

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL GORDAN

Le résultant de trois formes ternaires quadratiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série, tome 3 (1897), p. 195-201.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1897_5_3__195_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Le résultant de trois formes ternaires quadratiques;

PAR M. PAUL GORDAN.

Soient données trois formes ternaires

$$f, f_1, f_2$$

et m, n, p leurs degrés dans les variables x ; le résultant R est une fonction entière des coefficients, qui a les degrés np, mp, mn .

Soient

$$u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, u_{\alpha_3}, \dots, u_{\alpha_{np}}$$

les points d'intersection de f_1 et f_2 ; on sait que le résultant R a la valeur

$$R = f(\alpha_1) f(\alpha_2) \dots f(\alpha_{np}).$$

Dans cette expression de R , les coefficients de f entrent rationnellement; les coefficients de f_1 et f_2 y figurent implicitement dans les α : il s'agit de la transformer de manière que les coefficients de f_1 et de f_2 paraissent aussi rationnellement.

Pour résoudre cette question, je me sers du théorème de réciprocity de M. Hermite.

Je commence en établissant le système de f et en formant les produits symboliques

$$P_1, P_2, \dots, P_p,$$

qui sont les covariants et invariants, etc., asyzygétiques de f , qui ont dans les coefficients le degré np .

Dans ces produits, je remplace les symboles $a, b, c, \dots$ de f par les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{np}$ et les variables x, u par les variables u, x . Dans les produits, qui résultent, je permute les indices 1, 2, ..., np et fais l'addition. De cette manière, on obtient des covariants, invariants, etc., Q simultanés et symétriques des formes linéaires α .

Les formes P , qui ont les degrés λ et μ dans les variables x et u , vont être combinées avec les formes Q , qui ont les degrés μ et λ , de manière que l'on obtienne des invariants U ,

$$U_1, U_2, \dots, U_\sigma.$$

Le résultant R peut alors être représenté par un agrégat,

$$R = c_1 U_1 + c_2 U_2 + \dots + c_\sigma U_\sigma,$$

où les c sont des coefficients numériques.

Les produits Q sont des covariants, invariants, etc., simultanés (combinants et semicombinants) des formes f_1 et f_2 ; un grand nombre peuvent être remplacés par les covariants, invariants, etc., de la forme

$$v = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \dots u_{\alpha_{np}}.$$

Dans le cas

$$n = p = 2 \quad \text{et} \quad m > 3;$$

ce fait a lieu pour tous les Q et dans le cas

$$n = p = 2 \quad \text{et} \quad m = 2 \text{ ou } 3,$$

il a lieu pour tous les Q , excepté une forme.

Pour calculer les coefficients numériques c , on peut remplacer les formes f, f_1, f_2 par des formes spéciales. Il est avantageux de remplacer la forme f par le produit de m formes linéaires.

Pour donner un exemple de nos procédés, je veux calculer de cette manière le résultant de trois formes ternaires quadratiques.

I. — Les combinaisons (P, Q).

Le résultant R des formes

$$f = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = d_x^2, \quad f_1 = r_x^2 = r_{1,x}^2, \quad f_2 = s_x^2 = s_{1,x}^2$$

est un invariant simultané de ces formes, qui a le degré 4 dans leurs coefficients.

Les trois formes ont les systèmes

$$\begin{array}{lll} f, & (abu)^2 = A, & a_A^2 = D, \\ f_1, & (rr_1u)^2 = R, & r_R^2 = D, \\ f_2, & (ss_1u)^2 = S, & s_S^2 = D; \end{array}$$

il faut les combiner.

Soient

$$u_{\alpha_1}, \quad u_{\alpha_2}, \quad u_{\alpha_3}, \quad u_{\alpha_4}$$

les points d'intersection de f_1 et f_2 .

R a la valeur

$$(1) \quad R = a_{\alpha_1}^2 b_{\alpha_1}^2 c_{\alpha_1}^2 d_{\alpha_1}^2;$$

il faut le transformer pour que les coefficients de f , f_1 , f_2 y entrent rationnellement.

Les produits symboliques asyzygétiques, qui sont invariants, etc. de f et qui ont le degré 4 dans ses coefficients, sont

$$\begin{array}{ll} P_1 = a_x^2 b_x^2 c_x^2 d_x^2, & P_2 = (abu)^2 c_x^2 d_x^2, \\ P_3 = (abu)^2 (cdx)^2, & P_4 = (abc)^2 d_x^2. \end{array}$$

On en déduit les formes simultanées symétriques des quatre formes

linéaires α :

$$\begin{aligned} Q_1 &= u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_2}^2 u_{\alpha_3}^2 u_{\alpha_4}^2, \\ Q_2 &= (\alpha_1 \alpha_2 x)^2 u_{\alpha_2}^2 u_{\alpha_1}^2 + (\alpha_1 \alpha_3 x)^2 u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_2}^2 + (\alpha_1 \alpha_4 x)^2 u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_3}^2 \\ &\quad + (\alpha_2 \alpha_3 x)^2 u_{\alpha_3}^2 u_{\alpha_2}^2 + (\alpha_2 \alpha_4 x)^2 u_{\alpha_1}^2 u_{\alpha_3}^2 + (\alpha_3 \alpha_4 x)^2 u_{\alpha_2}^2 u_{\alpha_3}^2, \\ Q_3 &= (\alpha_1 \alpha_2 x)^2 (\alpha_3 \alpha_4 x)^2 + (\alpha_1 \alpha_3 x)^2 (\alpha_2 \alpha_4 x)^2 + (\alpha_1 \alpha_4 x)^2 (\alpha_2 \alpha_3 x)^2, \\ Q_4 &= (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_1)^2 u_{\alpha_1}^2 + (\alpha_1 \alpha_3 \alpha_1)^2 u_{\alpha_2}^2 + (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1)^2 u_{\alpha_3}^2 + (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^2 u_{\alpha_4}^2. \end{aligned}$$

Comme le résultant est un invariant simultané de f et des formes linéaires α , il est un agrégat des combinaisons des P et Q ,

$$(2) \quad R = c_1(P_1, Q_1)_{0,3} + c_2(P_2, Q_2)_{0,1}^{2,0} + c_3(P_3, Q_3)_{0,1}^{1,0} + c_4(P_4, Q_4)_{0,2},$$

les c y sont des coefficients numériques.

Il y a deux opérations à exécuter :

1° Il faut transformer les Q , pour qu'ils contiennent les coefficients de f_1 et f_2 rationnellement;

2° Il faut calculer les coefficients numériques c .

II. — Transformation des Q .

Les Q sont invariants, covariants, etc. (combinants) de f_1 et f_2 ; ils peuvent être exprimés en fonctions entières des formes du système simultané.

Ce système a entre autres formes celles-ci :

$$\begin{aligned} (rst)^2 &= T, & s_R^2 &= D_1, & r_s^2 &= D_2, \\ r &= RS - T^2, & g &= (TTx)^2, \\ \mu &= \begin{vmatrix} R & D & D_1 \\ T & D_1 & D_2 \\ S & D_2 & D_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Les formes r et μ ont, à un facteur constant près, qui peut être sup-

primé, les valeurs

$$v = u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} u_{\alpha_3} u_{\alpha_4}, \quad \mu = Q_1.$$

La dernière formule peut être démontrée par le fait que Q_1 est du degré 2 dans les variables u et par les formules

$$(r, Q_1)_{0,2} = 0, \quad (s, Q_1)_{0,2} = 0.$$

La forme Q_1 a la valeur

$$Q_1 = v^2.$$

v est un covariant simultané des formes linéaires α ; les covariants et invariants de v le sont aussi. $(vv, x)^2 u_v^2 u_{v_1}^2$ est un agrégat de Q_2 et $Q_3 u_v^2$, et $(vv, x)^4$ est, à un facteur constant près, Q_3 .

Il est donc permis de remplacer dans la formule (2) les formes Q par

$$v^2, \quad (vv, x)^2 u_v^2 u_{v_1}^2, \quad (vv, x)^4, \quad \mu.$$

De cette manière, nous arrivons à un agrégat de combinaisons; en remplaçant chacune d'elles par un produit symbolique équivalent, la valeur de R devient

$$(3) \quad R = c_1 (a_v^2 b_v^2)^2 + c_2 (ab \widehat{vv_1})^2 a_v^2 b_v^2 + c_3 (ab \widehat{vv_1})^2 (cd \widehat{vv_1})^2 + c_4 \Delta a_\mu^2.$$

Voilà une formule dans laquelle les coefficients de toutes les trois formes entrent rationnellement.

Il reste à calculer les coefficients numériques c , en introduisant pour f, f_1, f_2 des formes spéciales.

Pour trouver c_1, c_2, c_3 , nous choisissons pour f le produit de deux facteurs linéaires, et pour trouver c_4 nous prenons pour f la forme $v_x^2 + \lambda g_x^2$ et pour f_1 et f_2 des formes dont les invariants satisfont aux relations

$$D = D_3 = 1, \quad D_1 = D_2 = 0.$$

III. — Calcul de c_1, c_2, c_3 .

En posant $f = p_x q_x$, on a $\Lambda = -\frac{1}{2}(pqu)^2, \Delta = 0$,

$$p_v^1 q_v^1 = c_1 (p_v^2 q_v^2)^2 - \frac{1}{2} c_2 \left(pq \widehat{cv}_1 \right)^2 p_v q_v p_{v_1} q_{v_1} + \frac{1}{3} c_3 \left(pq \widehat{cv}_1 \right)^3,$$

et en comparant les coefficients des termes $p_v^1 q_v^1, (p_v^2 p_{v_1} q_{v_1}^2 q_v), (p_v^2 q_v^2)^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c_3 &= 1, & c_2 + 2c_3 &= 0, & c_1 + c_2 + \frac{3}{2} c_3 &= 0, \\ c_3 &= 2, & c_2 &= -4, & c_1 &= 1. \end{aligned}$$

La formule (3) devient

$$(4) \quad R = (a_v^2 b_v^2)^2 - 4 \left(ab \widehat{cv}_1 \right)^2 c_v^2 d_{v_1}^2 + 2 \left(ab \widehat{cv}_1 \right)^2 \left(cd \widehat{cv}_1 \right)^2 + c_1 \Delta a_v^2.$$

IV. — Calcul de c_4 .

$$f = r_v^2 + \lambda g_v^2, \quad D = D_3 = 1, \quad D_1 = D_2 = 0.$$

En comparant le coefficient de λ , on a

$$(5) \quad \begin{cases} 0 = r_v^2 g_v^2 \cdot r_{1,v}^2 r_{2,v}^2 - 2 \left(cv_1 \widehat{rg} \right)^2 r_{1,v}^2 r_{2,v_1}^2 - 2 (cv_1 R)^2 r_v^2 g_{v_1}^2 \\ \quad + 2 (cv_1 R)^2 \left(cv_1 \widehat{rg} \right)^2 + \frac{1}{3} c_4 g_v^2; \end{cases}$$

nous voulons calculer les valeurs de ces produits symboliques. Partant des formules générales

$$\begin{aligned} 3(RR_1 x)^2 &= 4Dr, & 3(RTx)^2 &= 3D_1 r + Ds, \\ 3(SS_1 x)^2 &= 4D_3 s, & 3(STx)^2 &= D_3 r + 3D_2 s, \\ D_2 r + D_1 s &= \frac{1}{2} (RSx)^2 + (TT_1 x)^2, & (TT_1 x)^2 &= g, \end{aligned}$$

$$v = RS - T^2, \quad \mu = \begin{vmatrix} R & D & D_1 \\ T & D_1 & D_2 \\ S & D_2 & D_3 \end{vmatrix},$$

on trouve dans notre cas

$$\begin{aligned}
 r_s^2 &= r_T^2 = s_R^2 = s_T^2 = 0, & \mu &= -T, \\
 (RR_1x)^2 &= \frac{1}{3}r, & (RTx)^2 &= \frac{1}{3}s, & (STx)^2 &= \frac{1}{3}r, \\
 (SS_1x)^2 &= \frac{1}{3}s, & (RSx)^2 &= -2g, \\
 (gru)^2 &= -\frac{1}{6}S, & g_R^2 &= 0, & g_S^2 &= 0, & g_T^2 &= -\frac{1}{6}, & g_u^2 &= \frac{1}{6}, \\
 (TT, T_2)^2 &= -\frac{1}{6}, & (gg_1u)^2 &= -\frac{2}{9}T, \\
 u_v^2 v_v^2 &= \frac{1}{2}Rc_R^2 + \frac{1}{2}Sc_R^2 - Tc_T^2 + (guv)^2, & r_v^2 u_v^2 &= \frac{1}{3}S, & s_v^2 u_v^2 &= \frac{1}{3}R, \\
 g_v^2 u_v^2 &= -\frac{1}{18}T, & r_v^2 s_v^2 &= \frac{1}{3}, & r_v^2 g_v^2 &= 0, & r_v^2 r_{1,v}^2 (cv_1x)^2 &= \frac{1}{27}s, \\
 r_v^2 g_v^2 (cv_1x)^2 &= -\frac{1}{162}r, & (vRx)^2 (vSx)^2 &= -\frac{7}{92}rs, \\
 r_v^2 r_{1,v}^2 (\widehat{cv_1rg})^2 &= -\frac{2}{81}, & r_v^2 g_v^2 (cv_1R)^2 &= -\frac{1}{162}, \\
 (cv_1R)^2 (\widehat{cv_1rg})^2 &= -\frac{7}{162}.
 \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans la formule (5), on trouve

$$0 = \frac{1}{81} + \frac{1}{81} - \frac{7}{81} + \frac{1}{27}c_1, \quad c_1 = \frac{16}{27},$$

et la formule (4) devient

$$(6) \quad R = (a_v^2 b_v^2)^2 - 4(\widehat{cv_1ab})^2 a_v^2 b_v^2 + 2(\widehat{cv_1ab})^2 (\widehat{cv_1cd})^2 + \frac{16}{27} \Delta a_v^2.$$

