

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GORDAN

Les invariants des formes binaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série, tome 6 (1900), p. 141-156.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__141_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Les invariants des formes binaires;***PAR M. GORDAN.**

Le système des formes binaires est fini. J'ai démontré ce théorème et M. Hilbert l'a étendu aux formes de n variables.

Dans cette Note, un théorème est donné, dont les autres découlent.

CHAPITRE PREMIER.**LES SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES DES PRODUITS.****I. — Les systèmes des produits.**

Les produits de n variables

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

forment un système S si les exposants sont liés par des relations

$$(1) \quad \Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \dots$$

Ces relations définissent S.

Premier exemple. — La formule

$$k_1 \equiv 0 \pmod{3}$$

définit le système

$$(S) \quad x_1^3, \quad x_1^6, \quad x_1^9, \quad \dots$$

Deuxième exemple. — La formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3}$$

définit le système

$$(S) \quad x_1^3, \quad x_1^4 x_2^2, \quad x_3^7 x_4^2, \quad \dots$$

Troisième exemple. — Les formules

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 > 0$$

définissent le système

$$(S) \quad x_1^2 x_2, \quad x_1 x_2 x_4^3, \quad x_1 x_3^2 x_4^3, \quad \dots$$

II. — Les systèmes élémentaires.

Il peut arriver que les produits T de S soient divisibles les uns par les autres. Si l'on néglige les produits T , qui sont divisibles par d'autres T , il reste un système partiel Σ ; il est appelé le *système élémentaire*, défini par les relations (1). Il contient les produits

$$(\Sigma) \quad P_1, \quad P_2, \quad \dots,$$

qui ont les propriétés suivantes :

1° Les exposants k satisfont aux relations (1);

2° Aucun P n'est divisible par un autre;

3° Chaque produit T de S est divisible par un au moins des P .

Premier exemple. — La formule

$$k_1 \equiv 0 \pmod{3}$$

définit le système élémentaire

$$(\Sigma) \quad x_1^3.$$

Deuxième exemple. — La formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3}$$

définit le système élémentaire

$$\begin{aligned} (2) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_1^3, x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1^2x_4, x_1x_2^2, x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3^2, x_1x_3x_4, x_1x_4^2, \\ (\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2^3, x_2^2x_3, x_2^2x_4, x_2x_3^2, x_2x_3x_4, x_2x_4^2, x_3^3, x_3^2x_4, x_3x_4^2, x_4^3. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ce sont les termes d'une forme quaternaire cubique dans l'ordre usuel. Je considère chacun d'eux comme *compliqué* par rapport à ceux qui le suivent et ces derniers comme plus *simples*; ainsi x_1^3 est le terme le plus simple et x_4^3 le terme le plus compliqué.

Troisième exemple. — Les formules

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 &\equiv 0 \pmod{3}, \\ k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_3 + k_2k_4 + k_3k_4 &> 0 \end{aligned}$$

définissent le système élémentaire

$$\begin{aligned} (3) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_1^2x_2, x_1^2x_3, x_1^2x_4, x_1x_2^2, x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3^2, x_1x_3x_4, x_1x_4^2, \\ (\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2^2x_3, x_2^2x_4, x_2x_3^2, x_2x_3x_4, x_2x_4^2, x_3^2x_4, x_3x_4^2. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

III. — Les indices des systèmes élémentaires.

Le nombre des produits, contenus dans le système élémentaire Σ , est appelé *l'indice* de Σ . Si ces produits sont composés par n variables, je représente cet indice par h_n . Si l'on a plusieurs systèmes élémentaires

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots,$$

je représente leurs indices par

$$h_{n,1}, \quad h_{n,2}, \quad h_{n,3}.$$

Si $n = 1$, on a

$$(4) \quad h_1 \leq 1.$$

Premier exemple. — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_1 \equiv 0 \pmod{3}$$

a l'indice $h_1 = 1$.

Deuxième exemple. — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3}$$

a l'indice $h_4 = 20$.

Troisième exemple. — Le système élémentaire défini par les formules

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 > 0$$

a l'indice $h_4 = 16$.

IV. — Des systèmes partiels du système élémentaire Σ .

Si le produit

$$P_1 = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$$

est contenu dans le système élémentaire Σ , on peut former les systèmes partiels

L_0

$P_1,$

L_1

$$x_1^g x_2^{k_2} x_3^{k_3} \dots x_n^{k_n} = x_1^g Q,$$

où

$$g \leq \lambda_1;$$

L_2

$$x_1^{k_1} x_2^{g-\lambda_1} x_3^{k_3} \dots x_n^{k_n} = x_2^{g-\lambda_1} Q,$$

où

$$\lambda_1 < g \leq \lambda_1 + \lambda_2;$$

L_3

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{g-\lambda_1-\lambda_2} x_4^{k_4} \dots x_n^{k_n} = x_3^{g-\lambda_1-\lambda_2} Q,$$

où

$$\lambda_1 + \lambda_2 < g \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3;$$

.....;

L_g

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{n-1}^{k_{n-1}} x_n^{g-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_{n-1}} = x_n^{g-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_{n-1}} Q,$$

où

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} < g.$$

Leur nombre est

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1 + \rho.$$

Premier exemple. — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_i \equiv 0 \pmod{3}$$

n'a pas de systèmes partiels.

Deuxième exemple. — Le système élémentaire défini par la formule

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3}$$

a les systèmes partiels

L_1

$$P_1 = x_1^3,$$

L_2

$$x_1^2 x_2, \quad x_1^2 x_3, \quad x_1^2 x_4,$$

L_3

$$x_1 x_2^2, \quad x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2,$$

L_4

$$x_2^3, \quad x_2^2 x_3, \quad x_2^2 x_4, \quad x_2 x_3^2, \quad x_2 x_3 x_4, \quad x_2 x_4^2, \quad x_3^3, \quad x_3^2 x_4, \quad x_3 x_4^2, \quad x_4^3.$$

Troisième exemple. — Le système élémentaire défini par les formules

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3},$$

$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 > 0$$

a les systèmes partiels

$$\begin{array}{ll} L_0 & P_1 = x_1^2 x_2, \\ L_1 & x_1 x_2^2, \quad x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2, \\ L_2 & x_2^2 x_3, \quad x_2^2 x_4, \quad x_2 x_3^2, \quad x_2 x_3 x_4, \quad x_2 x_4^2, \quad x_3^2 x_4, \quad x_3 x_4^2, \\ L_3 & x_1^2 x_3, \quad x_1^2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2, \quad x_3^2 x_4, \quad x_3 x_4^2. \end{array}$$

V. — Relation pour l'indice h_n .

Si le produit

$$P = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

est contenu dans Σ et diffère de

$$P_1 = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n},$$

il n'est pas divisible par P_1 ; il a du moins un exposant

$$k_\sigma < \lambda_\sigma$$

et est contenu dans le système partiel L_g , où

$$k_\sigma = g - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{\sigma-1}.$$

Tous les P de Σ sont contenus dans les L . Si l'on représente le nombre de produits contenus dans L_g par l_g , on a

$$(5) \quad h_n \leq 1 + l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_p.$$

Premier exemple.

$$(5) \quad h_1 \leq 1, \quad l_g = 0.$$

Deuxième exemple.

$$(5) \quad h_4 = 20, \quad l_1 = 3, \quad l_2 = 6, \quad l_3 = 10, \quad 20 = 1 + 3 + 6 + 10.$$

Troisième exemple.

$$(5) \quad h_4 = 16, \quad l_1 = 6, \quad l_2 = 7, \quad l_3 = 7, \quad 16 < 1 + 6 + 7 + 7.$$

VI. — Les systèmes correspondants.

Les produits situés dans le système partiel L_g sont de la forme

$$L_g \quad x'_\sigma Q_1, \quad x'_\sigma Q_2, \quad x'_\sigma Q_3, \quad \dots,$$

et aucun d'eux n'est divisible par un autre. Le système

$$\Sigma_g \quad Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad \dots$$

correspond au système L_g .

Les Q ne sont composés que par les $n - 1$ variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_{\sigma-1}, \quad x_{\sigma+1}, \quad \dots, \quad x_n;$$

aucun d'eux n'est divisible par un autre. Les exposants k des Q sont assujettis à des relations

$$(1_a) \quad H_1, \quad H_2, \quad \dots$$

dérivées des relations

$$(1) \quad \Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \dots$$

Les Σ_g sont des systèmes élémentaires, définis par les relations (1_a) .

Premier exemple. — Comme il n'y a aucun L_g , il n'y a pas non plus de systèmes correspondants Σ_g .

Deuxième exemple. — Aux systèmes partiels

$$L_1 \quad x_1^2 x_2, \quad x_1^2 x_3, \quad x_1^2 x_4,$$

$$L_2 \quad x_1 x_2^2, \quad x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2,$$

$$L_3 \quad x_2^3, \quad x_2^2 x_3, \quad x_2^2 x_4, \quad x_2 x_3^2, \quad x_2 x_3 x_4, \quad x_2 x_4^2, \quad x_3^3, \quad x_3^2 x_4, \quad x_3 x_4^2, \quad x_4^3,$$

correspondent les systèmes élémentaires

$$\Sigma_1 \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

$$\Sigma_2 \quad x_2^2, \quad x_2 x_3, \quad x_2 x_4, \quad x_3^2, \quad x_3 x_4, \quad x_4^2,$$

$$\Sigma_3 \quad x_2^3, \quad x_2^2 x_3, \quad x_2^2 x_4, \quad x_2 x_3^2, \quad x_2 x_3 x_4, \quad x_2 x_4^2, \quad x_3^3, \quad x_3^2 x_4, \quad x_3 x_4^2, \quad x_4^3,$$

ils sont définis par les relations

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 & \text{par} & k_2 + k_3 + k_4 \equiv 1 \pmod{3}, \\ \Sigma_2 & \text{»} & k_2 + k_3 + k_4 \equiv 2 \pmod{3}, \\ \Sigma_3 & \text{»} & k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3}. \end{array}$$

Troisième exemple. — Aux systèmes partiels

$$\begin{array}{lll} L_1 & x_1 x_2^2, & x_1 x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2, \\ L_2 & x_2^2 x_3, & x_2^2 x_4, \quad x_2 x_3^2, \quad x_2 x_3 x_4, \quad x_2 x_4^2, \quad x_3^2 x_4, \quad x_3 x_4^2, \\ L_3 & x_4^2 x_3, & x_4^2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2, \quad x_3^2 x_4, \quad x_3 x_4^2, \end{array}$$

correspondent les systèmes élémentaires

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 & x_2^2, & x_2 x_3, \quad x_2 x_4, \quad x_3^2, \quad x_3 x_4, \quad x_4^2, \\ \Sigma_2 & x_2^2 x_3, & x_2^2 x_4, \quad x_2 x_3^2, \quad x_2 x_3 x_4, \quad x_2 x_4^2, \quad x_3^2 x_4, \quad x_3 x_4^2, \\ \Sigma_3 & x_4^2 x_3, & x_4^2 x_4, \quad x_1 x_3^2, \quad x_1 x_3 x_4, \quad x_1 x_4^2, \quad x_3^2 x_4, \quad x_3 x_4^2; \end{array}$$

ils sont définis par les relations

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 & \text{par} & k_2 + k_3 + k_4 \equiv 2 \pmod{3}, \\ \Sigma_2 & & \left\{ \begin{array}{l} k_2 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3}, \\ k_2 k_3 + k_2 k_4 + k_3 k_4 > 0 \end{array} \right. \\ \Sigma_3 & \text{»} & \left\{ \begin{array}{l} k_1 + k_3 + k_4 \equiv 0 \pmod{3}, \\ k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_3 k_4 > 0 \end{array} \right. \end{array}$$

VII. — Relations entre les indices de plusieurs systèmes.

Le nombre des produits P contenus dans L_g égale celui des produits Q contenus dans Σ_g

$$l_g = h_{n-1,g}.$$

Aux formules (5) correspondent les formules

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_n \leq 1 + h_{n-1,1} + h_{n-1,2} + \dots + h_{n-1,\rho}, \\ h_1 \leq 1, \\ 20 = 1 + 3 + 6 + 10, \\ 16 < 1 + 6 + 7 + 7. \end{array} \right.$$

VIII. — Les indices des systèmes élémentaires sont des nombres finis.

Démonstration. — $h_1 \leq 1$ est un nombre fini. Les nombres

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_2 \leq 1 + h_{1,1} + h_{1,2} + \dots + h_{1,\rho_1}, \\ h_3 \leq 1 + h_{2,1} + h_{2,2} + \dots + h_{2,\rho_2}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

sont aussi des nombres finis.

Les nombres ρ sont définis § IV par les degrés de produits quelconques contenus dans les Σ .

CHAPITRE II.

LES SYSTÈMES ÉLÉMENTAIRES DES FONCTIONS HOMOGÈNES.

I. — L'ordre des termes d'une fonction homogène.

Les termes d'une fonction homogène f de n variables sont des produits

$$P = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Nous les supposons écrits dans un ordre tel que chacun d'eux précède ceux qui sont plus simples. Le premier terme P_1 est le plus compliqué. Si l'on pose

$$f = c_1 P_1 + \chi,$$

les termes de χ sont plus simples que P_1 .

II. — L'ordre des fonctions homogènes.

Nous classerons les fonctions homogènes

$$f_1, f_2, \dots$$

d'après leurs degrés, les f des degrés inférieurs précédant celles des degrés supérieurs. Les formes du même degré sont arrangées d'après leurs premiers termes.

Celles dont les premiers termes sont simples précèdent celles dont les premiers termes sont plus compliqués.

Cet ordre est inverse de l'ordre des termes dans une fonction homogène. Les formes f étant ainsi ordonnées, nous considérerons chacune d'elles comme plus *simple* que celles qui la suivent.

III. — Le système S de fonctions homogènes.

Des relations

$$\Theta_1, \Theta_2, \dots,$$

qui lient les coefficients des fonctions homogènes, définissent un système (S) constitué par l'ensemble des fonctions homogènes

$$(S) \quad f_1, f_2, \dots$$

dont les coefficients satisfont à ces relations. Les f de (S) sont arrangées d'après le n° II. Des systèmes dont les fonctions homogènes sont simples sont appelés *simples*.

IV. — Des systèmes dérivés.

D'un système donné de fonctions homogènes

$$(S) \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots,$$

on peut faire dériver d'autres systèmes

$$(8) \quad \begin{cases} \eta_1 = \varphi_1, \\ \eta_2 = A_{21} \varphi_1 + \varphi_2, \\ \eta_3 = A_{31} \varphi_1 + A_{32} \varphi_2 + \varphi_3, \\ \eta_4 = A_{41} \varphi_1 + A_{42} \varphi_2 + A_{43} \varphi_3 + \varphi_4, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Les A sont des fonctions quelconques, qui font les fonctions η homogènes.

V. — Réduction des systèmes dérivés.

Il peut arriver que, parmi les η d'un système dérivé M

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_3, \quad \dots,$$

il y ait deux fonctions (n° I)

$$\eta_\lambda = c_\lambda P_\lambda + \chi_\lambda,$$

$$\eta_\mu = c_\mu P_\mu + \chi_\mu,$$

telles que le premier terme P_λ de η_λ soit divisible par le premier terme P_μ de η_μ

$$P_\lambda = R P_\mu.$$

Dans ce cas je forme l'agrégat

$$(9) \quad \overline{\eta}_\lambda = \eta_\lambda - \frac{c_\lambda}{c_\mu} R \eta_\mu = \chi_\lambda - \frac{c_\lambda}{c_\mu} R \chi_\mu,$$

et je le substitue au lieu de η_λ dans le système M .

Soit M_1 le système qui résulte de cette substitution.

$\overline{\eta}_\lambda$ et M_1 sont plus simples que η_λ et M . M est réduit à M_1 par la substitution (9). Si l'on a

$$(10) \quad \overline{\eta}_\lambda = 0,$$

le système M_1 contient une fonction de moins que M .

Dans ce cas on a, d'après (8),

$$(11) \quad 0 = A_{\lambda 1} \varphi_1 + A_{\lambda 2} \varphi_2 + \dots + A_{\lambda, \lambda-1} \varphi_{\lambda-1} + \varphi_{\lambda},$$

c'est-à-dire φ_{λ} est un agrégat de fonctions φ plus simples.

VI. — Le système irréductible N.

Si l'on continue le procédé de réduction, on arrive à un système irréductible

$$(N) \quad f_1, f_2, \dots$$

Les premiers termes des fonctions f sont des produits

$$P_1, P_2, \dots,$$

dont aucun n'est divisible par un autre. Ils forment un système élémentaire Σ . Soit h son indice. Le système N contient h fonctions

$$(N) \quad f_1, f_2, \dots, f_h.$$

VII. — Le système élémentaire L.

Si le nombre h est inférieur au nombre des fonctions φ , on peut réduire par la formule (11) tous les φ à des fonctions plus simples, excepté h fonctions. Représentons par Φ ces fonctions qui restent. Le système

$$(L) \quad \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_h$$

est appelé le *système élémentaire* défini par les relations

$$\Theta_1, \Theta_2, \dots$$

VIII. — Le théorème de Hilbert.

Tous les φ , excepté les Φ , sont des agrégats de fonctions φ plus simples. En continuant cette réduction, on arrive à la formule

$$(12) \quad \varphi = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 + \dots + c_h \Phi_h.$$

CHAPITRE III.

APPLICATION AUX INVARIANTS.

I. — Transformation des formes binaires.

La forme binaire

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \dots$$

est transformée par la substitution

$$(13) \quad \begin{cases} x_1 = \xi_1 y_1 + \eta_1 y_2 \\ x_2 = \xi_2 y_1 + \eta_2 y_2 \end{cases}$$

dans la forme

$$f = A_0 y_1^n + \binom{n}{1} A_1 y_1^{n-1} y_2 + \binom{n}{2} A_2 y_1^{n-2} y_2^2 + \dots$$

Le déterminant de la substitution est

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix},$$

et les coefficients A sont les polaires de f par rapport aux variables ξ, η .

II. — Développement en séries.

Chaque fonction homogène $F(x, y)$ de deux séries de variables cogrédientes

$$x_1, x_2 \quad \text{et} \quad y_1, y_2$$

peut être développée en une série dont les termes sont des produits des puissances de

$$(xy) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

et des polaires des covariants élémentaires de F . En posant symboliquement, si x et y ont le même degré dans F ,

$$F(x, y) = r_x^m s_y^m,$$

on a la série

$$(14) \quad F = \sum_k \frac{\binom{m}{k}^2}{\binom{2m-k+1}{k}} (\overline{r, s})_{y^k}^{m-k} (xy)^k.$$

III. — Le système élémentaire des invariants.

Les invariants i de f sont des fonctions entières homogènes φ des coefficients

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Les coefficients de φ satisfont aux relations

$$\Theta_1, \Theta_2, \dots,$$

qui sont dérivées des équations partielles différentielles des invariants. Supposons le système élémentaire L des φ formé des invariants

$$(L) \quad I_1, I_2, \dots, I_h.$$

Chaque invariant i a, d'après le théorème de Hilbert, la forme

$$(15) \quad i = c_1(a)I_1 + c_2(a)I_2 + \dots + c_h(a)I_h.$$

Les $c(a)$ sont des fonctions des a , qui font l'expression homogène.

IV. — Transformation de la formule (15).

Les invariants i de f obtiennent par la substitution (13) des puissances de Δ en facteurs.

Si les invariants

$$i, \quad I_1, \quad I_2, \quad I_3, \quad \dots, \quad I_h$$

ont les poids

$$\nu, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad \nu_3, \quad \dots, \quad \nu_h;$$

ils obtiennent les facteurs

$$\Delta^\nu, \quad \Delta^{\nu_1}, \quad \Delta^{\nu_2}, \quad \Delta^{\nu_3}, \quad \dots, \quad \Delta^{\nu_h}.$$

La formule (15) est transformée par la substitution (13) en

$$(16) \quad \Delta^\nu i = c_1(A) \Delta^{\nu_1} I_1 + c_2(A) \Delta^{\nu_2} I_2 + \dots + c_h(A) \Delta^{\nu_h} I_h.$$

V. — Simplification de la formule (16).

Les $c_g(A)$ sont des fonctions des polaires A et ils sont des covariants de f . En posant symboliquement

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_g(A) = r_{g,\xi}^{\nu-\nu_g} s_{g,\eta}^{\nu-\nu_g}, \\ \frac{1}{\nu-\nu_g} (\overline{r_g, s_g})^{\nu-\nu_g} = B_g, \end{array} \right.$$

la formule (16) devient

$$\Delta^\nu i = r_{1,\xi}^{\nu-\nu_1} s_{1,\eta}^{\nu-\nu_1} \Delta^{\nu_1} I_1 + r_{2,\xi}^{\nu-\nu_2} s_{2,\eta}^{\nu-\nu_2} \Delta^{\nu_2} I_2 + \dots + r_{h,\xi}^{\nu-\nu_h} s_{h,\eta}^{\nu-\nu_h} \Delta^{\nu_h} I_h.$$

En substituant, au lieu des

$$r_{g,\xi}^{\nu-\nu_g} s_{g,\eta}^{\nu-\nu_g},$$

leurs séries (14), on obtient une équation identique en Δ de degré ν .
En comparant les coefficients de Δ^ν , on obtient

$$(18) \quad \Delta^\nu = B_1 i_1 + B_2 i_2 + \dots + B_h i_h.$$

VI. — Les invariants i sont des fonctions entières des I .

Démonstration. — En arrangeant les invariants i selon leurs degrés, les invariants des degrés inférieurs précèdent et les invariants des degrés supérieurs succèdent.

En voulant représenter i en fonction entière des I , les invariants B_g sont déjà exprimés

$$B_g = F_g(I).$$

Si nous substituons ces valeurs dans (18), nous obtenons

$$i = F_1(I)I_1 + F_2(I)I_2 + \dots + F_h(I)I_h = F(I).$$

