JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

EDMOND MAILLET

Sur de nouvelles analogies entre la théorie des groupes de substitutions et celle des groupes finis continus de transformations de Lie

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série, tome 7 (1901), p. 13-82.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__13_0>

Sur de nouvelles analogies entre la théorie des groupes de substitutions et celle des groupes finis continus de transformations de Lie;

PAR M. EDMOND MAILLET,

Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Introduction.

De nombreuses analogies ont déjà été constatées entre la théorie des groupes de substitutions et celle des groupes finis, continus, de transformations de Lie, soit au point de vue de la théorie pure, soit au point de vue des applications.

Dans beaucoup de cas, on est arrivé à pouvoir donner aux théorèmes un énoncé identique, ou qu'on pourrait rendre tel. Sans nous appesantir là-dessus, il nous suffira de renvoyer au *Traité des substitutions* de MM. Jordan et Netto, à la *Theorie der Transformationsgruppen* de Lie (t. I et III), et au *Traité d'Analyse* (t. III) de M. Picard. De pareilles analogies sont évidemment très importantes : elles facilitent l'étude et le perfectionnement simultanés des deux théories et peuvent faire penser qu'il y a d'autres points de ressemblance entre elles. Enfin, comme elles se présentent parfois également avec la théorie des groupes discontinus, elles font espérer (qu'on excuse cette hypothèse peut-être un peu prématurée et bien hardie) qu'on pourra établir un jour, à la base de ces diverses parties des Mathématiques, assez d'idées communes pour qu'un exposé général commun en soit possible (1).

(1) *Comparez* DRACH, *Thèse de Doctorat*. Gauthier-Villars, 1898.

C'est à ce point de vue que nous nous sommes placé dans la rédaction du Mémoire qui suit, composé de trois Notes, et c'est, croyons-nous, une des principales raisons qui peuvent le rendre intéressant (peut-être même important).

Dans une première Note, *Sur des suites remarquables de sous-groupes d'un groupe de substitutions*, nous établissons, en nous basant sur des propriétés des groupes échangeables et des sous-groupes facteurs d'un groupe, établies par nous antérieurement, et nous inspirant d'idées de M. Jordan (¹), des propriétés de suites de groupes qui sont une extension des suites de composition de Galois et de M. Jordan. Nous établissons en particulier que, dans l'étude de certains groupes, peuvent se présenter des suites de nombres remarquables qui présentent une propriété d'invariance. Ces propriétés s'étendent de suite aux groupes de transformations de Lie.

Dans une deuxième Note, *Sur la décomposition des groupes finis continus de transformations de Lie*, nous étudions les groupes de transformations échangeables. Nous établissons des critériums permettant de reconnaître si deux groupes sont échangeables. Nous montrons, ce que nous n'avons pu établir pour les groupes de substitutions, et ce qui ne serait peut-être pas vrai pour tous ces groupes, que les groupes de Lie à plus d'un paramètre sont toujours décomposables en un produit de deux sous-groupes. *C'est, croyons-nous, le résultat le plus important* (²).

Enfin, nous nous occupons des sous-groupes échangeables d'un groupe transitif en montrant le lien de ces recherches avec la Géométrie et la théorie des équations aux dérivées partielles.

Dans une troisième Note, nous revenons sur des définitions de Lie relatives à la transitivité des groupes en les précisant ou les complétant, de façon à pouvoir introduire de nouveaux énoncés semblables à ceux de la théorie des substitutions pour les groupes plusieurs fois transitifs, et nous nous occupons de la classe des groupes transitifs. Nous montrons, par exemple, que le groupe dérivé d'un groupe

(¹) *Traité des substitutions*, p. 34.

(²) Nous l'avons annoncé dans notre Note du *Bull. de la Soc. math.*, t. XXVIII; 1900.

régulier (*einfach transitiv*) simple et de son conjoint (*reciproke*) est primitif et de classe 1, et nous sommes conduit à des règles semblables à celles de la théorie des substitutions (¹) pour la détermination de ce que nous appelons provisoirement sa *classe géométrique c*, qui correspond à la classe des groupes de substitutions et peut remplacer la notion de classe C de Lie, car $c = \frac{r}{2}(C)$, tout en correspondant à une idée plus précise. C'est là encore, croyons-nous, un résultat très intéressant.

Nous montrons enfin que la notion de classe (ou ordre) d'une transformation a une interprétation géométrique dans la théorie du contact des courbes (²).

PREMIÈRE NOTE.

SUR DES SUITES REMARQUABLES DE SOUS-GROUPES D'UN GROUPE DE SUBSTITUTIONS.

I.

LEMME I. — *Soient* U *et* T *deux groupes échangeables aux groupes* $S, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$; U *étant maximum parmi les sous-groupes de* $T < T$ *et échangeables à ces groupes, et* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ *étant contenus dans* S; U_1 *le groupe commun à* S *et* T, V *le groupe commun à* S *et* U_1, *contenu dans* U_1; u, t, s, u_1, v, *les ordres respectifs de* U, T, S, U_1, V : $B = S \times U$ *est égal à* $\Lambda = S \times T$ *ou est un sous-groupe maximum de* Λ *suivant que* $v < u_1$, *d'où*

$$\frac{t}{u} = \frac{u_1}{v},$$

ou

$$v = u_1.$$

(¹) *Voir* notre Thèse de Doctorat, p. 31, et notre Mémoire du t. XXXII des *Mémoires des Savants étrangers à l'Académie des Sciences.*

(²) Nous n'oserions affirmer que ce résultat soit nouveau, bien que nous le croyions.

En effet, soient a et b les ordres de A et B,

$$a = \frac{st}{u_1}, \qquad b = \frac{su}{v}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{tv}{uu_1}.$$

1° Soit $A = B$: on a

$$\frac{t}{u_1} = \frac{u}{v}, \qquad v < u_1.$$

2° Soit $A > B$; B contient U et U_1, tous deux contenus dans T, mais ne contient pas T; (U, U_1), dérivé de U et de U_1, contient U, est contenu dans T, et est échangeable aux groupes S, Σ_1, Σ_2, ..., car, U, étant le groupe commun aux groupes échangeables S et T, est échangeable à S, Σ_1, Σ_2, ... puisque S contient Σ_1, Σ_2, ... auxquels T est échangeable (1). Donc $(U, U_1) < T$, par suite $(U, U_1) = U$; U_1 est contenu dans U et

$$U_1 = V, \qquad u_1 = v, \qquad \frac{a}{b} = \frac{t}{u}.$$

Admettons que B ne soit pas maximum dans A, et soit $B < C < A$, C contenant B et étant contenu dans A. Le groupe commun à C et T est W; W contient U qui est contenu dans B, C et T; W ne contient pas T, sans quoi l'on aurait $C = A$. Donc W contient U et est contenu dans T. De plus, il est échangeable à S, Σ_1, Σ_2, ..., car C et T sont échangeables (2), puisque $C \times T = A$; S, Σ_1, Σ_2, ... sont contenus dans C et échangeables à T, par suite au groupe commun W à C et T (3). Dès lors, d'après les hypothèses faites, $W = U$, et

$$C \times T = A, \qquad \frac{ct}{w} = \frac{ct}{u} = a = \frac{st}{u_1} = \frac{st}{v},$$

$$c = \frac{su}{v} = b,$$

contrairement à l'hypothèse. Donc B est maximum dans A.

---

(1) *Voir* notre Note du *Bull. de la Soc. math.*, t. XXVIII, p. 6, prop. 5, 1900, ou notre Mémoire, plus loin, p. 46, prop. 5.

(2) En effet, $(C, T) = A$, et toute substitution de A est le produit d'une substitution de T par une de S ou, *a fortiori*, de C.

(3) *Loc. cit.* (*Bull. de la Soc. math*, 1900).

LEMME II. — *Soient*

$$(1) \qquad E,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ \ldots,\ X,\ Y,\ 1,$$

une suite de groupes tels que chacun soit compris dans le précédent,

$$(1\ bis) \qquad S_1,\ \Sigma_1,\ \Sigma_2,\ \ldots$$

une suite de sous-groupes de E *dont chacun est contenu dans le précédent. Supposons, ce qui est toujours possible, la suite* (1) *déterminée de manière que chacun de ses groupes soit maximum dans le précédent parmi les sous-groupes de ce précédent échangeables à* $S_1, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$. *On peut déterminer au moins une suite*

$$(2) \qquad E,\ R_1,\ S_1,\ \ldots,\ X_1,\ Y_1,\ 1,$$

analogue à (1), *contenant* S_1, *dont chaque groupe est contenu dans le précédent, échangeable à* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, *échangeable à tous les groupes* (1), *et maximum parmi les sous-groupes du précédent échangeables à tous les groupes* (1) *et à* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$. *Par suite* (1) *jouit aussi, par rapport à* (2), *de cette dernière propriété.*

Si

$$(3) \qquad e,\ r,\ s,\ t,\ \ldots,\ x,\ y,\ 1.$$

$$(4) \qquad e,\ r_1,\ s_1,\ t_1,\ \ldots,\ x_1,\ y_1,\ 1$$

sont les ordres respectifs des groupes (1) *et* (2), *les nombres*

$$(5) \qquad \frac{e}{r},\ \frac{r}{s},\ \frac{s}{t},\ \ldots$$

sont les mêmes à l'ordre près que les nombres

$$(6) \qquad \frac{e}{r_1},\ \frac{r_1}{s_1},\ \frac{s_1}{t_1},\ \ldots$$

En effet, supposons que le dernier groupe de (1) qui contienne S_1 soit R, et que le premier que S_1 contienne soit V. Soient T, le groupe commun à S_1 et S, U_1 le groupe commun à S_1 et T, V_1 le groupe commun à S_1 et U. U_1 est contenu dans T, S, S_1 et, par suite, dans T_1; donc dans le groupe U'_1 commun à T et T_1; réciproquement, U'_1 est contenu dans T_1, S_1, T, par suite dans U_1, et $U'_1 = U_1 : U_1$ est le groupe commun à T et T_1. De même V_1 est contenu dans U, T, S_1, U_1 et toute substitution commune à U et U_1 est contenue dans U et S_1, c'est-à-dire dans V_1 : V_1 est donc le groupe commun à U et U_1. T_1, U_1, V_1 contiennent V qui est contenu à la fois dans S_1, S, T, U. Si $V_1 > V$, U contient V_1 qui est échangeable (1) aux groupes (1 *bis*) et $V_1 = U$, d'après les hypothèses faites, ce qui est impossible, puisque U n'est pas contenu dans S_1. Donc $V_1 = V$.

Ceci posé, S_1 est échangeable à S, T, U. D'après une propriété connue (2), S_1 et S étant échangeables, tout sous-groupe de l'un échangeable à l'autre est échangeable au groupe commun T_1 à S_1 et S; donc T et U, contenus dans S, sont échangeables à T_1; Σ_1, Σ_2, ..., contenus dans S_1, et échangeables à S, sont échangeables à T_1. De même, S_1 et T étant échangeables, et U'_1 étant leur groupe commun, U sous-groupe de T échangeable à S_1 est échangeable à U_1, et Σ_1, Σ_2, ..., sous-groupes de S_1 échangeables à T, sont échangeables à U_1. Les groupes

$$(7)\quad R = S \times S_1,\quad S_1 \times T,\quad S_1 \times U_1,\quad S_1 = S_1 \times V, T_1, U_1, V$$

sont dès lors tous échangeables à chacun des groupes (1) et à Σ_1, Σ_2, ... Leur nombre est 7 (en général $2\theta + 1$) : leurs ordres respectifs sont

$$(8)\qquad \frac{ss_1}{t_1} = r,\qquad \frac{ts_1}{u_1} = r_1,\qquad \frac{us_1}{v} = r_2, s_1, t_1, u_1, v.$$

---

(1) En effet, U et S_1 sont échangeables; U est échangeable à Σ_1, Σ_2, ... contenus dans S_1; donc (*Bull. Soc. Math.. loc. cit.*, prop. 5) V_1, groupe commun à U et S_1, est échangeable à Σ_1, Σ_2, ...

(2) *Bull. Soc. Math.. loc. cit.*

On a

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{r}{r_1} = \dfrac{ss_1}{t_1}\dfrac{u_1}{ts_1} = \dfrac{s}{t}\dfrac{u_1}{t_1}, \\ \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{ts_1}{u_1}\dfrac{v}{us_1} = \dfrac{t}{u}\dfrac{v}{u_1}, \\ \dfrac{r_2}{s_1} = \dfrac{u}{v}, \qquad \dfrac{s_1}{t_1} = \dfrac{r}{s}, \qquad \dfrac{t_1}{u_1}\dfrac{r}{r_1} = \dfrac{s}{t}, \qquad \dfrac{u_1}{v}\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{t}{u}. \end{cases}$$

Or T et T_1 étant échangeables à tous les groupes (1) et (1 *bis*) et contenus dans S, on a

$$T \times T_1 = S \text{ ou } T;$$

de même

$$U \times U_1 = T \text{ ou } U.$$

Si $T \times T_1 = T$, T_1 est commun à T et S, et $T_1 = U_1$; si $T \times T_1 = S$, $s = \dfrac{tt_1}{u_1}$ et $T_1 > U_1$. Si $U \times U_1 = U$, U_1 est commun à U et S, et $U_1 = V$; si $U \times U_1 = T$, $t = \dfrac{uu_1}{v}$ et $U_1 > V$. On a donc

1° Ou $\qquad t_1 = u_1, \qquad$ ou $\qquad s = \dfrac{tt_1}{u_1}$;

2° Ou $\qquad u_1 = v, \qquad$ ou $\qquad t = \dfrac{uu_1}{v}$:

une des quantités $\dfrac{s}{t}\dfrac{u_1}{t_1}, \dfrac{t_1}{u_1}$ est $= 1$; de même une des quantités $\dfrac{t}{u}\dfrac{v}{u_1}, \dfrac{u_1}{v}$ est $= 1$. Il en résulte que, parmi les six quotients (en général 2θ), $\dfrac{r}{r_1}, \dfrac{r_1}{r_2}, \ldots, \dfrac{u_1}{v}$ de chaque nombre (8) par le précédent, le premier ou le cinquième est égal à 1, le deuxième ou le sixième est égal à 1 [plus généralement le $i^{ième}$ ou le $(\theta + 1 + i)^{ième}$, avec $i = 1, 2, \ldots, \theta - 1$]. Les quotients $\neq 1$ sont précisément les nombres $\dfrac{r}{s}, \dfrac{s}{t}, \dfrac{t}{u}, \dfrac{u}{v}$ dans un certain ordre.

Considérant dès lors la suite

$$(10)\qquad E,\ R,\ S'_1,\ T'_1,\ U'_1,\ V,\ \ldots,\ X,\ Y,\ 1,$$

R, S'_1, T'_1, U'_1, V désignant ceux des groupes (7) qui sont distincts, elle jouira de toutes les propriétés que nous voulons établir pour la

suite (2) à condition que chacun de ses groupes soit maximum parmi les sous-groupes du précédent, échangeables à tous ceux de (1) et de (1 *bis*). Démontrons cette dernière propriété.

D'après le lemme I, R, $S_1 \times T$, $S_1 \times U$, $S_1 = S_1 \times V$ sont maxima parmi les sous-groupes du précédent, échangeables à $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, ou coïncident avec ce précédent. Nous allons établir que chacun des groupes S_1, T_1, U_1, V qui n'est pas égal au précédent est maximum parmi les sous-groupes du précédent qui sont échangeables à tous ceux des suites (1) et (1 *bis*).

S_1, T_1, U_1, V sont échangeables à tous les groupes (1) et (1 *bis*).

Soit par exemple $T_1 > U_1$: soit A_1 un sous-groupe de T_1 et S_1 tel que par exemple $T_1 > A_1 > U_1$, A_1 étant échangeable aux groupes (1) et (1 *bis*) et contenant U_1. Le groupe commun B_1 à T et A_1 est compris dans le groupe commun U_1 à T et T_1. D'autre part T et A_1 contiennent U_1 ; donc $U_1 = B_1$. Enfin T_1 n'est pas contenu dans T, sans quoi on aurait $T_1 = U_1$. On en conclut

$$T_1 \times T \geq A_1 \times T > U_1 \times T = T,$$

puisque

$$\text{ordre de } A_1 \times T = \frac{a_1 t}{u_1} > t;$$

d'autre part $T_1 \times T > T$, puisque T_1 n'est pas contenu dans T, et $T_1 \times T = S$. On en conclut

$$T < A_1 \times T = S.$$

car $A_1 \times T$ est échangeable aux groupes (1 *bis*) et contenu dans S. Donc

$$s = \frac{tt_1}{u_1} = \frac{ta_1}{u_1}, \qquad a_1 = t_1,$$

contrairement à l'hypothèse. Le groupe A_1 ne peut donc exister, et U_1 est maximum dans T_1. De même pour T_1 et si $V \neq U_1$ pour V.

La suite (10) jouit ainsi de toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé du lemme II pour la suite (2) (1).

(1) Remarquons que le lemme II reste vrai quand on suppose les suites (1) et (2) arrêtées au groupe V; de même pour le lemme IV et les théorèmes I et II.

THÉORÈME I. — *Soient*

$$(11) \qquad E,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ \ldots,\ X,\ Y,\ 1,$$

$$(12) \qquad E,\ R',\ S',\ T',\ U',\ V',\ \ldots,\ X',\ Y',\ 1,$$

deux suites de groupes dont le premier est le même et tels que dans chaque suite chacun soit compris dans le précédent. Supposons que ces deux suites soient telles que chacun de leurs groupes soit maximum dans le précédent parmi les sous-groupes de ce précédent échangeables à tous ceux de l'autre suite. Les nombres

$$(13) \qquad \frac{e}{r},\ \frac{r}{s},\ \frac{s}{t},\ \ldots$$

sont les mêmes à l'ordre près que les nombres

$$(14) \qquad \frac{e}{r'},\ \frac{r'}{s'},\ \frac{s'}{t'},\ \ldots.$$

Nous établirons ce théorème par l'application répétée du lemme II.

Soit S′ le premier des groupes (12) non contenu dans (11). Prenons pour les groupes $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ du lemme II les groupes

$$(15) \qquad T',\ U',\ \ldots,\ 1.$$

Nous pourrons former une suite

$$(16) \qquad E,\ R,\ S',\ T_1,\ U_1,\ V_1,\ \ldots,\ 1$$

contenant S′, dont chaque groupe est contenu dans le précédent, échangeable à tous les groupes (11) et (15) et maximum parmi les sous-groupes du précédent échangeables à tous les groupes (11) et (15). Tous les groupes (11) et (12) jouissent alors par rapport à l'autre suite et à (16) d'une propriété analogue. Les nombres (13) et

$$(17) \qquad \frac{e}{r},\ \frac{r}{s},\ \frac{s'}{t_1},\ \frac{t_1}{u_1},\ \frac{u_1}{v_1},\ \ldots$$

sont les mêmes à l'ordre près.

Nous opérerons sur (16) et (12) comme nous l'avons fait sur (11) et (12) en considérant le premier, U′ par exemple, des groupes de (12) non contenus dans (16), et en prenant pour $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, les groupes

$$(18) \qquad V', \ \ldots, \ I$$

de (12).

Nous pourrons former une suite

$$(19) \qquad E, \ R, \ S', \ T_1 = T', \ U', \ V_2, \ \ldots, \ I,$$

contenant U′, dont chaque groupe est contenu dans le précédent, échangeable à tous les groupes de (16) et (18), et maximum parmi les sous-groupes du précédent échangeables à tous les groupes de (16) et (18). Les nombres (13), (17) et

$$(20) \qquad \frac{e}{r'}, \ \frac{r}{s'}, \ \frac{s'}{t'}, \ \frac{t'}{u'}, \ \frac{u'}{v_2}, \ \ldots$$

sont alors les mêmes à l'ordre près.

En continuant de la sorte, nous obtenons des suites (16), (19), etc., dont chacune a ses $n+i$ premiers groupes ($i \geq 1$) communs avec la suite (12) si la précédente a ses n premiers groupes communs avec (12). On finira donc par obtenir parmi elles la suite (12); pour toutes ces suites les nombres (17), (20), etc., sont les mêmes que les nombres (13) à l'ordre près. Donc les nombres (13) sont les mêmes à l'ordre près que les nombres (14). C. Q. F. D.

II.

Il existe d'autres suites analogues à (11) et (12) jouissant de propriétés similaires. Nous allons en signaler de particulièrement remarquables.

Soit la suite

$$(21) \qquad E'', \ R'', \ S'', \ \ldots, \ X'', \ Y'',$$

dont chaque groupe est contenu dans le précédent; supposons que ces

groupes soient tous facteurs de E″. On a

$$E'' = R'' \times R_1'' = S'' \times S_1'' = \ldots = Y'' \times Y_1'',$$

R_1'', S_1'', ..., Y_1'' étant des sous-groupes de $E'' < E''$. Considérons, par exemple,

$$E'' = U'' \times U_1''.$$

D'après une propriété connue (¹), U″ étant contenu dans R″, on a

$$R'' = U'' \times D_u,$$

D_u étant le groupe commun à R″ et U_1''. Donc U″ est facteur de R″, c'est-à-dire que la suite (21) est telle que chacun de ses groupes est facteur des précédents.

Dès lors, étant donné un groupe E″ décomposable, on pourra toujours déterminer une suite de facteurs de E″ jouissant d'une ou plusieurs propriétés communes, dont chacun est maximum parmi les facteurs du précédent qui jouissent de la propriété ou des propriétés en question. Cette remarque nous permet d'établir le lemme suivant :

LEMME III. — *Soient* U *et* T *deux groupes* (*facteurs de* E) *échangeables aux groupes* (*facteurs de* E) S, Σ_1, Σ_2, ..., U *étant* > 1, *maximum parmi les facteurs de* T (*facteurs de* E) $<$ T *et échangeables à ces groupes, et* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ *étant des facteurs de* S; U_1 *le groupe commun à* S *et* T, V *le groupe commun à* S *et* U, *contenu dans* U_1, u, t, s, u_1, v *les ordres respectifs de* U, T, S, U_1, V : $B = S \times U$ *est égal à* $\Lambda = S \times T$ *ou est un facteur maximum de* A *parmi les facteurs de* A (*qui sont facteurs de* E), *suivant que* $\frac{t}{u} = \frac{u_1}{v}$, *ou* $v = u_1$ (²).

La démonstration est identique à celle du lemme I; il suffira d'ajouter aux raisonnements déjà faits les remarques suivantes :

On doit supposer $U > 1$; (U, U_1), contenu dans T, est facteur de T,

(¹) *Bull. Soc. Math., loc. cit.*, p. 5, prop. 2°.

(²) On peut, si l'on veut, supprimer les conditions entre parenthèses.

puisque U l'est; C devra être supposé facteur de A. W est facteur de T, puisqu'il contient U facteur de T. Enfin B est facteur de A, car $T = U \times U'$ et $A = B \times U'$.

LEMME IV. — *Soient*

$$(22) \qquad E,\ R,\ S,\ T,\ U,\ V,\ \ldots,\ X,\ Y,\ 1$$

une suite de groupes tels que chacun soit facteur de E *et du précédent* (1), $S_1, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, *une suite de facteurs de* E *n'appartenant pas à* (22), *contenant tous* Y, *et dont chacun est facteur du précédent* (2). *Supposons, ce qui est toujours possible, la suite* (22) *déterminée de manière que chacun de ses groupes soit maximum dans le précédent parmi les facteurs de* E *et de ce précédent échangeables à* $S_1, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$. *On peut déterminer au moins une suite*

$$(23) \qquad E,\ R_1,\ S_1,\ \ldots,\ X_1,\ Y,\ 1$$

analogue à (22), *contenant* S_1, *dont chaque groupe est facteur de* E *et du précédent, échangeable à tous les groupes* (22) *et à* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, *et maximum parmi les facteurs de* E *et du précédent échangeables à tous les groupes* (22) *et à* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$. *Par suite* (22) *jouit aussi par rapport à* (23) *de cette dernière propriété.*

Si

$$(24) \qquad e,\ r,\ s,\ t,\ \ldots,\ x,\ y,\ 1,$$

$$(25) \qquad e,\ r_1,\ s_1,\ t_1,\ \ldots,\ x_1,\ y,\ 1,$$

sont les ordres respectifs des groupes (22) *et* (23), *les nombres*

$$(26) \qquad \frac{e}{r},\ \frac{r}{s},\ \frac{s}{t},\ \ldots$$

---

(1) Il suffit pour cela que chacun soit contenu dans le précédent et facteur de E, d'après ce qui précède.

(2) Il suffit pour cela que chacun soit sous-groupe du précédent.

sont les mêmes, à l'ordre près, que les nombres

$$(27) \qquad \frac{e}{r_1}, \quad \frac{r_1}{s_1}, \quad \frac{s_1}{t_1}, \quad \ldots$$

La démonstration est identique à celle du lemme II; il suffira d'ajouter aux raisonnements déjà faits les remarques suivantes :

Si $V_1 > V$, V_1 contenu dans U est facteur de U, d'où $V_1 = U$.

Parmi les groupes (7), chacun est facteur des précédents : en effet, ici $V > 1$, puisque V contient Y; V est facteur de E, par suite les groupes (7) sont facteurs de E, et chacun est alors facteur du précédent (1).

De même T_1 est facteur de S, ainsi que U_1.

Enfin d'après le lemme III, dans la suite analogue à (10), $R, S_1 \times T, S_1 \times U, S_1 = S_1 \times V$ sont maxima parmi les facteurs de E et du précédent échangeables à $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, quand ils ne coïncident pas avec ce précédent.

Il en est de même pour S_1, T_1, U_1, V. A_1 doit être supposé facteur de T_1 et de E (même démonstration).

Théorème II. — *Soient*

$$(28) \qquad E, \quad R, \quad S, \quad T, \quad U, \quad V, \quad \ldots, \quad X, \quad Y, \quad 1,$$

$$(29) \qquad E, \quad R', \quad S', \quad T', \quad U', \quad V', \quad \ldots, \quad X', \quad Y, \quad 1,$$

deux suites de groupes tels que dans chaque suite chacun soit compris dans le précédent, le premier et le dernier groupe > 1 de chaque suite coïncidant. Supposons que ces deux suites soient telles que chacun de leurs groupes soit maximum dans le précédent parmi les facteurs de E *et de ce précédent échangeables à tous ceux de l'autre suite.*

Les nombres

$$(30) \qquad \frac{e}{r}, \quad \frac{r}{s}, \quad \frac{s}{t}, \quad \ldots$$

(1) *Bull. Soc. Math.* (*loc. cit.*, prop. 2).

sont les mêmes, à l'ordre près, que les nombres

$$(31) \qquad \frac{e}{r'}, \quad \frac{r'}{s'}, \quad \frac{s'}{t'}, \quad \dots$$

La démonstration est identique à celle du théorème I, à condition de remplacer quand il y a lieu le mot *sous-groupe* par le mot *facteur*, et de s'appuyer sur les lemmes III et IV.

III.

Il nous paraît utile et intéressant de donner des exemples de suites analogues à celles des théorèmes I et II.

1° *Cas du théorème I.* — Considérons le groupe cinq fois transitif R_1 de degré 12 de Mathieu. On pourra former la suite

$$(32) \qquad A_{12}, \quad A_{11}, \quad A_{10}, \quad A_9, \quad A_8, \quad A_7, \quad B_7, \quad 1,$$

des groupes symétriques de degré 12, 11, 10, 9, 8, 7 et du groupe alterné de degré 7 : R_1 est échangeable à chacun de ces groupes. A_{12} est le dernier des groupes (32) qui contienne R_1, et 1 le premier qui y soit contenu. Prenons les groupes communs $C_{11}, C_{10}, C_9, C_8, C_7, D_7$ à R_1 et $A_{11}, A_{10}, A_9, A_8, A_7, B_7$; la suite

$$(33) \qquad A_{12}, \quad R_1 \times B_7, \quad R_1, \quad C_{11}, \quad C_{10}, \quad C_9, \quad C_8, \quad C_7 = 1$$

est telle que chacun de ses groupes est contenu dans le précédent et maximum parmi les sous-groupes du précédent échangeables à tous les groupes (32). Les suites (13) et (14) deviennent ici, puisque l'ordre de R_1 est $12.11.10.9.8$:

$$\frac{12!}{11!} = 12, \qquad \frac{11!}{10!} = 11, \qquad \frac{10!}{9!} = 10,$$

$$\frac{9!}{8!} = 9, \qquad \frac{8!}{7!} = 8, \qquad \frac{7!}{\frac{1}{2}(7!)} = 2, \qquad \frac{7!}{2},$$

et

$$\frac{12!}{\frac{1}{2}(12!)} = 2, \qquad \frac{\frac{1}{2}(12!)}{12.11.10.9.8} = \frac{1}{2}(7!),$$

$$\frac{12.11.10.9.8}{11.10.9.8} = 12, 11, 10, 9, 8.$$

D'une manière plus générale, tout groupe au moins deux fois transitif R_1 de degré n donnera lieu à la formation de deux suites analogues. Supposons, par exemple, que R_1 soit contenu dans le groupe alterné B_n et ne soit pas trois fois transitif (1). Soient S_1, T_1 les sous-groupes des substitutions de R_1 qui laissent une ou deux mêmes lettres immobiles, de degré $n-1$ et $n-2$: on formera la suite

$$(34) \qquad A_n, \quad A_{n-1}, \quad A_{n-2}, \quad B_{n-2}, \quad T_1.$$

Prenons les groupes communs

$$S_1, \quad T_1 \quad \text{et} \quad T_1$$

à $R_1, A_{n-1}, A_{n-2}, B_{n-2}$; la suite

$$(35) \qquad A_n, \quad B_n = R_1 \times B_{n-2}, \quad R_1, \quad S_1, \quad T_1$$

correspondra à (34) par application du lemme II si T_1 est maximum (2) dans B_{n-2} parmi les sous-groupes de B_{n-2} échangeables à R_1, et alors R_1 sera maximum dans B_n.

De même supposons R_1 maximum dans B_n et partons de la suite (35). Prenons les groupes communs

$$B_{n-1}, \quad S_1, \quad T_1$$

---

(1) On sait que l'on a toujours des groupes de ce genre quand $n = p+1$ (p premier).

(2) Si l'on a un groupe R' deux fois transitif de degré n ne contenant pas le groupe alterné, et si l'on ne peut trouver dans A_n un groupe R_1 deux fois transitif tel que T_1 remplisse ces conditions, R' est contenu dans un sous-groupe trois fois transitif de B_n sur lequel on pourra opérer de même. L'existence connue d'une limite de transitivité montre donc qu'on pourra toujours former des suites analogues à (34) et (35).

à A_{n-1} et B_n, R_1, S_1, T_1; on pourra faire correspondre à (35) par application du lemme II la suite

$$(36) \qquad A_n, \quad A_{n-1}, \quad B_{n-1}, \quad S_1, \quad T_1.$$

2° *Cas du théorème II.* — Considérons la suite

$$(37) \qquad A_{11}, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad 1,$$

où A_{11} est le groupe symétrique de onze lettres, P_1 un groupe deux fois transitif de degré 11 et de classe 10, d'ordre 11.10, P_2 le groupe transitif d'ordre 11.5 formé des substitutions paires de P_1, P_3 le sous-groupe de P_1 et P_2 d'ordre et de degré 11. En partant du sous-groupe alterné B_{11} de A_{11} on forme d'après le lemme IV la suite

$$(38) \qquad A_{11}, \quad B_{11}, \quad P_2, \quad P_3, \quad 1.$$

Remarque I. — Les théorèmes précédents ont une application immédiate dans l'étude de l'abaissement du degré des équations au point de vue du degré des diverses réduites d'une équation donnée (¹).

Un groupe décomposable donnera toujours naissance à deux suites au moins analogues à celles du lemme II et du théorème I. En effet, soit $E = S \times S_1$ un pareil groupe dont S et S_1 sont des facteurs. On pourra toujours former une suite analogue à (1)

$$E, \quad \ldots, \quad S, \quad \ldots, \quad 1$$

dont tous les groupes sont échangeables à S_1, dès lors une suite

$$E, \quad \ldots, \quad S_1, \quad \ldots, \quad 1$$

analogue à (2).

Remarque II. — On peut considérer les propriétés suivantes, qui ont sans doute des analogues, comme une extension des suites de composition de M. Jordan. On obtient, par exemple, une propriété de ces suites en ajoutant dans l'énoncé du lemme II et sa démonstration cette

(¹) *Voir* par exemple JORDAN, *Traité des Subst.*, et VOGT, *Leçons sur la résolution algébrique des équations*, p. 182, th. III.

condition supplémentaire que les sous-groupes sont invariants dans le groupe E et maxima parmi ceux qui jouissent de cette propriété. Nous n'insistons pas : des conditions supplémentaires convenables donneraient sans doute encore d'autres suites.

Remarque III. — Ce qui précède ne fait pas intervenir, sauf pour les exemples particuliers que nous venons de donner, la notion de degré. Les lemmes et théorèmes précédents sont donc applicables aussi bien aux groupes de substitutions qu'aux groupes d'opérations considérés par divers auteurs, par exemple MM. W. Dyck et Frobenius, en particulier aux groupes finis considérés par exemple par M. Jordan, et qui interviennent dans la théorie des équations différentielles linéaires dont les intégrales sont algébriques.

Nous allons voir qu'ils s'appliquent aussi aux groupes finis continus de transformations de Lie, avec des démonstrations identiques, sous la seule condition de remplacer (1) les quotients $\frac{r}{s}, \frac{s}{t}, \cdots$ par des différences $r - s, s - t, \ldots$.

DEUXIÈME NOTE.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES GROUPES FINIS CONTINUS DE TRANSFORMATIONS (2) DE LIE.

Nous nous proposons ici d'étendre aux groupes finis continus de transformations de Lie, non seulement les propriétés précédentes, mais encore la plupart des propriétés établies par nous pour les groupes de substitutions dans notre Note intitulée (3) : *Sur les groupes échangeables et les groupes décomposables.* Nous arriverons, d'ailleurs, à des résultats plus complets, et nous établirons en particulier ces théo-

(1) Comparer PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 508.

(2) LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, II et III.

(3) *Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Boulogne*, 1899, et *Bull. Soc. Math.*, t. XXVIII, p. 1 et suiv.; 1900. Le théorème ci-dessous est déjà énoncé dans cette dernière Note.

rèmes : 1° *Tout groupe fini continu de transformations de Lie à plus d'un paramètre est décomposable en un produit de deux sous-groupes.* 2° *Tout groupe, dont les sous-groupes sont 2 à 2 échangeables, est intégrable.*

I.

Soit

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r), \end{cases}$$

un groupe D de transformations à r paramètres essentiels (*wesentlich*), qu'on peut définir également par ses r transformations infinitésimales

$$(2)\qquad \left\{ \begin{array}{l} X_k f = \sum_1^n {}_i \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) p_i, \\ p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \end{array} \right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Nous dirons que D est *décomposable* si l'on peut y trouver deux sous-groupes A et B, d'ordre > 1 (l'ordre est égal au nombre des paramètres essentiels), tous deux $<$ D, et tels que toute transformation de D soit le produit d'une transformation a de A par une b de B; on indique cette propriété en écrivant

$$D = A \times B = AB.$$

D sera dit le *produit* de A par B; A et B sont des *facteurs* de D.

De même, si deux groupes A et B sont tels que le groupe dérivé D soit $= AB$, on dit que A et B sont *échangeables* (¹).

II.

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante, pour que les groupes* A *et* B *entre* $x_1, \ldots, x_n$ *contenant la transformation*

(¹) Comparer Killing, *Math. Ann.*, t. XXXIV, p. 57, et Cartan, *Thèse de Doct.*, p. 52 : leur définition de la décomposabilité est différente.

identique (1) *soient échangeables, est que le groupe* D $=(A, B)$, *dérivé de* A *et* B, *n'ait d'autres transformations infinitésimales que celles de la forme* $E + E'$, *si* E *et* E′ *sont les formes les plus générales des transformations infinitésimales de* A *et* B.

Je dis que la condition est nécessaire.

En effet, si $D = A \times B$, D contient la transformation $E + E'$, qui est le produit de E par E′. D ne contient pas d'autre transformation infinitésimale; car, si ab est l'une d'elles, a étant une transformation finie de A par une b de B également finie, il existe une transformation z de B infiniment peu différente de b et telle que $az = 1$; a appartient à B, ainsi que ab qui est de la forme E′.

Je dis que la condition est suffisante.

En effet, la transformation infinitésimale la plus générale de D est $E + E'$. Considérons un isomorphe holoédrique régulier (2) Y (*einfach transitiv*) de D : au sous-groupe B de D correspond dans Y un sous-groupe Y_2 : à Y_2 correspond une division de l'espace

$$c_1 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad c_\zeta = \text{const.}$$

(ρ, r_1, r_2 ordres de D, A, B, $\zeta = \rho - r_2$) que Y laisse invariable et telle que Y_2 soit formé de l'ensemble des transformations de Y laissant invariable une multiplicité générale M de cette division (3). Au sous-

(1) Nous ne considérerons dans tout ce qui suit que des groupes contenant la transformation identique.

(2) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, p. 404 par exemple et p. 378 et suiv.

(3) Il ne nous paraît pas inutile de donner une démonstration directe de cette propriété, sans renvoyer à l'Ouvrage de Lie.

Y est régulier ; soient

$$(\alpha) \qquad x_i' = \psi_i(x_1, \ldots, x_\rho; b_1, \ldots, b_\rho) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

les équations de Y. On peut toujours choisir les paramètres de façon que Y_2 soit défini en attribuant à $b_1, \ldots, b_\zeta$, où $\zeta = \rho - r_2$, des valeurs déterminées $c_1, \ldots, c_\zeta$. Y étant régulier, (α) peut être résolu par rapport à $b_1, \ldots, b_\rho$, ce qui donne

$$(\beta) \qquad u_1 = b_1, \quad \ldots, \quad u_\zeta = b_\zeta, \quad \ldots, \quad u_\rho = b_\rho.$$

Les ζ premières équations définissent une multiplicité M à $\rho - \zeta = r_2$ degrés

groupe A d'ordre r_1 de D correspond dans Y un sous-groupe Y_1 ayant en commun avec Y_2 exactement $r_1 + r_2 - \rho$ transformations infinitésimales indépendantes, puisque les transformations infinitésimales in-

---

de liberté, quand on donne aux x_i' les valeurs des coordonnées d'un point quelconque Π_1 déterminé de position générale et à $b_1, \ldots, b_\zeta$ les valeurs $c_1, \ldots, c_\zeta$. M contient Π_1, car la transformation identique est contenue dans Y_2 et correspond à des valeurs des b_j, telles que $b_1 = c_1, \ldots, b_\zeta = c_\zeta, b_{\zeta+1} = \gamma_{\zeta+1}, \ldots, b_\rho = \gamma_\rho$, et les coordonnées de Π_1 satisfont aux équations de M

$$(\gamma) \qquad c_1 = c_1, \qquad \ldots, \qquad c_\zeta = c_\zeta.$$

Quand on donne aux x_i' les valeurs des coordonnées de Π_1 et à $b_1, \ldots, b_\zeta$ les valeurs $c_1, \ldots, c_\zeta$, (β) devient

$$(\delta) \qquad c_1 = c_1, \qquad \ldots, \qquad c_\zeta = c_\zeta, \qquad c_{\zeta+1} = b_{\zeta+1}, \qquad \ldots, \qquad c_\rho = b_\rho.$$

(δ) représente, si l'on donne à $b_{\zeta+1}, \ldots, b_\rho$ toutes les valeurs possibles, l'ensemble des points auxquels Π_1 est substitué par Y_2, ou, puisque Y_2 forme un groupe, l'ensemble des points que Y_2 substitue à Π_1. Ces points, pour la même raison, sont permutés exclusivement entre eux par Y_2, c'est-à-dire que (δ) est invariant par Y_2. Mais les ensembles de points (γ) et (δ) coïncident; toute transformation de Y_2 remplace alors (γ) par un système équivalent qui donne encore, entre les x_i, ζ relations ne contenant aucune constante arbitraire : donc (γ) est invariant par Y_2.

Toute transformation de Y non comprise dans Y_2 ne peut laisser (γ) et (δ) invariants, car elle remplace Π_1 par un point que Y_2 ne substitue pas à Π_1, c'est-à-dire non compris dans (γ) et pour lequel $a_1, \ldots, a_\zeta$ prennent un système de valeurs $\neq c_1, \ldots, c_\zeta$.

Opérons sur (γ) une transformation (α); on obtient

$$w_k(x_1', \ldots, x_n'; b_1, \ldots, b_\rho) = c \qquad (k = 1, 2, \ldots, \zeta).$$

Si ces équations dépendent de η_1 paramètres arbitraires, indépendants, elles peuvent s'écrire

$$V_k(x_1', \ldots, x_n'; z_1, \ldots, z_{\eta_1}) = c$$

ou

$$z_1 = V_1, \qquad \ldots, \qquad z_{\eta_1} = V_{\eta_1}.$$

Le sous-groupe des transformations de Y laissant i multiplicité générale invariable est d'ordre $\rho - \eta_1 = r_2$ et $\eta_1 = \zeta$.

L'ensemble des multiplicités V_k (Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 488, par exemple) est invariant par Y et forme une division de l'espace $x_1, \ldots, x_n$ invariante par Y; deux multiplicités de cette division n'ont aucun point de position générale commun. On le vérifierait facilement.

dépendantes de D, en nombre ρ, sont toutes de la forme $E + E'$. L'ordre du sous-groupe des transformations de Y_1 laissant M immobile est $r_1 + r_2 - \rho$, et Y_1 opère entre les multiplicités $v_1 = \text{const.}, \ldots,$ $v_\zeta = \text{const.}$ les transformations d'un groupe transitif.

Ceci posé, soient S_1 et S_2 deux transformations de Y remplaçant M_1 par M, M et M_1 étant deux multiplicités générales v (*allgemein* ou *allgemeiner Lage*) : la transformation $S_2^{-1} S_1$ laisse M immobile et est de la forme y_2, y_2 étant une transformation de Y_2; donc

$$S_1 = S_2 y_2.$$

On peut toujours choisir pour S_2 une transformation de Y_1 qui est transitif entre les v : dès lors toute transformation de Y est le produit d'une transformation de Y_1 par une de Y_2. Y étant holoédriquement isomorphe à D et les groupes correspondant aux sous-groupes Y_1 et Y_2 de Y dans D étant A et B, toute transformation de D est de la forme ab, a étant une transformation de A, b une de B.

Remarque. — On verrait de la même manière que la même condition est nécessaire et suffisante pour que D = BA. Donc, si D = AB, on a en même temps D = BA, et réciproquement.

On voit en même temps que l'ordre ρ de D est $r_1 + r_2 - m$, m étant l'ordre $r_1 + r_2 - \rho$ du groupe commun à A et B.

Réciproquement, supposons que le groupe D dérivé de A et B soit d'ordre $r_1 + r_2 - m$, m étant l'ordre du groupe commun à A et B; toutes les transformations infinitésimales de D sont de la forme $E + E'$, car on pourra toujours supposer que parmi les transformations de base de E' on ait pris m transformations infinitésimales indépendantes du groupe commun, et l'on a $r_1 + r_2 - m$ transformations infinitésimales indépendantes de la forme $E + E'$. Donc A et B sont échangeables; d'où :

THÉORÈME II. — *La condition nécessaire et suffisante, pour que les deux groupes* A *et* B *à* r_1 *et* r_2 *paramètres soient échangeables, est que le groupe* D *dérivé de* A *et* B *soit à* $r_1 + r_2 - m$ *paramètres,* m *étant l'ordre du sous-groupe* C *des transformations communes à* A *et* B.

III.

Décomposabilité (1) des groupes de transformation.

1° Groupes primitifs composés.

Nous nous appuierons sur le lemme suivant :

LEMME. — *Tout sous-groupe invariant* K *d'un groupe primitif* G *est transitif* (2).

En effet, soient $X_1, \ldots, X_r$ les transformations infinitésimales indépendantes de G, $X_1, \ldots, X_m$ les transformations infinitésimales indépendantes de K.

Si K n'est pas transitif, il a des invariants (3) $\Omega_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Omega_t(x_1, \ldots, x_n)$ qui sont les solutions du système d'équations différentielles

$$(3) \qquad X_1 = 0, \quad \ldots \quad X_m = 0.$$

Admettons que $\Omega_1, \ldots, \Omega_t$ soit un système de solutions indépendantes de (3), c'est-à-dire que toute autre solution de (3) est fonction de $\Omega_1, \ldots, \Omega_t$. Les transformations de G étant permutables (4) à K le transforment en lui-même et transforment $\Omega_1, \ldots, \Omega_t$ en des solutions de (3), c'est-à-dire en des fonctions de $\Omega_1, \ldots, \Omega_t$, puisqu'elles transforment $X_1, \ldots, X_m$ en des fonctions linéaires à coefficients constants de $X_1, \ldots, X_m$. Donc le système d'équations

$$\Omega_1 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad \Omega_t = \text{const.}$$

forme une division de l'espace $x_1, \ldots, x_n$ invariable par le groupe G, qui n'est pas primitif (5).

---

(1) La signification de ce mot ne nous paraît pas avoir besoin d'être expliquée.

(2) *Comparer* JORDAN, *Traité des subst.*, p. 41.

(3) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 215.

(4) C'est-à-dire que $g^{-1}kg = k_1$, g étant une transformation de G, k et k_1 des transformations de K, quels que soient g et k.

(5) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 220.

Ce lemme établi, supposons que le groupe primitif G contienne un sous-groupe invariant $K < G$. Soit H le sous-groupe des transformations de G laissant un point P_0 de position générale (*Punkt von allgemeiner Lage*) (1) invariable; G possède exactement (2) n transformations infinitésimales indépendantes d'ordre o, dont aucune fonction linéaire à coefficients constants ne laisse P_0 immobile, et $r - n$ d'ordre $> o$, engendrant H et laissant P_0 immobile. De même, K, qui est transitif, d'après le lemme précédent, possède exactement n transformations infinitésimales indépendantes d'ordre o dont aucune fonction linéaire ne laisse P_0 immobile, et $m - n$ d'ordre $> o$ laissant P_0 immobile, si m est l'ordre de K. D'après le théorème II, on a

$$G = H \times K.$$

Donc :

THÉORÈME. — *Tout groupe primitif composé est décomposable.*

2° *Groupes composés quelconques.*

Soient G un pareil groupe, H un sous-groupe invariant maximum de G :

α. Si l'on peut trouver un sous-groupe invariant H′ de G non contenu dans H, on a

$$G = H \times H',$$

car si $X_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ sont m transformations infinitésimales indépendantes de H supposé d'ordre m, $X'_k (k = 1, 2, \ldots, m')$ m' transformations infinitésimales de H′ supposé d'ordre m', $(X_i X_j)$, $(X'_k X'_l)$, $(X_i X'_k)$ sont des fonctions linéaires des X et des X′, et toute transformation infinitésimale du groupe dérivé de H et de H′, qui est G, est de la forme $E + E'$, E et E′ étant des transformations infinitésimales de H et H′; en sorte que $G = H \times H'$ (théorème I).

β. Si H est à la fois maximum dans G et invariable par les transfor-

(1) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 203 et 498.

(2) *Ibid.*, p. 203.

mations de G, on a encore

$$G = H \succ H'.$$

H′ étant un sous-groupe quelconque de G non contenu dans G, sous-groupe qui existe ici toujours. Ainsi, quand le groupe dérivé de G, c'est-à-dire le sous-groupe de G formé des crochets $(X_i X_k)$ de G, $X_1, \ldots, X_r$ étant r transformations infinitésimales indépendantes de G, d'ordre r, est d'ordre $< r$, on sait (1) que G contient un sous-groupe invariant d'ordre $r-1$ qu'on peut prendre pour H; on prendra pour le second facteur H′ le groupe engendré par une transformation infinitésimale de G non contenue dans H.

Nous avons obtenu ainsi des modes de décomposition de certains groupes. Ce ne sont là que des cas particuliers : nous allons voir que tout groupe fini continu de transformations de Lie à plus d'un paramètre est décomposable.

3° *Groupes quelconques.*

1. Groupes simples. — Il nous suffira d'étudier les diverses catégories de groupes simples connus (2), en remarquant que, si un groupe est décomposable, tous ses isomorphes holoédriques le sont. Nous conservons ici les notations de M. Cartan.

a. Type A (3). — Le groupe général de ce type a $l(l+2)$ paramètres : il est isomorphe holoédriquement au groupe linéaire homogène spécial de l'espace à $l+1$ dimensions, ou encore (4) au groupe projectif général G de l'espace à l dimensions. Ce dernier contient (5) un sous-groupe H à $l(l+1)$ paramètres engendré par les transforma-

(1) *Voir*, par exemple, Cartan, *Thèse de Doctorat*, p. 19; Nony et Cie, 1894; ou Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 261.

(2) Cartan, *loc. cit.*, p. 94.

(3) *Ibid.*, p. 82.

(4) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 558.

(5) Nous adoptons les notations de Lie, *ibid.*, p. 555.

tions infinitésimales

$$P_i = x_i \sum_1^l {}_k x_k p_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, l),$$

$$T_{ik} = x_i p_k,$$

et un sous-groupe H′ engendré par les transformations infinitésimales p_i. D'après le théorème II, on a

$$G = H \times H'.$$

3. *Type B* (1). — Le groupe général de ce type a $l(2l+1)$ paramètres et est isomorphe holoédriquement au groupe linéaire et homogène G de l'espace à $2l+1$ dimensions engendré par les transformations infinitésimales

$$(4) \qquad X_{ik} = x_k p_{-i} - x_i p_{-k} = T_{k,-i} - T_{i,-k}$$
$$(i \neq k, \quad i, k = 0, \pm 1, \ldots, \pm l).$$

On sait que (2)

$$(T_{ik} T_{\mu\nu}) = \varepsilon_{k\mu} T_{i\nu} - \varepsilon_{i\nu} T_{i\mu k}$$
$$(\varepsilon_{\rho 0} = 0 \quad \text{si} \quad \rho \neq 0 \qquad \text{et} \qquad = 1 \quad \text{si} \quad \rho = 0),$$

d'où

$$\begin{aligned}(X_{ik} X_{\nu\mu}) &= (T_{k,-i} - T_{i,-k}, T_{\mu,-\nu} - T_{\nu,-\mu}) \\ &= (T_{k,-i} T_{\mu,-\nu}) - (T_{k,-i} T_{\nu,-\mu}) - (T_{i,-k} T_{\mu,-\nu}) + (T_{i,-k} T_{\nu,-\mu}) \\ &= \varepsilon_{-i,\mu} T_{k,-\nu} - \varepsilon_{-\nu,k} T_{\mu,-i} - (\varepsilon_{-i,\nu} T_{k,-\mu} - \varepsilon_{-\mu,k} T_{\nu,-i}) \\ &\quad - (\varepsilon_{-k,\mu} T_{i,-\nu} - \varepsilon_{-\nu,i} T_{\mu,-k}) + (\varepsilon_{-k,\nu} T_{i,-\mu} - \varepsilon_{-\mu,i} T_{\nu,-k}) \\ &= \varepsilon_{-i,\mu}(T_{k,-\nu} - T_{\nu,-k}) + \varepsilon_{-k,\nu}(T_{i,-\mu} - T_{\mu,-i}) + \varepsilon_{-\mu,k}(T_{\nu,-i} - T_{i,-\nu}) \\ &\quad + \varepsilon_{-\nu,i}(T_{\mu,-k} - T_{k,-\mu}),\end{aligned}$$

puisque, par exemple,

$$\varepsilon_{-i,\mu} = \varepsilon_{-\mu,i}.$$

(1) CARTAN, *loc. cit.*, p. 82-83.

(2) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 555.

On en conclut

$$(5) \qquad (X_{ik}X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{-i,\mu}X_{\nu k} + \varepsilon_{-k,\nu}X_{\mu i} + \varepsilon_{-\mu,k}X_{i\nu} + \varepsilon_{-\nu,i}X_{k\mu}.$$

Donnant, dans cette formule, à i, k, μ, ν les valeurs $0, 1, \ldots, l, -1, \ldots, -(l-1)$, on voit que les crochets des transformations X_{ik}, $X_{\nu\mu}$ s'expriment en fonction linéaire de ces transformations et forment (1) un groupe H_1 à $2l-1+(2l-1)(l-1)=l(2l-1)$ paramètres.

De même, si nous donnons à i, k, μ, ν les valeurs $0, 1, \ldots, l-1, -1, \ldots, -l$, nous obtenons un groupe H_2 à $l(2l-1)$ paramètres.

Adjoignons à H_1 la transformation $X_{l,-l}$: dans la formule (5) posons $i=l$, $k=-l$, $\mu, \nu \neq \pm l$; on a

$$(X_{l,-l}X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{-l,\mu}X_{\nu,-l} + \varepsilon_{l,\nu}X_{\mu l} + \varepsilon_{-\mu,-l}X_{l\nu} + \varepsilon_{-\nu,l}X_{-l,\mu},$$

avec

$$\varepsilon_{-l,\mu}=0, \qquad \varepsilon_{-\nu,l}=0,$$

d'où

$$(X_{l,-l}X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{l,\nu}X_{\mu l} + \varepsilon_{-\mu,-l}X_{l\nu}.$$

On voit que le groupe H_1 est invariant par la transformation $X_{l,-l}$ et forme avec H_1 un groupe H à $l(2l-1)+1$ paramètres.

Ceci posé, considérons les deux groupes H et H_2 et une des transformations (1), X_{pq}. Celle-ci sera contenue dans H si l'on n'a pas p ou q égal à $-l$, ou si l'on a en même temps p ou q égal à $-l$ et q ou p égal à l; elle sera contenue dans H_2 si l'on n'a pas p ou q égal à l; elle sera donc toujours contenue dans l'un de ces deux groupes. Alors toute transformation infinitésimale de G est la somme d'une transformation infinitésimale de H et d'une de H_2 : d'après le théorème II, on a

$$G = H \times H_2.$$

γ. *Type C* (2). — Le groupe général G de ce type a $l(2l+1)$ paramètres et est holoédriquement isomorphe au groupe linéaire et homo-

(1) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 158.

(2) CARTAN, *loc. cit.*, p. 85. Pour simplifier les raisonnements, nous modifions un peu les notations de M. Cartan.

gène de l'espace à $2l$ dimensions engendré par les transformations infinitésimales

$$\begin{aligned} -X_{ik} &= \varepsilon_i x_i p_{-k} + \varepsilon_k x_k p_{-i} \qquad (i, k = \pm 1, \ldots, \pm l), \\ -X_{ii} &= 2\varepsilon_i x_i p_{-i} \qquad (i \neq k), \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_i = +1$ ou -1 suivant que i est positif ou négatif.

Ce groupe présente une très grande analogie avec celui du type B: on a

$$\begin{aligned} (X_{ik}X_{\nu\mu}) &= (\varepsilon_i T_{i,-k} + \varepsilon_k T_{k,-i}, \varepsilon_\nu T_{\nu,-\mu} + \varepsilon_\mu T_{\mu,-\nu}) \\ &= \varepsilon_i\varepsilon_\nu(T_{i,-k}T_{\nu,-\mu}) + \varepsilon_k\varepsilon_\nu(T_{k,-i}T_{\nu,-\mu}) \\ &\quad - \varepsilon_i\varepsilon_\mu(T_{i,-k}T_{\mu,-\nu}) + \varepsilon_k\varepsilon_\mu(T_{k,-i}T_{\mu,-\nu}) \\ &= \varepsilon_i\varepsilon_\nu(\varepsilon_{-k,\nu}T_{i,-\mu} - \varepsilon_{-\mu,i}T_{\nu,-k}) + \varepsilon_k\varepsilon_\nu(\varepsilon_{-i,\nu}T_{k,-\mu} - \varepsilon_{-\mu,k}T_{\nu,-i}) \\ &\quad - \varepsilon_i\varepsilon_\mu(\varepsilon_{-k,\mu}T_{i,-\nu} - \varepsilon_{-\nu,i}T_{\mu,-k}) \\ &\quad + \varepsilon_k\varepsilon_\mu(\varepsilon_{-i,\mu}T_{k,-\nu} - \varepsilon_{-\nu,k}T_{\mu,-i}) \\ &= \varepsilon_{-k,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_\nu T_{i,-\mu} - \varepsilon_k\varepsilon_\mu T_{\mu,-i}) + \varepsilon_{-\mu,i}(\varepsilon_k\varepsilon_\mu T_{k,-\nu} - \varepsilon_i\varepsilon_\nu T_{\nu,-k}) \\ &\quad - \varepsilon_{-i,\nu}(\varepsilon_k\varepsilon_\nu T_{k,-\mu} - \varepsilon_i\varepsilon_\mu T_{\mu,-k}) \\ &\quad - \varepsilon_{-\mu,k}(\varepsilon_i\varepsilon_\mu T_{i,-\nu} - \varepsilon_k\varepsilon_\nu T_{\nu,-i}). \end{aligned}$$

Or on a

$$\varepsilon_{-k,\nu} = 0 \quad \text{si} \quad k \neq -\nu, \qquad \text{et} \qquad = 1 \quad \text{si} \quad k = -\nu;$$

dans ce dernier cas,

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{-\nu} = -\varepsilon_\nu.$$

Donc

$$\begin{aligned} (X_{ik}X_{\nu\mu}) &= \varepsilon_{-k,\nu}\varepsilon_\nu(\varepsilon_i T_{i,-\mu} + \varepsilon_\mu T_{\mu,-i}) + \varepsilon_{-\mu,i}\varepsilon_\mu(\varepsilon_k T_{k,-\nu} + \varepsilon_\nu T_{\nu,-k}) \\ &\quad + \varepsilon_{-i,\nu}\varepsilon_\nu(\varepsilon_k T_{k,-\mu} + \varepsilon_\mu T_{\mu,-k}) \\ &\quad + \varepsilon_{-\mu,k}\varepsilon_\mu(\varepsilon_i T_{i,-\nu} + \varepsilon_\nu T_{\nu,-i}) \\ &= -(\varepsilon_{-k,\nu}\varepsilon_\nu X_{i\mu} + \varepsilon_{-\mu,i}\varepsilon_\mu X_{k\nu} + \varepsilon_{-i,\nu}\varepsilon_\nu X_{k\mu} + \varepsilon_{-\mu,k}\varepsilon_\mu X_{i\nu}). \end{aligned} \tag{6}$$

Cette égalité a d'ailleurs lieu même si l'on a

$$k = i \qquad \text{ou} \qquad \nu = \mu.$$

Ceci posé, donnons dans (6) à i, k, μ, ν les valeurs $1, \ldots, l, -1, \ldots, -(l-1)$: les crochets des transformations X_{ik}, $X_{\nu\mu}$ s'expriment en fonction linéaire de ces transformations et forment un groupe H_1 à $l(2l-1)$ paramètres.

De même, si nous donnons à i, k, μ, ν les valeurs $0, 1, \ldots, l-1, -1, \ldots, -l$, nous obtenons un groupe H_2 à $l(2l-1)$ paramètres.

Adjoignons à H_1 la transformation $X_{l,-l}$: dans la formule (6), posons $i = l$, $k = -l$, $\mu, \nu \neq -l$; on a

$$(X_{l,-l}X_{\nu\mu}) = -(\varepsilon_{l\nu}\varepsilon_{\nu}X_{l\mu} + \varepsilon_{-\mu,l}\varepsilon_{\mu}X_{-l,\nu} + \varepsilon_{-l,\nu}\varepsilon_{\nu}X_{-l,\mu} + \varepsilon_{-\mu,-l}\varepsilon_{\mu}X_{l\nu}),$$

avec

$$\varepsilon_{\mu,l} = 0, \qquad \varepsilon_{-l,\nu} = 0,$$

d'où

$$(X_{l,-l}X_{\nu\mu}) = -(\varepsilon_{l\nu}\varepsilon_{\nu}X_{l\mu} + \varepsilon_{-\mu,-l}\varepsilon_{\mu}X_{l\nu}).$$

On voit que le groupe H_1 est invariant par $X_{l,-l}$ et forme avec H_1 un groupe H à $l(2l-1)+1$ paramètres.

On en conclut encore comme pour le type B que

$$G = H \times H_2,$$

en vertu du théorème II.

6. *Type D* (1). — Le groupe général G de ce type a $l(2l-1)$ paramètres et est holoédriquement isomorphe au groupe linéaire et homogène de l'espace à $2l$ dimensions engendré par les transformations infinitésimales

$$X_{ik} = x_k p_{-i} - x_i p_{-k} = T_{k,-i} - T_{i,-k}$$
$$(i \neq k,\ i, k = \pm 1, \ldots, \pm l).$$

On a

$$(X_{ik}X_{\nu\mu}) = (T_{k,-i} - T_{i,-k}, T_{\mu,-\nu} - T_{\nu,-\mu});$$

d'où, comme pour le type B [formule (5)],

$$(7) \qquad (X_{ik}X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{-i\mu}X_{\nu k} + \varepsilon_{-\mu,k}X_{i\nu} + \varepsilon_{-k,\nu}X_{\mu i} + \varepsilon_{-\nu,i}X_{k\mu}.$$

(1) CARTAN, *loc. cit.*, p. 85.

On voit encore que, si l'on donne à i, k, μ, ν les valeurs $1, \ldots, l, -1, \ldots, -(l-1)$, les transformations X_{ik}, $X_{\nu\mu}$ forment un groupe H_1 à $(l-1)(2l-1)$ paramètres.

De même, si l'on donne à i, k, μ, ν les valeurs $1, \ldots, (l-1), -1, \ldots, -l$, les transformations X_{ik}, $X_{\nu\mu}$ forment un groupe H_2 à $(l-1)(2l-1)$ paramètres.

Adjoignons à H_1 la transformation $X_{l,-l}$: dans la formule (7), posons $i=l$, $k=-l$, $\mu, \nu \neq -l$; on a

$$(X_{l,-l}X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{-l,\mu}X_{\nu,-l} + \varepsilon_{-\mu,-l}X_{l\nu} + \varepsilon_{l\nu}X_{\mu l} + \varepsilon_{-\nu,l}X_{-l,\mu},$$

avec

$$\varepsilon_{-l,\mu} = 0, \qquad \varepsilon_{-\nu,l} = 0;$$

d'où

$$(X_{l,-l}X_{\nu\mu}) = \varepsilon_{-\mu,-l}X_{l\nu} + \varepsilon_{l\nu}X_{\mu l}.$$

H_1 est donc invariant par $X_{l,-l}$, qui forme avec H_1 un groupe H. On a encore, d'après le théorème II,

$$G = H \times H_2.$$

ε. *Type E.* — Un groupe G de ce type a $r = 78$, 133 ou 248 paramètres; examinons ces trois cas successivement.

Soit $r = 78$. La structure est donnée par les formules (37), p. 90, de la Thèse (¹) de M. Cartan, les crochets non écrits étant tous nuls. On remarquera que les transformations infinitésimales X_{ii}, X_{ik}, X_{ijk}, X'_{000} sont telles que leurs crochets 2 à 2 sont des fonctions linéaires de ces transformations. Elles engendrent donc un groupe H qui a 57 paramètres. De même, les transformations X_{ii}, X_{ik}, X'_{ijk}, X_{000} engendrent un groupe H′ à 57 paramètres. Toute transformation infinitésimale de G étant la somme d'une transformation de H et d'une de H′, on a, d'après le théorème II,

$$G = H \times H'.$$

Soit $r = 133$. La structure est donnée par les formules (40), page 91, de la Thèse de M. Cartan. On voit encore que les transformations X_{ii},

(¹) *Voir* aussi p. 142 et suiv. pour les trois valeurs de r.

X_{ik}, X_{ijk}, X'_{00i} engendrent un groupe H à 91 paramètres; de même, les transformations X_{il}, X_{ik}, X'_{ijk}, X_{00l} engendrent un groupe H′ à 91 paramètres, et

$$G = H \times H'.$$

Soit $r = 248$. La structure est donnée par les formules (41), page 92, de la Thèse de M. Cartan. Les transformations X_{il}, X_{ik} avec $i \neq 0$, X_{ijk} avec $i, j, k \neq 0$, $X'_{\rho\sigma\tau}$ (ρ, σ ou $\tau = 0$) engendrent un groupe H à 156 paramètres. De même, les transformations X_{il}, X_{ik} avec $k \neq 0$, X'_{ijk} avec $i, j, k \neq 0$, $X_{\rho\sigma\tau}$ (ρ, σ ou $\tau = 0$) engendrent un groupe H′ à 156 paramètres. On a

$$G = H \times H'.$$

ζ. *Type F.* — Un groupe G de ce type a 52 paramètres. La structure est donnée par les formules (42), page 92, de la Thèse de M. Cartan. Les transformations $Y_i (i = 1, 2, 3, 4)$, $X_i (i \neq 4)$, $X_{ik} (i, k \neq 4)$, $X_{\alpha\beta\gamma\delta} (\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 4)$ engendrent un groupe H à 37 paramètres. De même, les transformations $Y_i (i = 1, 2, 3, 4)$, $X_i (i \neq -4)$, $X_{ik} (i, k \neq -4)$, $X_{\alpha\beta\gamma\delta} (\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq -4)$ engendrent un groupe H′ à 37 paramètres. Toute transformation infinitésimale de G de la forme X_i, X_{ik}, $X_{\alpha\beta\gamma\delta}$ qui contient l'indice $+4$ ou l'indice -4 est contenue dans l'un de ces deux groupes, car $+4$ et -4 ne peuvent être à la fois indices d'une même transformation. On en conclut, en vertu du théorème II,

$$G = H \times H'.$$

η. *Type G.* — Un groupe G de ce type a 14 paramètres. La structure est donnée par les formules (43), page 93, de la Thèse de M. Cartan. Les transformations X_{0i}, X_{0j}, X_{k0}, X_{kj}, X_{kl}, X_{ij}, X_{kk}, X_{il} (i, j, k différents et $= 1, 2, 3$ respectivement dans un ordre quelconque) engendrent un groupe H à 8 paramètres. De même, les transformations X_{i0}, X_{j0}, X_{0k}, X_{jk}, X_{ik}, X_{ji}, X_{kk}, X_{ii} engendrent un groupe H′ à 8 paramètres. On a

$$G = H \times H'.$$

On en conclut :

THÉORÈME. — *Tout groupe simple fini continu de transformations de Lie qui a plus d'un paramètre est décomposable.*

2. GROUPES COMPOSÉS QUELCONQUES. — Soit G un groupe composé quelconque qu'on peut toujours supposer ici régulier, H un sous-groupe invariant maximum de G. Si $u_1, \ldots, u_m$ forment un système d'invariants de H indépendants, G opère entre les multiplicités

$$u_1 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad u_m = \text{const.}$$

les transformations d'un groupe G_1 transitif à m variables (1) isomorphe à G. H étant invariant dans G laisse invariable chacune de ces multiplicités, et G_1 a m paramètres essentiels, le sous-groupe de G_1 qui correspond à H se réduisant à la transformation identique. A tout sous-groupe K de G à $r - m + k$ paramètres contenant H correspond dans G_1 un sous-groupe K_1 à k paramètres, et, réciproquement, à tout sous-groupe K_1 de G_1 à k paramètres on peut faire correspondre dans G un sous-groupe à $r - m + k$ paramètres.

G_1 est simple; en effet, sinon il contiendrait un sous-groupe L_1 invariant à l paramètres auquel correspondrait dans G un sous-groupe L à $r - m + l$ paramètres contenant H. L ne serait pas invariant dans G, d'après l'hypothèse faite sur H, et serait transformé par G en un autre groupe $L' \neq L$, auquel correspondrait dans G_1 le même groupe L_1 : au groupe (L, L') dérivé de L et de L', et qui a plus de $r - m + l$ paramètres, correspondrait dans G_1 le groupe L_1 à l paramètres, ce qui est impossible.

G_1 étant simple est décomposable, et l'on peut y trouver deux sous-groupes F_1 et Φ_1 tels que

$$G_1 = F_1 \times \Phi_1.$$

On en conclut

$$G = F \times \Phi,$$

F et Φ étant les sous-groupes de G contenant H et correspondant à F_1 et Φ_1 respectivement; car, si F_1 a f paramètres, Φ_1 φ paramètres, on a $m = f + \varphi - \delta$, δ étant l'ordre du groupe commun à F_1 et Φ_1. F et Φ ont $r - m + f$ et $r - m + \varphi$ paramètres, et un groupe d'ordre $r - m + \delta$

(1) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 481.

commun, contenant H. On a

$$r - m + f + r - m + \varphi - (r - m + \delta) = r;$$

le groupe dérivé de F et Φ coïncide avec G et

$$G = F \times \Phi,$$

d'après le théorème II. Donc :

THÉORÈME. — *Tout groupe fini continu de transformations de Lie composé est décomposable, quand il a au moins deux paramètres.*

Finalement, nous en concluons :

THÉORÈME III. — *Tout groupe fini continu de transformations de Lie, simple ou non, est décomposable* (1), *quand il a au moins deux paramètres.*

Ce théorème conduit à étudier les divers modes de décomposition d'un groupe donné (2). On peut dire à ce sujet :

THÉORÈME IV. — *Le problème de la recherche des sous-groupes transitifs des isomorphes holoédriques et transitifs d'un groupe donné est compris dans celui de la recherche des décompositions de ce groupe en un produit de deux sous-groupes, et lui est équivalent quand ce groupe est simple.*

En effet, soient G un isomorphe holoédrique et transitif d'un groupe donné Γ, K un sous-groupe transitif de G. D'après le théorème II,

(1) Il en résulte notamment la possibilité de former de proche en proche tous les groupes de transformations en adjoignant aux groupes déjà formés des groupes qui leur sont échangeables.

(2) Nous n'y insistons pas : ce sujet appelle bien des recherches; une pareille étude, faite pour tout ou partie des groupes connus, peut faire un sujet de thèse.

a $G = K \times H$, H étant le sous-groupe des transformations de G laissant un point de position générale immobile.

Supposons, en particulier, Γ simple : soit $\Gamma = F \times \Phi$. On peut toujours trouver, en passant par l'intermédiaire d'un isomorphe régulier de Γ, un isomorphe holoédrique et transitif G de Γ, tel que le sous-groupe des transformations de G laissant un point de position générale immobile soit le sous-groupe de G correspondant à Φ dans Γ. Il en résulte sans peine que le sous-groupe de G correspondant à F est transitif (*voir* démonstration du théorème I).

Ainsi, à une décomposition du groupe simple Γ correspond un sous-groupe transitif d'un isomorphe holoédrique et transitif de Γ, et réciproquement.

IV.

Quelques propriétés des facteurs d'un groupe (1).

D'abord tous les énoncés donnés dans notre première Note s'appliquent identiquement aux groupes finis continus de transformations de Lie.

Nous mentionnerons encore les propriétés suivantes :

1° Si $A = B \times B'$ et si D contient B et est contenu dans A, on a $A = D \times B'$.

B et B′ sont des facteurs complémentaires de A.

2° Si $A = B \times B' = C \times C'$, C étant contenu dans B, on a $B = C \times D$, D étant le groupe commun à B et C′.

3° Réciproquement, si $A = B \times C'$ et $B = C \times D$, D étant le groupe commun à B et C′, on a $A = C \times C'$.

---

(1) Nous groupons ici un certain nombre de propriétés dont les énoncés et la démonstration sont absolument identiques soit dans la théorie des groupes finis continus de transformations de Lie, soit dans celle des groupes de substitutions, à condition de remplacer pour la première les produits et les quotients de nombres par des sommes et des différences respectivement. Ces propriétés ont été établies par nous pour la deuxième théorie soit dans une Note précitée du *Bulletin de la Société Mathématique*, soit dans la première Note de notre Mémoire. Nous ne donnerons donc ici que les énoncés de la Note du *Bulletin de la Société Mathématique*.

4° Si A et B sont échangeables à C, (A, B) est échangeable à C.

5° Si A et B sont échangeables et si C, contenu dans B, est échangeable à A, soit D le groupe commun à A et B : D est échangeable à C.

6° Si $A = C \times B'$ et si B contient C et est contenu dans A, on a $B = C \times D$, D étant le groupe commun à B et B'.

7° Réciproquement, si $A = B \times B'$, si D est le groupe commun à B et B', et si $B = C \times D$, on a $A = C \times B'$.

Nous ferons encore observer, d'après la remarque I de la note I et le théorème III ci-dessus, que tout groupe fini continu de transformations de Lie donnera naissance à deux suites au moins analogues à celles du lemme II et du théorème I de la note I.

V.

Autre manière de présenter certaines des idées précédentes.

Soient G un groupe transitif à n variables $x_1, \ldots, x_n$, et g paramètres, H_0 le groupe des transformations de G qui laissent le point $\Pi_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de position générale immobile, d'ordre h_0; on a

$$g = n + h_0 \ (^1).$$

Considérons deux divisions de l'espace $x_1, \ldots, x_n$, à p et q degrés de liberté, invariables par G,

$$(8) \quad \begin{cases} \text{P}, & \Omega_1(x) = \alpha_1, & \ldots, & \Omega_{n-p}(x) = \alpha_{n-p}, \\ \text{Q}, & \text{O}_1(x) = a_1, & \ldots, & \text{O}_{n-q}(x) = a_{n-q}. \end{cases}$$

L'ensemble S des deux systèmes d'équations P et Q forme une division de l'espace invariable par G, division que nous appellerons la *plus grande division commune* (²) à P et Q. En d'autres termes, toute transformation de G remplace l'intersection d'une quelconque P,

(¹) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 203 et 217.

(²) Toute division invariable par G et dont les équations ont pour conséquence les équations P et Q est dite *commune* à P et Q.

des surfaces P et d'une quelconque Q_1 des surfaces Q par l'intersection de deux surfaces analogues P_2 et Q_2 respectivement. Nous désignerons par s le nombre de degrés de liberté de chaque multiplicité de S.

Ceci posé, considérons celle P_0 des multiplicités P

$$(9)\quad \Omega_1(x)=\Omega_1(x^0)=\alpha_1^0,\qquad \ldots,\qquad \Omega_{n-p}(x)=\Omega_{n-p}(x^0)=\alpha_{n-p}^0,$$

qui contient le point Π_0, et soit (P_0) le sous-groupe des transformations de G laissant P_0 immobile; (P_0) contient H_0 et est un groupe à $r-n+p$ paramètres (¹).

De même le sous-groupe (Q_0) des transformations de G laissant invariable la multiplicité Q_0,

$$(9\,bis)\quad O_1(x)=O_1(x^0)=a_1^0,\quad \ldots,\quad O_{n-q}(x)=O_{n-q}(x^0)=a_{n-q}^0,$$

contient H_0 et est un groupe à $r-n+q$ paramètres.

Le sous-groupe (S_0) des transformations de G laissant invariable la multiplicité S_0 déterminée par (9) et (9 *bis*) contient H_0 : je dis qu'il est formé du sous-groupe des transformations communes à (P_0) et (Q_0).

En effet, toute transformation commune à (P_0) et (Q_0) laisse (9) et (9 *bis*) invariables, et appartient à (S_0). Réciproquement, toute transformation générale de (S_0) remplace P_0 par une multiplicité P pour laquelle $\Omega_i(x)$ a la valeur α_i^0, c'est-à-dire par P_0, et appartient à (P_0); de même, elle appartient à (Q_0), et (S_0) est bien le groupe des transformations communes à (P_0) et (Q_0). (S_0) a $r-n+s$ paramètres. Donc :

LEMME. — *Le sous-groupe* (S_0) *des transformations de* G *qui laissent invariable une multiplicité* S_0, *contenant un point* Π_0 *de position générale, de la plus grande division commune* S *à deux divisions* P *et* Q *de l'espace* $x_1, \ldots, x_n$ *invariables par* G *est le sous-groupe commun aux deux sous-groupes* (P_0) *et* (Q_0) *des transformations de* G *qui laissent invariables respectivement les*

(¹) LIE, *loc. cit.*, p. 478-479.

multiplicités P_0 *et* Q_0 *de* P *et* Q *contenant le point* Π_0. S *a* s *degrés de liberté si* (S_0) *est d'ordre* $r-n+s$.

Cherchons maintenant à quelles conditions il existera une division T de l'espace $x_1, \ldots, x_n$

$$\Theta_1 = \beta_1, \quad \ldots, \quad \Theta_{n-t} = \beta_{n-t}, \tag{10}$$

invariable par G, et telle que les relations (10) équivalent à $n-t$ des relations (9) et à $n-t$ des relations (9 *bis*). Si (10) existe, et si l'on choisit t minimum, c'est-à-dire de façon qu'il n'y ait aucune division U contenant P, Q et (10) autre que (10), on aura

$$n-s \leqq n-p+n-q-(n-t),$$

et $p+q-t \leqq s$; (10) sera dite *multiple* de ces deux divisions P et Q.

Prenons les transformations de (P_0), et opérons-les sur Q_0; elles remplacent Q_0 par ∞^{p-s} multiplicités Q dont l'ensemble sera désigné par Σ_0.

Soit μ une transformation de G transformant P_0 en P_1 et Q_0 en Q_1; en opérant les transformations de (P_1) sur Q_1 comme celles de (P_0) sur Q_0, on obtient un ensemble Σ_1 de ∞^{p-s} multiplicités Q, etc. (P_1) est le transformé de (P_0) par μ.

L'ensemble $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ ainsi obtenu forme-t-il une division de l'espace invariable par G?

D'abord toute transformation de G remplace Σ_i par Σ_j.

En effet, soit θ_0 une transformation de (P_0); μ transforme P_0 en P_1 et Q_0 en Q_1; θ_0 transforme Q_0 en Q_0' appartenant à Σ_0. On a

$$Q_0\theta_0 = Q_0', \qquad Q_0\mu = Q_1,$$
$$Q_1\mu^{-1}\theta_0\mu = Q_0\theta_0\mu = Q_0'\mu;$$

si $\theta_1 = \mu^{-1}\theta_0\mu$, la transformée θ_1 de θ_0 par μ, appartenant à (P_1), change Q_1, appartenant à Σ_1, en la transformée $Q_0'\mu$ de Q_0', appartenant à Σ_0, par μ. Donc Σ_1 est l'ensemble transformé de Σ_0 par μ. De même toute autre transformation de G remplace Σ_0 par un des ensembles Σ_j.

Alors, soit une transformation μ_i de G : elle remplace Σ_i par Λ_i : si μ_2 remplace Σ_0 par Σ_i, $\mu_2\mu_i$ remplace Σ_0 par Λ_i, qui est un des ensembles Σ_j.

Ceci posé, si $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ est une division invariable par G, par définition cet ensemble sera formé de multiplicités permutées exclusivement entre elles par les transformations de G, et telles qu'un point de position générale ne peut appartenir à deux d'entre elles. Σ_0, par exemple, sera alors une multiplicité que toute transformation θ_0 de (P_0) remplace par une Σ'_0 des multiplicités $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ contenant la multiplicité Q'_0 que θ_0 substitue à Q_0 : Q'_0 appartient à Σ_0 et contient un point de position générale, c'est-à-dire que Σ'_0 et Σ_0 ont un point de position générale commun, et $\Sigma'_0 = \Sigma_0$. Une transformation W de (Q_0) laisse Q_0 invariable, et, par suite, aussi Σ_0. Donc le groupe $[(P_0), (Q_0)]$ dérivé de (P_0) et (Q_0) laisse Σ_0 invariable et appartient à G. Soient $\zeta = r - m$ l'ordre du sous-groupe Z de G laissant Σ_0 invariable, γ_1 l'ordre de $[(P_0), (Q_0)]$. La division $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ possédant $p + q - s$ degrés de liberté, on a

$$\zeta = r - m = r - n + p + q - s \geq \gamma_1.$$

D'autre part (P_0) et (Q_0) ayant en commun exactement les transformations d'un groupe à $r - n + s$ paramètres, on a

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\leq r - n + p + r - n + q - (r - n + s), \\ &\leq r - n + p + q - s = \zeta. \end{aligned}$$

Donc $\zeta = \gamma_1 = r - n + p + q - s$, et, d'après le théorème II, (P_0) et (Q_0) sont échangeables.

Réciproquement, supposons (P_0) et (Q_0) échangeables, et formons comme précédemment l'ensemble $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$. $R = [(P_0), (Q_0)]$ a $r - n + p + q - s$ paramètres exactement. Je dis que $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ forme une division de l'espace $x_1, \ldots, x_n$ invariable par G.

En effet, soit $\Pi_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ un point de position générale : en opérant sur Π_0 les transformations de (Q_0) on obtient tous les points de Q_0, car toute transformation de G, qui est transitif, remplaçant Π_0 par un point de Q_0 appartient à (Q_0). Toute transformation U de R

est le produit d'une transformation de (Q_0) par une de (P_0) (Théorème I) et remplace Π_0 par un point Π_1 appartenant à Σ_0 : donc, tout point que R substitue à Π_0 appartient à Σ_0. Inversement, tout point Π_2 de Σ_0 est tel que toute transformation U_1 de G substituant Π_0 à Π_2 appartient à R; car ce point appartient à une Q′ des multiplicités Q de Σ_0; il y a une transformation U′ de (P_0) remplaçant Q_0 par Q′ et $U_1 U'^{-1} = U''$ laisse Q_0 invariable, c'est-à-dire appartient à (Q_0). Donc $U_1 = U''U'$, c'est-à-dire appartient à R. Σ_0 est alors l'ensemble des points de position générale que R substitue à Π_0.

Or R est un sous-groupe de G contenant le sous-groupe de G laissant Π_0 immobile, et l'on sait (1) qu'on peut lui faire correspondre une division de l'espace dont chaque multiplicité a $p + q - s$ degrés de liberté et invariante par G, une des multiplicités M′ de cette division qui contient un point de position générale Π' convenablement choisi étant laissée invariable par R. R permute transitivement avec Π' les points de position générale contenus dans M′ : Π' appartient à l'un des systèmes $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$, et M′ et Σ' ont en commun tous leurs points de position générale : Σ' coïncide donc avec M′.

Soit T une transformation de G remplaçant Π' par Π_i : elle remplace Σ' par Σ_i et M′ par M_i. Donc $\Sigma_i = M_i$, et $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$ forme bien une division invariable par G. Donc :

THÉORÈME V. — *Étant donné un groupe transitif* G *dans l'espace* $x_1, \ldots, x_n$ *qui laisse invariantes les deux divisions de cet espace*

$$P \quad \Omega_1(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1, \quad \ldots \quad \Omega_{n-p}(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_{n-p},$$

$$Q \quad \Theta_1(x_1, \ldots, x_n) = a_1, \quad \ldots, \quad \Theta_{n-q}(x_1, \ldots, x_n) = a_{n-q},$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des multiplicités générales Q, *permutées avec une d'elles* Q_0 *par les transformations de* (P_0), *forme une multiplicité d'une division* Φ *de l'espace* $x_1, \ldots, x_n$ *invariable par* G, *est que* (P_0) *et* (Q_0) *soient*

(1) Comparer LIE, *Theorie der Trfgrup.*, p. 521, et ce Mémoire, deuxième Note, p. 31 et suiv.

échangeables, (P_0) *et* (Q_0) *étant formés respectivement des transformations de* G *qui laissent invariables les multiplicités* P_0 *et* Q_0 *de* P *et* Q *contenant un même point* Π_0 *de position générale. Chaque multiplicité de la division* Φ *a* $p+q-s$ *degrés de liberté,* $r-n+s$ *étant l'ordre du groupe commun à* (P_0) *et* (Q_0) (1).

Le théorème V comporte une interprétation géométrique; pour en faire saisir la portée il suffira de l'indiquer pour l'espace ordinaire :

Corollaire. — *Étant donné un groupe* G *transitif entre les trois variables* x, y, z *qui laisse invariables les deux systèmes de courbes*

$$P \qquad \Omega_1(x,y,z)=\alpha_1, \qquad \Omega_2(x,y,z)=\alpha_2,$$

$$Q \qquad O_1(x,y,z)=a_1, \qquad O_2(x,y,z)=a_2,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des courbes Q *permutées avec une d'elles* Q_0, *rencontrant* P_0, *par les transformations de* (P_0), *ou encore pour que l'ensemble des courbes* Q *qui rencontrent la courbe* P_0 *de* P *forme une surface appartenant à un système simplement infini de surfaces formant une division de l'espace invariable par* G, *est que les groupes* (P_0) *et* (Q_0) *soient échangeables,* (P_0) *et* (Q_0) *étant formés respectivement des transformations de* G *qui laissent invariables les courbes* P_0 *et* Q_0.

Si Q_0, rencontre P_0, il en est de même de toutes les transformées de Q_0 par (P_0), dont l'ensemble constitue Σ_0.

Donc chaque surface du système en question sera formée de l'ensemble des courbes Q qui rencontrent une courbe P, ou, inversement, de l'ensemble des courbes P qui rencontrent une courbe Q (2).

---

(1) Nous dirons, par extension, que les deux divisions P et Q sont échangeables quand les deux groupes (P_0) et (Q_0) le sont.

(2) Il pourrait être intéressant de former tous les types de groupes transitifs entre trois variables qui jouissent de la propriété indiquée au corollaire, en s'appuyant sur le t. III de la *Theorie der Trfgrup.* de Lie, p. 141 et suiv. Nous laissons ce soin à d'autres en nous contentant d'en citer ci-après deux exemples.

Toute surface formée de courbes Q pourra d'ailleurs se définir par une équation

$$f(O_1, O_2) = \text{const.}$$

Mais ici la surface en question étant formée aussi de courbes P, on aura

$$f(O_1, O_2) = \varphi(\Omega_1, \Omega_2) = \text{const.} \tag{11}$$

comme équation du système de surfaces.

Les groupes G dont il est question au corollaire ci-dessus sont compris parmi ceux de la troisième catégorie de groupes transitifs à trois variables signalée par Lie (¹). On voit de suite que, dans (11), f est une solution commune aux deux équations aux dérivées partielles dont P et Q donnent une solution générale.

Ces résultats sont susceptibles de généralisation.

Soient

$$\Phi \qquad \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = \beta_1, \qquad \ldots \qquad \varphi_{n-(p+q-s)} = \beta_{n-(p+q-s)} \tag{12}$$

les équations de la division Φ.

Les fonctions $O_1, \ldots, O_{n-q}$ sont indépendantes : prenons-les comme variables avec q autres variables $y_{n-q+1}, \ldots, y_n$: (12) devient

$$\psi_1(O_1, \ldots, O_{n-q}, y_{n-q+1}, \ldots, y_n) = \beta_1, \ldots, \psi_{n-(p+q-s)} = \beta_{n-(p+q-s)}.$$

Pour chaque système de valeurs des $a_1, \ldots, a_{n-q}$ on a un système de valeurs des β pour lequel ces équations ont lieu quels que soient $y_{n-q+1}, \ldots, y_n$; car pour toute multiplicité Q on a des valeurs déterminées des β_i quels que soient $y_{n-q+1}, \ldots, y_n$. Donc quels que soient $O_1, \ldots, O_{n-q}$ ces équations ne dépendent pas des y, et (12) peut s'écrire

$$\chi_1(O_1, \ldots, O_{n-q}) = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad \chi_{n-(p+q-s)} = \beta_{n-(p+q-s)}.$$

On verrait de la même manière que les χ sont des fonctions des Ω. C'est là la généralisation de la relation (11).

On peut dire encore :

(¹) *Theorie der Trfgrup.*, t. III, p. 141.

Si

$$(13)\qquad \begin{cases} Y_1 = 0, & \dots, & Y_p = 0, \\ Z_1 = 0, & \dots, & Z_q = 0 \end{cases}$$

sont les systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles qui définissent les divisions P et Q, $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-(p+q-s)}$ sont des solutions indépendantes du système complet dérivé de (13) (¹).

Ce système possède donc au moins $n - (p + q - s)$ solutions indépendantes, c'est-à-dire que le système complet dérivé de (13) contient au plus $p + q - s$ équations indépendantes. Je dis qu'il n'en a pas moins.

En effet, sinon, il posséderait $n - \eta$ solutions indépendantes, avec $\eta < p + q - s$. Ces solutions étant de la forme

$$\gamma_i(O_1, \dots, O_{n-q}) = \gamma_i'(\Omega_1, \dots, \Omega_{n-p})$$

pourraient remplacer chacune $n - \eta$ des équations de chaque système (8). L'ensemble des équations (8) équivaudrait à, au plus,

$$n - p + n - q - (n - \eta) = n - (p + q - \eta)$$

équations indépendantes. Mais (8), d'après un lemme précédent, contient exactement $n - s$ équations indépendantes. Donc,

$$n - s \leq n - (p + q - \eta)$$

et

$$p + q - s \leq \eta,$$

ce qui est contradictoire. Donc,

$$\eta = p + q - s.$$

Il y a mieux : les équations (13) forment déjà un système complet, c'est-à-dire sont au nombre de $p + q - s$ linéairement indépendantes.

En effet, supposons qu'il y en ait $p + \omega$ linéairement indépendantes. D'abord,

$$Y_1 = 0, \qquad \dots, \qquad Y_p = 0$$

(¹) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 89 et 221.

le sont. Parmi les équations $Z_1 = 0, \ldots, Z_q = 0$, qui sont linéairement indépendantes, on en a $q - \omega$ exactement, les $q - \omega$ dernières, par exemple, dont les premiers membres sont de la forme

$$\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_p Y_p + \mu_1 Z_1 + \ldots + \mu_\omega Z_\omega.$$

On peut évidemment remplacer ces $q - \omega$ équations par les $q - \omega$ équations de la forme

$$\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_p Y_p = 0.$$

En choisissant convenablement les équations $Y_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, en en formant au besoin des combinaisons linéaires, on pourra supposer que ces $q - \omega$ équations soient

$$Y_1 = 0, \quad \ldots \quad Y_{q-\omega} = 0, \tag{14}$$

leurs premiers membres étant indépendants. Ces $q - \omega$ équations forment un système complet, car le crochet de deux d'entre elles appartient évidemment à la fois aux deux systèmes $Y_i = 0$, $Z_j = 0$ et est fonction linéaire de $Y_1, \ldots, Y_{q-\omega}$. Désignons par

$$\Psi_1 = \psi_1, \quad \ldots, \quad \Psi_{n-q+\omega} = \psi_{n-q+\omega} \tag{15}$$

une solution générale de ce système (14) dépendant des $n - q + \omega$ constantes arbitraires $\psi_1, \ldots, \psi_{n-q+\omega}$.

Ω_1, par exemple, est solution du premier système (13) et de (14). Donc,

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_1 = F_1(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-q+\omega}), \\ \qquad \text{et, de même,} \\ \Omega_2 = F_2(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-q+\omega}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_{n-p} = F_{n-p}(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-q+\omega}). \end{array}\right. \tag{16}$$

De même pour les O_i.

Ceci posé, (15) constitue une division de l'espace $x_1, \ldots, x_n$ inva-

riable par G; en effet, par exemple,

$$(X_i Y_k) = \sum_1^p{}_\nu \psi_{i\nu} Y_\nu = \sum_1^q{}_\nu \gamma_{i\nu} Z_\nu,$$

car les deux systèmes d'équations (13) définissent (¹) deux divisions invariables par G; $(X_i Y_k)$ est alors fonction linéaire de $Y_1, \ldots, Y_{q-\omega}$; de même pour $Y_2, \ldots, Y_{q-\omega}$. Alors, considérant celle des multiplicités (15), T_0, qui contient Π_0, il y a un sous-groupe (T_0) de G formé des transformations de G, laissant T_0 immobile. (T_0) laisse invariables P_0 et Q_0 d'après (16) et appartient au groupe (S_0) commun à (P_0) et (Q_0). (T_0) a $r - n + q - \omega$ paramètres et

$$r - n + q - \omega \leq r - n + s;$$

d'où

$$q - s \leq \omega. \tag{17}$$

Mais alors, parmi les équations (13), on en aurait $p + \omega \geq p + q - s$ linéairement indépendantes, alors que $p + \omega \leq p + q - s$, d'après ce qui précède. Donc

$$\omega = q - s.$$

Ainsi (13) forme un système complet qui définit la division Φ.

Réciproquement, si (13) forme un système complet, il définit évidemment une division Φ invariable par G, car les crochets (XY) et (XZ) sont des fonctions linéaires de Y et Z.

Cette division Φ contient les deux divisions P et Q et est la plus petite division multiple de P et Q.

Nous pouvons donc dire encore :

Théorème VI. — *Tout étant posé comme au théorème V, si*

$$\begin{cases} Y_1 = 0, & \ldots, & Y_p = 0, \\ Z_1 = 0, & \ldots, & Z_q = 0 \end{cases} \tag{13}$$

sont les systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles qui définissent les deux divisions P *et* Q *invariables par le*

(¹) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 221.

groupe transitif G, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des équations* (13) *forme un système complet est que* (P_0) *et* (Q_0) *soient échangeables. Ce système complet est formé de* $p+q-s$ *équations indépendantes si* $r-n+s$ *est l'ordre du groupe commun à* (P_0) *et* (Q_0).

VI.

Il convient de donner ici quelques exemples d'applications des théorèmes précédents.

1° *Exemple d'application du corollaire du théorème V.* — Parmi les exemples les plus simples qu'on puisse donner de l'application de ce corollaire, nous citerons celui du groupe G transitif régulier de transformations échangeables p_1, p_2, p_3, groupe des translations.

Les équations

$$(18)\qquad \begin{cases} X = f(u) + \varphi(v) + \psi(w), \\ Y = f_1(u) + \varphi_1(v) + \psi_1(w), \\ Z = f_2(u) + \varphi_2(v) + \psi_2(w), \end{cases}$$

où les f_i, φ_i, ψ_i sont des fonctions linéaires, représentent trois familles de plans engendrés par la translation d'une des droites

$$\begin{aligned} &X = f(u), \quad && Y = f_1(u), && Z = f_2(u), \\ &X = \varphi(v), && Y = \varphi_1(v), && Z = \varphi_2(v), \\ &X = \psi(w), && Y = \psi_1(w), && Z = \psi_2(w), \end{aligned}$$

et aussi trois congruences de droites dépendant de deux paramètres variables v, w, ou w, u, ou u, v respectivement. Ces familles et ces congruences constituent des divisions de l'espace invariables par les transformations de G, au moins en général. Une des droites de la congruence $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, par exemple, est laissée invariable par la transformation

$$X' = X + \partial a, \qquad Y' = Y + \partial b, \qquad Z' = Z + \partial c,$$

si

$$f(u) = \partial a + f(u + \partial u),$$

$$f_1(u) = \partial b + f_1(u + \partial u), \qquad f_2(u) = \partial c + f_2(u + \partial u).$$

ce qui détermine $\frac{\partial a}{\partial u}, \frac{\partial b}{\partial u}, \frac{\partial c}{\partial u}$ en fonction de u, c'est-à-dire un sous-groupe de G à un paramètre. On trouvera, pour la congruence $w = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, un autre sous-groupe à un paramètre en général : le groupe H dérivé de ces deux sous-groupes est à deux paramètres, puisque G est formé de transformations échangeables. Sa transformation générale est de la forme

$$X' = X + \delta a_2, \qquad Y' = Y + \delta b_2, \qquad Z' = Z + \delta c_2$$

avec

$$f(u) + \varphi(v) = \delta a_2 + f(u + \delta u) + \varphi(v + \delta v),$$
$$f_1(u) + \varphi_1(v) = \delta b_2 + f_1(u + \delta u) + \varphi_1(v + \delta v),$$
$$f_2(u) + \varphi_2(v) = \delta c_2 + f_2(u + \delta u) + \varphi_2(v + \delta v),$$

ce qui montre bien que la transformation générale de H laisse invariable la famille de plans $w = \text{const.}$, puisque

$$\delta a_2 = \frac{\partial a}{\partial u}\delta u + \frac{\partial a_1}{\partial v}\delta v,$$

$$\delta b_2 = \frac{\partial b}{\partial u}\delta u + \frac{\partial b_1}{\partial v}\delta v, \qquad \delta c_2 = \frac{\partial c}{\partial u}\delta u + \frac{\partial c_1}{\partial v}\delta v.$$

2° *Exemples d'application du théorème V.* — Nous donnerons des exemples de cas où les conditions prévues au théorème sont réalisées, et d'un cas où elles ne le sont pas.

Soit G un groupe transitif; si ce groupe est formé de transformations échangeables (1), les conditions prévues seront réalisées pour deux sous-groupes quelconques (P) et (Q) de G.

On peut encore citer, quand $n = 3$, le groupe $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{31}, T_{32}$, transitif, à cinq paramètres entre les variables x_1, x_2, x_3, quand on pose, avec Lie, $T_{ik} = x_i p_k$. Ce groupe, cité par cet éminent géomètre (2) dans

(1) Dans ce cas, G est évidemment régulier, car une transformation qui laisse un point de position générale immobile doit laisser immobile tout point de position générale, c'est-à-dire est $= 1$.

(2) *Theorie der Trfgrup.*, t. III, p. 117.

sa liste des groupes linéaires homogènes à cinq paramètres, est transitif. Tout point x_1^0, x_2^0, x_3^0 pour lequel $x_1 x_2 x_3 \neq 0$ est un point de position générale (1), les trois transformations T_{11}, T_{22}, T_{33} étant prises comme linéairement indépendantes. On a

$$T_{32} = x_3 p_2 = \frac{x_3}{x_2} x_2 p_2 = \frac{x_3}{x_2} T_{22},$$

$$T_{31} = x_3 p_1 = \frac{x_3}{x_1} T_{11},$$

et les deux transformations $T_{32} - \frac{x_3^0}{x_2^0} T_{22}$, $T_{31} - \frac{x_3^0}{x_1^0} T_{11}$ forment un groupe K à deux paramètres laissant le point (x^0) invariable (2). Les crochets $(T_{ik} T_{\mu\nu})$ se réduisent tous à 0, $\pm T_{31}$, $\pm T_{32}$, les groupes (P), (Q) obtenus en adjoignant à K une quelconque des transformations T_{11}, T_{22} ont chacun trois paramètres, et le groupe (Φ) dérivé de ces deux groupes a quatre paramètres. Aux groupes (P), (Q), (Φ) correspondent des courbes et des surfaces auxquelles on peut appliquer le corollaire précédent.

Au contraire, prenons un isomorphe régulier du groupe à trois paramètres dont la structure est donnée par les formules

$$(X_1 X_2) = 0, \qquad (X_2 X_3) = 0, \qquad (X_3 X_1) = X_2.$$

On vérifie sans peine que les conditions nécessaires et suffisantes (3) pour que cette structure détermine un groupe sont remplies. X_1 et X_3 déterminent deux divisions P et Q auxquelles ne s'appliquent pas le théorème V et son corollaire, car le groupe dérivé de X_1 et X_3 est le groupe lui-même.

Le groupe linéaire homogène T_{21}, T_{12}, T_{23} est un exemple d'un groupe ayant une pareille structure, car

$$(T_{21} T_{12}) = T_{23}, \qquad (T_{21} T_{23}) = 0, \qquad (T_{12} T_{23}) = 0.$$

---

(1) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 498.
(2) *Id.*, p. 206.
(3) *Id.*, p. 170.

Pour terminer, nous établirons ce théorème :

THÉORÈME VII. — *Un groupe* G *dont tous les sous-groupes sont deux à deux échangeables est intégrable.*

On pourrait essayer de donner une démonstration directe de ce théorème en s'appuyant sur les relations entre les coefficients c_{iks} qui déterminent la structure du groupe : nous nous contenterons de nous appuyer sur ce théorème dû à MM. Engel et Cartan (1) :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit intégrable est qu'il ne contienne aucun sous-groupe simple à trois paramètres.

Nous montrerons que G ne contient aucun sous-groupe simple à trois paramètres en déterminant tous les types de groupes à trois paramètres que peut contenir G.

Soient X_1, X_2, X_3 trois transformations infinitésimales indépendantes d'un pareil sous-groupe H; les groupes X_1, X_2, X_3 sont échangeables deux à deux, et l'on a (2)

$$(19)\qquad \begin{cases} (X_1X_2) = c_{121}X_1 + c_{122}X_2, \\ (X_2X_3) = c_{232}X_2 + c_{233}X_3, \\ (X_3X_1) = c_{311}X_1 + c_{313}X_3. \end{cases}$$

On peut toujours supposer (3) X_1, X_2, X_3 choisis de façon que l'on ait c_{121} ou $c_{122} = 0$, c_{232} ou $c_{233} = 0$.

Les cas où $c_{121} = c_{232} = 0$ et $c_{122} = c_{233} = 0$ se ramènent l'un à l'autre si l'on permute X_1 et X_3, et il suffit de considérer l'un d'eux.

Si $c_{122} = c_{232} = 0$, ou si $c_{121} = c_{233} = 0$, H renferme (4) un sous-groupe invariant et n'est pas simple.

---

(1) CARTAN, *Thèse de Doctorat*, p. 103-104. Pour la définition d'un groupe intégrable, *voir*, par exemple, cette Thèse, p. 44.

(2) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 170.

(3) *Id.*, p. 591.

(4) *Id.*, p. 261.

Premier cas : $c_{121} = c_{232} = 0$. — (19) devient

$$(20)\qquad \begin{cases} (X_1X_2) = c_{122}X_2, \\ (X_2X_3) = c_{233}X_3, \\ (X_3X_1) = c_{311}X_1 + c_{313}X_3. \end{cases}$$

Les identités connues de Jacobi se réduisent ici à

$$(21)\qquad [(X_1X_2)X_3] + [(X_2X_3)X_1] + [(X_3X_1)X_2] = 0,$$

ce qui donne

$$c_{122}(X_2X_3) + c_{233}(X_3X_1) + c_{311}(X_1X_2) + c_{313}(X_3X_2) = 0,$$

ou

$$X_3(c_{122} - c_{313})c_{233} + c_{233}(c_{311}X_1 + c_{313}X_3) + c_{311}c_{122}X_2 = 0,$$

ou enfin

$$(22)\qquad c_{233}c_{311} = 0 = c_{311}c_{122} = c_{122}c_{233}.$$

On sait (¹) que ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que la structure (20) soit celle d'un groupe à trois paramètres. On a, dans ce cas, grâce à (22), toutes les structures admissibles. Si $c_{233} = 0$, il faut $c_{311} = 0$ ou $c_{122} = 0$; alors il manque soit X_1, soit X_2, dans les seconds membres de (20), et H contient un sous-groupe invariant à deux paramètres. Sinon, $c_{311} = 0 = c_{122}$, et X_3 engendre un sous-groupe invariant de H. Donc, dans le premier cas, H est composé.

Autres cas. — Quand $c_{122} = c_{233} = 0$, on obtient les structures en permutant X_1 et X_3 dans les structures précédentes. Quand $c_{122} = c_{232} = 0$, ou $c_{121} = c_{233} = 0$, on obtient encore les structures en appliquant l'identité de Jacobi.

(¹) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 170, et t. II, p. 297.

TROISIÈME NOTE.

SUR LA CLASSE DES GROUPES FINIS CONTINUS PRIMITIFS DE TRANSFORMATION DE LIE.

I.

Définitions. — Il convient, avant toutes choses, que nous précisions un peu les définitions données par Lie d'un groupe transitif et d'un groupe plusieurs fois transitif (¹).

On peut dire qu'un groupe est transitif quand il permute transitivement tous les points P n'appartenant pas à une multiplicité de R_n. Il sera k fois transitif quand il permettra de remplacer à la fois k des points P arbitrairement choisis n'appartenant pas à une certaine multiplicité par k de ces points arbitrairement choisis. Un pareil point est dit *de position générale.*

Cette définition équivaut à celle de Lie pour la transitivité simple. En effet, soient

$$X_k = \sum_1^r {}_i \xi_{ki}(x) p_i, \qquad k = 1, 2, \ldots, r,$$

les transformations infinitésimales du groupe : si les déterminants de côté n du rectangle

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1} & \cdots & \xi_{rn} \end{vmatrix}$$

ne sont pas tous nuls identiquement, on voit sans peine qu'il existe une transformation infinitésimale remplaçant un point P de position générale $x_1, \ldots, x_n$ par tout autre point infiniment voisin $x_1 + \delta t_1, \ldots,$

(¹) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 212 et 631.

$x_n + \delta t_n$. Les seuls points pour lesquels il peut y avoir exception sont ceux appartenant à la multiplicité obtenue en égalant à o tous les déterminants de Δ.

Au contraire, si tous les déterminants de côté n de Δ sont nuls, le groupe possède au moins un invariant $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$, et les multiplicités $\Omega = \text{const.}$ en nombre infini sont invariantes par les transformations du groupe. G n'est pas transitif d'après notre définition.

On pourra toutefois, à l'occasion, en vue de pouvoir indiquer une propriété remarquable d'un groupe, introduire dans certains cas une définition analogue, mais plus restrictive : on peut dire qu'un groupe sera k fois *complètement transitif* quand il permettra de remplacer k quelconques des points qu'il déplace par k quelconques des mêmes points.

Nous introduirons encore la distinction suivante : soit G un groupe transitif; il sera de *première espèce* s'il laisse invariant un certain nombre de points ne formant pas une multiplicité, c'est-à-dire ne dépendant pas d'un paramètre arbitraire au moins, de *deuxième espèce* s'il en laisse invariant un nombre infini formant une multiplicité.

Ces nouvelles définitions ont un intérêt parce qu'elles permettent de formuler pour la théorie des groupes de transformations certains théorèmes d'énoncés semblables à des théorèmes de la théorie des substitutions (1). Ainsi :

THÉORÈME I. — *Quand un groupe* G *est deux fois complètement transitif, ou s'il est complètement transitif et si le groupe* H *des transformations de* G *laissant un point de position générale de* G *immobile est un sous-groupe de* G *transitif et de première espèce,* G *est primitif* (2).

En effet, soit H le sous-groupe des transformations de G laissant

(1) Un sous-groupe transitif d'un groupe G complètement transitif qui laisse invariant un certain nombre des points déplacés par G en permutant transitivement tous les autres sera dit un sous-groupe transitif de deuxième espèce (de première espèce) de G, si ces points forment (ne forment pas) une multiplicité.

(2) Comparer, pour les théorèmes I à IV, JORDAN, *Journal de Liouville*, 1871.

invariable le point $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de position générale. H permute transitivement tous les points que G déplace, à part le point P_0 et quelques autres ne formant pas une multiplicité, et est complètement transitif.

Supposons que G ne soit pas primitif: il laisse invariante une division

$$(1) \qquad \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}, \ldots, \varphi_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

de l'espace R_n. En particulier, toute transformation de H remplace la multiplicité

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi_1 \quad (x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1 \quad (x_1^0, \ldots, x_n^0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{n-m}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \end{cases}$$

par une des multiplicités (1). Mais H laisse P_0 invariable, en sorte que cette transformation de H doit remplacer (2) par une multiplicité contenant P_0, c'est-à-dire par (2) elle-même. (2) contient d'ailleurs, puisque G est complètement transitif, une infinité de points de position générale de R_n. H devrait permuter exclusivement entre eux tous les points de position générale de (2), et ne serait pas transitif et de première espèce.

THÉORÈME II. — *Si un groupe* G *est* k *fois complètement transitif, le sous-groupe* K *des transformations de* G *laissant* t *points immobiles* ($t < k$) *est* $k - t$ *fois complètement transitif.*

THÉORÈME III. — *Si un groupe* G *est* k *fois transitif, le sous-groupe* K *des transformations de* G *laissant* t *points de position générale de* G *immobile est* $k - t$ *fois transitif.*

Appelons *complètement primitif* un groupe primitif et complètement transitif. Nous pourrons encore formuler le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Si un groupe* G *est complètement transitif, et s'il contient un sous-groupe* K *complètement primitif de deuxième espèce,* G *est complètement primitif.*

En effet, en général, l'ensemble des points de position générale que

G déplace et que K laisse immobile forme une multiplicité de l'espace R_n.

On peut toujours supposer K maximum parmi les sous-groupes de G qui jouissent de la même propriété. Alors toute transformation g de G doit laisser K invariant, ce qui est impossible, puisque G est complètement transitif, ou le transformer en un autre groupe K′ tel que le groupe dérivé de K et K′, (K, K′) soit complètement transitif et ne laisse qu'un certain nombre de points déplacés par G et ne formant pas une multiplicité immobile, ce qui est impossible d'après le théorème I, à moins que G soit primitif ou à moins que $(K, K') = G$.

Supposons G imprimitif :

$$(K, K') = G.$$

Alors la transformation g, de G remplace tous les points P de position générale que K laisse invariable formant une multiplicité E par des points tous déplacés par K, et E par un ensemble E′ n'ayant aucun point commun avec E. Opérons de même sur K′ avec toutes les transformations de G. Les multiplicités E, E′, E″, ... forment ainsi un ensemble invariant par G et constituant une division de l'espace invariable par G. K devrait laisser cette division invariable, ce qui est impossible puisqu'il est primitif (1).

Remarque. — On pourrait peut-être rendre un peu plus généraux certains des théorèmes précédents : si cela était nécessaire, on le ferait par des procédés analogues.

II.

On sait que si G est un groupe fini continu transitif, il contient des transformations infinitésimales d'ordre (2) 1, 2, ..., s, et non des transformations infinitésimales d'ordre $\geq s+1$, s étant un entier fini. Lie a montré (3) que, si G est primitif, on a

$$s \leq 2n + 1.$$

(1) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 220.
(2) *Id.*, p. 607 et 190 et suiv.
(3) *Id.*, t. III, p. 313.

Sa démonstration établit même que l'ensemble des transformations d'ordre s du groupe primitif G forme un sous-groupe R qui ne peut être transitif si $s > 2$, et forme un sous-groupe invariant du sous-groupe Q des transformations de G d'ordre ≥ 1 pour un point de position générale P_0. Il en résulte (1) que Q ne peut être primitif si $s > 2$, sans quoi, d'après un lemme antérieur (2), il faudrait que R fût transitif, contrairement à ce qui précède. Donc, si nous convenons de dire avec Lie que le groupe G est *de classe s*, nous avons le théorème :

THÉORÈME I. — *Un groupe primitif* G, *tel que l'ensemble des transformations de* G *laissant un point de position générale immobile forme un groupe primitif, a sa classe* ≤ 2.

COROLLAIRE. — Si G est trois fois complètement transitif, sa classe est ≤ 2 (3).

THÉORÈME II. — *Un groupe* G, *pour lequel les valeurs des paramètres du sous-groupe des transformations laissant un point de position générale immobile restent finies, ne peut être deux fois transitif.*

En effet, soient G un groupe deux fois transitif, H le sous-groupe des transformations de G laissant invariable un point de position générale de G, s la classe de G.

Si G et H contiennent des transformations infinitésimales de classe $s \geq 2$, on a

$$X_k = \sum_i \xi_{ki} p_i, \tag{3}$$

avec

$$\xi_{ki} = \sum_{\nu\pi} (x_\nu - x_\nu^0)(x_\pi - x_\pi^0) a''_{ki\nu\pi} + \dots \tag{4}$$

(1) Nous croyons que Lie ne l'a pas remarqué.

(2) Lemme de la deuxième Note, p. 34.

(3) D'après le théorème I du § I. On peut étendre ce corollaire d'après les théorèmes I et IV du § I.

La transformation finie correspondante est de la forme

$$x'_\nu = x_\nu + \frac{t}{1}\xi_{k\nu} + \frac{t^2}{1.2}X\xi_{k\nu} + \dots. \tag{5}$$

Elle laisse invariable le point $x_\nu = x^0_\nu$; considérons le point infiniment voisin $x^0_\nu + 0^0_\nu$: la transformation donne

$$x'^0_\nu + \delta x'^0_\nu = x^0_\nu + 0^0_\nu + \Lambda,$$

Λ désignant des termes dont la somme est au moins du deuxième ordre par rapport à 0^0_ν; donc

$$\delta x'^0_\nu = 0^0_\nu,$$

et la transformation (5) laisse invariable tout point infiniment voisin du point x^0, et, parmi ces points, il y en a toujours une infinité qui n'appartiennent pas à une multiplicité déterminée, c'est-à-dire qui sont de position générale.

Mais on sait que le sous-groupe K des transformations de classe s de H est invariant dans H. K laissant invariants d'autres points que le point x^0 n'appartenant pas à ceux que H laisse invariants doit se réduire à la transformation identique, puisque H est transitif. Donc il faut $s \leq 1$.

Ceci posé, si $s = 1$, le sous-groupe H des transformations de G laissant le point x^0_ν invariable, remplace tout point infiniment voisin de celui-là par un autre point forcément infiniment voisin, puisque t reste fini et, par suite, n'est pas transitif.

Ces raisonnements supposent seulement l'exactitude des formules (5) dans le domaine où varient les coefficients (1).

Soit G un groupe transitif de classe s. Lie a montré qu'on pouvait

(1) Comme exemple d'un groupe où les valeurs des paramètres du sous-groupe des transformations laissant un point de position générale immobile restent limitées, on peut citer le groupe des transformations réelles de coordonnées dans le plan, dans l'espace ordinaire ou plus généralement dans l'espace à n dimensions.

toujours lui faire correspondre un groupe transitif Γ engendré par les transformations

$$T_i^{(0)} = p_i, \qquad T_j^{(1)} = \sum_{i,\nu}^{1\ldots n} \alpha_{ji\nu} x_i p_\nu$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m_1),$$

et par m_2 transformations infinitésimales indépendantes du second ordre, m_3 du troisième ordre, ..., m_s du $s^{\text{ième}}$ ordre, dont la forme générale est

$$T_{i_k}^{(k)} = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \xi_{i_k,\nu}^{(k)} p_\nu$$

$$(k = 2, 3, \ldots, s, \qquad i_k = 1, 2, \ldots, m_k),$$

où les $\xi^{(k)}$ sont des fonctions homogènes entières du $k^{\text{ième}}$ ordre de leurs arguments, ces transformations étant déduites d'autant de transformations indépendantes de G par suppression des termes d'ordre supérieur à l'ordre du terme d'ordre minimum.

Réciproquement, à tout groupe de la forme Γ correspond au moins un groupe transitif de classe s (¹).

Cette propriété des groupes Γ peut donc donner un intérêt particulier au théorème suivant qui leur est applicable;

Théorème III. — *Si un groupe* Γ *est simple, et s'il contient les transformations* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *il est primitif* (²).

En effet, supposons que Γ ne soit pas primitif : il laisse invariable une division de l'espace R_n :

$$u_1 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad u_{n-m} = \text{const.} \tag{6}$$

(¹) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 606.

(²) Plus généralement : un groupe transitif ne peut renfermer de groupe régulier formé de transformations échangeables que s'il est primitif ou composé avec un sous-groupe contenant un sous-groupe de ce groupe régulier. On a un théorème identique dans la théorie des substitutions (*J. de Math.*, p. 29; 1895 et *Bull. Soc. Math.*, p. 86; 1896).

l'contenant $p_1, \ldots, p_n$ formant un groupe H, cette division est invariante par H. Mais H est transitif et, par suite, permute transitivement les multiplicités de cette division; H contient un sous-groupe d'ordre m laissant invariable une multiplicité M_1 générale quelconque de la division.

D'ailleurs on sait que tout sous-groupe d'ordre m de H est semblable (1) par une transformation linéaire au sous-groupe $p_1, \ldots, p_m$. Supposons cette transformation effectuée. Ce sous-groupe est invariant (2) dans H, et toute transformation T de H le transforme en un sous-groupe laissant invariable une des multiplicités (6). H étant transitif, cette dernière peut être choisie arbitrairement : donc le sous-groupe $p_1, \ldots, p_m$ laisse invariable chacune des multiplicités (6).

L'ensemble des transformations de F laissant invariable chacune des multiplicités (6), forme alors un sous-groupe invariant de $F < F$, puisque F est transitif, et F est composé.

III.

La détermination de la classe s des groupes primitifs de degré n est un problème présentant certaines analogies avec le même problème dans la théorie des substitutions entre n lettres. Lie a montré (3), comme on l'a indiqué ci-dessus, que, comme pour la théorie des substitutions, la classe s était limitée en fonction de n.

Les théorèmes qui suivent révèlent de nouvelles analogies remarquables et intimes entre les notions de classe dans les deux théories des groupes finis continus de transformations et des groupes de substitutions, et donnent pour la première une interprétation géométrique; nous sommes toutefois obligés de modifier un peu la définition de la classe donnée par Lie.

On peut déduire, presque à titre de cas particulier, d'un théorème de Lie ce théorème :

---

(1) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 558.
(2) *Ibid.*, p. 555.
(3) *Ibid.*, p. 387, par exemple.

THÉORÈME I. — *Le groupe de transformations dérivé d'un groupe régulier* G [*c'est-à-dire à n variables et n paramètres essentiels* (1)] *et de son groupe réciproque ou conjoint* Γ *est un groupe primitif à la condition nécessaire et suffisante que* G *soit simple.*

Lie ne paraît pas avoir pensé à énoncer ce théorème, qui a un énoncé identique dans la théorie des substitutions (2), et nous ne croyons pas inutile d'en donner une démonstration directe et simple.

Soient

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_n \tag{7}$$

et

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_n \tag{8}$$

n transformations infinitésimales indépendantes correspondantes des deux groupes G et Γ, qui sont holoédriquement isomorphes, et

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_m \qquad (m < n) \tag{9}$$

un sous-groupe M de Γ.

Les m équations aux dérivées partielles

$$Z_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad Z_m = 0 \tag{10}$$

sont indépendantes, puisque Γ est régulier, et forment un système complet à m équations, puisque $(Z_i Z_j)$, $(i, j \leq m)$, appartient à M.

Soient $u_1, \ldots, u_{n-m}$, $n - m$ solutions indépendantes de (10). Les deux groupes G et Γ étant réciproques,

en particulier
$$(X_i Z_j) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$
$$(X_i Z_j) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m).$$

---

(1) D'après la définition de Lie.

(2) *Voir* FRATTINI, *Atti della R. A. dei Lincei* (Rendiconti, 19 marzo 1893) et nos Mémoires ci-après : *Thèse de Doctorat*, p. 31; *Quart. Journ. of Math.*, p. 119, 1894; et *Mém. des Sav. étrangers*, t. 32, n° 8, p. 53).

Donc le système complet (10) admet (¹) toutes les transformations du groupe G, c'est-à-dire que

$$(11) \qquad X_k u_\sigma = \omega_k(u_1, \ldots, u_{n-m}) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n-m).$$

G laisse alors invariante la division de l'espace

$$(12) \quad u_1 = \text{const.}, \qquad u_2 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad u_{n-m} = \text{const.},$$

et, par suite, est imprimitif.

Le sous-groupe M laisse invariante chacune des multiplicités de cette division ; supposons M invariant dans Γ : chaque transformation de Γ remplace chaque multiplicité de (12), par une multiplicité invariante par M, c'est-à-dire par une des multiplicités de (12); (12) est donc une division de l'espace invariante par Γ, et aussi par G, en sorte que le groupe dérivé de G et Γ est imprimitif.

Réciproquement, admettons que ce groupe dérivé soit imprimitif et laisse invariante une division

$$(12) \quad u_1 = \text{const.}, \qquad u_2 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad u_{n-m} = \text{const.}$$

de l'espace. Cette division est laissée invariante par G et Γ. D'après un théorème de Lie (²), on sait que le groupe transitif Γ renferme un sous-groupe M formé de l'ensemble des transformations de Γ qui laissent invariante une U_0 des multiplicités (12). Il y a une transformation T du groupe transitif G remplaçant U_0 par une quelconque U_1 des multiplicités (12), et transformant M en un groupe laissant U_1 immobile et qui coïncide avec M : M laisse invariante chacune des multiplicités (12), par suite est invariant dans Γ, qui n'est pas simple.

Nous avons indiqué, à propos du théorème correspondant dans la théorie des substitutions, une règle permettant de trouver la classe des groupes primitifs correspondants. Il est remarquable que l'on obtienne un énoncé analogue dans la théorie des groupes de transformations.

(¹) Lie, *Theorie der Trfgrup.*, p. 141.

(²) *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 481.

LEMME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe dérivé* F *d'un groupe régulier* G *et de son conjoint ou réciproque* Γ *renferme un groupe à un paramètre, dont les transformations finies laissent invariable un élément de multiplicité plane à* t *degrés de liberté et non à* $t+1$ *passant par un point de position générale, est que* G *renferme une transformation infinitésimale telle que le sous-groupe des transformations de* G *qui lui sont échangeables soit d'ordre* t.

En effet, conservons les notations précédentes : considérons le groupe transitif F dérivé de G et Γ. S'il y a ε transformations infinitésimales indépendantes de G échangeables à toutes les transformations de G, c'est-à-dire communes à G et Γ, F a $2n-\varepsilon$ paramètres indépendants, car on a alors, entre les transformations infinitésimales de G et Γ, ε relations linéaires indépendantes à coefficients constants; si G est simple, on a $\varepsilon = 0$. Toute transformation infinitésimale de F est alors de la forme g, γ ou $g+\gamma$, g et γ étant des transformations infinitésimales de g et γ respectivement.

Soit $g+\gamma$ une transformation infinitésimale de F laissant un point $Q_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de position générale immobile, c'est-à-dire d'ordre ou de classe ≥ 1. Le sous-groupe à un paramètre $g+\gamma$ laisse ce point immobile; car, si

$$X = g+\gamma = \sum_1^n \xi_i p_i,$$

ses tranformations sont

$$x_i' = x_i + \frac{t'}{1}\xi_i + \frac{t'^2}{1.2} X\xi_i + \ldots$$

avec (1) $\xi_i(x^0) = 0$.

Admettons que t soit l'ordre du sous-groupe T des transformations de G échangeables à g : T sera engendré par t transformations infinitésimales

$$X_1', \quad X_2', \quad \ldots, \quad X_t'$$

(1) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 75 et 189.

indépendantes; T contiendra g. Les transformations de T sont échangeables à celles des sous-groupes $g+\gamma$ et g. $X_1, \ldots, X_t$ remplacent respectivement Q_0 par les points infiniment voisins $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$. Ces points sont distincts; car, si Q_1 et Q_2 coïncidaient, par exemple, le produit de X_1 par X_2^{-1} laisserait invariable Q_0, alors que G étant régulier ne contient aucune transformation $\neq 1$ laissant un point de position générale invariable (1). Il en résulte de suite que le groupe $g+\gamma$ laisse invariables ces t points et tous ceux de l'élément de multiplicité plane définie par ces t points et par (2) Q_0.

Réciproquement, supposons que le groupe $g+\gamma$ laisse invariables $t+1$ points infiniment voisins distincts et de position générale Q_0, $Q_1, \ldots, Q_t$ définissant un élément de multiplicité plane à t degrés de liberté. On aura

$$g = \begin{pmatrix} Q_0, Q_1, \ldots, Q_t, \ldots \\ P_0, P_1, \ldots, P_t, \ldots \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} Q_0, Q_1, \ldots, Q_t, \ldots \\ P_0, P_1, \ldots, P_t, \ldots \end{pmatrix},$$

g et γ^{-1} étant ici des transformations finies.

Il existe toujours dans G une transformation infinitésimale g_1 remplaçant Q_0 par Q_1, par exemple. La transformation g_1 est de la forme

$$g_1 = \begin{pmatrix} Q_0, P_0, \ldots \\ Q_1, P_1', \ldots \end{pmatrix};$$

elle est échangeable à γ^{-1}, en sorte que $P_1' = P_1$. Alors $g_1^{-1} g g_1$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} Q_1, \ldots \\ P_1, \ldots \end{pmatrix},$$

---

(1) On le vérifie de suite en remarquant qu'une transformation laissant un pareil point immobile est échangeable aux transformations du conjoint ou réciproque, et se réduit à la transformation identique.

(2) Si $t=1$, on a un élément de droite; si $t=2$, un élément de plan; etc.

c'est-à-dire coïncide avec g, puisque G ne contient qu'une transformation remplaçant Q_1 par P_1.

Il en résulte que les t transformations infinitésimales $g_1, g_2, \ldots, g_t$, remplaçant Q_0 par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ respectivement, sont échangeables à g. Il en est de même alors de toutes les transformations

$$e_1 g_1 + \ldots + e_t g_t,$$

où $e_1, \ldots, e_t$ sont des paramètres arbitraires. Les transformations $g_1, \ldots, g_t$ sont, d'ailleurs, linéairement indépendantes, puisque les points $Q_1, \ldots, Q_t$ déterminent avec Q_0 un élément de multiplicité plane à t degrés de liberté. Donc le groupe des transformations de G échangeables à g est d'ordre $\geq t$. C. Q. F. D.

Remarque. — Le lemme précédent donne aussi la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe F contienne un groupe à un paramètre dont les transformations finies changent toute multiplicité passant par Q_0 et tangente en ce point à un élément plan convenablement choisi à t degrés de liberté en une multiplicité jouissant de la même propriété.

Ce qui précède va nous permettre d'indiquer d'une manière générale une limite supérieure de t pour le groupe F, quand G est simple.

En effet, il suffit d'avoir une limite supérieure approximative : le sous-groupe de G engendré par les transformations $g_1, g_2, \ldots, g_t$ est contenu dans un sous-groupe maximum H de G d'ordre η, et G est holoédriquement isomorphe à un groupe G′ de degré $n - \eta$, primitif; d'après un théorème de Lie déjà cité, la classe de G′ est limitée supérieurement en fonction de son degré, par suite aussi le nombre n de ses paramètres, c'est-à-dire que

$$n - \eta \geq \varphi(n),$$
$$t \leq \eta \leq \psi(n),$$

ψ étant une fonction qu'il est facile de calculer. On aura évidemment $\psi(n) < n$, et $\psi(n)$ est fonction croissante de n.

On arriverait à des résultats plus exacts en s'appuyant sur les travaux de MM. Killing et Cartan (1). M. Cartan a déterminé la structure de tous les groupes simples : il resterait à trouver pour chaque structure une limite supérieure de l'ordre des sous-groupes de chacun de ces groupes (2). Ce problème n'a pas été, croyons-nous, complètement traité par MM. Killing et Cartan (3). Nous n'insisterons donc pas.

Nous nous contenterons d'indiquer ce qu'on obtient quand G est isomorphe au groupe projectif général. Alors (4) $n = p(p+2)$, et

$$r_1 \leq p(p+1) = n - p = n + 1 - \sqrt{n+1}.$$

Le lemme précédent est important, parce qu'il permet de trouver la classe du groupe F.

Considérons d'une manière générale un groupe E de transformations de classe $s \geq 1$. E renferme une transformation infinitésimale

$$X = \sum_1^n \xi_i p_i,$$

laissant le point $Q_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de position générale immobile. Si X est de classe (ou d'ordre) 1, on a

$$\xi_i = \sum_1^n \nu g'_{i\nu}(x_\nu - x_\nu^0) + \ldots;$$

si X est de classe ≥ 2, on a

$$\xi_i = \sum_{\nu\pi}^{1\ldots n} g''_{i\nu\pi}(x_\nu - x_\nu^0)(x_\pi - x_\pi^0) + \ldots.$$

Le point Q, de coordonnées $x_\nu^0 + \zeta_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), est remplacé

(1) *Voir* CARTAN, *Thèse de Doct.*

(2) C'est encore là une recherche qui pourrait faire partie d'une Thèse.

(3) CARTAN, *loc. cit.*, p. 148.

(4) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 555 et 564.

par le point

$$x'_\nu = x^0_\nu + \zeta_\nu + e\,\xi_\nu(x^0 + \zeta) + \frac{e^2}{1.2}\mathrm{X}\xi_\nu + \ldots;$$

ζ_ν étant infiniment petit, si l'on opère sur ce point une transformation finie du groupe X.

On

$$\xi_i(x + \zeta) = \xi_i + \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\zeta_\nu + \ldots.$$

Si X est de classe 1, $\xi_i(x^0 + \zeta)$ serait, pour au moins une valeur de i, de l'ordre de $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, quand on suppose que $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ ne sont liés par aucune relation linéaire. Toute transformation finie de X remplace le point $x^0 + \zeta$ par un point infiniment voisin différent en général; ce point ne peut être laissé immobile par cette transformation que s'il existe entre les $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ certaines relations linéaires. Par conséquent, à une transformation $g + \gamma$, de classe 1 de F ne peut correspondre une transformation pour laquelle $t = n$.

Mais, si X est de classe $\geqq 2$, à des quantités près du deuxième ordre toute transformation finie du groupe X laisse invariable le point Q, c'est-à-dire tout point infiniment voisin de Q_0. Appliquant ceci au groupe F, on en conclut que F ne peut renfermer d'autres transformations infinitésimales $g + \gamma$ d'ordre $\geqq 2$ que celles pour lesquelles $t = n$, et g est échangeable à toutes les transformations de G : alors $g + \gamma$ appartient à Γ et est de classe 0.

Théorème II. — *Le groupe* F *dérivé d'un groupe régulier* G *et de son conjoint ou réciproque* Γ *est de classe* 1 *pour tout point de position générale, quand* $\mathrm{G} \neq \Gamma$, *et* 0 *si* $\mathrm{G} = \Gamma$, *c'est-à-dire si* G *est formé de substitutions échangeables.*

Avant d'aller plus loin, il convient de vérifier ce qui précède sur un exemple.

Prenons le groupe G′ projectif général à un paramètre, qui est simple. Il est engendré par les transformations

$$x' = \frac{a_1 + a_2 x}{1 + a_3 x}. \tag{13}$$

Considérons cette transformation S et la transformation T

$$x'' = \frac{b_1 + b_2 x'}{1 + b_3 x'}.$$

Nous aurons

$$x'' = \frac{b_1(1 + a_3 x) + b_2(a_1 + a_2 x)}{1 + a_3 x + b_3(a_1 + a_2 x)} = \frac{a'_1 + a'_2 x}{1 + a'_3 x}.$$

On en conclut

$$(14)\qquad \begin{cases} a'_1 = \dfrac{b_1 + b_2 a_1}{1 + b_3 a_1}, \\ a'_2 = \dfrac{b_1 a_3 + b_2 a_2}{1 + b_3 a_1}, \\ a'_3 = \dfrac{a_3 + b_3 a_2}{1 + b_3 a_1}. \end{cases}$$

Ce sont les transformations du premier groupe des paramètres (¹) du groupe projectif général, que nous prendrons pour G.

On obtiendra les transformations du deuxième groupe des paramètres de G′ en permutant a et b dans les formules précédentes; ce sont

$$(15)\qquad \begin{cases} a'_1 = \dfrac{a_1 + a_2 b_1}{1 + a_3 b_1}, \\ a'_2 = \dfrac{a_1 b_3 + a_2 b_2}{1 + a_3 b_1}, \\ a'_3 = \dfrac{b_3 + a_3 b_2}{1 + a_3 b_1}. \end{cases}$$

Nous le prendrons pour Γ; les deux groupes (14) et (15) sont réguliers, et l'un est le conjoint ou réciproque de l'autre.

Formons leurs transformations infinitésimales : en remarquant que la transformation identique du premier groupe correspond à

$$b_1 = b_3 = 0, \qquad b_2 = 1,$$

et posant $b_1 = \omega_1$, $b_3 = \omega_3$, $b_2 = 1 + \omega_2$, ω_1, ω_2, ω_3 étant infiniment

(¹) LIE, *Theorie der Trfgrup.*, t. I, p. 401.

petits, on obtient les transformations infinitésimales de G

$$(16)\qquad \begin{cases} g_1 = p_1 + a_2 p_2, \qquad g_2 = a_1 p_1 + a_2 p_2, \\ g_3 = a_2 p_2 - a_1(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3). \end{cases}$$

On vérifie sans peine que ces trois transformations engendrent un groupe isomorphe au groupe projectif général à un paramètre.

On obtient les transformations infinitésimales de Γ en remarquant que (15) se déduit de (14) par la substitution $(b_1 b_3)(a_1 a_3)(a'_1 a'_3)$; ce sont donc

$$(17)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = a_1 p_2 + p_3, \qquad \gamma_2 = a_2 p_2 + a_3 p_3, \\ \gamma_3 = a_2 p_1 - a_3(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3). \end{cases}$$

On vérifie directement que les transformations (17) sont échangeables aux transformations (16). Ces six transformations infinitésimales sont indépendantes et d'ordre o (¹); le groupe primitif Γ des transformations (16) et (17) est donc de classe ≤ 1 pour tout point de position générale.

On le vérifie sans peine; en effet, sinon on pourrait former une combinaison linéaire à coefficients constants des transformations g et γ, $\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3$ telle que ξ_1, ξ_2, ξ_3 ne contiennent, pour un point a''_1, a''_2, a''_3 de position générale, aucun terme des degrés o et 1 en $a_1 - a''_1$, $a_2 - a''_2$, $a_3 - a''_3$.

On aurait

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_1 \quad + c_2 a_1 \quad - c_3 a_1^2 \quad + c_6(a_2 - a_1 a_3), \\ \xi_2 &= c_1 a_3 + c_2 a_2 \quad - c_3 a_1 a_2 + c_4 a_1 + c_5 a_2 \quad - c_6 a_2 a_3, \\ \xi_3 &= \qquad c_3(a_2 - a_1 a_3) \quad + c_4 \quad + c_5 a_3 \quad - c_6 a_3^2. \end{aligned}$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 devraient s'annuler ainsi que leurs dérivées premières en a_1, a_2, a_3 pour $a_1 = a''_1$, $a_2 = a''_2$, $a_3 = a''_3$, ce qui donne

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0.$$

La combinaison linéaire est donc impossible.

(¹) Sauf pour les points du paraboloïde $a_2 - a_1 a_3 = 0$.

De plus, ici $t = 1$. F ne renferme aucun groupe à un paramètre dont les transformations finies laissent invariable un élément de plan passant par un point quelconque de position générale.

Nous avons vu tout à l'heure que, si X est d'ordre ≥ 2, les transformations finies du groupe X laissent invariable tout point Q infiniment voisin du point Q_0, aux infiniment petits près du deuxième ordre.

Plus généralement, si X est d'ordre $\geq \eta$, les transformations finies du groupe X laissent invariable le point Q, aux infiniment petits près du $\eta^{\text{ième}}$ ordre.

Ceci peut s'interpréter géométriquement; considérons une courbe

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t), \tag{18}$$

passant par le point Q_0 qui correspond à $t = 0$, et prenons dessus un point infiniment voisin correspondant à $t = t_1$. On aura, en posant

$$x_i + \zeta_i = \varphi_i(t),$$

$$\xi_i(x_1 + \zeta_1 \ldots, x_n + \zeta_n)$$
$$= \xi_i + \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\zeta_\nu + \frac{1}{2}\sum_1^n{}_\nu \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\nu}\zeta_\nu^2 + \sum_1^n{}_{\nu,\rho} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\nu \partial x_\rho}\zeta_\nu \zeta_\rho + \ldots.$$

L'ensemble des termes de ce développement de degré λ en $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ est un polynome entier dont les coefficients contiennent en facteur les dérivées $\lambda^{\text{ièmes}}$ de ξ_i par rapport à $x_1, \ldots, x_n$. Donc, pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0$, les termes de $\xi_i(x_1 + \zeta_1, \ldots, x_n + \zeta_n)$ sont de degré $\geq \eta$ en $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Alors, la transformation finie

$$x_\nu' = x_\nu + \varepsilon \xi_\nu + \frac{\varepsilon^2}{1.2} X\xi_\nu + \ldots,$$

remplace le point $x_\nu^0 + \zeta_\nu$ par

$$x_\nu'^0 = x_\nu^0 + \zeta_\nu + \varepsilon \xi_\nu(x_\nu^0 + \zeta_\nu) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} X\xi_\nu(x_\nu^0 + \zeta_\nu) + \ldots.$$

Or, si les termes de ξ_ν sont d'ordre $\geq \eta$ en $x_i - x_i^0$, ceux de $X\xi_\nu$ sont d'ordre $\geq 2\eta - 1$, ceux de $X^2\xi_\nu$ d'ordre $\geq 3\eta - 2, \ldots$, c'est-à-dire

d'ordre > 1 si $\gamma_1 = 1$ et $> \gamma_1$ si $\gamma_1 > 1$. Dès lors

$$x_\nu'' - (x_\nu^0 + \zeta_{\nu\nu}) = e\varpi_\nu$$

aux infiniment petits près d'ordre $\gamma_1 + 1$, ϖ_ν étant un polynome homogène de degré γ_1 en $\zeta_{\nu 1}, \ldots, \zeta_{\nu n}$ indépendant de e si $\gamma_1 > 1$. Si $\gamma_1 = 1$, on aura encore

$$x_\nu'' - (x_\nu^0 + \zeta_{\nu\nu}) = b_{\nu 1}\zeta_{\nu 1} + \ldots + b_{\nu n}\zeta_{\nu n} = \sum_k \varpi_k \zeta_{\nu k}(e),$$

où ϖ_k ne dépend (1) pas de e et est linéaire.

---

(1) Quand $\gamma_1 = 1$, $x_\nu'' - (x_\nu^0 + \zeta_{\nu\nu})$ ne peut être d'ordre supérieur au premier que si $\xi_\nu(x^0 + \zeta)$ l'est : on le voit en prenant e suffisamment petit, mais fini. Si

$$\xi_\nu(x) = \sum_1^n{}' \xi_{\nu\iota}(x_\iota - x_\iota^0) + \ldots, \qquad \xi_\nu(x^0 + \zeta) = \sum_1^n{}' \xi_{\nu\iota}\zeta_{\nu\iota} + \ldots,$$

et il faut

$$\sum_1^n{}' \xi_{\nu\iota}\zeta_{\nu\iota} = 0, \tag{18 bis}$$

aux infiniment petits près du deuxième ordre.

Réciproquement, si (18 *bis*) a lieu pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$, d'après les équations

$$X\zeta_{\nu\nu} = \sum_\iota{}' \zeta_{\nu\iota}\frac{\partial \xi_{\nu\nu}}{\partial x_\iota}, \qquad X^2\zeta_{\nu\nu} = \sum_{k\iota}{}' \zeta_{\nu k}\frac{\partial \xi_{\nu\iota}}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_{\nu\nu}}{\partial x_\iota}, \qquad \ldots,$$

qui ont lieu aux infiniment petits près du deuxième ordre, on a

$$\zeta_{\nu\nu} = 0, \qquad X\zeta_{\nu\nu} = 0, \qquad X^2\zeta_{\nu\nu} = 0, \qquad \ldots,$$

et $x_\nu'' - (x_\nu^0 + \zeta_{\nu\nu})$ est du deuxième ordre et de la forme

$$\sum_k \zeta_{\nu k}\varphi_{\nu k}(e) = \sum_k \varpi_k \varphi_{\nu k}(e)$$

avec

$$\varpi_k = \sum_1^n{}' \xi_{k\iota}\zeta_{\nu\iota}.$$

Exécutons alors la transformation finie X sur la courbe (18). Celle-ci est transformée en une courbe passant par le point Q_0. Le point infiniment voisin Q ou $x_\nu^0 + \zeta_\nu^0$ de Q_0 est transformé en un point $x_\nu'^0$ tel que $x_\nu'^0 - (x_\nu^0 + \zeta_\nu)$ soit du $\eta_1^{\text{ième}}$ ordre au moins. Donc la distance des deux points sera au moins du $\eta_1^{\text{ième}}$ ordre, et l'on peut dire :

Si une transformation infinitésimale X *est d'ordre* $\geq \eta_1$ *pour un point* Q_0 *de position générale, les transformations finies du groupe* X *changent toute courbe passant par le point* Q_0 *en une courbe ayant en ce point avec la première un contact d'ordre* $\eta_1 - 1$ *au moins.*

Il reste à voir à quelles conditions ce contact sera exactement d'ordre $\eta_1 - 1$. Il faudra d'abord pour cela que X soit exactement d'ordre η_1. Ce n'est pas tout : pour une valeur au moins de ν, $x_\nu' - (x_\nu^0 + \zeta_\nu)$ devra être de l'ordre de $\zeta_1^{\eta_1}$, si l'on suppose, par exemple, $\zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \ldots \geq \zeta_n$. L'un des polynomes $\varpi_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ au moins devra donc être de l'ordre de $\zeta_1^{\eta_1}$. Il n'en pourra être autrement que si l'on a simultanément, aux infiniment petits près d'ordre $\eta_1 + 1$,

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_n = 0. \tag{19}$$

Ceci ne pourra avoir lieu, d'après ce qu'on vient de dire, que pour des valeurs de $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ liées par n relations homogènes ; si ces relations sont indépendantes, elles seront incompatibles ; si elles ne sont pas indépendantes, les équations (19) seront celles d'une multiplicité ayant avec ses transformées par les transformations finies de X un contact d'ordre η_1. Cette multiplicité, composée de droites passant par Q_0, existera toujours dès qu'une des expressions ξ_i ne renfermera pas de termes de degré η_1 en $x_\nu - x_\nu^0$.

Nous en concluons le théorème suivant :

Théorème III (¹). — *La condition nécessaire et suffisante pour*

(¹) Bien que ce théorème soit sans doute connu en tout ou en partie, nous

que la transformation infinitésimale Xf soit d'ordre η_1 pour un point Q_0 de position générale est que les transformations finies du groupe X changent toute courbe passant par Q_0 en une courbe ayant avec la première en ce point un contact d'ordre $\eta - 1$.

Le contact ne sera d'ordre plus élevé que si la courbe a en Q_0 un contact d'ordre $\geq \eta_1$ avec une certaine multiplicité passant par Q_0, qui dépend de Xf, et qui peut ne pas exister.

Dans le cas où $\eta_1 = 1$, le contact d'une courbe C passant par Q_0, et de sa transformée, en Q_0, sera d'ordre 0, c'est-à-dire que les deux courbes ne seront pas tangentes en général; mais il sera d'ordre 1 et elles seront tangentes si la courbe C est tangente en Q_0 à une certaine multiplicité plane qui peut ne pas exister. L'élément de cette multiplicité plane qui passe en Q_0 peut donc être considéré comme invariant par les transformations finies de X. Nous avons vu un exemple de cette remarque à propos du théorème II et du lemme précédent.

Ce théorème conduit à une interprétation intéressante de la classe d'un groupe. En ce qui concerne les groupes primitifs, on peut formuler un théorème de Lie (1) ainsi qu'il suit, à titre de corollaire du théorème précédent :

COROLLAIRE. — Un groupe fini continu primitif de degré n ne contient aux environs du point de position générale Q_0 aucune transformation infinitésimale X telle que les transformations finies de X changent toute courbe passant par Q_0 en une courbe ayant avec elle en ce point un contact d'ordre supérieur à $2n$. S'il est de classe s aux environs de Q_0, il contient au moins une transformation infinitésimale X telle que les transformations finies de X changent toute courbe générale passant par Q_0 en une courbe ayant avec elle en ce point un contact d'ordre $s - 1$.

D'après ce qui précède, on pourrait classer les transformations d'un

---

l'avons indiqué parce qu'il est la suite naturelle de ce qui précède et à cause de son corollaire.

(1) *Theorie der Trfgrup.*, t. III, p. 313.

groupe non seulement en tenant compte de la classe de Lie, mais encore du nombre t de degrés de liberté de (19). On pourrait appeler *classe géométrique* du groupe le symbole $(s, 0)$, si 0 est le nombre maximum de degrés de liberté des multiplicités (19) correspondant aux transformations de classe s de G.

D'après ce qu'on a vu dans le cas du théorème II, ce symbole peut avoir des rapports plus intimes que la classe de Lie avec la classe des groupes de substitutions (¹).

Ce n'est là qu'une indication qui pourrait être utile ultérieurement.

(¹) Plus exactement, si n est le degré d'un groupe de substitutions, u sa classe, ce serait avec le nombre $n - u$: nous n'insistons pas.