ ou à $i^{2\sigma} = s$ selon que z est carré ou non. Ici encore il faut et il suffit que $cb^3c = b^x cb^{x'} b^{-t} a^x b^t$. Or, si $p \equiv 1 \pmod{4}$, c remplaçant -1 par $-r$, on aura

$$cbc = (\infty, r, \dots, -r),$$

et, pour $t = r$,

$$b^{-t} a^x b^t = (r)(\dots).$$

Donc, $x = x' = r$ et $cbe = b'ca' b'$. Pour que le second membre fixe 0, il faut $i^{2y} = -r$. Soit alors y le premier non carré (mod p) dans la suite des entiers naturels;

$$cbe = \left(x, r, \frac{r}{2}, \dots, \frac{r}{y-1}, \frac{s}{y}, \dots, -r \right),$$

$$b'ca' b' = \left(\frac{r}{y-1}, \frac{1-y}{r} s + r, \dots \right).$$

Donc $s = r$, $c = (r^{y-1})$ et $y = \psi(2, p)$. Alors

$$cb^3c = \left(x, \frac{r}{3}, \frac{r}{2 \cdot 3}, \dots, -\frac{r}{\beta} \right),$$

et pour $t = \frac{r}{\beta}$,

$$b^{-t} a' b' = \left(\frac{r}{\beta} \right) (\dots), \quad x = x' = \frac{r}{\beta}, \quad cb^3c = b^{\frac{r}{\beta}} c a' b^{\frac{r}{\beta}}.$$

Pour que le second membre fixe 0, il faut $i^{2y} = \frac{-r}{\beta^2} c$, et l'on vérifie directement que cela suffit, quel que soit le carré $-r = x^2$; en profitant de l'indétermination de x on pourra choisir y pour une des valeurs des β . Ainsi ψ est défini par $b^p = a^{\frac{p-1}{2}} = c^2 = (ca)^2 = 1$, $a^{-1}ba = b^a$, $cb^3c = b^{-\frac{x^2}{\beta}} c a' b^{-\frac{x^2}{\beta}}$, $\beta i^x = x$, x étant quelconque ($\neq 0$) et indépendant de β . Il suffira de faire parcourir à β un système de restes tels qu'aucune équation ne résulte des autres (cf. I). En prenant $y = 1$ pour une valeur de β on pourra éliminer a par la dernière équation. Pour $\beta = x$, cette dernière équation se réduit à $(b^x c)^2 = 1$.

Pour $p = 5$, $i = 2$, $k = 1$, les équations

$$b^3 = a^2 = c^2 = (ca)^2 = (ab)^2 = (bc)^3, \quad cb^2c = b^3cab^2$$

se réduisent à $b^3 = c^2 = (bc)^3 = 1$; il suffit de vérifier que, en posant $a = cb^3cb^2cb^3$, ces dernières équations entraînent

$$(cb^3cb^2cb^3)^2 = (b^3cb^2cb^3)^2 = (cb^3cb^2cb^3)^2 = 1.$$

Or on a

$$\begin{aligned} cb^3 cb^2 cb^3 &= cb^2 . bcb . bcb^3 = cb^2 cb^4 . cbc . b^3 = cb . bcb . b^2 cb^2 \\ &= cbc . b^4 cb^2 cb^2 = b^4 cb^3 cb^2 cb^2 = (b^4 c) b^3 cb^2 . cbc (b^4 c)^{-1} \\ &= (b^4 c) b^3 . cbc . b^4 (b^4 c)^{-1} = (b^4 c) b^2 cb^3 (b^4 c)^{-1} \end{aligned}$$

conjuguée de c , donc d'ordre 2,

$$b^3 cb^3 cb^3 = (b^3 c) b^3 . cbc . (b^3 c)^{-1} = (b^3 c) bcb^4 (b^3 c)^{-1}$$

conjuguée de c , enfin

$$\begin{aligned} cb^3 cb^2 cb^4 &= cb^3 cb^2 . cb^4 c . c = cb^3 cb^3 cbc \\ &= (cbc)^{-1} . cb^4 c . b^3 cbc = (cbc)^{-1} bcb^4 (cbc) \end{aligned}$$

conjuguée de c . Ainsi $\mathfrak{v}(2, 5)$ d'ordre 60 est engendré par

$$b = (z + 1) = (01234) \quad c = (-z^{-1}) = (0\infty)(14)$$

et défini par

$$b^5 = c^2 = (bc)^3 = 1.$$

Si $p \equiv 3 \pmod{4}$, $cbc = (\infty, r, \dots, -s)$, et pour $t = r$ il faut $x = s$, $x' = r$, $cbc = b^s ca^x b^r$: le second membre devant fixer 0, il faut $i^{2r} \equiv -1$, ce qui est impossible, $-s$ n'étant pas carré.

Si c échange les cycles de a ,

$$c = (0, \infty)(i^{2x}, i^{2\rho+1-2x})(i^{2x+1}, i^{2\sigma+1-2x-1}) = (z, \xi z^{-1});$$

$\xi = i^{2\rho+1} = r$ si z est carré, $\xi = i^{2\sigma+1} = s$ si z est non carré. Or si $p \equiv 1 \pmod{4}$, $cbc = (\infty, r, \dots, -r)$, et pour $t = r$ il faut

$$x = x' = r, \quad cbc = b^r ca^x b^r;$$

le second membre devant fixer 0, il faut $si^{2r} = -r^2$, ce qui est impossible, s étant non carré. Si $p \equiv 3 \pmod{4}$, $cbc = (\infty, r, \dots, -s)$, et, pour $t = r$, $b^{-t} a^x b^t = (r) \dots$, $x = s$, $x' = r$, $cbc = b^s ca^x b^r$. Le second membre devant fixer 0, il faut $i^{2r} = -r$. Soit alors ν le pre-

mier non carré (mod p) dans la suite des entiers naturels;

$$cbc = \left(\infty, r, \frac{r}{2}, \dots, \frac{r}{v-1}, \frac{s}{v}, \dots, -s \right),$$

$$b^r c a^s b^s = \left(\frac{r}{v-1}, \frac{1-v}{v} r + s, \dots \right).$$

Donc $c = (r z^{-1})$, le groupe est $\psi(2, p)$ et l'on a les mêmes équations que tout à l'heure.

Pour $p = 7$, $i = 3$, $\kappa = 2$, les équations

$$(1) \quad b^7 = a^3 = c^2 = (ca)^2 = 1, \quad a^{-1}ba = b^2, \quad cb^3c = bcab$$

(la dernière s'écrivant $a = cb^6 cb^3 cb^6$) suffisent, car de la dernière résulte

$$cbc = b^3 cb^6 a^2 = b^3 ca^2 b^3$$

dont le carré donne

$$cb^2c = b^3 \cdot ca^2 \cdot b^6 ca^2 b^3 = b^3 a \cdot cb^6 c \cdot a^2 b^3$$

$$= b^3 \cdot ab^4 \cdot ac \cdot b^4 a^2 \cdot b^3 = b^5 cb^3 \quad \text{ou} \quad (b^2c)^3 = 1,$$

et le carré de $cb^3c = bcab$ donne

$$cb^6c = bc \cdot ab^2 \cdot cab = b \cdot cbc \cdot b \quad \text{ou} \quad (bc)^4 = 1.$$

Inversement (1) résulte de $b^7 = c^2 = (b^2c)^3 = (bc)^4 = 1$. En effet, en posant

$$a = cb^6 cb^3 cb^6,$$

$ca = b^6 c \cdot b^3 cb^6$ est conjuguée de $b^3 \cdot cb^3 c = b^5 cb^2$, donc de c , qui est d'ordre 2.

$$a^{-1}ba = bcb^3 \cdot bcbcbcb \cdot b^5 cb^3 cb^6$$

$$= bcb^3 \cdot cb^3 c \cdot b^3 cb^6 = b \cdot cb^3 cb^3 c \cdot b^6 = b^2.$$

Enfin,

$$a^2 = cb^6 cb^3 \cdot cb^6 cb^6 c \cdot b^3 cb^6 = cb^6 cb^6 \cdot b^5 cb^3 \cdot b^6 cb^6$$

$$= cb^6 cb^6 c \cdot b^2 \cdot cb^6 cb^6 = bcb^4 cbc = a^{-1}.$$

Ainsi $\psi(2, 7)$ est engendré par

$$b = (z + 1) = 0123456, \quad c = (3z^{-1}) = 0\infty.13.25.46$$

et défini par

$$b^7 = c^2 = (b^2c)^2 = (bc)^4 = 1.$$

En posant $b = b^1$, $b' = b^2$, on obtient les équations de M. Dyck (*M. A.*, t. XV, p. 41, 1882).

$\psi(3, 2) \equiv \mathcal{L}(3, 2)$ étant un $\mathcal{G}_{1,2}^*$ simple est isomorphe à $\psi(2, 7)$.

Pour $p = 11$, $i = 2$, $z = 4$, les équations

$$b^{11} = a^2 = c^2 = (ca)^2 = 1, \quad a^{-1}ba = b^4, \quad cbc = b^6ca^2b^6$$

suffisent, car le carré de la dernière donne $cb^2c = b^3cab^3$, et sa quatrième puissance $(cb^4)^2 = 1$.

Pour $p = 13$, $i = 2$, $z = 4$, les équations

$$b^{13} = a^6 = c^2 = (ca)^2 = 1, \quad a^{-1}ba = b^4, \quad cbc = b^{-3}ca^2b^{-3}, \\ cb^2c = b^5cab^5$$

suffisent, car la dernière élevée au carré donne

$$cb^4c = b^5cab^{-3}cab^5 = b^4cb^4;$$

elle donne encore directement $cb^3c = b^2cb^8a^3$ dont le produit avec $cbc = b^{-3}ca^2b^{-3}$ est

$$cb^6c = b^2cb^8a^3b^{-3}ca^2b^{-3} = b^2acb^{-1}ca^2b^{-3} = b^6ca^3b^6.$$

4. Soient $s = s_1 \dots s_r$, $s_i = (a_{i1} \dots a_{ip})$ une substitution d'ordre premier p à r cycles, $\Pi = \{s\}$, $\Pi_i = \{s_i\}$. Cherchons le groupe Γ des substitutions permutables à Π dans le symétrique de même champ. Γ contenant normalement Π est imprimitif et contient normalement un groupe K ne permutant pas les systèmes d'imprimitivité. $\Gamma|K$ est isomorphe au symétrique $\{(12), (12 \dots r)\}$ de champ $1, 2, \dots, r$.

Posons

$$\Pi_1^p(a_{1i}a_{2i}) = \alpha, \quad \Pi_1^p(a_{1i}a_{2i} \dots a_{ri}) = \beta, \quad \{\alpha, \beta\} = S.$$

α et β étant permutable à s , on aura $\Gamma = KS$. Soient k une substitution de K , k_i son effet sur $a_{1i}, \dots, a_{ip}$, ρ une racine primitive de p et $k^{-1}sk = s^{\rho^r}$. On aura $k_i^{-1}s_ik_i = s_i^{\rho^r}$ et k_i est dans le métacyclique $\{s_i, t_i\}$ où $t_i^{-1}s_it_i = s_i^{\rho}$. Donc k sera de la forme $\Pi_i s_i^{\sigma_i} t_i^{\tau_i}$, $i = 1 \dots r$, et $K = \{s_1, \dots, s_r, t_1\}$ d'ordre $p^r(p-1)$. K contient normalement $\{s_1, \dots, s_r\} = K_0$ et a la parité de r . $k_i = s_i^{\sigma_i} t_i^{\tau_i}$ déplaçant $p-1$ symboles ou p , selon que $x \neq 0$ ou $x = 0$, K_0 contient toutes les $s_i^{\rho^r}$ de K . Il est clair que Γ est résoluble si $r \leq 4$. En remplaçant au besoin t_i par une de ses conjuguées, on peut supposer que t_i fixe a_{1i} ; alors chaque substitution de S sera évidemment permutable à chaque substitution de $\{s, t\}$.

Cherchons le plus grand commun diviseur D de K avec un groupe $G > H$ de degré rp , mais de classe $c > (r-1)p$, ou du moins ne contenant pas de s_p de degré $< rp$. Dans une substitution $\Pi_i s_i^{\sigma_i} t_i^{\tau_i}$ de D , x ne peut s'annuler que si tous les σ_i sont $\neq 0$; et si D contient $u = \Pi_i s_i^{\sigma_i}$ et $u' = \Pi_i t_i^{\sigma'_i}$, donc $u^{\alpha} u'^{\alpha'} \equiv -\alpha' \sigma'_i \pmod{p}$, on devra avoir $\alpha \sigma_i \equiv -\alpha' \sigma'_i$, quel que soit i , donc $\sigma'_i \equiv \lambda \sigma_i$, $u' = u^{\lambda}$. Donc le plus grand commun diviseur de D , K_0 est $\{u\} = D^0$ normal dans D . Si $D > D_0$, soient $\omega t^x, \omega' t^{x'}, \dots$ ses substitutions, $\omega, \omega', \dots$ étant dans K_0 , et l'un au moins des $x, x', \dots$ étant $p-1$. D contiendra $(\omega t^x)^{\beta} (\omega' t^{x'})^{\beta'} \dots = \omega t^{\beta x + \beta' x' + \dots}$, ω étant dans K_0 , et l'on peut choisir $\beta, \beta', \dots$ tels que $\beta x + \beta' x' + \dots$ soit le plus grand commun diviseur θ de $x, x', \dots$. Mais si D contient ωt^{θ} et $\omega' t^{m\theta}$, il contient $(\omega t^{\theta})^m = \omega_m t^{m\theta}$ et $\omega' \omega_m^{-1} = u^{\delta}$; donc $\omega' = u^{\delta} \omega_m$ et $\omega' t^{m\theta} = u^{\delta} (\omega t^{\theta})^m$. Donc $D = \{u, \omega t^{\theta}\}$ est isomorphe à un diviseur du métacyclique. En changeant au besoin de notation, on peut supposer que $D \equiv \{s, t^{\theta}\}$ et que t_i fixe a_{1i} , en sorte que chaque substitution de S (formée avec les nouveaux symboles) soit permutable à chaque substitution de D . Soient $\theta > 0$, Δ le plus grand commun diviseur de G, Γ et γx une substitution de Δ , γ étant dans S et x dans K . Pour que $(\gamma x)^{-1} s^{\gamma} t^{\theta x} \gamma x$ soit dans D , quels que soient y et z , il faut et suffit que $x^{-1} t^{\theta x} x$ soit dans D , ou, puisque $x = \Pi_i s_i^{\sigma_i} t_i^{\tau_i}$, que $s_i^{-\sigma_i} t_i^{\theta} s_i^{\sigma_i} = s_i^{\sigma_i} t_i^{\theta \tau_i}$,

σ et τ étant indépendants de i . Or, en observant que $t_i^{\sigma_i} s_i^{\tau_i} t_i^{-\sigma_i} = s_i^{\sigma_i \tau_i}$, la condition précédente donne $s_i^{\sigma_i \tau_i \rho^{-1} - 1} t_i^{\rho} = s_i^{\tau_i} t_i^{\rho \sigma_i}$, d'où $\sigma_i(\rho - 1) = \sigma$, $\tau = 1$. Donc α est dans $\{s\}$ et $\Delta = D\Sigma$, Σ divisant S ; Δ est le produit direct de D , Σ , et si $r = 2$, $\Delta | \{s\}$ est abélien.

5. Je me bornerai à énoncer ici certains théorèmes dont j'aurai à faire usage.

Dans un groupe primitif G de degré kp et d'ordre akp (p premier, $ak \not\equiv 0 \pmod{p}$), le plus petit multiple commun M des diviseurs d'ordre p (tous conjugués) est simple. Si $k > 1$, $(M, 1)$ est composé. Comme $G = MB$, B étant le groupe des substitutions permutables à un g_p , on a $G | M \equiv B | D$, D étant le plus grand commun diviseur de B , M . Si donc $k < 5$, $G | M$ est résoluble. Si $k = 1$, $G | M$ est cyclique. Tout diviseur normal $H > 1$ de G étant transitif, donc d'ordre $\equiv 0 \pmod{p}$, donc $\geq M$, $G | H$ sera cyclique (MILLER, P. L. M. S., t. XXXI, 1899, p. 148).

Un $g^{p+\alpha}$ où $\alpha \geq 3$ ne peut être $\alpha + 1$ fois transitif sans contenir l'alterné. On peut dire encore qu'un g^n primitif d'ordre $< \frac{1}{2}n!$ ne peut contenir une s_p^p que si $n = p, p + 1, p + 2$. Plus généralement, un g^n primitif d'ordre $< \frac{1}{2}n!$ ne peut contenir une s_p^{kp} ($k < 6$ et $< p$) que si $n \leq kp + k + 1$. Un $g^{2p+\alpha}$ ($\alpha \geq 3$) ne contenant pas l'alterné ne peut être $\alpha + 1$ fois transitif. (JORDAN, S. M., t. I, 1873, p. 40-45. Cf. MILLER, B. S. Am., t. IV, 1898, p. 141).

6. Soient G un groupe transitif de degré $n = rp$ (p premier), de classe $c > (r - 1)p$, d'ordre $N = mp$ (m premier à p et $> n - p + 1$); $\Pi = \{s\}$ un des g_p conjugués de G [$s = s_1 \dots s_r$, $s_i = (a_i \dots a_{ip})$]; Δ le g_{rp} des substitutions de G permutables à Π ; D le g_{dp} des substitutions de Δ qui ne permutent pas les systèmes d'intransitivité de Π . On a vu que, si $d > 1$, Δ est le produit direct de D par un groupe Σ isomorphe à un diviseur du g^r symétrique. Les substitutions d'ordre multiple de p sont toutes dans les conjugués de Δ , et chacun de ces conjugués contient au moins $p - 1$ de ces substitutions, celles de Π . Il y a donc au moins $\frac{N}{dp}(p - 1)$ substitutions d'ordre multiple de p (et, par suite,

de degré n). D'autre part, le nombre total des symboles déplacés par les substitutions de G est $N(n-1)$ et les x substitutions de degré $< n$ en déplacent

$$N(n-1) - n(N-x) = nx - N.$$

Or, c étant $> n-p$, $x-1$ de ces dernières sont de degré $\geq n-p+1$.
Donc

$$nx - N \geq (n-p+1)(x-1) \quad \text{et} \quad x \geq \frac{N-n+p-1}{p-1} > \frac{N}{p}$$

(d'après l'hypothèse faite sur m). Or, c étant $> (r-1)p$, les x substitutions de degré $< n$ auront toutes un ordre premier à p et feront partie des μm (μ entier) substitutions dont l'ordre divise m . Donc $\mu \geq 2$ et il y a au plus $N - 2\frac{N}{p}$ substitutions d'ordre multiple de p . Donc

$$N \frac{p-1}{2p} \leq N - \frac{2N}{p},$$

d'où

$$\delta \geq \frac{p-1}{p-2} \quad \text{ou} \quad \delta \geq 2.$$

Si $r=1$ les hypothèses se vérifient d'elles-mêmes pour G non cyclique et l'on a ce théorème de Mathieu (*J. M.*, 2^e série, t. VI, 1861, p. 310) *qu'un g^p non cyclique contient des substitutions $\neq 1$ permutable à ses g_p .*

On peut remplacer les hypothèses faites sur m et c par celle qu'il n'y a pas de s_p à moins de r cycles et que la transitivité t est ≤ 2 . Pour le faire voir, j'établirai d'abord une formule générale. Considérons les $\binom{n}{k}$ combinaisons k à k des n symboles déplacés par un $g^n G$ rangés dans un ordre arbitraire. Soit G_i^k le diviseur fixant les k symboles de la $i^{\text{ème}}$ combinaison. G_i^k peut coïncider avec G_j^k , donc aussi avec un $G_{i'}^k$, où $k' > k$; mais je regarderai ici chaque élément d'un G_i^k comme distinct de ceux des autres. Une substitution s fixant $k + \nu$ symboles déterminés et point d'autres figurera, si elle existe

dans G , dans $\binom{k+v}{k} = \binom{k+v}{v} G_i^k$. Donc, dans l'ensemble, $E_k = \Sigma_i G_i^k - \Sigma_i G_i^{k+1} + \dots$, de nombre

$$e_k = \Sigma_i (G_i^k, 1) - \Sigma_i (G_i^{k+1}, 1) + \dots = \Sigma_i (G_i^k, 1) - e_{k+1},$$

elle figurera $\binom{k+v}{k} - \binom{k+v}{v-1} + \binom{k+v}{v-1} - \dots \pm 1 = \binom{k+v-1}{v}$ fois. Si s n'existe pas dans G , elle ne figurera pas non plus dans E_k et l'on aura, g_μ étant le nombre des éléments de G qui fixent μ symboles exactement,

$$e_k = \Sigma_0^{n-k} \binom{k+v-1}{v} g_{k+v} = \Sigma_k^n \binom{\mu-1}{\mu-k} g_\mu \geq \binom{n-1}{n-k} \quad (\text{car } g_n = 1).$$

Pour $k=1$, e_1 est le nombre exact des substitutions de degré $< n$. Si G est t fois transitif,

$$(G_i^k, 1) = (G, 1) : n(n-1) \dots (n-k+1) \quad (k \leq t)$$

et

$$e_1 = (G, 1) - \frac{1}{2!} (G, 1) + \dots + \frac{(-1)^{t-1}}{t!} (G, 1) + (-1)^t e_{t+1}.$$

Cela posé, il y aura, dans le groupe particulier que nous considérons, $e_1 = \frac{1}{2}N + e_3$ ($e_3 > 1$) substitutions de degré $< n$. Donc

$$N - \frac{N}{2} > N \frac{p-1}{2p} \quad \text{ou} \quad \delta > 2 \frac{p-1}{p} \quad \text{ou} \quad \delta \geq 2.$$

Si $t \leq 4$, $e_1 = \frac{5}{8}N + e_5$ ($e_5 > 1$) et $\delta > 3 - \frac{p+8}{3p}$; donc $\delta \geq 4$, si $p \geq 5$. Pour $t \geq 4$, $r=3$, G pair, $(\Sigma_2, 1)$ doit être ≤ 3 , donc $d \geq 2$. Pour $t \geq 2$, $r=2$, G pair, $(\Sigma, 1)$ doit être $= 1$, donc $d \geq 2$ (et il en est de même pour $t=1$ si $c > p$ avec $\frac{N}{p} > p+1$).

7. Supposons maintenant $2p+1=q$ premier et soient g un g^q

transitif d'ordre $< \frac{1}{2}(q!)$ et $> q(q-1)$, G d'ordre N , le g^{2p} fixant un des symboles. G contiendra des s_p ; car les substitutions ($\neq 1$) de $\mathcal{G}$ permutables à ses g_q sont de degré $q-1=2p$ et d'ordre $2, p$ ou $2p$; or, si elles étaient d'ordre 2 , elles seraient impaires et, dans le plus petit commun multiple des substitutions paires de $\mathcal{G}$, les g_q ne seraient permutables qu'à leurs propres substitutions. G ne contiendra pas de s_p^p , car il faudrait $p \geq \frac{2}{3}q$, ce qui ne se peut. De plus N qui divise $(2p)!$ n'est pas divisible par p^2 ; car un g_p y serait abélien sans être cyclique; or, toute s_p est ici de la forme $s = s_1 s_2$ [$s_i = (a_{i1} \dots a_{ip})$; $i = 1, 2$], et dans les s_p permutables à s qui sont de la forme $s_1^{a_1} s_2^{a_2}$, il faut $a_1 = a_2$, sans quoi $s^{-a_1} s_1^{a_1} s_2^{a_2}$ serait une s_p^p . Soit d'abord $\mathcal{G}$ pair, donc $\delta = d$. Si G est intransitif, ses deux constituants transitifs de degré p , A et B , étant premiers à G , on a $G \equiv A \equiv B$, et comme A contient des substitutions d'ordre premier à p permutables à ses g_p , d est ≥ 2 . Si G est transitif, $\mathcal{G}$ deux fois transitif contient $c_1 = \frac{1}{2}qN + c_2$ ($c_2 > 1$) substitutions de degré $\leq 2p$ et $qN \frac{p-1}{dp} s_p^{2p}$. Donc

$$\frac{1}{2}qN - c_1 \geq qN \frac{p-1}{dp},$$

d'où

$$d > 2 \frac{p-1}{p} \quad \text{ou} \quad d \geq 2.$$

Si $\mathcal{G}$ est impair, on arrive à la même conclusion en considérant le plus petit commun multiple de ses substitutions paires. Ainsi $\mathcal{G}$ contient des substitutions de degré $2(p-1) = q-3$ permutables à $\{s\}$ (énoncé par Mathieu, *J. M.*, 2^e série, t. XVIII, 1873, p. 26).

Soit $\mathfrak{N}$ le plus petit commun multiple des g_q de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est pair, les substitutions d'ordre multiple de p permutables à un g_q seront toutes d'ordre p . Or, $(\mathcal{G}, \mathfrak{N})$ qui divise $p(3)$ ne peut être égal à p , car $(\mathcal{G}, 1)$ n'étant pas divisible par p^2 , $(\mathfrak{N}, 1)$ serait premier à p et chaque g_q de $\mathfrak{N}$ ne serait permutable qu'à ses substitutions. Donc $(\mathcal{G}, \mathfrak{N}) = 1$. Donc si $\mathcal{G}$ est pair, $\mathcal{G} = \mathfrak{N}$ est simple.

Ainsi $D = \{s, g\}$, g étant une s^{q-3} permutable à $\{s\}$. Pour former g on n'a à choisir qu'entre un nombre limité de formes distinctes; car, si t_i est la s_{p-1}^{p-1} permutable à $\{s_i\}$ qui fixe a_{i1} et si $t = t_1 t_2$, on a $D = \{s, s_2^{\sigma} t^{\theta}\}$, σ et θ étant indéterminés; $s_2^{\sigma} t^{\theta}$ est une conjuguée t_2^{θ}

de t_j complètement déterminée par celui des a_{2k} qu'elle fixe, et si l'on pose $a_{2, \lambda+j} = a'_{2j}$ ($j = 1, \dots, p$ et $\lambda + j$ étant pris mod p , ≥ 0 , $\leq p-1$), t'_2 se déduit de t , en écrivant a'_{2j} pour a_{1j} : on aura toutes les $s_2^{\tau} t^0$ en faisant varier λ et 0.

Désignons les symboles de $\mathfrak{g}$ par $0, 1, \dots, q-1 \pmod{q}$: on pourra supposer que $\mathfrak{g}$ contient $(z, z+1) = \alpha$ et que $s = (z, t^2 z)$: t étant racine primitive de q . Écrivons $s = (t^{2x}, t^{2(x+1)}) (t^{1+2x}, t^{1+2(x+1)})$; en faisant correspondre t^{2x} dans le premier cycle et t^{1+2x} dans le second au symbole x de la substitution $(x, x+1) \pmod{p}$ et en observant que la $s_{p-1}^{\frac{p-1}{2}}$ conjuguée de $(x, p^0 x)$ (p racine primitive de p) et permutable à $(x+1)$ qui fixe ξ est la transformée $(x, p^0(x-\xi) + \xi)$ de $(x, p^0 x)$ par $(x+\xi)$, on voit que les diverses de g sont $(t^{2x}, t^{2x p^0}) (t^{1+2x}, t^{1+2[p^0(x-\xi)+\xi]})$ ($\xi = 0, \dots, p-1$; $0 = 1, p-2$).

Écrivons β pour s , γ pour g^2 , γ_i pour les différentes formes de γ , et considérons les groupes

$$(\alpha, \beta, \gamma_i) = G_i^q = G_i.$$

G_i étant pair sera toujours simple. Tout $g_N^q \mathfrak{g}$ où $N > q(q-1)$ et $< \frac{1}{2}(q!)$ contient un G_i , soit G_1 , et le plus petit commun multiple $\mathfrak{N}$ des g_i de $\mathfrak{g}$ est $\geq G_1$. Si $\mathfrak{N} > G_1$, $\mathfrak{g}$ contient des s_q^q hors de G_1 et $(\mathfrak{g}, G_1)$ est $\geq q$. Or, on ne peut avoir $(\mathfrak{g}, G_1) = q$, car N serait multiple de q^2 et ne diviserait pas $q!$. Donc $(\mathfrak{g}, G_1) \geq q+1$.

8. Pour $q = 5$, G_i n'existe pas, car il devrait contenir une s^{q-3} . Donc, tout g^5 transitif divise le métacyclique ou contient l'alterné.

Soient $q = 7$, $t = 3$,

$$\alpha = 0123456, \quad \beta = 124.365,$$

$$\gamma_1 = 24.56, \quad \gamma_2 = 24.35, \quad \gamma_3 = 24.36.$$

Ici G_2 est l'alterné, car $\alpha^{-1} \gamma_2 \alpha \gamma_2 = 246$, et G_3 est conjugué de G_1 , car, en posant $0 = 132645$, on a $0^2 = \beta$, $0^{-1} \alpha 0 = \alpha^3$, $0^{-1} \gamma_3 0 = \gamma_1$. Écrivons γ pour γ_1 , G pour G_1 , et examinons $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle = G$. On a $\alpha \gamma \alpha^{-1} = 13.45 = \delta$. Le $g^6 F$ qui fixe 0 est donc transitif puisque $\langle \beta, \delta \rangle$ l'est, et G est deux fois transitif. Formons encore $\beta^{-1} \delta \beta \delta = 45.26 = \varepsilon$.

Le diviseur E qui fixe 0, 1 n'est pas de degré effectif 5, car contenant le groupe quadratique $\langle \gamma, \varepsilon \rangle = Q$ il serait transitif et diviserait le métacyclique : or les g_i du $g_{4,3}^8$ sont cycliques. D'ailleurs E ne renferme ni s^4 cyclique (G est pair) ni s^2 . Donc $E = Q$, F d'ordre 4.6 est $\langle \beta, \gamma, \delta \rangle$, et $(G, 1) = 4.6.7 = 168$. Comme α, β, γ vérifient les équations

$$\alpha^7 = \beta^3 = \gamma^2 = (\gamma\beta)^2 = 1, \quad \beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^2, \quad \gamma\alpha^3\gamma = \alpha\gamma\beta\alpha,$$

G est le groupe $\mathfrak{v}(2, 7) \equiv \mathfrak{v}(3, 2)$ dont on a déjà obtenu la représentation en g^8 .

Cherchons à former un g^8 trois fois transitif où G soit le diviseur fixant 7. Il contiendra une transformée de γ de la forme $\zeta = 07.1x$, x étant inconnu. Comme $\zeta\beta\zeta$ doit être dans F (1), x ne peut être 2 ni 4, car $\zeta\beta\zeta\beta$ serait une s^3 ; x ne peut être 5 ni 6, car on aurait respectivement $\varepsilon\zeta\varepsilon = 07.14$, $\varepsilon\zeta\varepsilon = 07.12$. Mais $\zeta = 07.13$ donne

$$\zeta\beta\zeta = \delta\beta, \quad \zeta\gamma\zeta = \gamma, \quad \zeta\delta\zeta = \delta, \quad \text{donc} \quad \zeta F \zeta = F$$

et

$$\zeta\alpha\zeta = \alpha\zeta\delta\beta^2\alpha^3, \quad \text{donc} \quad \zeta\alpha F \zeta = \alpha\zeta\delta\beta^2\alpha^3 F.$$

Or αF renferme un système de restes de $G(\text{modd } F, 1)$, puisque, F étant transitif, αF renferme des substitutions changeant 0 en 1, ..., 6, Donc on a bien $\zeta G \zeta \leq G \zeta G$, et $\langle \alpha, \beta, \gamma, \zeta \rangle = H$ est un $g_{13,1}^8$ trois fois transitif, défini par les équations de G jointes à

$$\zeta^2 = (\zeta\gamma)^2 = (\zeta\delta)^2 = 1, \quad \zeta\beta\zeta = \delta\beta, \quad \zeta\alpha\zeta = \alpha\zeta\delta\beta^2\alpha^3 \quad (\delta = \alpha\gamma\alpha^{-1}).$$

On vérifie directement que les transformées respectives ξ_k ($k = 0, \dots, 6$) de $\xi = \zeta\beta^{-1}\delta\beta\delta = 07.13.26.45$ par α^k forment avec 1 un g_8 abélien $(\xi, \xi_1, \xi_2) = A$ normal dans H. On remarquera que A n'est qu'une fois transitif dans H trois fois transitif. Tout diviseur normal I de H coïncide avec A, car on a $H = IG$, et G simple est premier à I. Donc I est d'ordre 8. Donc $I = A$, sans quoi IA serait normal $> A$ et $H | I \equiv G$ ne serait pas simple; $\langle \alpha, \beta, \xi \rangle$ et $\langle \alpha, \xi \rangle$ sont respectivement le $g_{6,8}^8$ composé et le $g_{7,8}^8$ deux fois transitifs (2, 5). Si l'on convient que 7 représente ∞ du $C(7)$, H contient $(z, -z^{-1}) = 0\infty.16.23.45 = \xi\beta^2\gamma$ et par suite aussi $\mathfrak{v}(2, 7) = \langle (z + 1), (i^2 z), (-z^{-1}) \rangle$.

Soit Γ un g^7 ne contenant pas l'alterné. $(\Gamma, 1)$ divise $\frac{7!}{2.3} = 4.5.6.7$. Si $(\Gamma, 1) > 7.6$, Γ est $\geq G$. Or on a vu que, si $\Gamma > G$, $(\Gamma, 1) > 4.6.7.8$. Donc G est l'unique g^7 ne contenant pas l'alterné et ne divisant pas le métacyclique. Par suite, s'il y a un $g^8 K$ trois fois transitif dans le champ 0, ..., 7 autre que Π , le groupe M qui y fixe 7 sera le métacyclique qu'on peut supposer engendré par

$$\alpha = 0123456, \quad \theta = 132645 \ (\theta^2 = \beta),$$

et s'obtiendra en adjoignant un générateur ζ permutable à $\{\theta\}$, transformé de $\theta^3 = 16.34.25$, de la forme $\zeta = (07)(6)...$, θ^3 étant l'unique s_2 de $\{\theta\}$, on aura

$$\zeta\theta^3\zeta = \theta^3;$$

donc ζ fixe 1. On ne peut avoir $\zeta = 07.34.25$, car $\zeta\theta^3$ serait de degré 4 et K est de classe 6. Donc ζ a l'une des deux formes $07.23.45 = \zeta'$, $07.35.42$. $\zeta'\theta\zeta' = 123654$ n'étant pas dans $\{\theta\}$, il faut que $\zeta = 07.35.42$. On a alors

$$\zeta\theta\zeta = \theta^3, \quad \zeta\alpha\zeta = \alpha\zeta\theta^3\alpha;$$

or $\alpha\{\theta\}$ renferme un système de restes de $M \bmod \{\theta\}$, 1, puisque, $\{\theta\}$ étant transitif, $\alpha\{\theta\}$ contient des substitutions changeant 0 en 1, ..., 6. Ainsi K existe et est unique : c'est donc le $g_{0,7,8}^8$ trois fois transitif de Mathieu qui se trouve défini par $\alpha^7 = \theta^6 = \zeta^2 = (\zeta\theta)^2 = 1$, $\theta^{-1}\alpha\theta = \alpha^3$, $\zeta\alpha\zeta = \alpha\zeta\theta^3\alpha$.

On a vu (3) qu'il y a deux $g_{0,8}^8$, et deux seulement, et que tout $g_{7,8}^8$ deux fois transitif a un g_8^8 normal abélien, contenant 7 s_2 conjuguées. Soient α une des s_2 d'un $g_{7,8}^8$ deux fois transitif, $\zeta = 07.1x.yz.tu$ la s_2 à adjoindre à α pour engendrer le groupe. Pour chacune des déterminations 2, 3, 4, 5, 6 de x, y étant un quelconque des symboles restants, z a trois déterminations possibles; d'où 15 formes à essayer. Mais $\theta^{-1}\zeta\theta$ convient ou non en même temps que ζ , et l'on connaît déjà la solution $\zeta = \xi = 07.13.26.45$. La condition $\zeta\{\alpha\}\zeta = \{\alpha\}\{\zeta\}\alpha\{\zeta\}$ exclut les formes restantes. Il n'y a donc qu'un $g_{7,8}^8$ deux fois transitif. Ce n'est d'ailleurs là qu'un cas particulier d'un théorème plus général (2). S'il y a encore un $g^8 X$ deux fois transitif dans le champ

0, ..., 7, le diviseur M qui y fixe 7 sera un $g_{2,7}^1$, qu'on peut supposer être ζ , 0^3 ($0^3 = 16.25.34$) et s'obtiendra en adjoignant une s_2 $\zeta = (07) \dots$, transformée de 0^3 permutable à 0^3 , fixant par suite deux des symboles 1, ..., 6 qui seront dans un même cycle de 0^3 . En considérant au besoin le groupe transformé par θ , on peut supposer que ζ fixe 1 et 6. On ne peut avoir $\zeta = 07.34.25$, car $\zeta\theta^3$ serait de degré 4 et X est de classe 6. Donc ζ a l'une des formes $07.32.45 = \zeta'$, $07.35.42$. Mais $\zeta'\alpha\zeta' = 7132546$ pour être dans $M\zeta'M$ devrait être de la forme $(60\dots)\zeta'(01\dots) = \alpha\zeta'\theta^{3k}\alpha$, et l'égalité $\zeta'\alpha^0\zeta'\alpha\zeta'\alpha^0 = 0^{3k}$ est impossible. Il faudrait donc $\zeta = 07.35.42$. Mais $\zeta\alpha^2\zeta$ devrait être de la forme $\alpha^4\zeta\theta^{3k}\alpha^4$ et $\zeta\alpha^3\zeta\alpha^2\zeta\alpha^3 = 0^5$. Donc X n'existe pas, et les seuls g^8 de transitivité ≥ 2 sont un $g_{7,8}^8$, deux $g_{10,8}^8$, un $g_{33,8}^8$, un $g_{134,8}^8$.

9. Soit $q = 11$. On a, en écrivant a pour 10,

$$\alpha = 0123456789a, \quad \iota = 2, \quad \beta = 14593.28a76.$$

Si γ est d'ordre 2, γ a l'une des cinq formes

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 43.59.86.a7, & \gamma_2 &= 43.59.a2.76, & \gamma_3 &= 45.59.78.62, \\ \gamma_4 &= 43.59.6a.28, & \gamma_5 &= 43.59.27.8a. \end{aligned}$$

Mais comme

$$[(\alpha^1\gamma_1)^0(\alpha^0\gamma_1)^0]^2 = 125, \quad (\alpha^3\gamma_3)^4 = 048, \quad [(\alpha\gamma_5)^0(\alpha^0\gamma_5)^0]^2 = 16a.$$

$G_1 = G_3 = G_5$ est l'alterné. Passons à γ_2 , G_2 que j'appellerai respectivement γ , G . Les substitutions

$$\alpha^{-3}\gamma\alpha^3\alpha^{-6}\gamma\alpha^0 = 15.28.40.67 = \lambda, \quad \alpha^2\gamma\alpha^{-2} = 081.237.45 = \mu$$

(qui montrent que G est deux fois transitif) engendrent un $g^8 E$ où $\lambda\mu = 052.148.376 = \kappa$ engendre un groupe normal, et où la troisième s_2 est $\kappa^{-1}\lambda\kappa = 42.01.85.36 = \nu$, les systèmes d'intransitivité étant 0, 1, 2, 4, 5, 8 et 3, 6, 7. Je dis que E est le groupe fixant a , 9.

En effet, en adjoignant $\zeta = \beta^{-1}\gamma\beta = 93.15.26.78$ et en posant $\zeta\alpha = 05486.12397 = \theta$, on a

$$0^5 = \zeta^2 = (\zeta\theta)^3 = 1.$$

Donc $\{\zeta, \theta\} = F$ est partiellement homomorphe au g_{00}^5 simple. Donc il lui est isomorphe. D'ailleurs F contient $\lambda = \theta^2 \zeta \theta^3 \zeta \theta^2$. Donc $F = \{\zeta, \lambda, \mu\}$ et F est l'unique g_{00}^{10} transitif.

Cherchons à adjoindre à F une substitution ρ telle que, dans $\{F, \rho\} = G'$, F soit le groupe fixant α . G' étant deux fois transitif, on peut supposer que $\rho = (\eta\alpha) \dots$ est conjugué de γ . On doit avoir $\rho E \rho = E$. Donc ρ permute entre eux les symboles de chaque système d'intransitivité de E et fixe un ou trois des symboles 3, 6, 7. Si ρ n'en fixait qu'un, ρ serait permutable à celle s des trois s_2 de E qui le fixe et fixerait deux symboles d'un des cycles de s en déplaçant quatre autres des symboles 0, 1, 2, 4, 5, 8 sans avoir dans le champ de ces symboles un cycle commun avec s (ρs serait alors une s^2); dans ces conditions ρ ne serait pas permutable à $\{x\}$.

Soit donc $\rho = 3.6.7.a\eta \dots$; ρ devant être permutable à x, λ, μ, ν a trois formes possibles

$$\rho_1 = a\eta.04.12.58, \quad \rho_2 = a\eta.01.28.45, \quad \rho_3 = a\eta.08.15.24.$$

Mais comme $(\rho_2 \zeta)^4 = a3\eta$, $\{F, \rho_2\}$ est alterné et ρ_2 ne convient pas; si d'ailleurs on pose $52.48.36 = \tau$, on aura $\tau \rho_3 \tau = \rho_1$ et $\tau x \tau = x^2$, $\tau \zeta \tau = \nu \zeta x^2$, donc $\tau F \tau = F$. Bornons-nous donc à faire $\rho = \rho_1$ et supprimons l'indice 1. On a

$$\rho \theta \rho = \theta \rho \mu \theta, \quad \rho \theta^2 \rho = \theta^3 \rho \theta^3.$$

Or, $\theta E + \theta^2 E$ contenant des substitutions qui remplacent η par 0, ..., 8 renferme un système de restes de $F \pmod{E, 1}$. Donc, il existe un g_{00}^{11} . G' deux fois transitif, et il est unique comme le g_{00}^{10} transitif qui y fixe un symbole. Donc $G' = G [\alpha = \rho(\zeta \theta^3)^3 \zeta \theta^2, \beta = \theta^3 \zeta \theta^2 \zeta \rho \theta, \gamma = \beta \zeta \beta^{-1}]$, et G est défini par les équations de F jointes à

$$\rho^2 = (\rho \lambda)^2 = (\rho \theta^2)^3 = 1, \quad \rho x \rho = x, \quad \rho \theta \rho = \theta \rho \mu \theta,$$

ou, puisque $\mu \theta = \zeta \theta^3 \zeta \theta^2 \zeta$, par

$$\begin{aligned} \theta^5 = \zeta^2 = (\zeta \theta)^3 = \rho^2 = (\rho \theta^2)^3 = (\rho \theta^2 \zeta \theta^3 \zeta \theta^2)^2 = 1, \\ \rho \zeta \theta \rho = \zeta \theta, \quad \rho \theta \rho = \theta \rho \zeta \theta^3 \zeta \theta^2 \zeta. \end{aligned}$$

G étant simple contient $12 g_{11}$ et est représentable en g^{12} deux fois transitif (le diviseur fixant un symbole contient des s_{11}). G est donc isomorphe à l'unique g^{12}_{000} deux fois transitif $\mathfrak{O}(2, 11)$ dont on a trouvé les équations sous une autre forme au n° 5.

Considérons maintenant $\{\alpha, \beta, \gamma_4\} = G_4$. Les substitutions

$$\alpha^2 \gamma_4 \alpha^{-2} = 06.12.37.48 = \mu'$$

et

$$\alpha^{-6} \gamma_4 \alpha^0. \beta^{-3} \alpha^{-1} \gamma_4 \alpha^1 \beta^3 = 074.125.368 = \kappa'$$

montrent que G_4 est deux fois transitif. En posant $\tau = 13427568$ on a $\tau^{-1} \kappa' \tau = \kappa$, $\tau^{-1} \mu' \tau = \mu$; donc $\{\kappa', \mu'\}$, qui fixe $9, a$, est d'ordre 6 et G_4 d'ordre ≥ 660 . D'ailleurs

$$\tau^{-1} \alpha \tau = \rho^0 \mu \zeta \kappa^2,$$

$$\tau^{-1} \beta \tau = \theta^3 \mu \rho \lambda \theta^3 \mu \zeta,$$

$$\tau^{-1} \gamma_4 \tau = \theta^2 \mu \kappa^2 \theta^3 \mu \rho \theta^3 \mu \kappa \theta^3 \mu.$$

Donc

$$\tau^{-1} G_4 \tau = G.$$

Cherchons à adjoindre à G une substitution σ telle que, dans $\{G, \sigma\} = H$, G soit le groupe fixant b . H étant trois fois transitif, on peut supposer que $\sigma = (ab) \dots$ est conjuguée de γ et l'on voit, comme pour ρ , que σ a l'une des trois formes.

$$\sigma_1 = ab.04.12.58, \quad \sigma_2 = ab.01.28.45, \quad \sigma_3 = ab.08.15.24.$$

σ_1 est à rejeter, car $\sigma_1 \rho = ab\eta$; σ_3 de même, car, en posant $\tau = 05.14.67$, on a $\tau \lambda \tau = \lambda$, $\tau \kappa \tau = \kappa^2$, $\tau \zeta \tau = \lambda \zeta$, donc $\tau F \tau = F$ et $\tau \sigma_3 \tau = \sigma_1$. Soit donc $\sigma = \sigma_2$ et effaçons l'indice. On aura

$$\sigma^2 = (\sigma \rho)^3 = 1, \quad \sigma \kappa \sigma = \kappa, \quad \sigma \lambda \sigma = \lambda, \quad \sigma \zeta \sigma = \lambda \zeta,$$

et ces équations jointes à celles de G définissent H . La substitution $\sigma' = (z, -z^{-1}) \pmod{11}$ qui s'écrit (en mettant b pour ∞ , a pour 10) $0b.1a.25.37.48.69$ n'est pas dans H (contrairement à l'assertion

de MATHIEU, *J. M.*, 1873), car $0(\sigma x^7 \gamma x^4 \sigma^7 x^7 \gamma x^4)^2 = 0.426.1837$, qui fixe b, a, g , n'est pas dans E.

Si γ est d'ordre 4, on a encore cinq formes $\gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}$, dont les carrés reproduisent respectivement $\gamma_1, \dots, \gamma_5$. Comme $\{x, \beta, \gamma_i\}$ est $\geq \{x, \beta, \gamma_i^2\}$, il suffit de considérer

$$\gamma_7 = 4539. a726, \quad \gamma_9 = 4539.62a8.$$

Considérons d'abord $G_7 = g$ en écrivant γ pour γ_7 . On a

$$x\beta x^{-1} = 03482.17965. a = \hat{\alpha}, \quad x^{-2} \gamma x^2 = 6750.1948. a.2.3 = \varepsilon.$$

Donc le g^{10} fixant a est transitif et g l'est deux fois.

$$\gamma^{-2} \varepsilon \gamma^2 = 1538.0769.2.4. a = \gamma_1, \quad \gamma_7 \varepsilon \gamma_7^2 = 0879.1645. a.2.3 = \theta.$$

Donc le g^2 fixant $a, 3$ et le g^8 fixant $a, 2, 3$ sont transitifs; et g est quatre fois transitif. $\{\varepsilon, \theta\}$ est un g^8 régulier (le groupe des quaternions) que l'on peut transformer par $\gamma_i \hat{\sigma}^{-2} \varepsilon^2 \hat{\sigma}^2 = \omega$ en un groupe ω de générateurs

$$\omega^{-1} \varepsilon \omega = 0567.1243 = \lambda, \quad \omega^{-1} \theta \omega = 0263.1745 = \mu,$$

fixant $a, g, 8$, défini par

$$\lambda^4 = \mu^4 = 1, \quad \lambda^2 = \mu^2, \quad \mu^{-1} \lambda \mu = \lambda^3.$$

S'il existe une $s_2, \zeta = (78) \dots$ telle que, dans $\{\omega, \zeta\} = \mathfrak{C}$, ω soit le diviseur fixant 8, on peut supposer ζ semblable à $\lambda^2 = 06.14.23.57$. Pour que $\zeta \lambda^2 \zeta = (58) \dots$ ait la forme $d' \zeta d'$, d, d' étant dans ω , il faut que $d = 57 \dots, d' = 75 \dots$, donc, ω étant régulier, que $d = d' = \lambda^2$, donc que $\zeta \lambda^2 \zeta = \lambda^2 \zeta \lambda^2$, ou $(\zeta \lambda^2)^3 = (\lambda^2 \zeta)^3 = 1$. Donc $\zeta \lambda^2 = (785) \dots$ et $\zeta = (78)(5) \dots \zeta$ et λ^2 n'ont aucun cycle commun, car $\zeta \lambda^2$ étant une s_3 de degré < 9 serait une s_3^2 , donc de degré inférieur à la classe. Donc, si x, y, z, t désignent 1, 2, 3, 4 dans un ordre quelconque et si $\zeta = 0x.6y \dots$, x et y ne sont pas dans le même cycle de λ^2 , car ζ et λ^2 auraient le cycle zt . On a donc à essayer

pour ζ les formes

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= 01.62.43.78, & \zeta_2 &= 01.63.42.78, \\ \zeta_3 &= 02.61.43.78, & \zeta_4 &= 02.64.13.78, \\ \zeta_5 &= 03.61.42.78, & \zeta_6 &= 03.64.12.78, \\ \zeta_7 &= 04.62.13.78, & \zeta_8 &= 04.63.12.78.\end{aligned}$$

On a $(\zeta_1 \lambda^2)^3 = 1$, $\zeta_1 \lambda \zeta_1 = \mu^3 \zeta_1 \lambda \mu$; donc on peut prendre ζ_1 . $\zeta_2 \lambda \zeta_2$ n'étant pas dans $\omega \zeta_2 \omega$, ζ_2 est à rejeter. Or les substitutions 14.23, 14.06, 23.06 permutable à ω transforment respectivement ζ_1 en ζ_8 , ζ_1 , ζ_5 et ζ_2 en ζ_7 , ζ_6 , ζ_3 . Il suffit donc de considérer ζ_1 dont je supprimerai l'indice (ce choix a pour but d'obtenir finalement un groupe contenant α , β , γ). $\omega, \zeta_1 = c$ est défini par les équations de ω jointes à $\zeta \lambda \zeta = \mu^3 \zeta \lambda \mu$ [d'où résulte $(\zeta \lambda^2)^3 = 1$], qui s'écrit $(\zeta \lambda)^2 = \mu^3 \zeta \mu$. S'il existe une s_2 , $\rho = (89) \dots$ telle que, dans $\rho, \rho' = \mathcal{F}$, c soit le diviseur fixant g , on peut supposer, F étant trois fois transitif, ρ semblable à λ^2 . $\zeta \rho$ devant être d'ordre 3, ρ fixe 7. $\zeta \rho$ devant être de degré 9 (la classe est 8), ρ n'a aucun cycle commun avec ζ . ρ devant être permutable à λ^2 fixe 5 et a un cycle commun avec λ^2 , mais un seul sans quoi $\rho \lambda^2$ serait de degré inférieur à la classe. Donc ρ a l'une des trois formes

$$\rho_1 = 89.03.14.26, \quad \rho_2 = 89.04.16.23, \quad \rho_3 = 89.06.12.34.$$

Les substitutions 06.13.24, 01.23.46 permutable à ω et à ζ transformant ρ_1 respectivement en ρ_2 et en ρ_3 , on peut se borner à considérer ρ_1 et supprimer l'indice; les relations $\rho \lambda \rho = \lambda^3$, $\rho \mu \rho = \lambda \mu^3$ [ou $(\rho \lambda)^2 = 1$, $(\rho \mu)^2 = \lambda$], $(\zeta \rho)^3 = 1$ assurent d'ailleurs l'existence de $\mathcal{F}$ défini par ces équations jointes à celles de c . S'il existe une s_2 , $\sigma = (9a) \dots$ telle que, dans $\mathcal{F}$, $\sigma' = g'$, $\mathcal{F}$ soit le diviseur fixant a , on peut supposer, g' étant quatre fois transitif, σ semblable à λ^2 et fixant 7, 8. $\lambda^2 \sigma$ et $\zeta \sigma$ étant d'ordre 2 et $\rho \sigma$ d'ordre 3, σ fixe 5, a exactement un cycle commun avec λ^2 et ζ , mais aucun avec ρ , d'où, pour σ , les deux formes

$$\sigma_1 = 9a.02.14.36, \quad \sigma_2 = 9a.01.23.46.$$

La substitution 06.13.24 permutable à ω , ζ , ρ transformant σ , en σ_2 , on peut se borner à considérer σ_1 et supprimer l'indice; les relations $\sigma\lambda\sigma = \lambda\mu$, $\sigma\mu\sigma = \mu^3$, $(\sigma\zeta)^2 = (\sigma\rho)^2 = 1$ assurent d'ailleurs l'existence de $\mathfrak{g}'$ défini par ces équations jointes à celles de $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{g}'$ contenant $\alpha = \sigma\rho\zeta\lambda$ contient forcément β (6); il contient aussi $\gamma = \alpha^4\zeta\rho\mu\lambda^2\zeta\mu\lambda$. Donc $\mathfrak{g}' \geq \mathfrak{g}$. D'ailleurs le diviseur de $\mathfrak{g}'$ qui fixe α , η , δ est $\leq$ au diviseur analogue de $\mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. On vérifie aisément que, pour tout autre système de déterminations de ζ , ρ , σ , $\mathfrak{g}'$ est $\neq \mathfrak{g}$.

γ_0 n'est certainement pas dans $\mathfrak{g}$ comme le dit Mathieu, car

$$\rho\zeta\lambda\mu\gamma_0\rho\sigma\lambda\zeta = 0341576$$

devrait être dans ω . Mais si l'on pose

$$\begin{aligned}(\gamma_0\alpha^3)^2 &= \delta', & \beta^{-1}\gamma_0\alpha^2\beta &= \varepsilon' = 1084.2563, \\ \delta'^2(\gamma_0\alpha^6)^9 &= \theta', & \varepsilon'^{-1}\theta'\varepsilon' &= \lambda' = 0425.1673, \\ (\theta'^2\delta'\lambda')^{-1}\delta'(\theta'^2\delta'\lambda') &\varepsilon' &= \mu' &= 1072.3465,\end{aligned}$$

on voit que $\{\alpha, \beta, \gamma_0\} = G_9$ est quatre fois transitif et que $\omega' = \{\lambda', \mu'\}$ est $\leq$ au diviseur de G_9 qui fixe α , η , δ . En posant encore

$$\begin{aligned}\zeta' &= 87.03.25.46, & \rho' &= 98.06.23.45, & \sigma' &= \alpha 9.02.35.46, \\ \{\omega', \zeta', \rho', \sigma'\} &= \mathfrak{g}'', & \omega &= 104265,\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}''$ contient $\gamma_0 = \mu'^3\zeta'\rho'\lambda'^3\zeta'\lambda'\sigma'\rho'$ et $\alpha = \sigma'\rho'\zeta'\mu'^3$, donc β , et l'on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}'' &= G_9, & \omega^{-1}\omega\omega &= \omega', \\ \omega^{-1}\zeta\omega &= \zeta', & \omega^{-1}\rho\omega &= \rho', & \omega^{-1}\sigma\omega &= \sigma',\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{g}''$ est semblable à $\mathfrak{g}$.

S'il existe une s_2 , $\tau = (ab) \dots$ telle que, dans $\{\mathfrak{g}, \tau\} = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{g}$ soit le diviseur fixant b , on peut supposer τ semblable à λ^2 et fixant η , δ , γ . Comme $\tau\lambda^2$, $\tau\zeta$, $\tau\rho$ sont d'ordre 2 et $\tau\sigma$ d'ordre 3, τ a un cycle commun avec λ^2 , ζ , ρ et aucun avec σ ; d'où, pour τ , la forme unique

$$\tau = ab.06.13.24.$$

Les relations $\tau\lambda\tau = \lambda^2$, $\tau\mu\tau = \lambda\mu$, $(\tau\zeta)^2 = (\tau\rho)^2 = (\tau\sigma)^2 = 1$ assurent l'existence de $\mathfrak{K}$, qui est unique et défini par ces équations, jointes à celles de $\mathfrak{G}$. Si l'on convient d'écrire b pour ∞ , a pour 10 , on aura

$$(z, -z')(\bmod 11) = 0b.1a.25.37.48.69 = \alpha^{-1}\tau\lambda\zeta\mu^2\rho^2\lambda\alpha;$$

donc $\mathfrak{K}$ contenant $(z + 1)$, $(i^2 z)$, $(-z')$ contient $\psi(2, 11)$.

Soit Γ un g'' ne contenant pas l'alterné. $(\Gamma, 1)$ divisera

$$11! : 2.3.5.7 = 4.6.8.9.10.11$$

et aura la forme $11d(11k + 1)$, d divisant 10 (cf. Cole, *Q. J.*, 1894, p. 45). Dans le g'' fixant un symbole, les s_i ont deux cycles : donc les substitutions permutable à un g_i dans ce g'' forment un groupe dont l'ordre 5δ divise 5.4 (4) et l'ordre du g'' a la forme $5\delta(5\kappa + 1)$. Si Γ ne divise pas le métacyclique, il contiendra G ($\mathfrak{G}$ contient G) et δ sera ≥ 2 , donc $= 2$ ou 4 . Les seuls ordres multiples de 660 remplissant ces conditions sont 110.72, 110.96. Si Γ est pair, $d = 5$ et 110.72 est seul admissible : mais alors $\delta = 4$ et l'on retombe sur $\mathfrak{G}$. Donc, G et $\mathfrak{G}$ sont les seuls g'' pairs d'ordre > 11.10 et $< \frac{1}{2}11!$. L'ordre d'un g'' impair non symétrique devrait donc être, s'il dépasse 110, $2(G, 1)$ ou $2(\mathfrak{G}, 1)$: ces deux nombres étant $\neq 110.96$, G et $\mathfrak{G}$ sont les seuls g'' d'ordre > 11.10 et $< \frac{1}{2}11!$.

On sait déjà que G et $\mathfrak{G}$ étant pairs sont simples. Si $\mathfrak{K}$ avait un diviseur normal $\Lambda < \mathfrak{K}$, on aurait $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}\Lambda$; $\mathfrak{G}$ simple devrait être premier à Λ ; mais Λ , quatre fois transitif et normal, contenant, par suite, tous les g'' de $\mathfrak{K}$, contient ceux de $\mathfrak{G}$ et ne peut être premier avec lui. Donc $\mathfrak{K}$ est simple. $\mathfrak{K}$ est maximum dans le g'' alterné, car si $\mathfrak{K}'$ était un $g'' > \mathfrak{K}$, le g'' fixant cinq symboles dans $\mathfrak{K}'$ serait > 1 et la classe de $\mathfrak{K}'$, cinq fois transitif, serait $< 2.5 - 2$.

Dans $\mathfrak{K}$, une s_i ne peut être permutable à un g_{i1} pour $i = 2, 3$, car on aurait un g_{i11} produit direct d'un g_i par un g_{i1} , donc cycliques représenté en douze symboles, ce qui ne se peut. Cela exige qu'il y ait $2^2.3.5$ ou $2^6.3^3 = 1728$ g_{i11} . Dans le premier cas, chacun est normal dans un $g_{2'11}$ qui devrait contenir 11 $g_{2'}$ dont deux auraient un plus grand commun diviseur d'ordre 2^2 normal dans un $g_{2'11}$ abélien con-

tenant un $g_{2,11}$ cyclique. Il y a donc 1728 $g_{1,1}$. De même une s_i ne peut être permutable à un g_3 pour $i = 3, 11$ et cela exige qu'il y ait dans $\mathfrak{K}$ 2376 g_3 . Donc, les g_3 étant de classe 10, chaque $g_{7,20}^{10}$ qui fixe deux symboles en contient 2376 : $\frac{12 \cdot 11}{2} = 36$ dont le plus petit commun multiple simple est d'ordre 5. $d \cdot 36$, d étant égal à 2 ou 4 (6). Si donc le $g_{7,20}^{10}$ n'est pas simple, il contient un $g_{3,60}^{10}$ simple. Or un $g_{7,20}$ est toujours composé (cf. BURNSIDE, *P. L. M. S.*, t. XXVI, p. 334) et tout $g_{3,60}$ simple est isomorphe au g^0 alterné. Mais le $g_{7,20}^{10}$ n'est pas isomorphe au g^0 symétrique, car il ne contient pas de s_6 ; en effet, une s_6 paire, de degré ≥ 8 et ≤ 10 , contient ou 1 cycle de 6 symboles et 1 de 2, ou 2 cycles de 3 et 2 de 2; dans les deux cas son carré est de degré < 8 . Une s_i ne peut être permutable à un g_{27} pour $i = 5, 11$; cela exige que le nombre des g_{27} soit 5.11, $2^3 \cdot 5.11$, $2^4 \cdot 5.11 = 880$ ou $2^6 \cdot 5.11$. Or un des g_{27} , P , est engendré par

$$\zeta \lambda^2 = 034.126.578 \quad = \varphi,$$

$$\zeta(\lambda \zeta)^2 = 086.135.247 \quad = \chi,$$

$$\tau \sigma \zeta(\mu \zeta)^2 = 076.138.245.ab9 = \psi$$

et défini par $\varphi^3 = \chi^3 = \psi^3 = 1$, $\varphi \chi = \chi \varphi$, $\psi^{-1} \varphi \psi = \varphi$, $\psi^{-1} \chi \psi = \chi \varphi^2$. Le groupe $\{\varphi\}$ des opérations normales de P ne peut être normal dans un $g_{3 \cdot 2^k}$ pour $k > 4$ (4). Donc les deux premiers membres sont à rejeter. Comme $\tau P \tau = P$, le dernier est inadmissible, car P ne serait permutable qu'à ses opérations. Il y a donc, dans $\mathfrak{K}$, 880 g_{27} . Tout g_6 , de $\mathfrak{K}$ est conjugué de $\{\varepsilon, \rho, \tau\} = Q$. Le groupe $\{\lambda^2, \rho\}$ des opérations normales de Q ayant pour systèmes d'intransitivité 1, 2, 3, 4; 0, 6; 5, 7; 8, 9; a, b ne peut être permutable à une s_3^{10} , ni à une s_{11}^{11} , ni à une s_3^9 . Il y a donc dans $\mathfrak{K}$ $3^3 \cdot 5.11 = 1485$ g_6 , (cf. BURNSIDE, *Theory of groups*, p. 220).

10. Soit $q = 23$. On a $t = 5$, et, en écrivant respectivement pour

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22,
 $v, x, y, b, p, g, q, e, s, c, d, r, f, n, k, i, m, h, o, l, t, a, u,$

$$\alpha = vxybpqgscdrfnkimholttau,$$

$$\beta = xypsmconbqf.gdthrualliek.v.$$

γ est d'ordre 2, 5 ou 10, et, pour chacun de ces ordres, γ étant supposé fixer x est complètement déterminé par le symbole du second cycle de β qu'il fixe. Une fois l'ordre de γ choisi, j'écrirai $\gamma_g, \gamma_d, \dots, \gamma_k$ pour les déterminations de γ qui fixent $g, d, \dots, k$ respectivement. Ainsi, pour γ d'ordre 10, on a

$$\begin{aligned}\gamma_g &= ypmbcfqns o . dtriukelha, \\ \gamma_d &= ypmbcfqns o . thueagkirl, \\ \gamma_t &= ypmbcfqns o . hrakldgeui, \\ \gamma_h &= ypmbcfqns o . rulgitdkae, \\ \gamma_r &= ypmbcfqns o . uaidehtgk, \\ \gamma_u &= ypmbcfqns o . aletkrhdig, \\ \gamma_a &= ypmbcfqns o . likhgurtd, \\ \gamma_i &= ypmbcfqns o . iegrdauhkt, \\ \gamma_e &= ypmbcfqns o . rkdutlargh, \\ \gamma_e &= ypmbcfqns o . kgtahiludr, \\ \gamma_k &= ypmbcfqns o . gdlhreiatu.\end{aligned}$$

Si γ est d'ordre 2, on vérifie directement que $(\alpha\gamma_g)^{32}, (\alpha\gamma_d)^{13}, (\alpha\gamma_t)^{13}, (\alpha\gamma_h)^{17}, (\alpha\gamma_r)^{33}, (\alpha\gamma_u)^3, (\alpha\gamma_a)^{12}, (\alpha\gamma_i)^{31}, (\alpha\gamma_e)^{12}, (\alpha\gamma_k)^{17}$ sont des substitutions circulaires des degrés respectifs 3, 13, 13, 5, 5, 7, 11, 5, 5, 5, 5. Donc pour γ d'ordre 2, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ contient l'alterné. Il en est de même *a fortiori* si γ est d'ordre 10. Si γ est d'ordre 5, $(\alpha\gamma_d)^{18}, (\alpha\gamma_t)^{36}, (\alpha\gamma_h)^{10}, (\alpha\gamma_r)^9, (\alpha\gamma_u)^5, (\alpha\gamma_a)^{19}, (\alpha\gamma_i)^{17}, (\alpha\gamma_e)^{16}, (\alpha\gamma_k)^8$ sont des substitutions circulaires des degrés respectifs 3, 7, 3, 11, 11, 3, 5, 3, 13. Il reste donc seulement à essayer $\gamma = \gamma_g, \gamma = \gamma_k$.

Prenons d'abord $\gamma_k = ymcqs . pbfno . ghrit . dleau . x . v . k$. On a, en supprimant l'indice k ,

$$\alpha^{-1}\gamma\alpha = bhdec . gpnkl . qofma . rtsuv . y . x . i;$$

donc le diviseur de $\{\alpha, \beta, \gamma\} = G$ qui fixe x est transitif;

$$\alpha^{-1}\beta\gamma\alpha = afrqtl . bpcdg . eknyh . iomus . v . x . l = \delta$$

montre que le diviseur fixant x , v est transitif, et

$$\begin{aligned}\delta^{-2}\gamma\delta^2 &= esgao.dcg hu.pktmf.bl nri.v.x.y = \varepsilon, \\ \gamma\delta\gamma^{-1} &= ebhci.pomut.lkfsg.rnyaq.v.z.d = \chi, \\ \delta^{-1}\chi &= aph.blk.coe.dig.fqn.rst.v.x.y.u.m = m_0\end{aligned}$$

que le diviseur fixant v , x , y est transitif. Donc G est quatre fois transitif. Les substitutions

$$\begin{aligned}\chi^{-1}\delta\varepsilon^{-2}(\chi^2\gamma^2)^2\varepsilon^2\delta^{-1}\chi &= a_1 = ab.cf.dg.eh.im.kn.lo.pq, \\ \varepsilon^{-2}(\chi^2\gamma^2)^2\varepsilon^2a_1 &= a_2 = ac.bf.di.ek.gm.hn.lp.oq, \\ \delta^{-1}\chi(\varepsilon^2\chi^2\gamma^2)\chi^2 &= a_3 = ad.bg.ci.el.fm.ho.kp.nq, \\ (\delta^{-1}\chi)^2\varepsilon^2\chi^2\gamma^2 &= a_4 = ae.bh.ck.dl.fn.go.ip.mq, \\ a_1a_4\delta^{-1}\chi &= a_0 = rst.bcf.del.lpm.ino.kqg\end{aligned}$$

engendrent un $G_{4,8}^{1,0}$ B où le diviseur normal $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ est représenté régulièrement, $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q$ étant mis respectivement pour $1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4, a_1a_2a_3, a_1a_2a_4, a_1a_3a_4, a_2a_3a_4, a_1a_2a_3a_4$, en sorte que l'on peut écrire $(x_i, \xi_i = 0, 1)$

$$\begin{aligned}a_1^{\xi_1}a_2^{\xi_2}a_3^{\xi_3}a_4^{\xi_4} &= (a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}a_4^{x_4}, a_1^{x_1+\xi_1}a_2^{x_2+\xi_2}a_3^{x_3+\xi_3}a_4^{x_4+\xi_4}), \\ a_0 &= (a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}a_4^{x_4}, a_1^{x_1}a_2^{x_2+x_3}a_3^{x_4}a_4^{x_1+x_4})(rst),\end{aligned}$$

ou, plus brièvement, si l'on désigne $a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}a_4^{x_4}$ par le point (x_1, x_2, x_3, x_4) ,

$$\begin{aligned}a_1^{\xi_1}a_2^{\xi_2}a_3^{\xi_3}a_4^{\xi_4} &= (x_i, x_i + \xi_i), \\ a_0 &= (x_1, x_2, x_3, x_4; x_2, x_1 + x_2, x_3, x_3 + x_4).\end{aligned}$$

Les équations de B sont

$$\begin{aligned}a_0^3 &= a_i^2 = 1, & a_ia_k &= a_ka_i (i, k = 1, 2, 3, 4), \\ a_0^{-1}a_1a_0 &= a_2, & a_0^{-1}a_2a_0 &= a_1a_2, & a_0^{-1}a_3a_0 &= a_4, & a_0^{-1}a_4a_0 &= a_3a_4,\end{aligned}$$

d'où résulte que toute opération de A $a_0^{x_0}$ ($x_0 = 1, 2$) est d'ordre 3. On

observera aussi que $a_1^{r_1} a_2^{r_2} a_3^{r_3} a_4^{r_4}$ fait partie d'un seul groupe quadratique normal dans B, engendré par $a_1^{r_1} a_2^{r_2} a_3^{r_3} a_4^{r_4}$ et son transformé par a_0 , $a_1^{r_1} a_2^{r_2+r_1} a_3^{r_3} a_4^{r_4+r_1}$. Deux groupes quadratiques Q_i , Q_k normaux dans B sont donc premiers entre eux et $Q_i Q_k = A$. Il y a dans A cinq diviseurs quadratiques normaux dans B,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{a_1, a_2\}, & Q_2 &= \{a_3, a_4\}, \\ Q_3 &= \{a_1 a_3, a_2 a_4\}, & Q_4 &= \{a_1 a_4, a_2 a_3\}, & Q_5 &= \{a_2 a_3, a_1 a_2 a_4\}. \end{aligned}$$

Les substitutions de A sont, avec l'unité,

$$\begin{aligned} a_1 &= ab. cf. dg. eh. im. kn. lo. pq, \\ a_2 &= ac. bf. di. ek. gm. hn. lp. oq, \\ a_3 &= ad. bg. ci. el. fm. ho. kp. nq, \\ a_4 &= ae. bh. ck. dl. fn. go. ip. mq, \\ a_1 a_2 &= af. bc. dm. en. gi. hk. lq. op, \\ a_1 a_3 &= ag. bd. cm. eo. fi. hl. kq. pn, \\ a_1 a_4 &= ah. be. cn. do. fk. gl. iq. mp, \\ a_2 a_3 &= ai. bm. cd. ep. fg. hq. kl. no, \\ a_2 a_4 &= ak. bn. ce. dp. fh. gq. il. mo, \\ a_3 a_4 &= al. bo. cp. de. fq. gh. ik. mn, \\ a_1 a_2 a_3 &= am. bi. cg. df. eq. hp. ko. lu, \\ a_1 a_2 a_4 &= an. bk. ch. dq. ef. gp. io. lm, \\ a_1 a_3 a_4 &= ao. bl. cq. dh. eg. fp. in. km, \\ a_2 a_3 a_4 &= ap. bq. cl. dk. ei. fo. gn. hm, \\ a_1 a_2 a_3 a_4 &= aq. bp. co. dn. em. fl. gk. hi. \end{aligned}$$

Les substitutions de Aa_0 sont

$$\begin{aligned} a_0 &= rst. bcf. del. hpm. ino. kqg = a_0, \\ a_1 a_0 &= rst. acb. dko. epq. hli. mnq = f_0, \\ a_2 a_0 &= rst. afc. dnp. eqi. gho. klm = b_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 a_0 &= rst. acd. bkm. cng. fhi. opq = l_0, \\
a_1 a_0 &= rst. ale. bpn. cqh. fok. gim = d_0, \\
a_1 a_2 a_0 &= rst. abf. dhq. com. gnl. ikp = c_0, \\
a_1 a_3 a_0 &= rst. ak g. bei. chd. fnm. lpo = q_0, \\
a_1 a_4 a_0 &= rst. aph. blk. coe. dig. fqn = m_0, \\
a_2 a_3 a_0 &= rst. ani. bhg. cem. dfk. lqp = o_0, \\
a_2 a_4 a_0 &= rst. aqk. boh. cln. dmi. esp = g_0, \\
a_3 a_4 a_0 &= rst. adl. biq. cm o. fgp. hkn = e_0, \\
a_1 a_2 a_3 a_0 &= rst. ahm. bnd. cki. egf. loq = p_0, \\
a_1 a_2 a_4 a_0 &= rst. aon. bq e. cpk. dgm. flh = i_0, \\
a_1 a_3 a_4 a_0 &= rst. aio. bdp. cgl. ekh. fm q = n_0, \\
a_2 a_3 a_4 a_0 &= rst. amp. bgo. cdq. enk. fil = h_0, \\
a_1 a_2 a_3 a_4 a_0 &= rst. agg. bml. cip. dof. eh n = k_0;
\end{aligned}$$

celles de Aa_0^2 sont leurs inverses.

Je dis que B est le diviseur de G qui fixe u, v, x, y . Pour le voir, cherchons à construire un groupe quatre fois transitif où B soit le diviseur fixant u, v, x, y . Soit C un $g_{20.4}^{20}$ transitif où B soit le diviseur fixant u . Le nombre λ des g_5 de C sera 1, 6, 16 ou 96. Or λ est $\neq 1$ et $\neq 16$, sans quoi un g_5 à quatre systèmes d'intransitivité serait permutable à une s_3^{15} (4) et la classe est 16. λ est $\neq 6$ sans quoi un g_5 serait normal dans un $g_{5.32}$ qui devrait contenir une s_2^{10} (le groupe Σ du n° 4 étant ici isomorphe à un g_8 du g^4 symétrique). Donc $\lambda = 96$. Le nombre μ des g_3 de C est 1, 10, 40 ou 160. Or $\{a_0\}$ n'étant permutable dans B qu'à ses substitutions, les substitutions permutables à $\{a_0\}$ dans C seront de la forme $(ua)j, (ua)j', \dots, j, j', \dots$ étant dans le champ de B. jj' étant donc permutable à $\{a_0\}$ dans le champ de B, on a $j' = j^{-1}a_0$ ou $j^{-1}a_0^2$. Il n'y a donc hors de $\{a_0\}$ que trois substitutions permutables à $\{a_0\}$. Le groupe des substitutions permutables à $\{a_0\}$ étant d'ordre 6, $\mu = 160$. Le nombre ν des g_6 , est 1, 3, 5 ou 15. Or ν est $\neq 1$, car il y a au moins 75 s_2^{10} dans les 5 conjugués de A (A est unique de son ordre dans chacun des 4 g^{10} fixant un des sym-

boles r, s, t, u). ν est $\neq 3$, car un g_6 , serait normal dans un $g_{3.6}$, qui devrait avoir un diviseur Δ normal dans C , tel que $C|\Delta$ soit représentable en g^3 , ce qui ne se peut (Δ dont l'ordre diviserait 2^5 devrait contenir les 96 g_3 de C). Enfin ν est $\neq 15$. En effet, 64 n'étant divisible par aucun des nombres 17, 18, 19, 20, tout g_6 , de C est intransitif et a un système d'intransitivité de 16 symboles (A est transitif). Le plus grand commun diviseur d'un g_6 , et de son constituant de degré 16 est un g^{16} contenu dans un g^{19} , donc conjugué de A . Soient P un g^{21} contenant (normalement) A et a_{0r}, a_{0s}, a_{0t} des conjuguées de a_0 dans les 3 g^{19} fixant r, s, t respectivement, lesquels contiennent normalement A . Si $\nu = 15$, P n'est permutable qu'à ses opérations et deux, ω, ω' , des 9 substitutions $1, a_{0r}^{\pm 1}, a_{0s}^{\pm 1}, a_{0t}^{\pm 1}$ ne pouvant transformer P en un même conjugué (car $\omega^{-1}\omega' \neq 1$ serait permutable à P), on a 9 conjugués de P ayant le système d'intransitivité $a, b, \dots, q$. Mais les g^{19} fixant un symbole de C se partagent en 5 systèmes de 4 groupes ayant pour plus grand commun diviseur un g_{16}^{16} dont le champ forme un système d'intransitivité commun à 9 g_6 . Il y aurait donc 45 g_6 , et non 15. Donc $\nu = 5$. Un $g_{6.6}$ devra contenir un diviseur normal Δ de degré ≥ 8 , car, $C|\Delta$ étant représentable en g^5 , $(C|\Delta, 1)$ doit diviser 5! D'ailleurs $(\Delta, 1)$ est > 8 , sans quoi $C|\Delta$ serait isomorphe au g_{120}^3 symétrique, C aurait un diviseur normal X d'indice 2 et la relation $C = BX$ exigerait dans B un g_{24} normal qui devrait contenir les 32 s_3 de B . Enfin $(\Delta, 1)$ est < 32 , sans quoi $C|\Delta$ serait représentable en g_{30}^5 et il n'y a pas de g_{30}^3 (un g_{30}^3 devrait contenir des s_3^3). Donc $(\Delta, 1) = 16$. Comme un g_6 , contenant A est $\geq A\Delta$, A et Δ ont un plus grand commun diviseur ω d'ordre ≥ 4 qui, étant aussi le plus grand commun diviseur de B , Δ , est normal dans B . D'ailleurs $(\omega, 1)$ est < 8 , sans quoi Δ ayant, avec les 5 conjugués de A , 5 plus grands communs diviseurs premiers entre eux deux à deux serait d'ordre > 35 . Donc ω est un des Q_7 . Les plus grands communs diviseurs $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)$ de Δ avec les 5 conjugués de A dans C sont conjugués et premiers entre eux deux à deux; $\Delta = \Sigma \omega_i$ ayant tous ses éléments d'ordre 2 est abélien. Δ normal dans C déplace tous les symboles et permute exclusivement entre eux les symboles fixés par chacun des conjugués de A et a, par suite, 5 ou 10 systèmes d'intransitivité qui sont des systèmes d'imprimitivité de C . D'ailleurs B , qui est le diviseur

fixant u , n'est pas maximum dans C , puisque BA d'ordre 16.48:4 est $> B$ et $< C$. BA , d'indice 5 dans C , y est maximum et la représentation du groupe simple $C|\Delta$ relative à $BA|\Delta$ est semblable au g^1 alterné.

En transformant au besoin par l'inverse d'une substitution telle que

$$\mu_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 & + \beta_1 x_3 + \beta_2 x_4 \\ x_2 & \alpha_2 x_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 + \beta_2 x_3 + (\beta_1 + \beta_2) x_4 \\ x_3 & \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_2 & + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 \\ x_4 & \alpha_4 x_1 + (\alpha_3 + \alpha_4) x_2 + \beta_4 x_3 + (\beta_3 + \beta_4) x_4 \end{vmatrix}$$

qui est permutable à A et à a_0 , donc à B et qui transforme respectivement a_1, a_2, a_3, a_4 en $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4} = a'_1, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2 + \alpha_3} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4 + \alpha_4} = a'_2, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4} = a'_3, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2 + \alpha_3} a_3^{\alpha_3} a_4^{\alpha_4 + \beta_4} = a'_4$, donc Q_1, Q_2 en $Q_2 = \{a'_1, a'_2, Q_3 = \{a'_3, a'_4\}$, on peut supposer que $\Theta = Q_1$.

Les systèmes d'intransitivité de Δ seront comme ceux de Q_1 de degré 4 et Δ en aura 5: $a, b, c, f; d, g, i, m; e, h, k, n; l, o, p, q; r, s, t, u$. Dans Δ tout conjugué Q' de Q_1 , autre que Q_1 , contient trois substitutions des formes $rs.tu \dots, rt.su \dots, ru.st \dots$, qui s'obtiennent évidemment en transformant l'une d'elles par une s_3 de B qui permute exclusivement entre eux les symboles du système d'intransitivité fixé par Q' . Puisque $\Delta = Q_1 Q'$, une seule substitution de Δ hors de B déterminera Δ . Δ contient trois substitutions des formes $ru.st.ab.cf \dots, ru.st.ac.bf \dots, ru.st.af.be \dots$, car il contient certainement l'une d'elles et ses produits par $a_1, a_2, a_1 a_2$. Considérons une substitution $\xi = ru.st.ab.cf \dots$. Supposons que ξ fixe l, o, p, q . Son effet sur d, g, i, m sera $di.mg$ ou $dm.ig$, sans quoi ξa_1 serait de degré < 16 ; son effet sur e, h, k, n sera respectivement $en.hk$ ou $eh.kn$, sans quoi ξa_2 ou $\xi a_1 a_2$ respectivement serait de degré < 16 ; mais dans le second cas $l_0^{-1} \xi l_0 \xi$ est de degré < 16 . Donc si ξ fixe l, o, p, q , ξ a la forme

$$\xi_1 = ru.st.ab.cf.di.mg.en.hk.$$

Le diviseur Q'_1 conjugué de Q_1 dont ξ_1 fait partie est $\Sigma_j l_0^{-j} \xi_1 l_0^j = \{ \xi_1, \eta \}$, en posant $\eta = l_0^{-1} \xi l_0$, et Δ a la forme $\Delta_1 = Q_1 Q'_1$. Si ξ fixe e, h, k, n

ou d, g, i, m , on verrait de même, en se servant respectivement de e_0 , d_0 au lieu de l_0 , que ξ a respectivement les formes

$$\xi_2 = ru.st.ab.cf.dm.gi.lp.oq, \quad \xi_3 = ru.st.ab.cf.ek.hn.lq.op,$$

et Δ les formes $\Delta_2 = Q_1 \Sigma_j e_0^{-j} \xi_2 e_0^j$, $\Delta_3 = Q_1 \Sigma_j d_0^{-j} \xi_3 d_0^j$. Comme les substitutions $rst = \lambda$ et λ^2 permutables à chaque substitution de B transforment respectivement ξ_2 en $a_2 \eta$ et ξ_3 en $a_1 a_2 \xi \eta$, donc Δ_2, Δ_3 en Δ_1 , il suffit de considérer Δ , et j'écrirai Δ, ξ pour Δ_1, ξ_1 .

Les substitutions de Δ sont

$$\begin{aligned} ru.st.ab.cf.di.gm.en.hk &= \xi, & ru.ts.dm.gi.ek.hn.lo.pq &= a_1 \xi, \\ rt.su.af.bc.dg.im.ek.nh &= \eta, & rt.su.di.mg.ek.hn.lq.op &= a_1 a_2 \eta, \\ rs.tu.ac.bf.dm.ig.ek.hn &= \xi \eta, & rs.tu.dg.im.en.hk.lp.oq &= a_2 \xi \eta, \\ ru.st.af.bc.ek.hn.lp.op &= a_2 \xi, & ru.ts.ac.bf.dg.im.lq.op &= a_1 a_2 \xi, \\ rt.su.ac.bf.en.hk.lo.pq &= a_1 \eta, & rt.su.ab.cf.dm.gi.lp.oq &= a_2 \eta, \\ rs.tu.ab.cf.ek.hn.lq.op &= a_1 a_2 \xi \eta, & rs.tu.af.bc.di.gm.lo.pq &= a_1 \xi \eta, \end{aligned}$$

et celles de $Q_1 = \{a_1, a_2\}$. Les seuls diviseurs de Δ qui fixent 4 symboles fixent les 4 symboles d'un système d'intransitivité. Donc les 5 conjugués de Δ dans C fixent chacun les 4 symboles d'un système d'intransitivité de Δ . $B\Delta$ étant maximum dans C, il suffit pour engendrer C d'adjoindre à $B\Delta$ une substitution étrangère à $B\Delta$. Cherchons pour cela à former le conjugué A_1 de A qui a avec Δ le plus grand commun diviseur $\{\xi, \eta\}$ et qui par suite fixe l, o, p, q . A_1 contient une substitution $\zeta = (rb) \dots$. Pour que $\xi \zeta \xi = \zeta$, il faut que $\zeta = ua.rb \dots$. Pour que $\eta \zeta \eta = \zeta$, il faut que $\zeta = ua.rb.ct.fs \dots$; $\zeta|a_0| \zeta$ fixant u et a est dans B et dans $\{a_0\}$; comme $\zeta a_0 \zeta = bcf \dots$, $\zeta a_0 \zeta = a_0^3$, ce qui exige, ζ fixant l, o, p, q , que

$$\zeta = ua.rb.ct.fs.de.hm.in.gk.$$

A_1 contient de même $\zeta' = rd.ui.tg.sm. \dots$, et puisque $\zeta \zeta' = \zeta' \zeta$,

$$\zeta = rd.ui.tg.sm.an.be.ck.fh \quad \text{et} \quad A_1 = \{\xi, \eta, \zeta, \zeta'\}.$$

Comme B a deux systèmes d'intransitivité $a, b, \dots, q; r, s, t$, et que $\xi = ur. \dots, \zeta = ua. \dots$, il faut et il suffit (1) pour l'existence de C que $B + B\xi B + B\zeta B$ forme un groupe qui sera C . Or les relations faciles à vérifier : $\xi^2 = 1$, $\xi a_i \xi = a_i$, $\xi a_2 \xi = a_2$, $\xi a_3 \xi = a_1 a_2 a_3$, $\xi a_i \xi = a_2 a_i$, $\xi a_0 \xi = a_0^2 \xi a_0^2$, donnent $\xi A \xi = A$, $\xi A a_0 \xi = A a_0^2 \xi a_0^2$. Donc $\xi B \xi$ est dans $B \xi B$, et l'on voit déjà que $B + B \xi B$ est le groupe $\langle B, \xi \rangle = B\Delta$, où B est le diviseur fixant u , $B\Delta$ étant défini par les équations précédentes jointes à celles B . On remarquera que $\langle A, \xi, \eta \rangle$ est un g^6 d'équations

$$a_i^2 = \xi^2 = \eta^2 = 1, \quad a_i a_k = a_k a_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \xi \eta = \eta \xi,$$

$$(1) \quad \xi a_i \xi = a_i, \quad \xi a_2 \xi = a_2, \quad \xi a_3 \xi = a_1 a_2 a_3, \quad \xi a_i \xi = a_2 a_i,$$

$$(2) \quad \eta a_i \eta = a_i, \quad \eta a_2 \eta = a_2, \quad \eta a_3 \eta = a_2 a_3, \quad \eta a_i \eta = a_1 a_i.$$

η est normal dans $B\Delta$, car on a ($l_0 = a_3 a_0 = a_0 a_3$) :

$$(3) \quad a_0^{-1} \xi a_0 = a_1 \eta a_1, \quad a_0^{-1} \eta a_0 = a_0 \xi a_0 a_1 a_3,$$

$$(4) \quad a_0^{-1} a_1 a_0 = a_2, \quad a_0^{-1} a_2 a_0 = a_1 a_2, \quad a_0^{-1} a_3 a_0 = a_1, \quad a_0^{-1} a_4 a_0 = a_3 a_1.$$

$B\Delta$ est évidemment aussi défini par les équations de η jointes à (3), (4). Mais l'élimination de η fournit immédiatement le système déjà obtenu : la première équation (3) s'écrit $\eta = l_0^{-1} \xi l_0$; la seconde en résulte en vertu de (4), et de même (2) de (1).

On a en outre $\xi \zeta = a_1 \zeta a_1$ d'où $\xi = (a_1 \zeta)^2$, $\xi A \zeta = A \xi \zeta = A \zeta a_1$, et puisque $\zeta a_0 \zeta = a_0^2$, $\xi A a_0 \zeta = A \zeta a_1 a_0^2$, $\xi A a_0^2 \zeta = A \zeta a_1 a_0$. Donc $\xi B \xi$ est dans $B \zeta B$. Enfin

$$\zeta a_0 \zeta = a_0^2, \quad \zeta a_1 \zeta = a_1 \xi, \quad \zeta a_2 \zeta = l_0 \xi l_0^2, \quad \zeta a_3 \zeta = d_0 \zeta d_0^2,$$

$$\zeta a_i \zeta = e_0^2 \zeta e_0, \quad \zeta a_3 a_1 \zeta = a_3 a_1 \zeta a_3 a_1.$$

Donc $\zeta a_1 a_2 \zeta$ est dans $B \xi B$ et $\zeta a_1 a_3 \zeta$, $\zeta a_1 a_4 \zeta$, $\zeta a_2 a_3 \zeta$, $\zeta a_2 a_4 \zeta$, $\zeta a_1 a_i a_k \zeta$ ($i, k = 2, 3, 4$), $\zeta a_2 a_3 a_1 \zeta$, $\zeta a_1 a_2 a_3 a_1 \zeta$ dans $B \zeta B$. On voit donc que C existe et est complètement déterminé par Δ . Comme $\xi = (a_1 \zeta)^2$, on a $C = \langle B, \xi, \zeta \rangle = \langle B, \zeta \rangle$. Les équations de C résultent de ce qui précède; mais elles peuvent se simplifier. On a

en effet $\zeta d_0 = rpnmc.sokib.tqhgf.uleda$. Donc ζ et d_0 , vérifiant $\zeta^2 = d_0^2 = (\zeta d_0)^2 = 1$, engendrent un g_{60} simple I (3) premier au diviseur normal $\Delta = \langle a_1, a_2, \zeta, \eta \rangle$. En mettant $b_1, b_2, b_3, b_4, \theta$ pour $a_1, a_2, \zeta, \eta, d_0$ respectivement, le g_{60}^2 $C = \Delta I$ est défini par

$$\begin{aligned} b_i^2 &= \zeta^2 = \theta^2 = (\zeta \theta)^2 = 1, & b_i b_k &= b_k b_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \\ \zeta b_i \zeta &= b_i b_3, & \zeta b_2 \zeta &= b_2 b_3 b_4, & \zeta b_3 \zeta &= b_3, & \zeta b_4 \zeta &= b_4, \\ \theta^{-1} b_1 \theta &= b_2, & \theta^{-1} b_2 \theta &= b_1 b_2, & \theta^{-1} b_3 \theta &= b_3, & \theta^{-1} b_4 \theta &= b_2 b_4. \end{aligned}$$

Cherchons à former un g^{21} E deux fois transitif, où C soit le diviseur fixant v . S'il existe, il sera engendré par C et une s_2 $\rho = uv\dots$ conjuguée de a_1 et déplaçant 14 des 19 lettres $a, \dots, q, r, s, t$, donc fixant 2 des 16 lettres $a, \dots, q$ au moins. On peut, en transformant ρ par une substitution de A , faire que l'une de ces 2 lettres soit a . Comme il faut que $\rho B \rho = B$, ρ permute entre elles les lettres r, s, t qui forment un système d'intransitivité de B et en fixe 1 ou 3. S'il en fixait 3, on aurait $\rho a_0 \rho = a$, puisque, ρ fixant a , $\rho_0 \langle a_0 \rangle \rho = \langle a_0 \rangle$; ρ fixant ensuite une des lettres $b, \dots, q$ fixerait les 3 lettres du cycle de a_0 où elle figure et serait de degré ≤ 15 . Donc ρ échange 2 des lettres r, s, t , et en transformant au besoin ρ par a_0 ou a_0^2 on peut supposer que $\rho = uv.rs\dots$. Comme $\rho a_0 \rho = a_0^2$, 2 quelconques des 3 symboles b', c', d' que ρ fixe parmi $b, c, \dots, q$ ne peuvent se trouver dans un même cycle de a_0 ; ρ étant permutable aux 3 s_2 de A , $\beta' = ab'\dots$, $\gamma' = ac'\dots$, $\delta' = ad'\dots$, on a $\delta' = \beta' \gamma'$, sans quoi ρ , permutable à $\beta' \gamma' = ac'\dots$, fixerait c' et serait de degré ≤ 15 (b', c', d' n'étant pas dans un même cycle de a_0 , $\langle \beta', \gamma' \rangle$ n'est pas un des Q_i); donc chacune des 3 lettres b', c', d' est déterminée par les 2 autres. Il reste $\frac{5.4}{1.2} \cdot \frac{9}{3} = 30$ manières de choisir b', c', d' . Or ρ transforme chacune des s_3, b'_0, c'_0, d'_0 de B qui fixent respectivement b', c', d' , en son carré: donc c' et d' ne sont pas dans un même cycle de b'_0 et, si $b'_0 = c'e'f'.d'g'h'\dots$, $\rho = e'f'.g'h'\dots$. De même d', b' ne sont pas dans le même cycle de c'_0 et font connaître 2 nouveaux cycles de ρ (c' ne peut avoir 2 cycles formés des lettres b', c', f' ; d', g', h' , ni 2 cycles formés des lettres b', g', h' ; d', c', f' : dans le premier cas, $b'_0 c'_0$ ou $b'_0 c'_0^2$ fixerait d', g', h' ; dans le second, $b'_0 c'_0$ serait d'ordre > 4); b', c' et d'_0

sont connaître les 2 derniers cycles de ρ . Ainsi, chacun des 30 choix de 2 des lettres, b' , c' , d' détermine ρ . Mais $\rho\zeta\rho = (av)$... devant être dans $C\rho C$ sera de la forme

$$(ua...) \rho (ua...) = \zeta \rho \beta'' \zeta,$$

β'' étant dans B. Donc $(\rho\zeta)^3$ sera dans B, et comme $\rho\zeta = (avu)$..., $(\rho\zeta)^3$ fixera a , u et sera dans $\langle a_0 \rangle$. Si donc $(\rho\zeta)^3 \neq 1$, $\rho\zeta$ aura 2 cycles de 9 lettres. Or si ρ fixe b , $\rho = uv.rs.cf.a.b.l. \dots$ et $\rho\zeta = (brfics) \dots$. Donc ρ déplace b , et de même c et f . b , c ou f entrant dans 18 des 30 combinaisons b' , c' , d' , il reste 12 déterminations de ρ à essayer. 4 seulement satisfont à la condition que $(\rho\zeta)^3$ soit dans B. Ce sont

$$\rho_1 = uv.rs.bg.cq.el.fk.in.pm.a.d.h.o,$$

$$\rho_2 = uv.rs.bi.co.dl.fn.hp.kg.a.e.m.q,$$

$$\rho_3 = uv.rs.bm.cp.de.fh.gq.on.a.l.i.k,$$

$$\rho_4 = uv.rs.bd.cl.ef.hm.io.kq.a.g.n.p.$$

Les groupes $\langle C, \rho_i \rangle = E_i$ sont semblables, car la substitution

$$\rho' = rts.bcf.hkn.img.opq$$

permutable à Q_1, Q_2, a_0, ζ , donc à C transforme ρ_1 en $a_0 \rho_2 a_0^{-1}$, ρ_2 en $a_0 \rho_3 a_0^{-1}$, et $\rho'' = rts.bcf.dig.enk.loq$ permutable à C, transforme ρ_1 en $a_0 \rho_4 a_0^{-1}$. Il suffit donc de considérer ρ_1 et j'écrirai ρ , E pour ρ_1 , E_1 .

On a

$$\rho a_1 \rho = a_1 a_3, \quad \rho a_2 \rho = a_1 a_2 a_3 a_4, \quad \rho a_3 \rho = a_3,$$

d'où

$$\rho a_4 \rho = a_3 a_4, \quad \rho a_0 \rho = a_0^2, \quad \rho \zeta \rho = \zeta \rho \zeta, \quad \rho \xi \rho = a_0^2 \xi \rho a_0^2 \xi a_0,$$

la dernière s'écrivant (puisque $\rho a_0^2 = a_0 \rho$) $(\rho \xi a_0)^2 = 1$. Donc

$$\rho \zeta B \rho = \zeta \rho \zeta B, \quad \rho \xi B \rho = a_0^2 \xi \rho a_0^2 \xi a_0.$$

Or $\zeta B + \xi B$ contenant des substitutions des formes $ua..., \dot{u}b...$,

$uq..., ur..., us..., ut...$ contient un système de restes de $C \pmod{B, 1}$. Donc E répond à la question et est défini par les équations de C jointes à

$$\begin{aligned}\rho^2 &= (\rho\zeta)^2 = (\rho a_1)^2 = (\rho a_0)^2 = (\rho^2 a_0)^2 = 1, \\ (\rho a_1)^2 &= a_2, \quad (\rho a_2)^2 = a_1 a_2 a_3.\end{aligned}$$

E est simple, car s'il avait un diviseur normal *minimum* $X > 1$, on aurait $E = XC$. Or X n'est pas premier à C , car il serait d'ordre 21 et contiendrait *un seul* g_7 , lequel serait normal dans C .

Donc le plus grand commun diviseur de X, C est Δ et $(X, 1) = 16.21$. Mais alors X contiendrait 8 g_7 , qui seraient tous ceux de E , et dans E un g_7 serait permutable à une s_5 , ce qui est impossible, 5 ne divisant pas 7.6 (4) (cf. MILLER, *S. M.*, t. XXVIII, 1900, p. 266).

Cherchons à adjoindre à E une s_2 , $\sigma = a.u.xv...$ telle que, dans E , $\sigma' = F$, E soit le diviseur fixant x . On peut supposer que σ est de degré 16 et, comme pour ρ , qu'elle échange 2 des lettres r, s, t , fixe la troisième, et, par suite, aussi 3 des lettres $b, \dots, q$. $\sigma\zeta\sigma = (ua)...$ devant être dans B , donc $(\sigma\zeta)^2 = (u)(a)...$ dans A , $(\sigma\zeta)^2$ sera dans $\{a_0\}$. Si donc $(\sigma\zeta)^2 \neq 1$, $\sigma\zeta = (vx)(ua)...$ sera de degré 22. σ fixant a et une seule des lettres r, s, t , on aura $\sigma a_0 \sigma = a_0^2$. Donc σ ne fixe pas 3 lettres d'un cycle de a_0 . σ permutable à C , donc à Δ , permute entre eux les systèmes d'intransitivité de Δ et, fixant a , fixe le système a, b, c, f , donc une des lettres b, c, f . En transformant au besoin par a_0^{-1} on peut supposer que $\sigma = b.c.f. \dots$; donc $\sigma a_1 \sigma = a_1$, $\sigma a_2 \sigma = a_1 a_2$, σ fixant les systèmes a, b, c, f ; r, s, t, u , et étant d'ordre 2 fixera au moins un des 3 systèmes restants. Supposons que σ fixe le système l, o, p, q . Elle ne fixera pas les 4 lettres, car elle serait de degré < 16 ; elle ne les déplacera pas toutes, car elle contiendrait un des couples de cycles $lo.pq, lp.oq, lq.op$ et serait permutable à a_2 . Donc σ , permutable à a_1 , fixe l et o ou p et q . Si σ fixe l et o , elle est permutable à $\{a_0\}, \{b_0\}, \{l_0\}, \{o_0\}$, et $\sigma = vx.cf.de.gh.in.km.pq. \dots$, le dernier cycle étant rs, st ou tr . Mais $\sigma\zeta$ fixant d, e, i, n , il faut que $(\sigma\zeta)^2 = 1$, ce qui exige que le dernier cycle soit st . On a ainsi pour σ la détermination $\sigma_1 = vx.cf.de.gh.in.km.pq.st$. Si σ fixe p et q , on obtient de même la forme $\sigma'_1 = vx.cf.dn.ei.gk.hm.lo.st$. Si σ fixe le système e, h, k, n , elle fixera e et h ou k et n , et l'on obtient les

2 formes [ici $(\sigma\zeta)^2 = a_0$]

$$\sigma_2 = vx.cf.dl.go.iq.kn.mp.rt,$$

$$\sigma'_2 = vx.cf.dp.ch.gq.io.lm.rt.$$

Si σ fixe le système d, i, m, g , elle fixe i et m ou d et g , et l'on a les 2 formes [ici $(\sigma\zeta)^2 = a_0^2$]

$$\sigma_3 = vx.cf.dg.eq.hp.kl.no.rs,$$

$$\sigma'_3 = vx.cf.el.ho.im.kq.np.rs.$$

Mais, $(\sigma'_1\rho)^3$, $(\sigma'_2\rho)^3$, $(\sigma'_3\rho)^3$ n'étant pas dans B , σ'_1 , σ'_2 , σ'_3 sont à rejeter. D'ailleurs, les substitutions

$$(\nu x)\sigma'_1 = \sigma''_1, \quad (\nu x)\sigma'_2 = \sigma''_2, \quad (\nu x)\sigma'_3 = \sigma''_3$$

donnent

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\sigma''_1\rho)^2 = a_0^2, \quad (\sigma''_2\rho)^2 = a_0, \quad (\sigma''_3\rho)^2 = 1, \\ (\sigma''_1\zeta)^2 = 1, \quad (\sigma''_2\zeta)^2 = a_0, \quad (\sigma''_3\zeta)^2 = a_0^2, \\ (\sigma''_1 a_0 \sigma''_1 = a_0^2), \quad \sigma''_i A \sigma''_i = A; \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \sigma''_i \sigma_i \sigma''_i = \sigma_i, \quad \sigma''_i \sigma_k \sigma''_i = \sigma_2 \quad (i \neq k, k \neq l, l \neq i).$$

Donc les 3 groupes $\{E, \sigma_i\}$ sont semblables, et il suffit de considérer $\{E, \sigma\} = F$ en écrivant σ pour σ_1 . Les relations

$$\sigma^2 = (\sigma\rho)^3 = (\sigma\zeta)^2 = (\sigma a_0)^2 = (\sigma a_1)^2 = 1,$$

$$\sigma a_2 \sigma = a_1 a_2, \quad \sigma a_3 \sigma = a_1$$

démontrent l'existence de F . Jointes aux équations de E elles déterminent F .

F , trois fois transitif, est simple, car s'il y avait un diviseur normal $X < F$, on aurait $F = XE$, et puisque E est simple, X , premier à E , serait un $g_{2,2}^{2,2}$ deux fois transitif, ce qui ne se peut.

Cherchons à adjoindre à F une s^2 , $\tau = \nu.u.a.yx...$ telle que, dans $\{F, \tau\} = G'$, F soit le diviseur fixant y . On peut supposer que τ est de degré 16, échange 2 des lettres r, s, t , fixe la troisième et par suite

aussi 3 des lettres $b, \dots, q$. $(\tau\rho)^2$ et $(\tau\sigma)^3$ devant être dans B , τ ne peut avoir, d'après (1), qu'une des formes $\sigma_i''(xy)$, d'après (2) que l'une des formes

$$\tau_1 = \sigma_2''(xy) = xy.cf.dp.ch.gq.io.lm.rt,$$

$$\tau_2 = \sigma_3''(xy) = xy.cf.el.ho.im.kq.np.rs.$$

Comme $\sigma_i''\tau_i\sigma_i'' = \tau_2$, les 2 groupes $G_i = \{F, \tau_i\}$ sont semblables, on peut se borner à considérer τ_1 et j'écrirai τ pour τ_1 . Les relations

$$\tau^2 = (\tau\sigma)^3 = (\tau a_0)^2 = (\tau a_1)^2 = 1, \quad (\tau\rho)^2 = a_0,$$

$$(\tau\zeta)^2 = a_0, \quad \tau a_2 \tau = a_1 a_2, \quad \tau a_3 \tau = a_2 a_3 a_1$$

(d'où résulte $\tau a_i \tau = a_i a_i$) démontrent l'existence de G_1 : jointes aux équations de F elles définissent G_1 . G_1 contient $\alpha = \tau\sigma\rho\zeta a_1$, donc β , et $\gamma = \zeta a_1 \zeta \rho \zeta e_0$. Donc $G_1 \geq G$. Mais G où le diviseur fixant γ, x, v est $\geq B$ est lui-même $\geq G_1$. Donc $G_1 = G$. On sait déjà que G est simple puisqu'il est pair : on peut, d'ailleurs, démontrer sa simplicité comme celle de F .

Cherchons encore à adjoindre à G une s_2 , $v = yz.x.v.u.a. \dots$, telle que, dans $\{G, v\} = H$, G soit le diviseur fixant z . v aura forcément une des formes $\sigma_i''(yz)$. La condition que $(v\tau)^3$ et $(v\sigma)^3$ soient dans B exclut $\sigma_2''(yz)$ et $\sigma_3''(yz)$. Donc

$$v = \sigma_1''(yz) = yz.cf.dn.ei.gk.hm.lo.st.$$

Les relations

$$v^2 = (v\tau)^3 = (v\sigma)^2 = (v\zeta)^2 = (v a_1)^2 = 1,$$

$$(v\rho)^2 = a_0^2, \quad v a_2 v = a_1 a_2, \quad v a_3 v = a_1$$

prouvent l'existence de H . H est simple : on le démontre comme pour F . Si l'on convient de représenter ∞ par z , la substitution

$$(Z, -Z^{-1}) \pmod{23}$$

sera

$$vz.xu.yr.bi.ph.gc ql.en.st.dm.fa.ok = f_0 \eta \sigma \xi \sigma \rho \eta \tau \sigma \rho \xi \eta \sigma \tau \upsilon \tau \sigma,$$

et H contenant α, β , $(Z, -Z^{-1})$ contiendra $\mathfrak{O}(2, 23)$.

Prenons maintenant

$$\gamma_g = ynteqs.pbfnod.rueh.tikla.x.y.g.$$

et considérons $G_g = \{\alpha, \beta, \gamma_g\}$. Comme

$$\alpha = vxybpggescdrfnkimholtav,$$

$$\beta = xypsmconbqf.gdthrualliek.v,$$

la substitution $\delta_g = \alpha^{-1}\gamma_g\alpha = bhdec.gpnkl.rfeso.amitu.x.y.q$ montre que le diviseur de G_g fixant x est transitif et

$$\varepsilon_g = \gamma_g^{-2}\delta_g\gamma_g^2 = nruds.gfpat.covmb.iqlkh.x.y.c$$

que celui fixant x, y est transitif. En posant

$$\theta_g = \delta_g\varepsilon_g^2, \quad \mu_g = \alpha\varepsilon_g\alpha^{-1}\gamma_g^2, \quad \nu_g = \mu_g\delta_g\theta_g\mu_g\theta_g,$$

les substitutions

$$\varphi = \nu_g^{-2}\delta_g\nu_g^2 = kpfli.cgnra.usetb.qdhmo.v.x.y,$$

$$\psi = \nu_g^{-1}\theta_g^{-1}\delta_g\theta_g\nu_g = drpqg.bcome.snaki.lhtfu.v.x.y$$

montrent que le diviseur de G_g fixant x, y, v est transitif. Donc G_g est quatre fois transitif. G_g contenant

$$\varphi\theta_g = b_{g0}, \quad \theta_g\varphi = s_{g0}, \quad \psi\mu_g = f_{g0}, \quad \varphi^3\psi^2 = r_{g0},$$

$$s_{g0}r_{g0} = ae.bh.ct.di.fr.gk.lq.os = a_{g1},$$

$$r_{g0}s_{g0} = al.bk.ci.dl.eq.fs.gh.or = a_{g2},$$

$$s_{g0}b_{g0} = ao.bt.ch.dk.es.fq.gi.lr = a_{g3},$$

$$b_{g0}s_{g0} = ah.be.co.df.gl.ir.kq.st = a_{g4},$$

le diviseur de G_g qui fixe x, y, v, u contient $B_g = \{a_{g1}, a_{g2}, a_{g3}, a_{g4}, b_{g0}\}$. Or la substitution

$$\chi = \begin{pmatrix} m & p & n & a & b & c & d & e & f & g & h & i & k & l & o & q & r & s & t \\ s & r & t & h & a & g & i & e & p & f & b & m & c & n & o & k & q & l & d \end{pmatrix}$$

transforme $a_{g^1}, a_{g^2}, a_{g^3}, a_{g^4}, b_{g^0}, a_{g^2} \theta_g \mu_g a_{g^2}$ en a_1, a_2, a_3, a_4, a_0 , $a_0^{-1} \zeta a_0$ respectivement. Donc $\chi^{-1} G_g \chi$ contient C; $\chi^{-1} G_g \chi$ contenant $a_0^{-1} \rho_1 a_0 = \chi^{-1} \theta_g^{-1} \delta_g^{-1} \theta_g a_2 a_3 \zeta$, $\rho'' \chi^{-1} G_g \chi \rho''^{-1}$ contiendra ρ et E; $\rho'' \chi^{-1} G_g \chi \rho''^{-1}$ contenant $\sigma_3 = (\gamma \rho')^{-1} \beta^{-1} \alpha \gamma \rho' (\zeta k_0 \rho)^4$, $\sigma_2'' \rho'' \chi^{-1} G_g \chi \rho''^{-1} \sigma_2''$ contiendra σ et F; $\sigma_2'' \rho'' \chi^{-1} G_g \chi \rho''^{-1} \sigma_2''$ contenant

$$\tau_2 = \sigma \eta \xi a_1 a_2 a_3 a_4 \zeta a_3 a_4 \rho \eta \xi \sigma,$$

le transformé $\iota^{-1} G_g \iota$ de G_g par $\iota = \chi \rho''^{-1} \sigma_2'' \sigma_1''$ contiendra τ et G. Comme d'ailleurs $\iota^{-1} \alpha \iota = \tau \sigma \rho b_0^2 \zeta$, $\iota^{-1} \gamma_g \iota = \alpha a_2 a_4 \zeta a_1 a_2 a_4 \xi \rho \zeta a_2 a_4 \alpha^{-1}$, G contient $\iota^{-1} \alpha \iota$; donc $\iota^{-1} \beta \iota$ et $\iota^{-1} \gamma_g \iota$. Donc $G = \iota^{-1} G_g \iota$.

Tout g^{23} transitif ne contenant pas l'alterné et ne divisant pas le métacyclique est semblable à G. En effet, un tel groupe X contient un groupe semblable à G et est quatre fois transitif, mais non cinq fois car $23 = 19 + 4$ (5). Donc le g^{10} Γ fixant quatre symboles est intransitif et ne contient ni s_{13} , ni s_{17} , ni s_{19} . Donc (X, 1) divisant $\frac{23!}{2.3.5.7.11.13.17.19}$, $(\Gamma, 1) = 48\omega$, ω divisant $4.9.10.12.14.15.16.18$; $\Gamma \geq B$ a les mêmes systèmes d'intransitivité que B. Soient $\mathfrak{A}$ son constituant de degré 16, $\mathfrak{B}$ celui de degré 3, $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ leurs plus grands communs diviseurs avec Γ . On a $\mathfrak{A}_0 = 1$; donc $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} | \mathfrak{A}_0 = \Gamma | \mathfrak{A}_0$, et $(\mathfrak{A}, 1) = 48\omega$ divise $16! : 2.3.5.7$; donc ω divise

$$4.9.10.12.14.15.16 = 2^{10}.3^4.5^2.7.$$

De plus, X est pair sans quoi il contiendrait (5)

$$\beta_0 = xgydptshmr cuoanlb iqefk \quad (\beta_0^2 = \beta)$$

$\beta_0^{-1} \gamma \beta_0 = \gamma_g$, $\gamma \gamma_g^{-1} = geluhdk iart$, et X contenant une s_{11}' serait le symétrique. Donc $(X, 1) = 23.11(23j+1)$ et le g^{22} fixant un symbole a un ordre de la forme $11.5(11j_1+1)$, d'où

$$23j+1 = 5(11j_1+1) = 2.21.20.48\omega.$$

La condition $23j+1 \equiv 0 \pmod{5}$ donne

$$\begin{aligned} j &= 5j' + 3, & 11j_1 + 1 &= 23j' = 14, & j' &= 11j'' - 2, \\ 23(11j'' - 2) + 14 &= 2^7.3^2.7\omega, & j'' &= 32j''', \\ 253j''' - 252\omega &= 1, & \omega &\equiv 1 \pmod{253}. \end{aligned}$$

Or les seuls diviseurs de $2^{10}.3^4.5^2.7$ qui soient $\equiv 1 \pmod{253}$ sont 1 et $3^4.5^2$. ω étant premier à 7, Γ ne contient pas de s_7^{14} et, dans le g^{24} de X qui fixe deux symboles, le groupe des opérations permutable à un g_7 est d'ordre 3.7 ou 9.7 (4). Donc

$$(X, 1) = 23.22.3.7(7\omega + 1) \quad \text{ou} \quad 23.22.3^2.7(7\omega + 1).$$

Dans le premier cas $\omega \equiv 1 \pmod{7}$; dans le second, $\omega \equiv 3 \pmod{7}$. Or $3^4.5^2 \equiv 2 \pmod{7}$. Donc $\omega = 1$ et $X \equiv G$.

11. Pour $q = 47$ et $q = 59$, M. Jordan a vérifié que tout g' ne divisant pas le métacyclique contient l'alterné (*Comptes rendus*, t. LXXIX, 1894, p. 1151). Il suffit, pour refaire cette vérification, de trouver dans chaque $(\alpha, \beta, \gamma_i)$ une s_π^π , π étant premier $< \frac{2}{3}q$, ou même simplement, en se servant d'un théorème de M. Jordan énoncé au n° 5, une $s_\pi^{x\pi}$, π étant premier, $x < 6$ et $< \pi$, $x\pi + x + 1 < q$.

