JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE BOREL

Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 2 (1896), p. 441-451.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__441_0>

Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure;

PAR M. ÉMILE BOREL.

Étant donnée une série de Taylor, il est intéressant de savoir si elle peut être prolongée en quelque manière au delà de son cercle de convergence ou si ce cercle est une coupure; à cette question peut se ramener la suivante, non moins importante : une fonction de variable réelle donnée par son développement en série trigonométrique est-elle ou non analytique (¹)? Il est bien clair que ces questions sont de la nature de celles dont on ne peut espérer une solution complète, c'est-à-dire permettant sûrement de traiter un cas particulier quelconque : tout ce que l'on peut espérer, c'est, d'une part, transformer la condition nécessaire et suffisante qu'il est aisé d'énoncer et lui donner une forme plus immédiatement applicable — il ne faut pas se dissimuler cependant qu'une telle transformation analytique laisse subsister entières les difficultés inhérentes à chaque cas — ; d'autre part, indiquer des règles précises donnant des conditions, soit nécessaires, soit suffisantes, mais ne s'appliquant chacune qu'à des cas particuliers. Je me propose d'indiquer ici une de ces transformations et

(¹) Cf., au sujet de ces remarques, ma Thèse : *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, *passim* et notamment la *Conclusion*. (*Annales de l'École Normale*; 1895.)

une de ces règles. Je ferai usage, pour y parvenir, de la théorie des séries divergentes sommables, que j'ai récemment développée dans ce même Journal; en employant les expressions que j'ai introduites dans cette théorie, on a l'énoncé très simple que voici : *Pour qu'une série de Taylor n'admette pas son cercle de convergence comme coupure, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit sommable en quelque région extérieure à ce cercle* (¹).

De cette proposition générale, j'ai déduit, comme application, le théorème particulier suivant : *La série*

$$\Sigma a_n x^{c_n},$$

dans laquelle les exposants c_n sont des entiers croissants et les coefficients a_n des nombres quelconques, admet son cercle de convergence comme coupure si le rapport $\frac{c_{n+1}-c_n}{\sqrt{c_n}}$ est, à partir d'un certain rang, supérieur à un nombre fixe s (²).

I.

Il est bien clair que, si une série de Taylor est sommable en une région extérieure à son cercle de convergence, la fonction représentée par sa somme est le prolongement analytique de la fonction qu'elle représente à l'intérieur du cercle; celui-ci ne saurait donc être une

(¹) Pour définir la sommation des séries divergentes, je ne fais usage ici que de la fonction entière e^a, sans utiliser la généralisation que j'ai indiquée dans mon Mémoire fondamental.

(²) Cf. HADAMARD, *Thèse* (*Journal de Mathématiques*, p. 116; 1892). M. Hadamard y énonce une règle analogue à la nôtre, mais il considère le rapport $\frac{c_{n+1}-c_n}{c_n}$ au lieu de $\frac{c_{n+1}-c_n}{\sqrt{c_n}}$; et il est aisé de voir que sa règle exige, de la part des c_n, une croissance extrêmement plus rapide. Dans une conversation particulière que j'ai eue avec lui en 1894, M. Hadamard m'avait dit qu'il croyait sa règle beaucoup trop restrictive; il était persuadé de la vérité d'une extension analogue à celle que je donne ici; mais ses méthodes ne l'y avaient pas encore conduit.

coupure de la fonction. Nous allons montrer que, réciproquement, si le cercle de convergence n'est pas une coupure, la série est sommable en quelque région extérieure à ce cercle.

Considérons donc une série de Taylor n'admettant pas son cercle de convergence comme coupure; nous pouvons, sans altérer la généralité, supposer le rayon du cercle de convergence égal à *un;* la fonction n'aura pas de points singuliers sur un arc fini AB de ce cercle; on pourra même supposer l'arc AB choisi de manière qu'elle n'ait pas de point singulier dont la distance à l'arc AB soit inférieure à une certaine longueur finie ε. Prolongeons les rayons OA et OB jusqu'en A′ et B′ ($AA' = BB = \varepsilon$) et traçons l'arc A′B′. Par hypothèse, la fonction n'a pas de point singulier à l'intérieur du contour BSAA′B′B; nous désignerons par Γ ce contour (ou plutôt un contour infiniment voisin situé à son intérieur). Cela posé, x étant un point intérieur à Γ, on a

$$2i\pi f(x) = \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

$$\frac{2i\pi f^{(n)}(x)}{n!} = \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Prenons $x = 0$ et posons

$$A_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}};$$

le développement de Taylor de la fonction considérée sera

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots.$$

Nous allons rechercher si cette série est sommable en un point M intérieur à Γ, mais extérieur au cercle de convergence; nous verrons qu'il suffit que le point M soit intérieur à l'angle ACB, formé par les tangentes en A et B, au cercle de convergence. Nous savons (*Journal de Mathématiques*, p. 108-109) que nous devons former la fonction entière

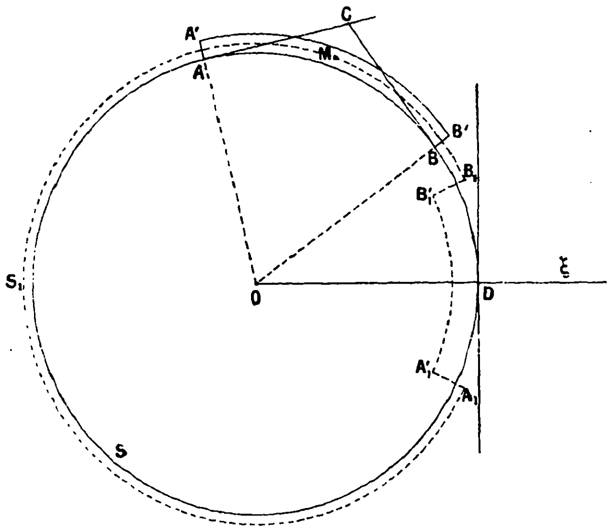
$$u(a) = A_0 + A_1\frac{ax}{1} + A_2\frac{a^2}{2!}x^2 + \ldots + A_n\frac{a^n x^n}{n!} + \ldots$$

et rechercher si l'intégrale $\int_0^\infty u(a)e^{-a}da$ a ou non un sens. En remplaçant les A_n par leurs valeurs, nous avons

$$2i\pi u(a) = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z} e^{\frac{ax}{z}} dz,$$

$$u(a)e^{-a} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z} e^{a\left(\frac{x}{z}-1\right)} dz.$$

Or, lorsque le point z parcourt le contour Γ, il est aisé de voir que le point $\frac{x}{z}$ parcourt le contour $\Gamma_1(B_1S_1A_1A'_1B'_1B_1)$ et des considérations



de Géométrie élémentaire montrent que, si le point M est à l'intérieur du triangle mixtiligne formé par l'arc AB et les tangentes AC et BC, les points A_1 et B_1 sont, de part et d'autre de l'axe $O\xi$ des quantités réelles positives et du même côté que O par rapport à la tangente au cercle de convergence au point D où le coupe $O\xi$. Il en résulte que le contour Γ_1 n'est pas coupé par cette tangente et, par suite, que $\frac{x}{z} - 1$ a constamment sa partie réelle négative et même inférieure à un nombre négatif fixe $-k$; on en conclut que l'on a

$$|u(a)e^{-a}| < \mathrm{M}e^{-ka},$$

M étant un nombre fixe; la condition de sommabilité est donc remplie.

On peut déduire aisément de ce qui précède que, si l'on joint le point O à chacun des points singuliers A de la fonction, si l'on élève en chaque point A la perpendiculaire à OA et que l'on supprime la portion du plan située au delà de ces perpendiculaires par rapport au point O, on obtient un polygone convexe dans lequel la série de Taylor est sommable ([1]). Dans le cas des points singuliers les plus simples, j'avais montré (*loc. cit.*) que c'était précisément là la région de sommabilité; ici nous pouvons seulement affirmer que la région de sommabilité *comprend ce polygone;* nous ne sommes pas certain qu'elle ne soit pas plus grande, bien que cela paraisse peu probable; mais ce point, qu'il serait intéressant d'élucider, n'a pas d'importance pour l'application que nous avons en vue.

Les résultats précédents fournissent une méthode pour la recherche des points singuliers situés sur le cercle de convergence; on a un procédé tout à fait direct pour reconnaître qu'un point est singulier, qu'un arc est dépourvu de point singulier, etc. Supposons toujours le rayon du cercle de convergence égal à l'unité, et soit

$$\Sigma \mathrm{A}_n z^n$$

la série de Taylor donnée; désignons par ε un nombre positif aussi petit que l'on veut et par θ un angle réel; posons $z = (1+\varepsilon)e^{i\theta}$; nous aurons

$$u(a) = \sum \mathrm{A}_n e^{in\theta} \frac{a^n}{n!}(1+\varepsilon)^n.$$

Si l'on considère a comme une variable complexe, la fonction $u(a)$ croît évidemment plus vite que e^a, grâce au facteur $(1+\varepsilon)^n$; la ques-

---

([1]) J'ai énoncé pour la première fois ce résultat dans une Note communiquée à l'Académie des Sciences, le 5 octobre 1896.

tion est de savoir si l'on peut choisir l'argument θ de manière que, a restant réel, l'on ait

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} u(a) = 0,$$

pour des valeurs de ε aussi petites que l'on veut, mais fixes; le point $z = e^{i\theta}$ n'est alors pas un point singulier. Si, au contraire, quelque petit que soit ε, le produit $e^{-a} u(a)$ ne tend pas vers zéro, le point $z = e^{i\theta}$ est singulier. Considérons la fonction entière

$$\varphi(z) = \sum \frac{A_n z^n}{n!}.$$

D'après les hypothèses faites sur les A_n, cette fonction est telle que si l'on appelle $M(r)$ le maximum du module de $\varphi(z)$, lorsque le module de z est r, la plus grande des limites de $\frac{1}{r} \log M(r)$, lorsque r augmente indéfiniment, est égale à *un*. La question est de savoir si l'on peut, *en faisant augmenter indéfiniment z avec un argument déterminé*, choisir cet argument θ de façon à diminuer cette limite, d'une manière plus précise, de manière que $\frac{1}{r} \log |\varphi(z)|$ soit inférieur à un nombre fixe plus petit que *un*, pour toutes les valeurs de z dont le module dépasse une certaine quantité.

Alors le point $z = e^{i\theta}$ n'est pas un point singulier pour le développement de Taylor

$$\Sigma A_n z^n.$$

Le rapprochement ainsi établi entre cette série et la fonction entière $\varphi(z)$ mériterait sans doute d'être étudié avec soin et conduirait sans doute à cette conclusion que le cercle de convergence est une coupure dans des cas très généraux.

Nous allons nous borner ici à indiquer une application immédiate. Si tous les A_n sont positifs, on voit aisément que la série proposée n'est sommable pour aucune valeur de z positive supérieure à l'unité; donc le point $z = 1$ est nécessairement un point singulier. Il en est évidemment de même si les A_n ont leurs parties réelles toutes de même signe (à condition que la série obtenue en les remplaçant par leurs parties réelles ait pour rayon de convergence *un*).

Nous nous contenterons pour le moment de ces remarques sur les points singuliers en général et nous bornerons à étudier un cas simple dans lequel on peut affirmer que le cercle de convergence est une coupure.

II.

Considérons d'abord, pour plus de netteté, la série bien connue

$$1 + z + z^4 + z^9 + \ldots + z^{n^2} + \ldots.$$

La fonction entière $u(a)$ est ici (¹)

$$u(a) = 1 + \frac{az}{1} + \frac{a^4 z^4}{4!} + \ldots + \frac{a^{n^2} z^{n^2}}{(n^2)!} + \ldots.$$

Nous allons montrer que, quel que soit l'argument de z, si son module dépasse l'unité, on ne saurait avoir $\lim\limits_{a=\infty} e^{-a} u(a) = 0$. Désignons par r le module de z, supposé plus grand que un; nous verrons que l'on peut donner à a une série de valeurs réelles augmentant indéfiniment et pour chacune desquelles $e^{-a} u(a)$ est supérieur à un nombre fixe. Posons, en effet,

$$ar = n^2.$$

Le terme de $u(a)$, qui a le plus grand module, est évidemment alors

$$\frac{a^{n^2} z^{n^2}}{(n^2)!}$$

et son module est

$$\frac{(n^2)^{n^2}}{(n^2)!}.$$

Nous allons, en retranchant de ce module les modules de tous les

(¹) On remarquera que nous tenons compte des termes qui sont nuls dans la série proposée; c'est évidemment ainsi que l'on doit procéder pour appliquer notre proposition sur la région de sommabilité. Il serait intéressant de rechercher, d'une manière générale, de quelle manière l'introduction de termes nuls dans une série en modifierait la sommabilité et, exceptionnellement, la somme.

autres termes, obtenir une limite inférieure du module de $u(a)$. Nous considérerons successivement les termes qui le précèdent et ceux qui le suivent et nous utiliserons la formule d'approximation

$$p! = \frac{p^p e^{-p}}{\sqrt{2\pi p}},$$

ce qui est légitime lorsque p est assez grand, ce que nous pouvons supposer.

Prenons d'abord le terme de plus grand module et négligeons partout le facteur $\sqrt{2\pi}$; nous obtiendrons pour sa valeur approchée $\frac{1}{n}e^{n^2}$. Supposons maintenant $p < n$ et considérons le terme

$$\frac{(n^2)^{p^2}}{(p^2)!}.$$

En négligeant toujours le facteur $\sqrt{2\pi}$, nous aurons la valeur approchée

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{p}\left(\frac{n}{p}\right)^{2p^2} e^{p^2}.$$

On voit aisément que les termes pour lesquels p est petit par rapport à n sont négligeables. Par exemple, les $\frac{n}{2}$ termes pour lesquels $p < \frac{n}{2}$ sont inférieurs à celui qu'on obtient en faisant $p = \frac{n}{2}$ et, par suite, leur somme inférieure à

$$e^{n^2\left(\frac{1+\log 2}{2}\right)},$$

expression bien plus petite que $\frac{1}{n}e^{n^2}$ dès que n est un peu grand. Si nous supposons p compris entre $\frac{n}{2}$ et n, nous aurons

$$\log\frac{n}{p} = \log\left(1 + \frac{n-p}{p}\right) = \frac{n-p}{p} - \frac{(n-p)^2}{2p^2} + \frac{(n-p)^3}{3p^3} - \ldots,$$

et, par suite,

$$\left(\frac{n}{p}\right)^{2p^2} = e^{2p(n-p)-(n-p)^2+\frac{2(n-p)^3}{3p}-\dots}.$$

La valeur approchée (α) devient, par suite,

$$\frac{1}{p}e^{n^2}e^{-2(n-p)^2+\frac{2(n-p)^3}{3p}-\frac{2(n-p)^4}{4p^2}+\dots},$$

et, en supposant $n-p<p$, c'est-à-dire $p>\frac{n}{2}$, elle est inférieure à

$$\frac{1}{p}e^{n^2-(n-p)^2}.$$

Un calcul analogue donnerait le même résultat en supposant $p>n$; nous en concluons que le module de $u(a)$ pour $ar=n^2$ est supérieur au produit de e^{n^2} par l'expression suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}&-\left(\frac{e^{-1}}{n-1}+\frac{e^{-4}}{n-2}+\frac{e^{-9}}{n-3}+\dots+\frac{e^{-\frac{n^2}{4}}}{\frac{n}{2}}+e^{n^2\frac{\log 2-1}{2}}\right)\\&-\left(\frac{e^{-1}}{n+1}+\frac{e^{-4}}{n+2}+\frac{e^{-9}}{n+3}+\dots\right),\end{aligned}$$

et il est manifeste que, pour n assez grand, cette expression est supérieure à $\frac{1}{10n}$. Nous avons $ar=n^2$, ou $a=\frac{n^2}{r}$ et r est supérieur à un; donc

$$e^{-a}u(a)>\frac{1}{10n}e^{n^2\left(1-\frac{1}{r}\right)},$$

et cette expression peut évidemment devenir aussi grande que l'on veut, quelque voisin que soit r de l'unité.

Nous en concluons que la série considérée n'est sommable en aucun point extérieur à son cercle de convergence et admet par suite ce cercle pour coupure. Ce résultat particulier aurait pu être établi de bien d'autres manières; mais la démonstration que nous avons donnée peut visiblement être étendue à des fonctions bien plus générales. Considérons d'abord la fonction

$$\varphi(z) = 1 + z^{c_1} + z^{c_2} + \ldots + z^{c_n} + \ldots,$$

et supposons $c_{n+1} - c_n > 3\sqrt{c_n}$; la même démonstration réussira *a fortiori* puisque les termes qui précéderont ou suivront le terme d'exposant c_n dans $u(a)$ seront, pour $ar = c_n$, plus petits que les termes analogues dans la série considérée en premier lieu, pour laquelle on a

$$c_{n+1} - c_n = 2\sqrt{c_n} + 1;$$

la fonction $\varphi(z)$ admettra, par suite, son cercle de convergence comme coupure.

Supposons maintenant que l'on ait

$$c_{n+1} - c_n > \frac{1}{k}\sqrt{c_n},$$

k étant un nombre entier quelconque, et posons

$$z = y^{9k^2}.$$

Nous aurons

$$\varphi(z) = \psi(y) = \Sigma y^{9k^2 c_n} = \Sigma y^{c'_n},$$

en posant $c'_n = 9k^2 c_n$.

On aura d'ailleurs

$$c'_{n+1} - c'_n = 9k^2(c_{n+1} - c_n) > 9k\sqrt{c_n} > 3\sqrt{c'_n}.$$

La fonction $\psi(y)$ admet, par suite, son cercle de convergence comme coupure; il en est évidemment de même de la fonction $\varphi(z)$, sous la seule condition

$$c_{n+1} - c_n > \varepsilon\sqrt{c_n},$$

ε étant un nombre positif quelconque.

Considérons maintenant la série

$$f(z) = \Sigma a_n z^{c_n},$$

les a_n étant des nombres quelconques tels que le rayon de convergence soit égal à l'unité; nous supposons de plus $c_{n+1} - c_n > 3\sqrt{c_n}$ (il suffirait évidemment que l'on ait $c_{n+1} - c_n > \varepsilon\sqrt{c_n}$). Le rayon de convergence étant égal à l'unité, on sait [1] que, ou bien la suite

$$\left|\sqrt[c_1]{a_1}\right|, \ldots, \left|\sqrt[c_n]{a_n}\right|, \ldots,$$

a pour limite *un*, ou bien elle tend vers plusieurs limites différentes, et *un* est la plus grande de ces limites. Dans tous les cas, on peut trouver dans cette suite une suite partielle ayant pour limite *un* [2]; il suffira de recommencer les raisonnements précédents, mais en prenant seulement pour termes de plus grand module des termes dont les coefficients fassent partie de cette suite partielle; il n'y aura ainsi aucune difficulté à montrer que la série n'est sommable en aucun point extérieur à son cercle de convergence et admet, par suite, ce cercle comme coupure [3].

---

(1) Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École polytechnique*; 1821. Ce que Cauchy appelle la *plus grande des limites* a été appelé par M. Paul du Bois-Reymond *obere Unbestimmheitsgrenze* et par M. Hadamard *limite supérieure pour n infini*. L'expression de Cauchy nous paraît être la plus simple et la plus claire.

(2) Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions*, etc. (*Journal de Mathématiques*; 1892, p. 106).

(3) En terminant, nous tenons à faire une remarque essentielle. Dans les diverses applications que nous avons indiquées jusqu'ici de notre théorie générale des séries divergentes, nous avons fait uniquement usage de la fonction e^a, ou de fonctions s'y rattachant immédiatement. Il ne faudrait pas en conclure que la généralisation dans laquelle on considère une fonction entière quelconque n'offre qu'un simple intérêt de curiosité; nous pensons, au contraire, qu'en choisissant convenablement cette fonction entière, on pourrait en tirer des applications intéressantes; la seule difficulté consiste en ce qu'il n'y a pas de fonction entière ayant des propriétés aussi simples et aussi bien connues que celles de la fonction exponentielle; c'est pourquoi les applications où celle-ci intervient s'offrent naturellement les premières.