

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL APPELL

**Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme
des équations de la dynamique**

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série, tome 7 (1901), p. 5-12.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__5_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

*Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme
des équations de la Dynamique;*

PAR M. PAUL APPELL.

1. Comme nous l'avons montré dans un Mémoire inséré dans le premier fascicule de l'année 1900 de ce Recueil, un système matériel est caractérisé par la fonction

$$S = \frac{1}{2} \sum m J^2,$$

où J désigne l'accélération du point de masse m : en appelant $q_1, q_2, \dots, q_n$ les paramètres dont les variations virtuelles sont arbitraires, cette fonction S est une fonction du second degré de $q_1'', q_2'', \dots, q_n''$ que l'on peut supposer réduite aux seuls termes en $q_1'', q_2'', \dots, q_n''$: les coefficients de cette fonction peuvent dépendre de $q_1, q_2, \dots, q_n$ et d'autres paramètres dont les variations virtuelles sont des fonctions linéaires et homogènes données des variations de $q_1, q_2, \dots, q_n$. Pour un déplac-

ment virtuel arbitraire imprimé au système, la somme des travaux des forces appliquées est

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n.$$

Dès lors les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial S}{\partial q_z} = Q_z, \quad (z = 1, 2, \dots, n).$$

M. de Saint-Germain a proposé (*Comptes rendus*, t. CXXX, p. 1174; 1900) d'appeler cette fonction S l'énergie d'accélération, par analogie avec le nom d'énergie cinétique ou énergie de vitesse donnée à la demi-force vive T.

Nous nous proposons actuellement de montrer que la fonction S ne peut pas être choisie arbitrairement en fonction des paramètres sous les seules conditions du degré en $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$ et $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$. La fonction S étant supposée connue, nous montrerons comment on peut en déduire les termes correctifs dans les équations de Lagrange; enfin nous donnerons quelques indications sur l'application des méthodes de transformation aux problèmes de dynamique auxquels les équations de Lagrange ne s'appliquent pas.

Nous supposons, pour simplifier, que les liaisons ne dépendent pas du temps et que les coefficients de S ne contiennent que $q_1, q_2, \dots, q_n$.

2. D'après l'expression de S donnée dans le précédent Mémoire

$$S = \frac{1}{2} \sum m(x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

cette fonction est de la forme suivante :

$$(1) \quad S = \varphi(q''_1, q''_2, \dots, q''_n) + \psi_1 q''_1 + \psi_2 q''_2 + \dots + \psi_n q''_n,$$

où φ est une forme quadratique des q''

$$(2) \quad \varphi(q''_1, \dots, q''_n) = \sum a_{ij} q''_i q''_j \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

dont les coefficients a_{ij} sont supposés dépendre uniquement de $q_1, q_2, \dots, q_n$, et où $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ sont des formes quadratiques en $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$ dont les coefficients dépendent aussi de $q_1, q_2, \dots, q_n$.

La demi-force vive du système

$$T = \frac{1}{2} \sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

est une forme quadratique de $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$ dont les coefficients sont les mêmes que ceux de la forme φ , de sorte que

$$(3) \quad T = \varphi(q'_1, q'_2, \dots, q'_n) = \sum a_{ij} q'_i q'_j;$$

ce fait résulte du calcul même des deux fonctions S et T. Pour simplifier l'écriture, nous ferons

$$\varphi(q''_1, q''_2, \dots, q''_n) = \varphi_2,$$

$$\varphi(q'_1, q'_2, \dots, q'_n) = \varphi_1;$$

alors

$$(4) \quad \begin{cases} S = \varphi_2 + \psi_1 q''_1 + \psi_2 q''_2 + \dots + \psi_n q''_n, \\ T = \varphi_1. \end{cases}$$

3. Conditions nécessaires que doit remplir S. — Comme il est facile de le vérifier et comme nous l'avons montré à la fin du précédent Mémoire, on a identiquement

$$(5) \quad \frac{dT}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q''_1} q'_1 + \frac{\partial S}{\partial q''_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial S}{\partial q''_n} q'_n.$$

Voyons ce que donne cette identité d'après les formes (4) de S et T : elle devient

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & q'_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q''_1} + q'_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial q''_2} + \dots + q'_n \frac{\partial \varphi_2}{\partial q''_n} \\ & \quad + \psi_1 q'_1 + \psi_2 q'_2 + \dots + \psi_n q'_n \\ & = q''_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_1} + q''_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_2} + \dots + q''_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_n} \\ & \quad + q'_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} + q'_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} + \dots + q'_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_n}. \end{aligned} \right.$$

Ici le deuxième membre est l'expression développée de $\frac{dT}{dt}$, telle qu'elle résulte de ce fait que T dépend de t par l'intermédiaire de $q'_1, q'_2, \dots, q'_n, q_1, q_2, \dots, q_n$. Or la première ligne du premier membre de (6) est identique à la première ligne du second, d'après une propriété élémentaire des formes quadratiques. L'identité (6) se réduit donc à

$$(7) \quad \psi_1 q'_1 + \psi_2 q'_2 + \dots + \psi_n q'_n = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_n} q'_n.$$

Cette relation doit avoir lieu quels que soient $q_1, q_2, \dots, q_n, q'_1, q'_2, \dots, q'_n$. Elle établit donc des relations nécessaires entre les coefficients des formes $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ et les coefficients a_{ij} de φ_1 . Pour abréger l'écriture, nous désignerons par une seule lettre les deux membres de l'identité (7), en posant

$$(8) \quad E = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_n} q'_n \equiv \psi_1 q'_1 + \psi_2 q'_2 + \dots + \psi_n q'_n,$$

cette fonction E est une forme cubique en $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$.

4. *Termes correctifs dans les équations de Lagrange.* — L'identité (7) étant supposée remplie, cherchons une expression de la différence

$$(9) \quad \Delta_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial S}{\partial q'_1}.$$

Comme nous avons posé $T = \varphi_1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1} \right) &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q'^2_1} q''_1 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q'_1 \partial q'_2} q''_2 + \dots + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q'_1 \partial q'_n} q''_n \\ &\quad + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q'_1 \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q'_1 \partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial q'_1 \partial q_n} q'_n, \end{aligned}$$

car $\frac{\partial T}{\partial q'_1}$ ou $\frac{\partial \varphi_1}{\partial q'_1}$ dépend de t par l'intermédiaire de $q'_1, q'_2, \dots, q'_n, q_1, q_2, \dots, q_n$.

En explicitant la première ligne et tenant compte de l'expression

de E. on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = 2(a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \dots + a_{1n}\dot{q}_n) + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial \dot{q}_1}.$$

D'autre part

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial \dot{q}_1},$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_1} = 2(a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 + \dots + a_{1n}\dot{q}_n) + \psi_1.$$

La différence (9) appelée Δ_1 , devient donc, après réduction,

$$\Delta_1 = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} - 2 \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial \dot{q}_1} - \psi_1.$$

On a de même, en posant

$$\Delta_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

$$(10) \quad \Delta_\alpha = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_\alpha} - 2 \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha}{\partial \dot{q}_\alpha} - \psi_\alpha.$$

Ceci posé, les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} = Q_\alpha.$$

On peut donc les écrire

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = Q_\alpha + \Delta_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n),$$

où le terme Δ_α a pour expression la quantité (10). Ces quantités Δ_α forment ce qu'on peut appeler les *termes correctifs* dans les équations de Lagrange. On voit que les équations de Lagrange pourront s'appliquer au système, si ces termes Δ_α sont tous identiquement nuls. Ce fait se produit quand le système considéré est assujéti à des liaisons pouvant toutes être exprimées sous forme finie et que les paramètres

sont de véritables coordonnées : d'après Hertz le système est alors dit *holonôme*.

Si le système n'est pas holonôme, le mouvement du système est le même que celui d'un système holonôme admettant même force vive $2T$ que le premier et sollicité par les forces

$$Q_1 + \Delta_1, \quad Q_2 + \Delta_2, \quad \dots, \quad Q_n + \Delta_n.$$

Le fait qu'un système non holonôme et un système holonôme peuvent avoir identiquement le même T se trouve démontré sur un exemple simple que nous avons donné dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik, begründet von Crelle*, t. 122, p. 205.

3. Équations des forces vives : Vérification. — Les liaisons étant indépendantes du temps, l'équation des forces vives est

$$(12) \quad \frac{dT}{dt} = Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + \dots + Q_n q'_n.$$

Pour déduire cette équation des équations (11) il faut multiplier la première de ces équations par q'_1 , la deuxième par q'_2 , etc., la dernière par q'_n et ajouter.

On obtient alors l'équation (12), parce qu'on a identiquement

$$(13) \quad \Delta_1 q'_1 + \Delta_2 q'_2 + \dots + \Delta_n q'_n = 0.$$

En effet, d'après les expressions (10) des quantités Δ_x et la définition de E [équation (8)], on a

$$\Delta_1 q'_1 + \Delta_2 q'_2 + \dots + \Delta_n q'_n = q'_1 \frac{\partial E}{\partial q'_1} + \dots + q'_n \frac{\partial E}{\partial q'_n} - 3E;$$

mais E étant homogène et du troisième degré en $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$, le deuxième membre est nul identiquement, d'après le théorème des fonctions homogènes.

6. Application des méthodes de transformation. — Terminons par l'indication d'un problème qui se pose naturellement. Si les com-

posantes des forces $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ dépendent uniquement de $q_1, q_2, \dots, q_n$ et non des vitesses, les seconds membres des équations du mouvement (11) peuvent contenir néanmoins les vitesses, dans les termes Δ_z , quand le système n'est pas holonôme : ces termes sont du second degré en $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$.

Peut-on faire disparaître les termes de cette nature en faisant un changement de variables portant sur les paramètres et le temps?

On pourrait, en particulier, essayer une transformation de la forme

$$(14) \quad \begin{cases} p_z = f_z(q_1, q_2, \dots, q_n) & (z = 1, 2, \dots, n), \\ dt = \lambda(q_1, q_2, \dots, q_n) dt_1, \\ p'_z = \frac{dp_z}{dt_1}, \end{cases}$$

où f_z et λ sont des fonctions de $q_1, q_2, \dots, q_n$, p_z les nouveaux paramètres et t_1 le nouveau temps. D'après un calcul que nous avons fait dans un article : *Sur des transformations de mouvement* (*Journal de Crelle*, t. 110, p. 37), les équations du mouvement (11) prendront la forme

$$(15) \quad \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial T_1}{\partial p'_z} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial p_z} = \Phi_z + \sum_{i=1}^{i=n} R_z^{(i)} (Q_i + \Delta_i)$$

où Φ_z est une forme quadratique de $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$, et où les $R_z^{(i)}$ dépendent uniquement de $q_1, q_2, \dots, q_n$. On fera dès lors disparaître les dérivées dans les seconds membres, si l'on peut particulariser la transformation de telle façon que l'on ait identiquement

$$(16) \quad \Phi_z + \sum_{i=1}^{i=n} R_z^{(i)} \Delta_i = 0 \quad (z = 1, 2, \dots, n).$$

Ces conditions, dont les premiers membres sont des formes quadratiques de $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$, devant avoir lieu quelles que soient ces dérivées,

on aura, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$, un nombre plus grand d'équations définissant les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$ et λ . Ces équations seront en général trop nombreuses, et le problème ne pourra être résolu que pour des systèmes particuliers.

