

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

LÉON AUTONNE

**Sur les groupes quaternaires réguliers d'ordre fini. Premier  
mémoire: Généralités et groupes décomposables**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5<sup>e</sup> série*, tome 7 (1901), p. 351-394.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1901\\_5\\_7\\_\\_351\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__351_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les groupes quaternaires réguliers d'ordre fini.*  
Premier Mémoire : Généralités et groupes décomposables;

PAR M. LÉON AUTONNE.

**Introduction.**

Nommons :

1° *Substitution*  $n$  — aire (*binnaire, ternaire, quaternaire*, etc.) la substitution linéaire, homogène, entre les  $n$  variables  $z_j$ ,

$$s_n = \left| z_j \sum_k a_{jk} z_k \right|, \quad \text{avec} \quad j, k = 1, 2, \dots, n$$

ou

$$s_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0;$$

2°  $\mathfrak{G}_n$ , le groupe des  $s_n$ ;

3°  $G_n$ , tout groupe d'ordre fini contenu dans  $\mathfrak{G}_n$ ;

4°  $\Pi_n$ , le problème qui consiste à construire les différents  $G_n$ .

Le problème  $\Pi_2$  est résolu depuis longtemps par MM. Klein, Gordan et Jordan.

$\Pi_3$  a été résolu par M. Jordan au Tome 84 du *Journal de Crelle*.

M. Jordan a montré aussi (Mémoire précité et Mémoire couronné par l'Académie de Naples) que tous les  $G_n$  appartiennent à un nombre de types limité, pour  $n$  donné. Abordant ensuite la solution de  $\Pi_4$ , M. Jordan l'a poussée assez loin et ne s'est arrêté qu'au seuil d'une

discussion arithmétique, où il y avait des cas particuliers à examiner par milliers.

Le problème II, *général* défiera, à mon avis, encore longtemps les efforts des géomètres. Aussi le présent travail apporte-t-il simplement une contribution à l'étude de *certaines*  $G_4$ , que j'ai nommés *réguliers*. Ils ont, pour propriété caractéristique, l'existence d'un *invariant absolu* commun.

Si les  $z$  sont envisagées comme des coordonnées homogènes d'un point dans l'espace, les quaternaires régulières ont pour invariant commun un certain complexe linéaire de droites, le complexe *capital*.

On trouvera dans mes Mémoires *Sur l'équation différentielle du premier ordre* insérés au *Journal de l'École Polytechnique* (1<sup>re</sup> série : 61<sup>e</sup>, 62<sup>e</sup>, 63<sup>e</sup>, 64<sup>e</sup> Cahiers; 2<sup>e</sup> série : 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> Cahiers) et aux *Annales de l'Université de Lyon* (1892), une étude géométrique détaillée des régulières, d'ordre fini ou infini.

Je fais aussi usage, dans les présentes recherches, des mêmes considérations géométriques, qui abrègent beaucoup les discussions de pure algèbre.

M. Jordan dit qu'un groupe  $G_n$  est *décomposable* dans l'éventualité suivante : les  $n$  variables  $z$ , *convenablement choisies*, peuvent se répartir en systèmes  $s$ , contenant chacun un nombre de  $z$  marqué par le *degré* du système; alors toute  $s_n$  de  $G_n$  remplace les variables d'un quelconque parmi les systèmes  $s$  par des fonctions linéaires et homogènes des variables d'un autre système  $s'$ . Suivant la terminologie adoptée,  $s_n$  *fait succéder*  $s'$  à  $s$ . Il est évident que  $s$  et  $s'$  sont du même degré.

Dans le présent Travail, après quelques explications générales sur les groupes quaternaires  $G_4$  réguliers et d'ordre fini, je construis *tous* les  $G_4$  *décomposables*.

Cette recherche, comme on le voit au cours du présent Travail, se ramène aux principes de M. Jordan par une discussion géométrique relativement facile. Par contre, comme le montrera un Mémoire ultérieur, la construction des groupes indécomposables exige, en outre, des méthodes spéciales.

Voilà pourquoi la matière du présent Travail est nettement circonscrite.

En ce qui concerne les groupes décomposables, voici l'énumération, pour un choix approprié de variables :

On trouve d'abord deux types à existence évidente *a priori*.

# I.

$G_4$  provient de régulières

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ x_3 & a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ x_4 & a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{vmatrix},$$

avec

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 1,$$

où les groupes P et Q dérivés respectivement des binaires

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

sont d'ordre fini.

# II.

On combine un groupe  $\mathfrak{A}$  du type I avec une régulière unique

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} x_1 & b_{13}x_3 + b_{14}x_4 \\ x_2 & b_{23}x_3 + b_{24}x_4 \\ x_3 & b_{31}x_1 + b_{32}x_2 \\ x_4 & b_{41}x_1 + b_{42}x_2 \end{vmatrix}$$

où

$$\begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} = -1.$$

$\mathfrak{A}$  est permutable à  $\mathfrak{B}$  et contient  $\mathfrak{B}^2$ . Les groupes P et Q ci-dessus

sont transformés l'un dans l'autre par les binaires

$$\begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}.$$

Viennent ensuite deux types qui admettent une quadrique invariante,  $x_1x_2 - x_3x_4 = 0$ .

### III.

Le groupe provient de régulières

$$\phi = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + a_{13}x_3 \\ x_2 & \rho a_{33}x_2 + \rho a_{31}x_1 \\ x_3 & a_{31}x_1 + a_{33}x_3 \\ x_4 & \rho a_{13}x_2 + \rho a_{11}x_1 \end{vmatrix}$$

où

$$\rho^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{racine de l'unité,}$$

le groupe binaire des substitutions

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

étant d'ordre fini.

### IV.

Le groupe s'obtient en combinant un groupe  $\mathfrak{A}$  du type III avec une régulière unique

$$\psi = \begin{vmatrix} x_1 & b_{12}x_2 + b_{14}x_4 \\ x_2 & \sigma b_{34}x_4 + \sigma b_{32}x_3 \\ x_3 & b_{32}x_2 + b_{34}x_4 \\ x_4 & \sigma b_{14}x_1 + \sigma b_{12}x_3 \end{vmatrix}$$

où

$$\begin{vmatrix} b_{12} & b_{14} \\ b_{32} & b_{34} \end{vmatrix} = -\sigma^{-1}.$$

$\mathfrak{A}$  contient  $\mathfrak{v}^2$  et est permutable à  $\mathfrak{v}$ .

Le dernier type de l'énumération est d'ordre quarante-huit et isomorphe au groupe général des déplacements entre quatre lettres.

# V.

Le groupe s'obtient en transformant le groupe *irrégulier* dérivé des trois substitutions

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 \\ z_1 & z_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 \\ z_3 & -z_1 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_1 & iz_1 \\ z_2 & iz_3 \\ z_3 & iz_2 \\ z_1 & -iz_1 \end{vmatrix} \quad (i^2 + 1 = 0),$$

par la substitution

$$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 + \tau x_2 + \tau^2 x_3 \\ z_2 & x_1 + \tau\theta^2 x_3 + \tau\theta x_4 \\ z_3 & x_1 + \tau\theta x_3 + \tau\theta^2 x_4 \\ z_1 & x_2 \end{vmatrix} \quad \left( 3\tau^2 = 0 - \theta^2, \theta = e^{\frac{2\pi i}{3}} \right),$$

qui réintroduit les variables  $x$ , analogues à celles des quatre premiers types.

On voit que (sauf pour le type V, dont la structure est parfaitement déterminée) dans l'expression des groupes décomposables ne figurent jamais que des groupes binaires et jamais ternaires. Ce résultat est précieux et voici pourquoi : en vertu des méthodes de M. Jordan, la discussion des groupes indécomposables est fondée sur celle des groupes décomposables. On se trouve donc affranchi, pour le problème général des  $G_4$  réguliers, de l'incertitude qui subsiste encore sur la liste complète des groupes ternaires d'ordre fini.

Un travail ultérieur sera consacré aux groupes réguliers d'ordre fini indécomposables ou généraux.

## CHAPITRE I.

## RÉGULARITÉ ALGÈBRIQUE.

1. Considérons une substitution  $s_n$  linéaire  $n$  — aire (binaire, ternaire, quaternaire, ...), c'est-à-dire à  $n$  variables homogènes, savoir :

$$s_n = \left| x_i \sum_j a_{ij} x_j \right| \quad (i, j, = 1, 2, \dots, n),$$

le déterminant des  $n^2$  constantes  $a_{ij}$  étant  $\neq 0$ .

Je nommerai  $\Lambda \neq 0$  ce déterminant et poserai

$$A_{ij} = \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{ij}}.$$

Pour plus de commodité, dans divers cas, on désignera  $s_n$  par plusieurs notations différentes :

$$s_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Si l'on nomme  $s_n[P]$  ce que devient par l'effet de  $s_n$  une fonction homogène  $P$  des  $x_i$ , on aura

$$s_n[x_i] = \sum_j a_{ij} x_j$$

et l'on pourra écrire

$$s_n = [x_i \quad s_n[x_i]].$$

2. Nommons *transposée*  $s'_n$  de  $s_n$  la substitution

$$s'_n = (a_{ji}) = (a'_{ij}).$$

Soient  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  deux  $s_n$  quelconques, on vérifiera sans peine que

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})' = \mathfrak{B}'\mathfrak{A}'$$

la transposée d'un produit est identique avec le produit des transposées des facteurs pris en ordre inverse.

Par suite  $(\mathfrak{A})^{-1} = (\mathfrak{A}^{-1})'$  : la transposée de l'inverse est l'inverse de la transposée.

C'est d'ailleurs évident, car si  $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ , on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}' &= (a_{ji}), & \mathfrak{A}^{-1} &= (\Lambda^{-1} \Lambda_{ij}), \\ \mathfrak{A}^{-1} &= (\Lambda^{-1} \Lambda_{ji}), & (\mathfrak{A}^{-1})' &= (\Lambda^{-1} \Lambda_{ij}). \end{aligned}$$

5. Prenons maintenant une quaternaire

$$\mathfrak{A} = (a_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

le déterminant  $\Lambda$  des  $a_{ij}$  étant  $\neq 0$ .

Je dis que  $\mathfrak{A}$  est régulière si  $\mathfrak{A}$  admet pour invariant la forme bilinéaire

$$(xy) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

des huit quantités quelconques  $x_i$  et  $y_i$ . Autrement dit, une régulière doit reproduire  $(xy)$  à un facteur constant près.

Cherchons les conditions de régularité.

4. Avec les notations du n° 1, on a

$$\mathfrak{A}[(xy)] = \sum_i \sum_j x_i y_j \{ a_{1i} a_{2j} - a_{2i} a_{1j} - a_{3i} a_{4j} + a_{4i} a_{3j} \}.$$

Posons

$$\begin{aligned} (ij) &= \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, & (ij)' &= \begin{vmatrix} a_{3i} & a_{3j} \\ a_{4i} & a_{4j} \end{vmatrix}, \\ p_{ij} &= -p_{ji} = (ij) - (ij)', \end{aligned}$$

avec les relations connues

$$\begin{aligned} 0 &= (12)(34) + (23)(14) + (31)(24) = (12)'(34)' + \dots \\ &+ (12)'(34)' + (23)'(14)' + (31)'(24)' + (12)'(34) + (23)'(14) \\ &+ (31)'(24) = \Lambda. \end{aligned}$$



Il viendra

$$A[(xy)] = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}.$$

Mais

$$(xy) = \sum_j u_j y_j$$

avec

$$u_1 = -x_2, \quad u_2 = x_1, \quad u_3 = x_4, \quad u_4 = -x_3.$$

On doit donc avoir

$$\sum_i x_i p_{ij} = M u_j,$$

c'est-à-dire le système

$$(1) \quad \begin{cases} (p_{21} + M)x_2 + p_{31}x_3 + p_{41}x_4 = 0, \\ (p_{12} - M)x_1 + p_{32}x_3 + p_{42}x_4 = 0, \\ p_{13}x_1 + p_{23}x_2 + (p_{43} - M)x_4 = 0, \\ p_{14}x_1 + p_{24}x_2 + (p_{34} + M)x_3 = 0. \end{cases}$$

Le déterminant des coefficients des  $x$  dans le système (1) est gauche et l'on a

$$\begin{aligned} 0 &= (p_{21} + M)(p_{43} - M) + p_{13}p_{42} + p_{32}p_{41} \\ &= -M^2 + M(p_{43} - p_{21}) + p_{21}p_{43} + \dots, \\ &\quad p_{21}p_{43} + \dots = \{(12) - (12)'\} \{(34) - (34)'\} + \dots \\ &= (12)(34) + \dots + (12)'(34)' + \dots - (12)(34)' - (12)'(34) \dots \\ &= -\Lambda. \end{aligned}$$

Finalement

$$M^2 - MK^0 + \Lambda = 0$$

avec

$$K^0 = (12) - (34) - (12)' + (34)' = p_{12} - p_{34}.$$

Les quatre égalités du système (1) sont des identités en  $x_i$ ; il vient

$$0 = p_{23} = p_{14} = p_{31} = p_{24} + M = p_{43} - M.$$

On tire de là

$$(2) \quad \begin{cases} p_{12} = (12) - (12)' = M \\ p_{34} = (34) - (34)' = -M \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} (12)' = (12) - M \\ (34)' = (34) + M \end{cases}$$

$$(23)' = (23), \quad (14)' = (14),$$

$$(31)' = (31), \quad (24)' = (24).$$

L'égalité

$$(12)'(34)' + (23)'(14)' + (31)'(24)' = 0$$

devient

$$0 = [(12) - M][(34) + M] + (23)(14) + (31)(24) = M(M - K),$$

$$K = (12) - (34).$$

On ne peut avoir  $M = 0$  puisque

$$0 = M^2 - M(p_{12} - p_{34}) + A \quad \text{avec} \quad A \neq 0.$$

Donc, sous le bénéfice de (2),

$$M = K, \quad p_{12} - p_{34} = 2M, \quad M^2 = A,$$

et, sous le bénéfice de (3),

$$(12)' = (34), \quad (34)' = (12).$$

5. En résumé, les conditions de régularité sont

$$(12)' = (34), \quad (23)' = (23), \quad (31)' = (31),$$

$$(34)' = (12), \quad (14)' = (14), \quad (24)' = (24).$$

$\mathfrak{A}$  multiplie l'invariant  $(xy)$  par le facteur

$$K = (12) - (34) = A^{\frac{1}{2}},$$

racine carrée du déterminant de  $\mathfrak{A}$ .

6. Nommons, avec M. Jordan, *singulière*  $\rho$ , toute quaternaire (ou

même toute  $n$  — aire) qui multiplie toutes les variables par un même facteur  $\rho$ . Toute singulière est à la fois régulière et échangeable à une quaternaire quelconque.

Si la régulière  $\mathfrak{A} = (a_{ij})$  multiplie l'invariant  $(xy)$  par le facteur  $K$  [ $K^2 = A$ ,  $\mathfrak{A}$  = déterminant de  $\mathfrak{A}$ ], la régulière  $\rho \mathfrak{A} = (\rho a_{ij})$  multiplie  $(xy)$  par  $\rho^2 K$ . Le déterminant de  $\rho \mathfrak{A}$  est

$$\rho^4 A = (\rho^2 K)^2.$$

Si donc je choisis pour  $\rho$  la valeur  $K^{-\frac{1}{2}}$  ou  $A^{-\frac{1}{4}}$ , la régulière  $\rho \mathfrak{A}$  aura la double propriété :

1° D'avoir l'unité pour valeur du déterminant;

2° D'admettre  $(xy)$  pour invariant *absolu*.

Toutes les régulières que je considérerai dorénavant posséderont, par hypothèse, les propriétés qui viennent d'être dites. On supposera toujours

$$K = (12) - (34) = A = 1.$$

7. En définitive, nous écrirons pour conditions de régularité

$$(o) \quad \left\{ \begin{array}{lll} (12) - (34) = 1 \\ (12)' = (34), & (23)' = (23), & (31)' = (31) \\ (34)' = (12), & (14)' = (14), & (24)' = (24) \end{array} \right\}.$$

Si l'on a satisfait aux deux dernières équations des deux dernières lignes du système (o), l'égalité identique

$$(12)'(34)' + (23)'(14)' + (31)'(24)' = 0$$

se réduit, sous le bénéfice de  $(12)(34) + \dots = 0$ , à l'identité

$$(12)'(34)' = (12)(34),$$

et il suffit de satisfaire à l'une des deux premières équations des deux dernières lignes du système (o) pour satisfaire à l'autre équation.

*Les sept conditions du système (o) se réduisent à six distinctes.*

La régulière générale comporte dix paramètres; il y a dans l'espace  $\infty^4$  régulières.

Il y en aurait  $\infty^4$ , si l'on n'astreignait plus  $xy$  à être un invariant absolu.

8. Nommons  $\varepsilon$  la régulière

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_2 & -x_4 & -x_1 & x_3 \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon^2 = \begin{vmatrix} x_i & -x_i \end{vmatrix} = \text{singulière},$$

et  $\mathfrak{A}'$  la *transposée* de  $\mathfrak{A}$  (n° 2).

Les conditions de régularité expriment que

$$\mathfrak{A}'^{-1} = \varepsilon^{-1} \mathfrak{A} \varepsilon = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} & -a_{24} & a_{23} \\ -a_{12} & a_{11} & a_{14} & -a_{13} \\ -a_{32} & a_{31} & a_{34} & -a_{33} \\ a_{32} & -a_{31} & -a_{34} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

De là

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = \Lambda_1 + \dots + \Lambda_{11},$$

et l'équation caractéristique

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \rho \end{vmatrix}$$

$$= \rho^4 - S_1 \rho^3 + S_2 \rho^2 - S_3 \rho + 1 = 0,$$

avec

$$S_1 = a_{11} + \dots + a_{44}, \quad S_3 = \Lambda_{11} + \dots + \Lambda_{44},$$

est *réci-proque*.

9. Si deux régulières  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  admettent  $(xy)$  pour invariant, il en est de même pour le produit  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ . Donc *les régulières forment un groupe*, le groupe *régulier*.

Le but principal de ces recherches est de construire les groupes réguliers d'ordre fini.

Soit  $G$  un pareil groupe, construit, comme il est stipulé au n° 6, pour  $(xy)$  invariant absolu.  $G$  contiendra un faisceau  $\Phi$  de substitutions singulières.

Si l'on n'astreint plus  $(xy)$  à être un invariant absolu, cela revient (n° 6) à multiplier chaque régulière de  $G$  par une certaine singulière. La constitution du faisceau  $\Phi$  subit seule une modification.

Soit, pour  $(xy)$  invariant absolu, une singulière

$$|x_i \quad \rho x_i|,$$

il faudra avoir  $\rho^2 = 1$ ;  $\Phi$  contiendra une ou deux régulières, savoir l'unité et

$$\mathfrak{K} = |x_i \quad -x_i|.$$

## CHAPITRE II.

### RÉGULARITÉ GÉOMÉTRIQUE.

**10.** Dans un espace ordinaire  $\mathcal{E}$  à trois dimensions, prenons des coordonnées homogènes,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{coordonnées-points } x_i \text{ d'un point } x \\ \text{coordonnées-plans } u_i \text{ d'un plan } u \end{array} \right\}.$$

La valeur absolue des coordonnées sera donnée par les relations

$$x_0 = \sum_i e_i x_i = \sum e x = 1,$$

$$u_0 = \sum h u = 1,$$

les coefficients numériques  $e_i$  et  $h_i$  étant arbitrairement fixés une fois pour toutes.

Si une droite  $g$  de  $\mathcal{E}$  est l'intersection de deux plans  $a$  et  $b$ ,  $g$  aura

pour ses six coordonnées-plans homogènes les six déterminants

$$\{ij\} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$$

$$(12)(34) + (23)(14) + (31)(24) = 0.$$

Si  $g$  passe par les deux *points*  $a$  et  $b$ , elle aura pour coordonnées-points homogènes les six déterminants

$$\{ij\}^0 = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}.$$

Pour une même droite, les coordonnées-plans  $\{ij\}$  et les coordonnées-points  $\{ij\}^0$  satisfont aux relations

$$\frac{\{12\}^0}{\{34\}} = \frac{\{34\}^0}{\{12\}} = \frac{\{23\}^0}{\{14\}} = \frac{\{14\}^0}{\{23\}} = \frac{\{31\}^0}{\{24\}} = \frac{\{24\}^0}{\{31\}}.$$

11. Tout cela rappelé, nommons *capitale* toute droite pour laquelle on a

$$\{12\} - \{34\} = 0 \quad \text{ou} \quad \{12\}^0 - \{34\}^0 = 0.$$

Le lieu des capitales est un complexe linéaire *capital* dont l'équation s'écrit

$$\{12\} - \{34\} = 0 \quad \text{ou} \quad \{12\}^0 - \{34\}^0 = 0.$$

La théorie générale des complexes linéaires nous apprend que les droites capitales

situées dans un plan  $M$ , passent toutes par un même point  $m$ , *centre* de  $M$ . passant par un point  $m$  sont toutes situées dans un plan  $M$ , *plan central* de  $m$ .

Le centre du plan  $u$  est le point  $\xi$

$$u_2, \quad -u_1, \quad -u_1, \quad u_3.$$

En effet, si  $y$  est un point de  $u$ , on a pour la droite  $y\xi$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ u_2 & -u_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ -u_4 & u_3 \end{vmatrix} = \{12\}^0 - \{34\}^0 \\ = -\Sigma uy = 0.$$

Pareillement le plan central du point  $x$  a pour coordonnées

$$x_2, \quad -x_1, \quad -x_4, \quad x_3.$$

Si  $m$  est le centre du plan  $M$ , on a

$$M_i = \varepsilon[m_i],$$

$\varepsilon$  étant la substitution ainsi désignée au n° 8 et les crochets [ ] ayant la signification marquée au n° 1.

**12.** On sait aussi que les droites de l'espace  $\mathcal{C}$  sont deux à deux ( $g$  et  $g'$ ) *conjuguées* par rapport au complexe capital.

$g'$  est le lieu des centres pour les plans passant par  $g$  (et réciproquement).

Une capitale coïncide avec sa conjugée.

Si  $g$  est l'intersection des deux plans  $a$  et  $b$ , le plan  $M$  de coordonnées  $a_i + \mu b_i$  tourne autour de  $g$  quand  $\mu$  varie. Le centre  $m$  de  $M$  a pour coordonnées

$$\begin{aligned} m_1 &= a_2 + \mu b_2, & -m_2 &= a_1 + \mu b_1, \\ -m_3 &= a_4 + \mu b_4, & m_4 &= a_3 + \mu b_3. \end{aligned}$$

Le lieu du point  $m$  est une droite dont les  $\{ij\}^0$  sont les déterminants de la matrice

$$\begin{vmatrix} a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ b_2 & -b_1 & -b_4 & b_3 \end{vmatrix},$$

On a donc pour les coordonnées-plans  $\{ij\}$  correspondantes

$$\begin{aligned} \text{de } g' & \{34\} \quad \{12\} \quad \{23\} \quad \{14\} \quad \{31\} \quad \{24\}, \\ \text{de } g & \{12\} \quad \{34\} \quad \{23\} \quad \{14\} \quad \{31\} \quad \{24\}. \end{aligned}$$

**13.** Nommons :

- $\tau$  le tétraèdre de référence ;
- $T_i$  la face  $x_i = 0$  de  $\tau$  ;
- $\tau_i$  le sommet de  $\tau$  opposé à la face  $T_i$  ;
- $g_{ij}$  l'arête  $x_i = x_j = 0$  de  $\tau$ .

On voit immédiatement que :

- $g_{12}$  et  $g_{34}$  sont conjuguées et non capitales ;
- $g_{23}$ ,  $g_{14}$ ,  $g_{31}$ ,  $g_{24}$  sont capitales ;
- $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $\tau_4$  sont respectivement les centres des faces  $T_2$ ,  $T_1$ ,  $T_4$ ,  $T_3$ .

Pour éviter des redites, nous conserverons constamment les notations du présent numéro.

Je nommerai *tétraèdre normal*  $\pi$  tout tétraèdre où deux arêtes opposées sont conjuguées. Les quatre autres sont alors capitales. Le tétraèdre de référence  $\tau$  est normal.

**14.** Si je fais (ce qui m'arrivera quelquefois) usage d'un tétraèdre de référence qui ne sera pas forcément normal, les coordonnées-points seront désignées non plus par  $x_i$  mais (afin d'avertir le lecteur) par  $z_i$ .

**15.** Nommons *courbe intégrante* toute courbe ayant ses tangentes capitales. Les intégrantes sont évidemment caractérisées par la relation infinitésimale

$$(x dx) = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} dx_3 & dx_4 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient  $\varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$  quatre fonctions homogènes de degré quelconque  $\lambda$ . Nommons  $\Lambda$  la substitution *géométrique* qui remplace le point  $x$  par le point  $y$ , des coordonnées  $y_i = \varphi_i \varphi_0^{-1}$ ,  $\varphi_0 = \Sigma e \varphi$  (10), de façon que  $\Sigma e y = y_0 = 1$ .  $\Lambda$  s'écrira par le symbole

$$\Lambda = |x_i \quad \varphi_0^{-1} \varphi_i|.$$

$\Lambda$  sera *régulière* si elle change une intégrante quelconque en une autre intégrante.



Je vais montrer que cette définition géométrique de la régularité conduit, pour  $\lambda = 1$ , précisément à la régularité algébrique, telle qu'elle est définie au Chapitre I.

**16.** Pour la régularité géométrique, il est nécessaire et suffisant que la relation  $(y dy) = 0$  soit la conséquence de  $(x dx) = 0$ . Les différentielles  $dx_i$  sont quelconques, sous la condition *unique*

$$dx_0 = \Sigma e dx = 0.$$

Posons

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j},$$

d'où (th. d'Euler)

$$\lambda \varphi_i = \sum_j \varphi_{ij} x_j \quad \text{et} \quad d\varphi_i = \sum_j \varphi_{ij} dx_j.$$

Ensuite  $dy_i = \varphi_0^{-2} \{ \varphi_0 d\varphi_i - \varphi_i d\varphi_0 \}$ , puisque  $y_i = \varphi_i \varphi_0^{-1}$ , et

$$(y dy) = \varphi_0^{-2} (\varphi d\varphi).$$

Posons

$$(ij) = \begin{vmatrix} \varphi_{1i} & \varphi_{1j} \\ \varphi_{2i} & \varphi_{2j} \end{vmatrix}, \quad (ij)' = \begin{vmatrix} \varphi_{3i} & \varphi_{3j} \\ \varphi_{4i} & \varphi_{4j} \end{vmatrix}, \quad p_{ij} = (ij) - (ij)',$$

il viendra

$$\begin{aligned} (y dy) &= \frac{1}{\lambda \varphi_0^2} \sum_{ij} x_i dx_j \{ \varphi_{2i} \varphi_{1j} - \varphi_{1i} \varphi_{2j} - \varphi_{4i} \varphi_{3j} + \varphi_{3i} \varphi_{4j} \} \\ &= \frac{\sum_{ij} x_i dx_j p_{ij}}{\lambda \varphi_0^2} = \frac{\sum_j U_j dx_j}{\lambda \varphi_0^2}. \end{aligned}$$

Cette expression linéaire et homogène en  $dx_j$  doit être une combinaison linéaire et homogène de  $(x dx)$  et de  $dx_0 = \Sigma e dx$ . Il doit exister deux fonctions  $M$  et  $\rho$  des  $x_i$  telles que l'on ait identiquement

entre les  $dx_j$

$$\Sigma U dx = M(x dx) + \rho \Sigma e dx,$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = Mx_2 + \rho e_1 \\ U_2 = -Mx_1 + \rho e_2 \\ U_3 = -Mx_4 + \rho e_3 \\ U_4 = Mx_3 + \rho e_4 \end{array} \right\}, \quad U_j = \sum_i x_i p_{ji}.$$

L'expression  $\Sigma Ux \equiv 0$  comme proportionnelle à  $(\varphi\varphi)$ ;

$$\Sigma ex = x_0 = 1.$$

Le système (1) fournit donc

$$0 = \Sigma Ux = \rho x_0, \quad \text{d'où} \quad \rho = 0.$$

On retombe sur un système analogue au système (1) du n° 4 et l'on a encore

$$M^2 - MK^0 + \Phi = 0,$$

$\Phi$  étant le déterminant des  $\varphi_{ij}$ , c'est-à-dire le jacobien des  $\varphi_i$ , et

$$K^0 = (12) - (34) - (12)' + (34)'.$$

**17.** Lorsque  $\lambda = 1$ , les  $\varphi_{ij}$  sont des constantes ainsi que  $\Phi$  et  $K^0$ ;  $M$  est aussi une constante. Chacune des quatre relations du système (1) du n° 16 représente un plan. Or  $x$  est quelconque dans l'espace et chacune des quatre égalités devient une identité entre les  $x_i$ . Le calcul s'achève comme au Chapitre I et l'on trouve les mêmes conditions de régularité.

G. Q. F. D.

**18.** Il est évident qu'une régulière  $\alpha$  change :

Une capitale en une autre capitale ;

Deux droites conjuguées en deux autres conjuguées aussi ;

Un tétraèdre normal (n° 13) en un tétraèdre normal ;

Un système formé par un plan et son centre en un système analogue, etc.

**19.** La régulière  $\mathfrak{A}$  effectuée sur les coordonnées-points  $x_i$  dans l'espace  $\mathfrak{E}$  se traduit sur les coordonnées-plans  $u_i$  par l'inverse  $\mathfrak{A}'^{-1}$  de la transposée (n° 2). Mais, le point  $x$  étant le centre du plan  $u$  (n° 11), on a

$$u_2 = x_2, \quad u_2 = -x_1, \quad u_3 = -x_4, \quad u_4 = x_3,$$

c'est-à-dire  $u_i = \varepsilon[x_i]$  (nos 1 et 2). Il faut donc avoir forcément

$$\Lambda'^{-1} = \varepsilon^{-1} \mathfrak{A} \varepsilon,$$

comme nous le savions déjà (n° 8).

**20.** Au point de vue géométrique, la multiplication de la régulière  $\mathfrak{A}$  par une singulière (n° 6) quelconque est une opération indifférente. Je supposerai dorénavant toujours (comme aux nos 6 et 7) que les sept conditions de régularité sont

$$\left\{ \begin{array}{lll} (12)' = (34), & (23)' = (23), & (31)' = (31) \\ (34)' = (12), & (14)' = (14), & (24)' = (24) \\ (12) - (34) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(dont six} \\ \text{distinctes} \\ \text{seulement),} \end{array}$$

et que l'invariant  $(xy)$  du Chapitre I est absolu.

Une singulière

$$|x_i \quad kx_i|$$

donne simplement  $k^2 = 1$ . Nous envisagerons donc une seule régulière singulière autre que l'unité, c'est

$$\mathfrak{E} = |x_i \quad -x_i|.$$

Au point de vue géométrique,  $\mathfrak{E}$  se confond avec la substitution unité.

**21.** La construction des groupes réguliers d'ordre fini sera précédée par l'établissement de diverses propositions géométriques qui ont l'avantage d'abrégier les discussions purement algébriques. Ces propositions sont, d'ailleurs, le développement des théories du présent Chapitre.

# CHAPITRE III.

## CHOIX DU TÉTRAÈDRE DE RÉFÉRENCE.

**22.** Soient  $P$  et  $P'$  deux figures analogues de l'espace (deux plans, deux points, deux tétraèdres, etc.). S'il existe au moins une régulière  $\mathfrak{A}$  qui transforme  $P$  en  $P'$ ,  $\mathfrak{A}^{-1}$ , aussi régulière, transformera  $P'$  en  $P$ . Nous dirons alors que les deux figures peuvent être *régulièrement amenées l'une sur l'autre*.

**23.** Tout tétraèdre normal (n° 13)  $\mathfrak{M}$  peut être régulièrement amené sur le tétraèdre de référence  $\mathfrak{T}$ .

Soient

$$P_i = \sum_j p_{ij} x_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

les équations des quatre faces de  $\mathfrak{M}$ .

Nommons  $P_1 = P_2 = 0$  et  $P_3 = P_4 = 0$  les deux arêtes conjuguées ; on aura, en posant

$$q_{ij} = \begin{vmatrix} p_{1i} & p_{1j} \\ p_{2i} & p_{2j} \end{vmatrix}, \quad q'_{ij} = \begin{vmatrix} p_{3i} & p_{3j} \\ p_{4i} & p_{4j} \end{vmatrix},$$

les relations suivantes (n° 12) :

$$(o) \quad \frac{q'_{12}}{q_{31}} = \frac{q'_{31}}{q_{12}} = \frac{q'_{23}}{q_{31}} = \frac{q'_{13}}{q_{24}} = \frac{q'_{24}}{q_{31}} = \frac{q'_{14}}{q_{23}} = \rho.$$

La substitution quaternaire  $\mathfrak{A} = (a_{ij}) = (r_i p_{ij})$ , où les  $r_i$  sont des constantes, change  $\mathfrak{T}$  en  $\mathfrak{M}$  ;  $\mathfrak{A}^{-1}$  change  $\mathfrak{M}$  en  $\mathfrak{T}$ , et tout cela quels que soient les paramètres  $r$ . Exprimons que la quaternaire  $\mathfrak{A}$  est régulière. Il viendra

$$(ij) = r_1 r_2 q_{ij}, \quad (ij)' = r_3 r_4 q'_{ij}.$$

Les conditions de régularité sont ainsi, sous le bénéfice des



$N_1, N_2, N_3, N_4$  auront respectivement  $n_2, n_1, n_1, n_2$  pour centres (n° 13) et le tétraèdre  $\mathfrak{M}$  des quatre points  $n$  sera normal.  $\mathfrak{M}$  pourra régulièrement être amené sur  $\varepsilon$ . Alors  $d_{12}$  et  $d_{31}$  viennent régulièrement sur  $g_{12}$  et  $g_{31}$ , ou sur  $g_{31}$  et  $g_{12}$ . Dans le dernier cas, on permu-tera régulièrement (n° 24)  $g_{12}$  et  $g_{31}$ .

**26.** *Deux capitales quelconques  $d_{11}$  et  $d_{21}$  qui se coupent en un point  $n_3$  peuvent toujours être amenées régulièrement sur les arêtes capitales  $g_{11}$  et  $g_{21}$  (n° 13) du tétraèdre de référence qui se coupent au sommet  $\tau_3$ .*

Soit  $N_1$  le plan de  $d_{11}$  et  $d_{21}$ .  $N_1$  aura  $n_3$  pour centre. Menons par  $n_3$  une droite quelconque  $d_{12}$  non capitale; la conjuguée  $d_{21}$  de  $d_{12}$  sera située dans le plan  $N_1$ . Le point  $n_{11}$  quelconque sur  $d_{12}$ , aura son plan central  $N_2$  passant par  $d_{21}$ .  $d_{21}$  rencontre  $d_{11}$  et  $d_{21}$  aux points  $n_2$  et  $n_1$  ayant respectivement  $N_1$  et  $N_2$  pour plans centraux. Le tétraèdre  $\mathfrak{M}$  des quatre points  $n$  est normal et vient régulièrement sur  $\varepsilon$ . Le raisonnement s'achève, à l'aide des n° 23 et 24, sans peine.

On peut dire aussi que *deux capitales données qui se coupent viennent régulièrement sur deux capitales données qui se coupent aussi.*

**27.** *Deux capitales quelconques  $d_{11}$  et  $d_{23}$  qui ne se rencontrent pas viennent régulièrement sur les arêtes  $g_{11}$  et  $g_{23}$  de  $\varepsilon$ .*

Soit  $d_{12}$  une droite non capitale qui rencontre  $d_{11}$  en  $n_3$  et  $d_{23}$  en  $n_4$ . La conjuguée  $d_{21}$  de  $d_{12}$  rencontre  $d_{11}$  en  $n_2$  et  $d_{23}$  en  $n_1$ . Le tétraèdre des quatre points  $n$  sera normal. Le raisonnement s'achève comme au n° 26.

**28.** La construction des groupes réguliers généraux fera l'objet d'un Travail ultérieur. Dans le présent Mémoire, on se bornera à traiter une classe, assez étendue d'ailleurs, de groupes réguliers : les groupes *décomposables*.

## CHAPITRE IV.

## GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES DÉCOMPOSABLES.

**29.** Soit  $S_n$  un groupe d'ordre fini, constitué par des  $n$ -aires (c'est-à-dire par des substitutions linéaires, à  $n$  variables homogènes).

Admettons que les variables, *convenablement choisies*, puissent être réparties en systèmes  $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_l, \dots$ , ayant la propriété suivante : Chaque  $n$ -aire de  $S_n$  remplace les variables de  $s_k$  par des fonctions linéaires homogènes des variables de  $s_l$ .  $s_k$  et  $s_l$  doivent évidemment contenir le même nombre de variables. M. Jordan dit alors que le groupe  $S_n$  est *décomposable*, que chaque  $n$ -aire *fait succéder* un système  $s_l$  au système  $s_k$ .

Les déplacements des systèmes  $s$  forment un groupe, lequel ne peut être transitif qu'entre systèmes ayant un même nombre de termes.

**30.** Pour  $n = 4$ , on écrira  $S$  simplement pour  $S_4$ , et l'on ne pourra faire que les diverses hypothèses suivantes :

Deux systèmes :

Hypothèse  $\{2, 2\}$  : deux systèmes de deux lettres;

Hypothèse  $\{3, 1\}$  : trois lettres et une lettre.

Trois systèmes :

Hypothèse  $\{1, 1, 2\}$  : une lettre, une lettre, deux lettres.

Quatre systèmes :

Hypothèse  $\{1, 1, 1, 1\}$  : une lettre par système.

Je vais montrer que les cas  $\{3, 1\}$  et  $\{1, 1, 2\}$  rentrent dans le cas  $\{2, 2\}$ .

Je désignerai par la caractéristique  $z$ , conformément au n° 14, les variables convenablement choisies sur lesquelles peuvent s'effectuer les diverses répartitions ci-dessus indiquées. On a

$$z_i = \sum c_{ij} x_j, \quad c_{ij} = \text{const.};$$

or il n'est nullement évident que le tétraèdre des quatre plans  $z_i = 0$  soit normal, comme est normal le tétraèdre des quatre plans  $x_i = 0$ .

**31.** Prenons le cas  $\{3, 1\}$  et écrivons, par exemple, pour la régulière  $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} z_1 & a'_{11}z_1 + a'_{12}z_2 + a'_{13}z_3 \\ z_2 & a'_{21}z_1 + a'_{22}z_2 + a'_{23}z_3 \\ z_3 & a'_{31}z_1 + a'_{32}z_2 + a'_{33}z_3 \\ z_1 & a'_{41}z_1 \end{vmatrix}.$$

$\mathfrak{A}$  laisse fixes :

le plan  $P$ ,  $z_1 = 0$ , et aussi (par régularité) le centre  $p$  de  $P$ ;

le point  $q$ ,  $z_1 = z_2 = z_3 = 0$  (non situé sur  $P$ ), et aussi (par régularité) le plan central  $Q$  de  $q$ .

Les droites  $d_{12}$ , qui joint  $p$  à  $q$ , et  $d_{31}$ , qui est l'intersection de  $P$  avec  $Q$ , sont conjuguées sans être capitales.

$\mathfrak{A}$  laisse fixes les deux conjuguées  $d_{12}$  et  $d_{31}$ , que l'on peut amener régulièrement sur  $g_{12}$  et  $g_{31}$  (n° 25). Alors  $\mathfrak{A}$ , laissant fixes  $g_{12}$  et  $g_{31}$ , devient, rétablissant la caractéristique  $x$ ,

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ x_3 & a_{33}x_3 + a_{31}x_1 \\ x_1 & a_{43}x_3 + a_{41}x_1 \end{vmatrix}.$$

On retombe sur le cas  $\{2, 2\}$ .

**32.** Prenons le cas  $\{1, 1, 2\}$ . Supposons les trois systèmes comprenant respectivement  $z_3$ ,  $z_1$  et, enfin,  $z_1$  et  $z_2$ .

Il viendra pour une régulière

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \\ z_3 & a_{33}z_3 \\ z_1 & a_{41}z_1 \end{vmatrix},$$



ou bien

$$\begin{vmatrix} \bar{z}_1 & a_{11}\bar{z}_1 + a_{12}\bar{z}_2 \\ \bar{z}_2 & a_{21}\bar{z}_1 + a_{22}\bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 & a_{31}\bar{z}_1 \\ \bar{z}_4 & a_{41}\bar{z}_1 \end{vmatrix},$$

et l'on retombe encore sur le cas  $\{2, 2\}$ .

**33.** Les seules hypothèses à examiner pour les groupes décomposables sont donc

$$\{2, 2\} \quad \text{et} \quad \{1, 1, 1, 1\}.$$

Pour le cas  $\{2, 2\}$ , nous aurons les deux systèmes :

$s_1$  formé par les deux lettres  $\bar{z}_1$  et  $\bar{z}_2$ ,

$s_2$  " " "  $\bar{z}_3$  et  $\bar{z}_4$ .

Le groupe régulier  $G$  contiendra un sous-groupe  $\mathfrak{A}$  formé par les  $\omega$  régulières

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & a_{11}\bar{z}_1 + a_{12}\bar{z}_2 \\ \bar{z}_2 & a_{21}\bar{z}_1 + a_{22}\bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 & a_{31}\bar{z}_1 + a_{32}\bar{z}_2 \\ \bar{z}_4 & a_{41}\bar{z}_1 + a_{42}\bar{z}_2 \end{vmatrix},$$

qui laissent  $s_1$  et  $s_2$  immobiles.  $G$  s'obtiendra en combinant  $\mathfrak{A}$  avec une régulière unique

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & b_{13}\bar{z}_3 + b_{14}\bar{z}_4 \\ \bar{z}_2 & b_{23}\bar{z}_3 + b_{24}\bar{z}_4 \\ \bar{z}_3 & b_{31}\bar{z}_1 + b_{32}\bar{z}_2 \\ \bar{z}_4 & b_{41}\bar{z}_1 + b_{42}\bar{z}_2 \end{vmatrix},$$

qui échange  $s_1$  et  $s_2$ .  $\mathfrak{A}$  est permutable à  $\mathfrak{B}$ .

**34.** Pareillement, dans le cas  $\{1, 1, 1, 1\}$ , il y aura quatre systèmes

formés chacun d'une lettre  $z_1, z_2, z_3$  ou  $z_4$ . Toutes les régulières de  $G$  ramènent sur lui-même le tétraèdre  $Z$  des quatre plans  $z_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

$G$  contiendra un sous-groupe  $\mathfrak{A}$  formé par  $\omega$  régulières canoniques

$$\mathfrak{a}_i = |z_i \quad a_i z_i|.$$

$\mathfrak{a}_i$  sera permutable à des régulières

$$\mathfrak{b}_i = |z_i \quad b_i z_j|.$$

$G$  contiendra  $m\omega$  régulières,  $m$  étant un diviseur de 24 et l'ordre du groupe

$$|i \quad j|$$

de déplacements entre les quatre lettres  $z_i$ .

## CHAPITRE V.

### GROUPES DÉCOMPOSABLES $\{2, 2\}$ .

**33.** Construisons le groupe  $G$  des régulières  $\mathfrak{G}$ , obtenu (n° 33) en combinant le sous-groupe  $\mathfrak{A}$  des  $\omega$  régulières  $\mathfrak{a}_i$ ,

$$\mathfrak{a}_i = \begin{vmatrix} z_1 & a'_{11} z_1 + a'_{12} z_2 \\ z_2 & a'_{21} z_1 + a'_{22} z_2 \\ z_3 & a'_{33} z_3 + a'_{34} z_4 \\ z_4 & a'_{43} z_3 + a'_{44} z_4 \end{vmatrix}$$

avec la régulière

$$\mathfrak{b}_i = \begin{vmatrix} z_1 & b'_{13} z_3 + b'_{14} z_4 \\ z_2 & b'_{23} z_3 + b'_{24} z_4 \\ z_3 & b'_{31} z_1 + b'_{32} z_2 \\ z_4 & b'_{41} z_1 + b'_{42} z_2 \end{vmatrix},$$

à laquelle  $\mathfrak{A}$  est permutable de façon que l'ordre de  $G$  soit  $2\omega$ .

Nommons  $d_{12}$  et  $d_{34}$  les droites  $z_1 = z_2 = 0$  et  $z_3 = z_4 = 0$  respectivement. On laisse  $d_{12}$  et  $d_{34}$  fixes; on les permute.

Les diverses formes de  $G$  en variables ordinaires  $x_i$ , rapportées à un tétraèdre normal  $\tau$ , dépendent de la situation que prennent  $d_{12}$  et  $d_{34}$ , par rapport au complexe capital. Plusieurs suppositions sont à faire.

**56.** Admettons d'abord que  $d_{12}$  et  $d_{34}$  soient conjuguées par rapport au complexe capital;  $d_{12}$  et  $d_{34}$  s'amènent alors régulièrement sur  $g_{12}$  et  $g_{34}$ , et il vient immédiatement

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec, par régularité,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} = 1.$$

Désignons par  $p, q, r, s$  les binaires

$$p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \text{de déterminant } 1,$$

$$r = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}, \quad \text{de déterminant } -1.$$

On pourra, sans ambiguïté, désigner  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  par les notations

$$\mathfrak{A} = [p, q], \quad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{A}' = [p', q'], \quad \dots$$

Un calcul simple montre que

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A} = [p'p, q'q], \quad \mathfrak{B}^2 = [rs, sr], \quad \mathfrak{B}^{-1} = \begin{bmatrix} s^{-1} \\ r^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} s^{-1}q \\ r^{-1}p \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = [s^{-1}qs, r^{-1}pr],$$

Désignons par  $P$  et  $Q$  les groupes des  $p$  et  $q$ . On voit que  $P$  et  $Q$  sont d'ordre fini;  $P$  contient  $rs$  et  $Q$  contient  $sr$ ;  $s$  transforme  $Q$  en  $P$ ,  $s^{-1}Qs = P$ , et  $r$  transforme  $P$  en  $Q$ ,  $r^{-1}Pr = Q$ .

$G$  est ainsi construit, puisque les groupes binaires d'ordre fini sont connus.

**37.** Admettons maintenant que  $d_{12}$  et  $d_{31}$  soient capitales toutes deux. Comme elles ne se rencontrent pas, elles peuvent s'amener régulièrement sur  $g_{13}$  et  $g_{24}$  (n° 27; le raisonnement du n° 27 s'applique à  $g_{13}$  et  $g_{24}$ , aussi bien qu'à  $g_{23}$  et  $g_{14}$ ), et l'on a immédiatement (eu égard au n° 35)

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 + a_{13}x_3 \\ x_2 & a_{22}x_2 + a_{24}x_4 \\ x_3 & a_{31}x_1 + a_{33}x_3 \\ x_4 & a_{42}x_2 + a_{44}x_4 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} x_1 & b_{12}x_2 + b_{14}x_4 \\ x_2 & b_{21}x_1 + b_{23}x_3 \\ x_3 & b_{32}x_2 + b_{34}x_4 \\ x_4 & b_{41}x_1 + b_{43}x_3 \end{vmatrix}.$$

Nommons  $p, q, r, s$  les binaires, à déterminant non nul,

$$p = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{34} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} b_{32} & b_{34} \\ b_{12} & b_{14} \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} b_{23} & b_{21} \\ b_{43} & b_{41} \end{pmatrix}.$$

On désignera sans ambiguïté  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  par les notations

$$\mathfrak{A} = [p, q], \quad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}.$$

Nommons  $P$  et  $Q$  les groupes des  $p$  et des  $q$ . Par des formules identiques à celles du n° 36, on verra que  $P$  et  $Q$  sont d'ordre fini;  $rs$  est contenue dans  $P$  et  $sr$  dans  $Q$ ;  $s$  transforme  $Q$  en  $P$  et  $P$  est transformé par  $r$  en  $Q$ .

Seulement la régularité entraîne entre  $p$  et  $q$ ,  $r$  et  $s$  des sujétions beaucoup plus étroites qu'il importe maintenant d'introduire.

**38.** Au Chapitre IX de mon Mémoire : *Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre*, inséré aux 63<sup>e</sup> et 64<sup>e</sup> Cahiers (première série) du *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai fait une étude complète des relations mutuelles que la quadrique (vraie quadrique ou cône du second degré) possède avec le complexe capital. J'ai examiné notamment (*loc. cit.*, n° 101) la quadrique qui admet  $\infty$  génératrices rectilignes capitales. Une pareille quadrique contient alors deux capitales (*nodales* du n° 101 précité) qui ne se rencontrent pas, mais qui sont rencontrées par toutes les génératrices capitales.

Ces nodales, qu'on peut toujours amener régulièrement sur  $g_{13}$  et  $g_{21}$ , suffisent pour déterminer complètement la quadrique correspondante T.

Prenons, en effet, un point courant  $x$  sur T. Si  $t$  est le point courant sur la génératrice capitale D issue de  $x$ , on aura

$$0 = x_3 t_1 - x_1 t_3 = x_4 t_2 - x_2 t_4.$$

Les coordonnées homogènes de D sont les mineurs de la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_3 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & -x_2 \end{array} \right\|.$$

Exprimant que D est capitale, on a l'équation

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

de T.

**39.** Reprenons le groupe G du n° 57 et introduisons la quadrique T qui admet pour *nodales* les droites  $g_{13}$  (ou  $d_{12}$ ) et  $g_{21}$  (ou  $d_{34}$ ). L'équation de T sera

$$0 = x_1 x_2 - x_3 x_4$$

ou

$$(1) \quad \lambda = \frac{x_3}{x_1} = \frac{x_2}{x_4} = \mu.$$

Il est évident, en vertu de ce qui précède (n° 38), que la quadrique  $T$  est invariante vis-à-vis de toutes les régulières  $\mathfrak{x}$  de  $G$ , puisque  $\mathfrak{x}$  laisse fixes les deux nodales, que  $\mathfrak{y}$  permute simplement.

Les binaires  $p, q, r, s$  ayant la même signification qu'au n° 37, désignons par  $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}$  les substitutions linéaires fractionnaires à une seule variable  $t$ ,

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \left| t \quad \frac{a_{33}t + a_{31}}{a_{13}t + a_{11}} \right|, & \bar{q} &= \left| t \quad \frac{a_{22}t + a_{21}}{a_{12}t + a_{11}} \right|, \\ \bar{r} &= \left| t \quad \frac{b_{32}t + b_{31}}{b_{12}t + b_{11}} \right|, & \bar{s} &= \left| t \quad \frac{b_{22}t + b_{21}}{b_{12}t + b_{11}} \right|. \end{aligned}$$

Opérons sur la quadrique  $T$  par les régulières  $\mathfrak{x}$  et  $\mathfrak{y}$ . La relation ci-dessus

$$(1) \quad \lambda = \mu$$

devient

$$(2) \quad \bar{p}[\lambda] = \bar{q}[\mu] \quad \text{ou} \quad \mu = (\bar{q})^{-1} \bar{p}[\lambda],$$

$$(3) \quad \bar{r}[\mu] = \bar{s}[\lambda] \quad \text{ou} \quad \mu = (\bar{r})^{-1} \bar{s}[\lambda].$$

Comme  $T$  est invariante par  $\mathfrak{x}$  et  $\mathfrak{y}$ , (2) et (3) sont des conséquences de (1), quel que soit  $\lambda$ . On conclut immédiatement de là que

$$\bar{p} = \bar{q} \quad \text{et} \quad \bar{r} = \bar{s},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a_{22}}{a_{33}} = \frac{a_{21}}{a_{31}} = \frac{a_{12}}{a_{13}} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = \rho,$$

$$\frac{b_{23}}{b_{32}} = \frac{b_{21}}{b_{31}} = \frac{b_{12}}{b_{12}} = \frac{b_{11}}{b_{11}} = \sigma.$$

40. On voit immédiatement que

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & \rho a_{22} & 0 & \rho a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & \rho a_{12} & 0 & \rho a_{14} \end{array} \right\} = \mathfrak{a},$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ \sigma b_{31} & 0 & \sigma b_{32} & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 & b_{34} \\ \sigma b_{11} & 0 & \sigma b_{12} & 0 \end{array} \right\} = \mathfrak{b}.$$

On vérifie de suite que les conditions de régularité sont satisfaites dès qu'on a posé

$$1 = (12) - (3'1) = \rho\varpi = \sigma\gamma,$$

$\varpi = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$  = le déterminant de la binaire  $p$ ,

$\gamma = b_{32}b_{14} - b_{12}b_{34}$  = le déterminant de la binaire  $r$ .

41. Combinant l'analyse précédente avec le n° 37, on peut énoncer les résultats suivants :

La binaire  $p$  est d'ordre fini; son déterminant  $\varpi$  est racine de l'unité; il en est de même pour  $\rho = \varpi^{-1}$ . Comme

$$\mathfrak{b} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{b}^2 = [rs, sr],$$

le déterminant  $\sigma^2\gamma^2$  de  $sr$ , ou de  $rs$ , doit être racine de l'unité; cela est, car  $\sigma\gamma = 1$  (n° 40).

Ainsi, ces conditions suffisent pour que l'ordre de  $G$  soit fini.

42. Admettons qu'une au moins des deux droites non concourantes  $d_{12}$  et  $d_{34}$ , par exemple  $d_{12}$ , ne soit pas capitale. On amènera

alors régulièrement  $d_{12}$  sur  $g_{12}$ . La régulière  $\varrho$  de  $G$ , qui laisse  $d_{12}$  fixe, laissera fixe aussi la conjuguée  $g_{31}$  de  $g_{12}$  (ou de  $d_{12}$ ) et il viendra, comme au n° 36,

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{31} \\ 0 & 0 & a_{13} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Si  $d_{31}$  est capitale, aucune régulière  $\varrho$  de  $G$  ne peut amener  $d_{31}$  sur  $d_{12}(=g_{12})$ . La régulière  $\mathfrak{w}$  manque et  $G$  se réduit au groupe  $\mathfrak{A}$  des  $\lambda$ . On est ramené au cas du n° 36, sauf l'absence de  $\mathfrak{w}$ .

Je supposerai donc  $d_{31}$ , *non capitale* et, pour n'être pas ramené au cas du n° 36, distincte de la conjuguée  $g_{21}$  de  $d_{12}(=g_{12})$ .

**43.** Considérons les capitales qui rencontrent à la fois  $d_{12}$  et  $d_{31}$ ; elles rencontrent aussi la conjuguée  $d'_{12}$  de  $d_{12}$ . Les trois directrices  $d_{12}$ ,  $d_{31}$ ,  $d'_{12}$  définissent une quadrique  $T$  à  $\infty$  génératrices capitales.  $T$  est invariante par toute régulière de  $G$ . Si  $T$  n'est pas un couple de plans, tous les raisonnements du n° 38 (empruntés à mon *Mémoire du Journal de l'École Polytechnique*) subsistent.  $T$  comporte deux *nodales* rectilignes, *capitales* et *non concourantes*.

Toute régulière de  $G$  laisse fixe le couple formé par les deux *nodales*. On est ramené au cas du n° 37 et l'on ne trouve aucun groupe nouveau.

**44.** Examinons maintenant le cas réservé où  $T$  est un couple de deux plans  $L$  et  $M$ , de centres  $l$  et  $m$ . Sur les deux plans doivent être situées les quatre droites  $d_{12}$ ,  $d_{31}$  et leurs conjuguées  $d'_{12}$  et  $d'_{31}$ .  $d_{12}$  et  $d'_{31}$  ne se rencontrent pas; il en est de même pour  $d_{12}$  et  $d'_{12}$ ,  $d_{31}$  et  $d'_{31}$ . En effet, la régulière  $\mathfrak{w}$  ne manque pas dans  $G$  (n° 42),  $d_{12}$  et  $d_{31}$  ne sont capitales ni l'une ni l'autre.

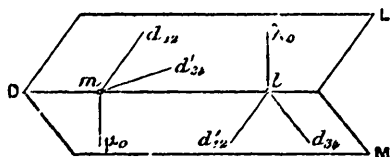
Donc le plan  $L$  contient  $d_{12}$  et  $d'_{31}$ ; le plan  $M$  contient  $d_{31}$  et  $d'_{12}$ . Les  $\infty$  génératrices capitales de  $T$  sont les  $\infty$  capitales  $\lambda$  de  $L$  qui rayonnent autour du centre  $l$  de  $L$ , et aussi (la régulière  $\mathfrak{w}$  permu-



tant L et M qui doivent jouer un rôle analogue) les  $\infty$  capitales  $\mu$  de M, qui rayonnent autour de  $m$ .

L'arête D du dièdre LM est capitale, car elle reste fixe pour toute régulière de G. Or, si D n'était pas capitale, le groupe G aurait deux droites conjuguées invariantes, savoir D et sa conjuguée D'. On serait ramené au groupe du n° 36.

La génératrice  $\lambda$  de T doit rencontrer  $d_{31}$  et  $d'_{12}$ ; D joint les deux centres  $l$  et  $m$ ; donc  $d_{31}$  et  $d'_{12}$  concourent avec  $\lambda$  au point  $l$  de D. Paraillement,  $d_{12}$  et  $d'_{31}$  passent par le centre  $m$  de M. On a la figure suivante :



43. Prenons les coordonnées régulières  $x_i$  comme suit :

$$\begin{array}{ll} \text{L,} & x_1 = 0; \\ l, & x_1 = x_3 = x_4 = 0; \\ d_{12}, & x_1 = x_2 = 0; \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{M,} & x_3 = 0, \\ m, & x_1 = x_2 = x_3 = 0, \\ d'_{12}, & x_3 = x_4 = 0. \end{array}$$

La régulière  $\mathfrak{A}$  de G laisse fixes L, M,  $l$ ,  $m$ ,  $d_{12}$  et  $d'_{12}$ ; il vient

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

avec

$$1 = a_{11} a_{22} = a_{33} a_{44},$$

par régularité.

Dans le plan L, les droites issues du point  $m$  sont transformées par  $\mathfrak{A}$  suivant la binaire canonique

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & a_{22}x_2 & a_{33}x_3 \end{vmatrix}.$$

Cette binaire laisse fixes les *trois* droites distinctes  $d_{12}$ ,  $d'_{34}$  et  $D$  issues de  $m$ ; la binaire est donc singulière et  $a_{22} = a_{23}$ ; d'où aussi  $a_{11} = a_{14}$ .

Enfin,  $\lambda$  transforme les capitales  $\lambda$  de  $L$  suivant la binaire

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x_2 & a_{23}x_3 \\ x_4 & a_{12}x_2 + a_{14}x_4 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{23} & 0 \\ a_{12} & a_{14} \end{pmatrix}$$

et les capitales  $\mu$  de  $M$  suivant la binaire

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x_1 & a_{11}x_1 \\ x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Je dis que le groupe  $\mathcal{L}$  des binaires (1), qui est évidemment d'ordre fini, laisse fixe une capitale  $\lambda_0$ . De même, le groupe  $M$  des binaires (2) laisse fixe une capitale  $\mu_0$ .

Nous allons donc étudier les groupes binaires d'ordre fini

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_{23} & 0 \\ a_{12} & a_{14} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix},$$

ou encore les groupes linéaires fractionnaires à une variable  $t$  des substitutions

$$s = |t \quad at + b|.$$

Tout sera démontré si j'établis que la racine  $t_0$  de l'équation

$$at + b = t, \quad b(1 - a)^{-1} = t_0$$

est la même pour toutes les  $s$  du groupe.

46.  $s$  sera désignée sans ambiguïté par la notation

$$s = (a, b) \quad \text{ou} \quad [a, b].$$

Un calcul simple montre que, pour un entier  $l$  quelconque,

$$s^l = (a, b)^l = \left[ a^l, \frac{b(a^l - 1)}{a - 1} \right] \quad \text{pour} \quad a \neq 1,$$

$$s^l = (1, b)^l = (1, lb).$$

Mais  $s$  est d'ordre fini;  $b = 0$  dès que  $a = 1$  et alors  $s = 1$ ; bref

$$(1, \dots) = 1.$$

Soient maintenant deux substitutions quelconques du groupe

$$s = (a, b), \quad s' = (a', b').$$

Il viendra

$$s's = (aa', a'b + b'), \quad ss' = (aa', ab' + b),$$

$$(s's)^{-1}ss' = (1, \dots) = 1, \quad ss' = s's,$$

$$ab' + b = a'b + b',$$

$$\frac{b'}{a'-1} = \frac{b}{a-1}.$$

C. Q. F. D.

**47.** Toute régulière  $\mathfrak{A}$  laisse fixe chacune des deux capitales non concourantes  $\lambda_0$  et  $\mu_0$  dont on vient de prouver l'existence.

La régulière  $\mathfrak{B}$  est permutable au groupe  $\mathfrak{A}$  des  $\mathfrak{A}$ .  $\mathfrak{B}$  permute, par conséquent,  $\lambda_0$  et  $\mu_0$ .

G admet pour invariant le couple  $\lambda_0$  et  $\mu_0$ .  $\lambda_0$  et  $\mu_0$  se comportent comme les deux nodales au n° 45. Les conclusions du n° 45 subsistent même quand la quadrique T dégénère en un couple de plans. Nous n'obtenons aucun groupe nouveau.

J'ai ainsi fini avec l'hypothèse  $\{2, 2\}$ , car j'ai examiné toutes les situations possibles, par rapport au complexe capital, des droites  $d_{12}$  et  $d_{34}$ , savoir :

$d_{12}$  et  $d_{34}$  conjuguées (n° 56);

$d_{12}$  et  $d_{34}$  toutes deux capitales (nos 57 à 41);

Une droite capitale, l'autre non (n° 42);

Aucune ni capitale, ni conjuguée de l'autre (nos 42 à 47).

On remarquera que G possède toujours une quadrique invariante. sauf dans le cas où  $d_{12}$  et  $d_{34}$  sont conjuguées.

# CHAPITRE VI.

GROUPES DÉCOMPOSABLES  $\{1, 1, 1, 1\}$ .

**48.** Avant de construire les groupes réguliers d'ordre fini  $G$  qui sont fournis par l'hypothèse  $\{1, 1, 1, 1\}$  du Chapitre IV (nos 33 et 34), il importe de donner quelques explications sur les régulières canoniques.

Soit  $s$  une  $n$  — aire d'ordre fini ; elle aura pour forme canonique

$$s_0 = |z_j \quad k_j z_j| \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

les  $k$  étant des racines de l'unité. Si une seconde  $n$  — aire  $t$  est telle que

$$t^{-1} s t = s_0,$$

je dirai que  $t$  est une canonisante de  $s$ .

**49. THÉORÈME.** — *Toute régulière d'ordre fini  $s$  peut être régulièrement mise sous forme canonique, c'est-à-dire admet au moins une canonisante régulière.*

$s$ , mise régulièrement ou non sous forme canonique, est

$$s = |z_j \quad k_j z_j| \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

$s$  laisse fixes les quatre faces  $z_j = 0$  du tétraèdre  $Z$ , normal (n° 13) ou non, et aussi les six arêtes de  $Z$ . Parmi les trois arêtes issues d'un sommet de  $Z$ , une au moins n'est pas capitale, puisque ces trois arêtes ne sont point dans un même plan.  $Z$  a une arête au moins (par exemple  $z_1 = z_2 = 0$ , qu'on peut régulièrement amener sur l'arête  $x_1 = x_2 = 0$  où  $g_{12}$  du tétraèdre normal de référence) non capitale. Ainsi  $s$  laisse fixes  $g_{12}$  et sa conjuguée  $g_{34}$ , et l'on a, en variables régulières  $x_j$ ,

$$s = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \quad (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = b_{33} b_{44} - b_{34} b_{43} = 1).$$

Soient

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{43} & \beta_{44} \end{pmatrix}$$

les canonisantes, de déterminant un, pour les binaires

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

respectivement. Ces binaires sont d'ordre fini et admettent sûrement des canonisantes.

La quaternaïre

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & \beta_{43} & \beta_{44} \end{pmatrix}$$

sera tout à la fois régulière et canonisante pour  $s$ . C. Q. F. D.

**30.** Soit donc la régulière canonique

$$\mathfrak{L} = |x_j \quad a_j x_j| \quad (j = 1, 2, 3, 4);$$

la régularité exige encore

$$1 = a_1 a_2 = a_3 a_4,$$

et cela suffit. On écrira donc sans ambiguïté

$$\mathfrak{L} = [a_1, a_1^{-1}, a_3, a_3^{-1}];$$

$a_1$  et  $a_3$  sont des racines de l'unité.

Si le déterminant d'une quaternaïre est égal à un, les quatre *coefficients*  $a$  sont évidemment les racines de l'équation caractéristique  $\omega$ .

**31.** Examinons un cas très particulier, utile pour la suite (n° 37). C'est celui où les quatre racines de  $\omega$  sont  $1, 1, \theta, \theta^2$ , avec  $\theta$  = racine cubique de l'unité.

Soient  $u_1$  et  $u_2$  les deux expressions  $u_j \left( u_j = \sum_k b_{jk} x_k \right)$ , déterminant

des constantes  $b_{jk}$  non nul) que la régulière  $\mathcal{L}$  multiplie par un et soient  $u_3$  et  $u_4$  les deux  $u$  que  $\mathcal{L}$  multiplie par  $\theta^2$  et  $\theta$ . On vérifie de suite que tout tétraèdre  $U$  dont  $\mathcal{L}$  laisse fixes les quatre faces est construit comme suit : les quatre faces de  $U$  sont  $u_3 = 0$ ,  $u_4 = 0$  et deux plans quelconques passant par la droite  $u_1 = u_2 = 0$ .

Prenons maintenant  $\mathcal{L}$  sous sa forme régulière canonique, en variables  $x_j$ ,

$$\mathcal{L} = [\theta^p, \theta^{-p}, \theta^\sigma, \theta^{-\sigma}].$$

Parmi les quatre coefficients deux sont égaux à l'unité; on ne peut avoir  $\sigma \equiv \rho \pmod{3}$ , car alors

$$\mathcal{L} = [\theta^p, \theta^{-p}, \theta^p, \theta^{-p}]$$

il n'y aurait plus que deux coefficients distincts. De même on ne peut faire  $\sigma + \rho \equiv 0 \pmod{3}$ . Donc  $\theta^p = \theta^{-p}$ ,  $2\rho \equiv 0$ ,  $\rho \equiv 0$  et

$$\mathcal{L} = [1, 1, \theta, \theta^2] = |x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_1 \quad x_2 \quad \theta x_3 \quad \theta^2 x_4|.$$

Les seuls plans que  $\mathcal{L}$  laisse fixes sont  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$  et un plan *quelconque* passant par  $x_1 = x_2 = 0$ .

Il est donc légitime de poser

$$u_1 = 3x_1, \quad u_2 = x_2, \quad u_3 = 3\tau x_3, \quad u_4 = 3\tau x_4,$$

puisque les  $u$  ne sont déterminés qu'à un facteur numérique près chacun.

Ce résultat est essentiel pour la suite (n° 57).

**52.** On est maintenant à même d'aborder la construction du groupe  $G$  défini au n° 54.  $G$  contiendra les  $\omega$  régulières

$$\mathcal{A} = |z_j \quad a_j z_j|$$

d'un sous-groupe  $\mathfrak{A}$  et ensuite diverses régulières

$$\mathfrak{B} = |z_j \quad b_j z_k|.$$

Il y aura, dans  $G$ ,  $m\omega$  régulières,  $m$  étant un diviseur de 24.

G est isomorphe au groupe G' des déplacements entre les quatre sommets, numérotés 1, 2, 3 et 4, du tétraèdre Z, des quatre plans  $z_j=0$ . A la substitution unité de G' correspond dans G le sous-groupe  $\mathfrak{A}$ .

53. J'écarterai, bien entendu, tous les groupes fournis par l'hypothèse  $\{2, 2\}$  et déjà construits, notamment les groupes *qui laissent fixe un couple de deux droites non concourantes*  $u_1 = u_2 = 0$  et  $u_3 = u_4 = 0$ ,  $u_j = \sum_k c_{jk} z_k$ . Raisonnant sur les  $u$  comme aux n<sup>os</sup> 52 et 53 sur les  $z$ , on voit de suite qu'on retombe sur l'hypothèse  $\{2, 2\}$ .

54. Reprenons le tétraèdre Z des quatre sommets 1, 2, 3, 4 et des six arêtes 12, 34, ... Répartissons les arêtes opposées deux à deux en trois couples

$$A = \{23, 14\}, \quad B = \{31, 24\}, \quad C = \{12, 34\}.$$

Les groupes G et G' sont isomorphes aux groupes G'' des déplacements entre A, B, C; G'' est transitif; sinon le couple C, par exemple, resterait fixe pour toutes les substitutions de G. Cela est absurde (n<sup>o</sup> 53).

G'' contient la substitution (ABC) et il y a dans G au moins une régulière  $\mathfrak{L}$  qui permute circulairement les trois couples. Les trois couples ont donc vis-à-vis du complexe capital une structure analogue. Nommons  $\mathfrak{L}' = (4)(123)$  une des substitutions du groupe G', entre les quatre sommets 1, 2, 3 et 4, qui correspondent à la régulière  $\mathfrak{L}$  de G.

*Les deux arêtes d'un même couple ne sont pas conjuguées par rapport au complexe capital.* Si, en effet, 12 et 34 sont conjuguées, Z devient un tétraèdre normal, les quatre arêtes 13, 24, 23, 14 deviennent capitales et ne sont plus conjuguées ensemble. Cela est absurde, car la régulière  $\mathfrak{L}$  permute les trois couples.

*Aucune arête de Z n'est capitale.* Si 12, par exemple, était capitale, il en serait de même pour 23 et 31 que  $\mathfrak{L}$  amène successivement sur 12. Les trois arêtes 12, 23, 31 capitales et situées dans un même plan, celui des trois sommets 1, 2, 3, seraient concourantes, ce qui est absurde.

**55. THÉORÈME.** — *Le sous-groupe  $\mathfrak{A}$  du n° 52 se réduit aux deux régulières singulières.*

Prenons, dans  $G$ , la régulière  $\mathfrak{a}$  de  $\mathfrak{A}$ .  $\mathfrak{a}$  laisse les quatre sommets fixes et a pour correspondante, dans  $G'$ , la substitution unité.

Amenons régulièrement, sur  $x_4 = 0$ , le plan des trois sommets  $\overline{123}$ ; en  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , le quatrième sommet 4 de  $Z$ . On verra facilement, par les théories géométriques du Chapitre III, que cela est toujours possible.

$\mathfrak{a}$ , laissant fixes  $\overline{123}$  et 4 s'écrira

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \quad [\text{en variables } x].$$

Le centre 4' du plan  $\overline{123}$  n'est sur aucune des arêtes 12, 23, 31, sans quoi l'arête serait capitale. La substitution *ternaire*

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

laisserait donc fixes, sur le plan  $\overline{123}$ , les quatre sommets d'un quadrilatère 1234';  $\alpha$  serait une ternaire *singulière* et il viendrait

$$\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & ax_1 & ax_2 & ax_3 & a'x_4 \end{vmatrix};$$

par régularité,

$$a^2 = aa' = 1, \quad a = a';$$

$\mathfrak{a}$  est singulière.

C. Q. F. D.

**56.** Le groupe général  $\Gamma$  entre quatre lettres peut être considéré comme provenant des substitutions

$$\delta' = (4)(123), \quad \alpha' = (12)(34), \quad \varepsilon' = (1)(4)(23).$$



Si  $\varepsilon'$  manque, on retombe sur le groupe alterné.

On a vu (n° 34) que  $\delta'$  ne peut manquer dans le groupe  $G'$ . Soit

$$\delta = | z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad az_2 \quad bz_3 \quad cz_1 \quad dz_4 |$$

une correspondante à  $\delta'$  dans  $G$ .

Le déterminant de  $\delta$  est  $un$  et il vient

$$abcd = 1.$$

$\delta^3$  est singulière (n° 33) et

$$abc = d^3 \quad \text{d'où} \quad d^4 = 1.$$

Transformons  $\delta$  par la substitution

$$\Lambda = | z_j \quad \lambda_j z_j |,$$

il viendra

$$\begin{vmatrix} z_1 & \lambda_1^{-1} a \lambda_2 z_2 \\ z_2 & \lambda_2^{-1} b \lambda_3 z_3 \\ z_3 & \lambda_3^{-1} c \lambda_1 z_1 \\ z_4 & \lambda_4^{-1} d \lambda_4 z_4 \end{vmatrix}$$

et l'on peut déterminer les  $\lambda$  de façon à avoir

$$d = a \lambda_2 \lambda_1^{-1} = b \lambda_3 \lambda_2^{-1} = c \lambda_1 \lambda_3^{-1}.$$

Bref, je prendrai

$$\hat{\delta} = \begin{vmatrix} z_1 & dz_2 \\ z_2 & dz_3 \\ z_3 & dz_1 \\ z_4 & dz_4 \end{vmatrix} \quad (d^4 = 1 \text{ ou } d = 1, \text{ à une substitution singulière près}).$$

57. L'équation caractéristique a pour racines  $1, 1, 0, 0^2, 0$  = racine cubique de l'unité.

$\vartheta$  multiplie

$$\text{par } 1 : \quad u_1 = z_1 + z_2 + z_3 \quad \text{et} \quad u_2 = z_4;$$

$$\text{par } \theta : \quad u_3 = z_1 + \theta^2 z_2 + \theta z_3;$$

$$\text{par } \theta^2 : \quad u_4 = z_1 + \theta z_2 + \theta^2 z_3.$$

Raisonnant comme au n° 31, on posera

$$(o) \quad \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 3x_1 \\ z_1 + \theta z_2 + \theta^2 z_3 = 3\tau x_3 \\ z_1 + \theta^2 z_2 + \theta z_3 = 3\tau x_4 \\ z_4 = x_2 \end{cases},$$

d'où

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + \tau x_3 + \tau x_4 \\ z_2 = x_1 + \tau \theta^2 x_3 + \tau \theta x_4 \\ z_3 = x_1 + \tau \theta x_3 + \tau \theta^2 x_4 \\ z_4 = x_2 \end{cases}, \quad \text{d'où} \quad z = \mathfrak{N}[x],$$

$\mathfrak{N}$  étant la quaternaire *irrégulière*

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau & \tau \\ 1 & 0 & \tau \theta^2 & \tau \theta \\ 1 & 0 & \tau \theta & \tau \theta^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{de déterminant} = 3\tau^2(\theta - \theta^2).$$

Nommons  $G_x$  et  $G_z$  les deux expressions du groupe  $G$  en variables  $x$  et en variables  $z$ . On a évidemment

$$G_x = \mathfrak{N}^{-1} G_z \mathfrak{N}.$$

En variables  $z$ , l'équation du complexe capital est  $\mathfrak{Q} = 0$ . Si je construis  $G_z$  de façon à avoir  $\mathfrak{Q}$  pour invariant absolu,  $G_x$  sera régulier et sera le groupe  $G$  cherché.

**58.** Nommons respectivement  $(jk)$  et  $(jk)'$  la coordonnée-points courante d'une droite, respectivement en coordonnées  $x$  et en coordonnées  $z$ . Posons, pour abrégé,

$$\begin{aligned} (23)' &= g_1, & (31)' &= g_2, & (12)' &= g_3, \\ (14)' &= h_1, & (24)' &= h_2, & (34)' &= h_3. \end{aligned}$$

Les déplacements d'indices marqués par les substitutions de  $G'$

$$\alpha' = (12)(34), \quad \delta' = (4)(123), \quad \varepsilon' = (1)(4)(23)$$

transforment les  $g$  et les  $h$  de la façon marquée par les symboles de substitutions

$$(o) \quad \begin{cases} \alpha'' = (g_1 h_1)(g_2, -h_2)(g_3, -g_3)(h_3, -h_3), \\ \delta'' = (g_1 g_2 g_3)(h_1 h_2 h_3) \\ \varepsilon'' = (g_1, -g_1)(g_2, -g_3)(h_1)(h_2 h_3). \end{cases}$$

Enfin, on vérifie sans peine que [sous le bénéfice des formules (o) du n° 57]

$$\begin{aligned} 3.(12) &= h_1 + h_2 + h_3, \\ 9\tau^2.(34) &= (0^2 - 0)(g_1 + g_2 + g_3), \\ 9\tau^2[(12) - (34)] &= 3\tau^2(h_1 + h_2 + h_3) + (0 - 0^2)(g_1 + g_2 + g_3). \end{aligned}$$

Déterminons le paramètre  $\tau$  par la condition  $3\tau^2 + 0^2 - 0 = 0$ ; on pourra prendre pour équation du complexe capital en variables  $z$ , simplement

$$\mathfrak{P} = g_1 + g_2 + g_3 + h_1 + h_2 + h_3 = 0.$$

$\mathfrak{P}$  est, bien entendu, pour la substitution  $\delta$  construite au n° 56, un invariant absolu, sous le bénéfice des formules (o) ci-dessus. Cela donnerait encore (n° 56, *in fine*),  $d^2 = 1$  et  $d = 1$ .

**59.** Prenons maintenant, dans le groupe  $G'$ , la substitution (n° 56)

$$\alpha' = (12)(34)$$

et, dans  $G$ , une correspondante

$$\alpha = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & az_2 & bz_1 & cz_4 & dz_3 \end{vmatrix}.$$

$\alpha$  change  $\mathfrak{Q}$ , sous le bénéfice des formules (o) du n° 58, en

$$bch_1 - cah_2 - abg_3 + adg_1 - bdg_2 - cdh_3.$$

$\mathfrak{Q}$  est invariant absolu et

$$1 = bc = -ac = -ab = ad = -bd = -cd,$$

c'est-à-dire  $a = d$ ,  $b = c = -d$ ,  $d^2 = 1$ , ou simplement

$$\alpha = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 \\ z_3 & -z_4 \\ z_4 & z_3 \end{vmatrix}.$$

On voit que le déterminant de  $\alpha$  est un et que  $\alpha^2$  est singulière, comme cela devait être.

60. Passons enfin aux substitutions  $\varepsilon' = (1)(4)(23)$  de  $G'$  et

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} z_1 & az_1 \\ z_2 & bz_3 \\ z_3 & cz_2 \\ z_4 & dz_4 \end{vmatrix} \text{ du groupe } G.$$

$\varepsilon$  transforme, en vertu des formules (o) du n° 58,  $\mathfrak{Q}$  en

$$-bcg_1 - cag_3 - abg_2 + h_1ad + h_2cd + h_3bd.$$

$\mathfrak{Q}$  est invariant absolu et

$$1 = -bc = -ca = -ab = ad = cd = bd.$$

De là, tout calcul fait,

$$a = b = c = i, \quad d = -i,$$

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} z_1 & iz_1 \\ z_2 & iz_3 \\ z_3 & iz_2 \\ z_4 & -iz_4 \end{vmatrix}, \quad i^2 + 1 = 0.$$

$\varepsilon$  a son déterminant égal à un;  $\varepsilon^2$  est singulière. C'était prévu.

**61.** En résumé, le seul groupe nouveau que nous ayons à ajouter à ceux du Chapitre précédent est celui qu'on obtient en transformant par l'*irrégulière*

$$\mathfrak{K} = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \tau & \tau \\ 1 & 0 & \tau\theta^2 & \tau\theta \\ 1 & 0 & \tau\theta & \tau\theta^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{de déterminant} \\ 3\tau^2(\theta - \theta^2) = (\theta - \theta^2)^2 = -3 \end{array} \right],$$

Le groupe *irrégulier* dérivé des trois quaternaires

$$\alpha = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & -z_1 \\ z_3 & -z_4 \\ z_4 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_4 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} z_1 & iz_1 \\ z_2 & iz_3 \\ z_3 & iz_2 \\ z_4 & -iz_4 \end{vmatrix}.$$

L'ordre est 48, puisqu'il y a deux régulières singulières.

