

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE HAMY

**Sur le développement approché de la fonction perturbatrice
dans le cas des inégalités d'ordre élevé**

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série, tome 2 (1896), p. 381-439.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__381_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le développement approché de la fonction perturbatrice
dans le cas des inégalités d'ordre élevé ⁽¹⁾;*

PAR M. MAURICE HAMY.

Dans un Mémoire précédent ⁽²⁾, j'ai montré qu'en supposant petite l'inclinaison relative des plans des orbites de deux planètes P, P₁, le développement trigonométrique de la partie principale de la fonction perturbatrice, effectué par rapport aux anomalies moyennes, se ramène à celui de

$$F_0(\zeta_1, \zeta) = \frac{f(E^{iu})f_1(E^{iu_1})}{\Delta^s},$$

E désignant la base des logarithmes népériens; i le symbole $\sqrt{-1}$; ζ et ζ_1 les anomalies moyennes de P, P₁; u et u_1 les anomalies excentriques; $f(E^{iu})$ une fonction réelle entière de $\sin u$ et $\cos u$; $f_1(E^{iu_1})$ une fonction réelle entière de $\sin u_1$ et $\cos u_1$; s un nombre peu élevé de la forme $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$; Δ l'expression du carré de la distance des planètes dans laquelle on ne tient pas compte de l'inclinaison des orbites.

⁽¹⁾ La bibliographie du sujet est très complètement exposée dans la Thèse de M. COCULESCO : *Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1895).

⁽²⁾ HAMY, *Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1894).

J'ai donné les expressions approchées des coefficients de

$$\frac{\cos}{\sin}(m\zeta + m_1\zeta_1),$$

dans le développement de F_0 , lorsque m et m_1 sont de grands nombres, sans faire d'hypothèse sur la valeur de l'excentricité de la planète P ni sur celle du rapport $\frac{m}{m_1}$, dans le cas où l'orbite de la planète P_1 est circulaire et enveloppe, sans la rencontrer, l'orbite elliptique de la planète P .

Je me propose, dans le présent Mémoire, de résoudre le problème inverse ; c'est-à-dire de trouver les expressions approchées des termes éloignés du développement de F_0 , lorsque l'orbite elliptique de la planète P enveloppe, sans la rencontrer, l'orbite circulaire de la planète P_1 (¹).

J'arrive au résultat par des considérations analogues à celles qui m'ont guidé dans mes recherches antérieures. Je renvoie plus d'une fois le lecteur à ces recherches, pour éviter des redites, notamment au sujet de l'application de la méthode de M. Darboux, relative à l'approximation des fonctions de grands nombres (²) et au sujet de la détermination de certaines intégrales analogues à celles que M. Poincaré a rencontrées dans ses savantes recherches sur le développement approché de la fonction perturbatrice (³).

Je termine en résumant les opérations à exécuter dans les applications numériques.

Quelques remarques très simples concernant l'intégrale

$$I = \int f(z) \varphi''(z) dz,$$

prise le long d'un contour C , le long duquel les fonctions f et φ sont

(¹) Voir sur ce sujet une Note de M. FERRAUD (*Comptes rendus*, 20 avril 1896). Voir aussi HAMY (*Comptes rendus*, 4 mai 1896).

(²) DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (*Journal des Mathématiques pures et appliquées*, 1878).

(³) *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 1.

finies, et où n désigne un grand nombre positif, faciliteront l'exposition des présentes recherches.

Désignons par ξ l'affixe du point de contour C , où $|\varphi(z)|$ prend sa plus grande valeur, le long de ce contour, et par ζ une autre valeur de z telle que $|\varphi(\zeta)| > |\varphi(\xi)|$. Je dis que le produit $\frac{n^q I}{\varphi^n(\zeta)}$, où q désigne un nombre fini arbitraire, tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Il suffit évidemment de démontrer la proposition en supposant q positif et entier.

Le développement

$$\frac{1}{1 - t\varphi(z)} = \sum t^n \varphi^n(z)$$

est convergent pour les valeurs de t dont le module est inférieur à $\frac{1}{|\varphi(\xi)|}$, si z désigne l'affixe d'un point quelconque pris sur le contour C . On peut donc écrire

$$\int_C \frac{f(z) dz}{1 - t\varphi(z)} = \sum t^n \int_C f(z) \varphi^n(z) dz,$$

et la série écrite dans le second membre converge pour les valeurs de t de module inférieur à $\frac{1}{|\varphi(\xi)|}$, ainsi que toutes ses dérivées par rapport à t . La valeur $t = \frac{1}{\varphi(\zeta)}$ étant intérieure au cercle de convergence, le terme général de la dérivée d'ordre q tend vers zéro pour $t = \frac{1}{\varphi(\zeta)}$. Le produit

$$\frac{n(n-1)\dots(n-q+1)I}{\varphi^n(\zeta)},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{n^q I}{\varphi^n(\zeta)} (1 + \varepsilon),$$

en appelant ε un infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{n}$, tend donc vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

C. Q. F. D.

Corollaire. Si l'on considère la somme

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots) \varphi^n(\zeta) + 1,$$

dans laquelle les A et les p sont des quantités fixes en nombre fini, on a asymptotiquement

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots) \varphi^n(\zeta).$$

Effectivement, on a

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots) \varphi^n(\zeta) \left[1 + \frac{1}{A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots} \frac{1}{\varphi^n(\zeta)} \right]$$

et la fraction entre crochets tendant manifestement vers zéro, d'après ce qui précède, on peut écrire

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots) (1 + \varepsilon). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Voici encore une remarque qui se rattache à ce qui précède :

Si l'on considère la somme

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots) \varphi^n(\zeta) + (B_1 n^{q_1} + B_2 n^{q_2} + \dots) \varphi^n(\xi),$$

dans laquelle les A , les p , les B , les q sont des quantités fixes en nombre fini, on a asymptotiquement

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots) \varphi^n(\zeta)$$

si $|\varphi(\zeta)| > |\varphi(\xi)|$.

Effectivement, on a

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots) \varphi^n(\zeta) \left\{ 1 + \frac{B_1 n^{q_1} + B_2 n^{q_2} + \dots}{A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots} \left[\frac{\varphi(\xi)}{\varphi(\zeta)} \right]^n \right\}.$$

La fraction entre crochets tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment, puisque $\left| \frac{\varphi(\xi)}{\varphi(\zeta)} \right| < 1$, on peut écrire

$$S = (A_1 n^{p_1} + A_2 n^{p_2} + \dots) \varphi^n(\zeta) (1 + \varepsilon). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

I.

1. Étant donnée une fonction réelle $F_0(\zeta_1, \zeta)$, de période 2π par rapport à chacune des variables ζ_1, ζ , on peut la développer sous la forme suivante, en appelant $B_{p_1, p}$ et $C_{p_1, p}$ des coefficients constants,

$$F_0(\zeta_1, \zeta) = \sum_{p_1} \sum_p B_{p_1, p} \cos(p_1 \zeta_1 + p \zeta) + \sum_{p_1} \sum_p C_{p_1, p} \sin(p_1 \zeta_1 + p \zeta);$$

l'un des entiers p_1, p recevant des valeurs toutes de même signe, l'autre variant entre $-\infty$ et $+\infty$.

Si l'on remplace les lignes trigonométriques en fonction d'exponentielles imaginaires, il vient, en désignant par E la base des logarithmes népériens et i le symbole $\sqrt{-1}$,

$$(1) \quad F_0(\zeta_1, \zeta) = \sum_{p_1} \sum_p A_{p_1, p} E^{i(p_1 \zeta_1 + p \zeta)},$$

les entiers p, p_1 prenant maintenant toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$, à condition de poser

$$\begin{aligned} B_{p_1, p} - i C_{p_1, p} &= 2 A_{p_1, p}, \\ B_{p_1, p} + i C_{p_1, p} &= 2 A_{-p_1, -p}, \end{aligned}$$

Si donc on développe $F_0(\zeta_1, \zeta)$ sous la forme (1), le double de la partie réelle de $A_{p_1, p}$ donne le coefficient $B_{p_1, p}$ et le double du coefficient de $-i$ dans $A_{p_1, p}$ donne le coefficient $C_{p_1, p}$.

En particulier, pour résoudre le problème énoncé dans l'avant-propos du présent travail il faut calculer $A_{m_1, m}$.

Nous supposerons désormais que le multiplicateur m_1 de ζ_1 , dans $\cos(m_1 \zeta_1 + m \zeta)$, est positif, m pouvant être positif ou négatif.

Dans le problème qui doit nous occuper ζ et ζ_1 sont les anomalies moyennes des deux planètes P, P_1 .

2. *Expression de $A_{m_1, m}$.* — Appelons a , et ζ , le rayon vecteur et l'anomalie de la planète P, qui décrit l'orbite circulaire.

Désignons par r et α le rayon vecteur et le demi grand axe de l'orbite de la planète P qui décrit l'orbite elliptique; par $e = \sin \psi$ son excentricité; par ζ , u , ϖ son anomalie moyenne, son anomalie excentrique et son anomalie vraie.

Posons

$$(2) \quad z = E^{iu}, \quad t = E^{\zeta}.$$

L'équation de Képler donne

$$(3) \quad \begin{cases} t = z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)}, \\ \frac{1}{t} \frac{dt}{dz} = -\frac{\sin \psi}{2z^2} \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right). \end{cases}$$

Les formules connues du mouvement elliptique, qui expriment le rayon vecteur et l'anomalie vraie en fonction de l'anomalie excentrique (¹), se transforment, d'autre part, en

$$(4) \quad \begin{cases} r E^{i\varpi} = \frac{a \cos^2 \frac{\psi}{2}}{z} \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2, \\ r E^{-i\varpi} = \frac{a \sin^2 \frac{\psi}{2}}{z} \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2, \\ r = -\frac{a \sin \psi}{2z} \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right). \end{cases}$$

Ces expressions seront bientôt utilisées.

Faisons

$$(5) \quad \frac{m}{m_1} = \theta, \quad E^{\zeta_1} = t^{-\theta} x, \quad F(x, z) = \frac{1}{t} \frac{dt}{dz} F_0(\zeta_1, \zeta) = \frac{r}{a z} F_0(\zeta_1, \zeta).$$

$$(6) \quad \begin{cases} J(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}} dx, \\ I = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} J(z) dz; \end{cases}$$

(¹) TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. I, p. 101 et 103.

les intégrales étant prises, la première le long de la circonférence $|x| = 1$, la seconde le long de la circonférence $|z| = 1$. Je dis que I a pour valeur la quantité $A_{m,m}$ définie plus haut.

En effet, si l'on introduit les notations (2) et (5) dans l'expression (1) de $F_0(\zeta_1, \zeta)$, on a

$$(7) \quad F(x, z) = \sum_{p_1} \sum_p A_{p_1, p} \frac{dt}{dz} t^{p-\theta_{p_1}-1} x^{p_1}.$$

Il en résulte

$$J(z) = \sum_{p_1} \sum_p A_{p_1, p} \frac{dt}{dz} t^{p-\theta_{p_1}-1} \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} x^{p_1-m_1} \frac{dx}{x}.$$

L'intégrale étant nulle tant que $p_1 \geq m_1$, et étant égale à $2i\pi$ pour $p_1 = m_1$, cette équation se réduit à

$$(8) \quad J(z) = \sum_p A_{m_1, p} \frac{dt}{dz} t^{p-\theta_{m_1}-1},$$

ou, en remarquant d'après la première formule (5) que $\theta_{m_1} = m$,

$$(9) \quad J(z) = \sum_p A_{m, p} \frac{dt}{dz} t^{p-m-1}.$$

L'expression (6) de I peut être mise sous une autre forme en changeant de variable d'intégration et prenant t comme variable nouvelle.

Aux valeurs réelles de ζ correspondent pour u des valeurs réelles; il en résulte (2) que $|t| = 1$ lorsque $|z| = 1$. De plus, l'anomalie ζ croissant de 2π lorsque l'anomalie u croît de 2π , la variable t décrit en entier, et une seule fois, la circonférence $|t| = 1$ lorsque la variable z décrit en entier, et une seule fois, la circonférence $|z| = 1$.

Le nouveau chemin d'intégration est donc la circonférence $|t| = 1$, et l'on peut écrire

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=1} J(z) \frac{dz}{dt} dt.$$

Remplaçant $J(z)$ par son expression (9) dans cette équation, il vient

$$1 = \sum_p A_{m,p} \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=1} t^{p-m} \frac{dt}{t}.$$

L'intégrale étant nulle tant que $p \geq m$ et ayant pour valeur $2i\pi$ pour $p = m$, on a

$$1 = A_{m,m}, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

L'évaluation de $A_{m,m}$ est ainsi ramenée au calcul des intégrales (6). Voici quelques remarques destinées à faciliter cette recherche.

3. L'expression (9) de $J(z)$, dans laquelle t et $\frac{dt}{dz}$ doivent être remplacés par leurs valeurs (3) en fonction de z , est valable lorsque les anomalies u et ζ sont réelles, c'est-à-dire, d'après (2), lorsque $|z| = 1$. Or, d'après les formules (3), le produit

$$\frac{dt}{dz} t^{p-m-1}$$

est une fonction uniforme de z , puisque p et m sont des entiers. L'expression (9) de $J(z)$ montre donc que cette fonction reprend sa valeur lorsque la variable z , après avoir décrit en entier la circonférence $|z| = 1$, revient au point de départ. Pour calculer l'intégrale I , mise sous la forme (6), on pourra donc déformer arbitrairement le contour d'intégration $|z| = 1$, à la condition d'éviter de rencontrer les singularités de $J(z)$.

$J(z)$ est indépendant de la détermination adoptée pour le facteur t^0 qui entre dans les formules (5) et dans l'expression (7) de $F(x, z)$. On en voit la raison en examinant de près la formule (8) où le facteur t^0 se trouve élevé à la puissance m_1 . Afin de fixer les idées, nous pouvons convenir de choisir la détermination de t^0 qui a pour valeur 1 lorsque l'on part, dans le plan de la variable z , du point $z = 1$.

D'après la formule (7), le développement de $F(x, z)$, qui est valable pour $|z| = 1$ et $|x| = 1$, ne contient que des puissances entières de x . La fonction $F(x, z)$ reprend donc sa valeur lorsque, z ayant une va-

leur de module égale à 1, le point x , après avoir parcouru en entier la circonférence $|x| = 1$, revient au point de départ.

Reportons-nous maintenant à l'expression (6) de $J(z)$.

La fonction $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$, que nous aurons à considérer pour résoudre le problème posé dans l'avant-propos du présent travail, possède, comme on le verra bientôt, en tant que fonction de x , des points singuliers dont les affixes sont des fonctions continues de z .

Ces points sont d'ailleurs d'une nature telle que si la variable x tourne de 2π , autour de l'un quelconque d'entre eux, l'argument de la fonction varie d'une quantité indépendante de z .

Cela étant, faisons varier z d'une façon continue en partant d'une valeur de module égal à 1. Les points singuliers de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$, en tant que fonction de x , vont alors se déplacer d'une façon continue.

Admettons que l'on évite de donner à z les valeurs pour lesquelles se confondent deux de ces points singuliers, l'un extérieur, l'autre intérieur à la circonférence $|x| = 1$ lorsque z a pour module l'unité. Ces valeurs sont, comme on sait, les points singuliers de la fonction $J(z)$ ⁽¹⁾. On peut alors, à tout instant, remplacer la circonférence $|x| = 1$, le long de laquelle est prise l'intégrale $J(z)$ pour $|z| = 1$, par un autre contour S obtenu en faisant fuir certaines parties de la circonférence $|x| = 1$ devant les points singuliers mobiles de la fonction $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$ qui seraient sur le point de la franchir. Le contour S ren-

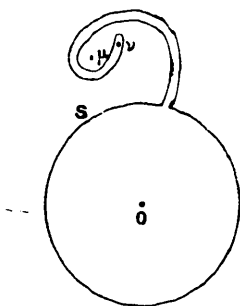
ferme ainsi, à tout instant, les points singuliers de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$ qui étaient au début à l'intérieur de la circonférence $|x| = 1$, et aucun de ceux qui se trouvaient à l'extérieur de cette circonférence. La variation de l'argument de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$, lorsque la variable x décrit en entier, et une seule fois le contour mobile S , est donc un multiple de 2π comme lorsque, $|z|$ étant égal à 1, la variable x décrit la circonférence $|x| = 1$ en entier et une seule fois. Il résulte de là que le contour S

(1) POINCARÉ, *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, t. I, p. 282.

peut être déformé arbitrairement, sans être astreint à avoir un point de commun avec le chemin d'intégration primitif $|x| = 1$, pourvu que l'on évite de faire traverser à ce contour S les points singuliers de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$.

Il peut se produire, lorsque z varie d'une façon continue, la circonstance particulière que voici. Considérons deux points singuliers de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$, $x = \mu$ et $x = \nu$; le premier extérieur, le second intérieur à la circonférence $|x| = 1$ pour $|z| = 1$. La succession des valeurs données à z peut être telle que le point ν tourne d'un angle supérieur à 2π , dans son mouvement relatif autour du point μ ; le contour S affecte alors la forme indiquée (*fig. 1*), le nombre des spires de l'enroulement

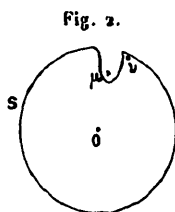
Fig. 1.



du contour autour du point μ dépendant du nombre de fois que le point ν a tourné autour du point μ .

Dans les présentes recherches, cette circonstance ne se produira pas. Nous établirons que, pour les valeurs de z qu'il y a lieu de considérer, le mouvement du point ν autour du point μ est tel que l'angle $\nu\mu O$ ne dépasse pas π en valeur absolue, O étant l'origine des coordonnées. La fonction $F(x, z)$ que nous rencontrerons n'ayant, en plus de l'origine, qu'un seul point singulier $x = \nu$ intérieur au contour S et, à l'extérieur, qu'un seul point singulier $x = \mu$, en plus de $x = \infty$, on pourra déformer ce contour, comme il est indiqué *fig. 2*, de telle sorte : 1° que tous les points de ce chemin soient plus éloignés de l'origine que le point μ , sauf dans le voisinage de ce point; 2° que

le segment de droite μO rencontre le contour en un point unique. Un



contour de cette nature est ce que j'ai appelé un *contour de première espèce* par rapport au point μ ⁽¹⁾.

II.

4. L'orbite de la planète P, étant circulaire, le périhélie de cette planète est indéterminé. On peut donc supposer que le périhélie de la planète P, et celui de la planète P ont même longitude.

En se reportant aux notations du n° 2, le carré de la distance des deux planètes a ainsi pour valeur

$$\Delta = a_1^2 + r^2 - 2a_1r(\cos\zeta_1\cos\omega + \sin\zeta_1\sin\omega).$$

r, ω, u étant supposés exprimés en fonction de ζ , faisons, en nous reportant à l'avant-propos de ce Mémoire,

$$F_0(\zeta_1, \zeta) = \frac{f_1(E^i\zeta_1)f(E^iu)}{\Delta^s}.$$

On en déduit, d'après les formules (5),

$$(10) \quad F(x, z) = \left[\frac{x}{-a_1rE^{-i\omega}t^{-\theta}x^2 + (a_1^2 + r^2)x - a_1rE^{i\omega}t^{\theta}} \right]^s \frac{r}{az} f_1(t^{-\theta}x) f(z),$$

t, r, ω étant des fonctions de z définies par les formules (3) et (4).

(1) HANU, *loc. cit.*, p. 393 et 394.

Posons, en tenant compte de ces formules :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{a_1}{a} < 1, \\ t^{-0} \mu = \frac{r}{a_1} E^{iw} = \frac{\cos^2 \frac{\psi}{2}}{\alpha z} \left(z - \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right)^2, \\ \mu = t^0 \frac{r}{a_1} E^{iw} = \frac{1}{\varphi(z)}, \\ \nu = \frac{a_1^2}{r^2} \mu = \frac{a_1^2}{r^2} \frac{1}{\varphi(z)}, \\ \varphi(z) = \frac{\alpha z}{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(z - \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right)^2} \left[z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} \right]^{-0}. \end{array} \right.$$

La détermination du facteur

$$(11') \quad t^{-0} = \left[z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} \right]^{-0},$$

qui rentre dans ces formules, est celle qui a pour valeur 1 lorsque l'on part, dans le plan de la variable z , du point $z = 1$ (n° 3). La fonction $\varphi(z)$ prend donc des valeurs réelles et positives lorsque z , partant du point $z = 1$, parcourt la partie positive de l'axe des abscisses. Lorsque z chemine le long de la partie négative de l'axe des abscisses, $\varphi(z)$ n'est plus réelle, en général, mais son argument conserve la même valeur quelle que soit la position de la variable sur cette partie de l'axe des abscisses.

En introduisant les notations (11) dans l'expression (10) de $F(x, z)$, cette fonction prend la forme

$$(12) \quad F(x, z) = \left[\frac{\nu x}{-\alpha_1^2 (x - \mu)(x - \nu)} \right]^s \frac{r}{\alpha z} f_1(t^{-0} x) f(z),$$

le facteur élevé à la puissance s représentant l'expression de $\frac{1}{\Delta^2}$, où Δ est le carré de la distance des planètes.

Pour résoudre le problème énoncé dans l'avant-propos de ce Mémoire, nous avons donc, comme on l'a vu au n° 2, à calculer la

quantité I définie par

$$(13) \quad \begin{cases} J(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x|=1} \frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}} dx, \\ I = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} J(z) dz. \end{cases}$$

3. *Points singuliers de la fonction $J(z)$.* — L'orbite de la planète P_1 étant intérieure à l'orbite de la planète P , le rapport $\frac{a_1}{r}$ est inférieur à 1 lorsque $|z| = 1$, c'est-à-dire lorsque les anomalies ζ, u, w sont réelles. Il en résulte (11) que l'on a, puisque le module de $t(z)$ est alors égal à 1,

$$|\mu| > 1 \quad \text{et} \quad |\nu| < 1 \quad \text{pour} \quad |z| = 1.$$

Cela étant, les points singuliers de $\frac{F(x, z)}{x^{m_1+1}}$, en tant que fonction de x , sont, pour $|z| = 1$: 1° les points $x = \mu$ et $x = \infty$, à l'extérieur de la circonférence $|x| = 1$; 2° les points $x = \nu$ et $x = 0$, à l'intérieur de la circonférence $|x| = 1$. Il n'y en a pas d'autres, puisque $f_1(t^{-\theta}x)$ est un polynome en $t^{-\theta}x$ et $\frac{1}{t^{-\theta}x}$.

Les points singuliers de la fonction $J(z)$ sont de deux sortes :

Cette fonction admet : 1° les points singuliers des fonctions de z qui font partie de $F(x, z)$ (12), savoir :

Les valeurs de z pour lesquelles $\nu = 0$;

Les valeurs de z pour lesquelles $\mu = \infty$;

Les valeurs de z pour lesquelles $\frac{r}{z} = \infty$;

Les valeurs de z pour lesquelles $t^{-\theta}$ s'annule, devient infini, ou change de détermination dans le polynome $f_1(t^{-\theta}x)$, en $t^{-\theta}x$ et $\frac{1}{t^{-\theta}x}$;

Les valeurs de z pour lesquelles le polynome $f(z)$ en z et $\frac{1}{z}$ devient infini.

On voit sans peine, en partant de la dernière des formules (4) et des

formules (11) et (11'), qu'il n'y a pas, dans cette catégorie, de points singuliers autres que $z = 0$, $z = \infty$.

2° La fonction $J(z)$ a encore comme points singuliers les valeurs de z pour lesquelles deux points singuliers de $\frac{F(x, z)}{x^{m+1}}$, en tant que fonction de x , séparés par le contour d'intégration lorsque $|z| = 1$, se rencontrent. Ce sont donc les valeurs de z pour lesquelles

$$\mu = 0, \quad \nu = \infty, \quad \mu - \nu = 0.$$

On a, d'après les formules (11) et (4) :

$$\mu = \frac{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2}{\alpha z} \left[z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} \right]^0,$$

$$\nu = \frac{\alpha z}{\sin^2 \frac{\psi}{2} \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2} \left[z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} \right]^0,$$

$$\mu - \nu = \frac{\nu}{\alpha_1^2} (r^2 - \alpha_1^2).$$

L'équation $\mu = 0$ est vérifiée par $z = 0$ ou $z = \infty$ et par la racine double $z = \tan \frac{\psi}{2}$.

L'équation $\nu = \infty$ est vérifiée par $z = 0$ ou $z = \infty$ et par la racine double $z = \cot \frac{\psi}{2}$.

L'équation $\mu - \nu = 0$ est vérifiée : 1° par les valeurs de z pour lesquelles $\nu = 0$, savoir $z = 0$ ou $z = \infty$; 2° par les solutions de l'équation $r^2 - \alpha_1^2 = 0$. On a (4)

$$(14) \quad \begin{cases} r - \alpha_1 = -\frac{\alpha}{2z} \left[\sin \psi \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right) + 2\alpha z \right], \\ r + \alpha_1 = -\frac{\alpha}{2z} \left[\sin \psi \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right) - 2\alpha z \right]. \end{cases}$$

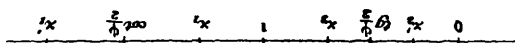
On voit donc que l'équation $r^2 - \alpha_1^2 = 0$ équivaut à

$$(15) \quad \begin{cases} \sin \psi z^2 - 2(1 - \alpha)z + \sin \psi = 0, & \text{pour } r = \alpha_1, \\ \sin \psi z^2 - 2(1 + \alpha)z + \sin \psi = 0, & \text{pour } r = -\alpha_1. \end{cases}$$

En résumé, les points singuliers de la fonction $J(z)$ sont $z = 0$, $z = \infty$, les points doubles $(z - \tan \frac{\psi}{2})^2 = 0$, $(z - \cot \frac{\psi}{2})^2 = 0$, et les racines des équations (15).

Les orbites des deux planètes P, P, ne se coupant pas, les équations (15) ont leurs racines réelles et positives, comme on s'en rend compte aisément en se rappelant que $\sin \psi$ représente l'excentricité de la planète P. Appelons z_1 la plus grande racine de la première équation (15), $z_2 = \frac{1}{z_1}$ la plus petite; z'_1 la plus grande racine de la seconde équation (15), $z'_2 = \frac{1}{z'_1}$ la plus petite. Il est facile de vérifier que les racines z_2 et z_1 sont comprises entre $\tan \frac{\psi}{2}$ et $\cot \frac{\psi}{2}$, et que les racines z'_2 et z'_1 comprennent au contraire $\tan \frac{\psi}{2}$ et $\cot \frac{\psi}{2}$. Ces différentes

Fig. 3.



valeurs de z occupent donc, sur l'axe des abscisses, dans le plan de la variable z , la position indiquée *fig. 3*, O étant l'origine des coordonnées.

6. Les formules (14), auxquelles nous adjoindrons la valeur (4) de r , peuvent s'écrire, en mettant en évidence les racines qui viennent d'être définies,

$$(16) \quad \begin{cases} r - a_1 = -\frac{a \sin \psi}{2z} (z - z_2)(z - z_1), \\ r + a_1 = -\frac{a \sin \psi}{2z} (z - z'_2)(z - z'_1), \\ r = -\frac{a \sin \psi}{2z} \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right). \end{cases}$$

Le rapport $\frac{a_1}{r}$ est réel, positif et inférieur à 1 pour les valeurs de z dont le module est égal à 1, car l'anomalie excentrique de la planète P étant alors réelle (2), son rayon vecteur est réel et supérieur à a , par hypothèse. La première formule (16) montre que ce rapport jouit de la

même propriété pour toutes les valeurs réelles négatives de z et pour les valeurs réelles positives de z comprises entre z_1 et z_2 .

On tire des formules (16)

$$\frac{r - a_1}{r} = \frac{(z - z_2)(z - z_1)}{\left(z - \tan \frac{\psi}{2}\right) \left(z - \cot \frac{\psi}{2}\right)}.$$

Il en résulte que le rapport $\frac{r - a_1}{r}$ est réel et négatif :

1° Pour les valeurs réelles de z comprises entre $\tan \frac{\psi}{2}$ et z_2 ;

2° Pour celles comprises entre z_1 et $\cot \frac{\psi}{2}$.

Le rapport $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$ est réel et positif pour les valeurs de z , dont le module est égal à 1, car l'anomalie excentrique de la planète P étant alors réelle (2), son rayon vecteur est réel et supérieur à a_1 par hypothèse. Ce rapport est encore réel et positif pour les valeurs réelles de z inférieures à z'_2 , pour les valeurs réelles de z comprises entre z_2 et z_1 , pour les valeurs réelles de z supérieures à z'_1 , ainsi qu'il résulte de l'expression, tirée des formules (16),

$$\frac{r^2 - a_1^2}{r^2} = \frac{(z - z'_2)(z - z_2)(z - z_1)(z - z'_1)}{\left(z - \tan \frac{\psi}{2}\right)^2 \left(z - \cot \frac{\psi}{2}\right)^2}.$$

Cela étant, considérons, dans le plan de la variable z , un contour qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1 et z_2 . Cherchons comment varie l'argument Ω de $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$, lorsque la variable z chemine le long de ce contour.

Soit A la position de la variable sur le contour (*fig. 4*); l'argument de $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$, qui se réduit à zéro au point M, a pour valeur

$$\Omega = \omega'_2 + \omega_2 + \omega_1 + \omega'_1 - 2\omega - 2\omega'.$$

Or, on a les relations suivantes, entre les angles marqués sur la

figure :

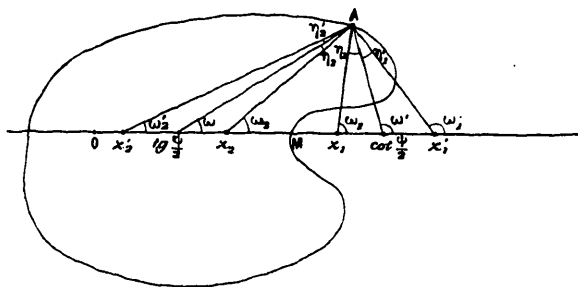
$$\omega'_2 - \omega = -\eta'_2,$$

$$\omega_2 - \omega = \eta_2,$$

$$\omega_1 - \omega' = -\eta'_1,$$

$$\omega'_1 - \omega' = \eta'_1.$$

Fig. 4.



On trouve, en faisant la somme de ces égalités

$$\Omega = -\eta'_2 + \eta_2 - \eta'_1 + \eta'_1.$$

L'angle Ω du triangle $z'_2 A z'_1$, qui est supérieur à $\eta'_2 + \eta_2 + \eta'_1 + \eta'_1$, ne pouvant dépasser π , on a

$$(17) \quad |\Omega| < \pi.$$

La démonstration serait analogue si le point A était pris au-dessous de l'axe des abscisses.

Cette inégalité, à laquelle nous aurons recours plus d'une fois, montre que l'argument de $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$ varie d'une quantité inférieure à π , en valeur absolue, lorsque la variable z suit un chemin quelconque assujéti à ne rencontrer la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1 et z_2 .

Remarque. — L'intégrale I (13) est prise le long de la circonférence $|z| = 1$. Ce contour peut être déformé arbitrairement (n° 5), pourvu que l'on évite de lui faire traverser les points singuliers de la

fonction $J(z)$. On peut, en particulier, faire subir à la circonférence $|z|=1$ une déformation continue, de façon à l'amener à coïncider avec un chemin fermé quelconque, tel que celui qui est représenté (*fig. 4*), assujéti à rencontrer la partie positive de l'axe des abscisses en un point unique M compris entre les points z_1, z_2 et la partie négative du même axe en un point arbitraire.

7. Position relative des points μ et ν dans le plan de la variable x .

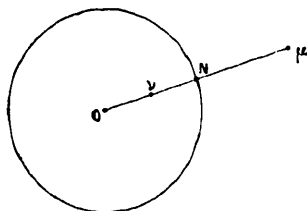
— Nous avons trouvé (11) les formules

$$\mu = \frac{1}{\varphi(z)}, \quad \nu = \frac{\sigma_1^2}{r^2} \mu.$$

Supposons : 1° que z est un point de la circonférence $|z|=1$.

$\frac{\sigma_1^2}{r^2}$ est alors une quantité réelle positive inférieure à 1 (n° 6); on a vu d'ailleurs que le point ν est intérieur et μ extérieur à la circonfé-

Fig. 5.



rence $|x|=1$ (n° 5). Ces points sont donc en ligne droite avec l'origine et occupent, par rapport à l'origine et la circonférence $|x|=1$, une position telle que le montre la *fig. 5*.

Considérons, dans ces conditions, le facteur

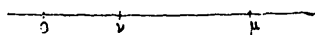
$$\frac{1}{\Delta^s} = \left[\frac{\nu x}{-\sigma_1^2 (x - \mu)(x - \nu)} \right]^s$$

qui entre dans la fonction $F(x, z)$ (12) et qui représente, lorsque $|z|=1$ et $|x|=1$, l'inverse de la distance des planètes PP' , élevée à la puissance $2s$. Remplaçons, dans $\frac{1}{\Delta^s}$, x par l'abscisse d'un point quelconque du segment $\mu\nu$. L'argument de x , celui de $x - \mu$ et celui de

$x - \nu$ conservant la même valeur, quelle que soit la position du point x sur ce segment, l'argument de $\frac{1}{\Delta^s}$ est lui-même invariable, lorsque x suit ce chemin. Il en résulte que $\frac{1}{\Delta^s}$ a une valeur réelle et positive, quelle que soit la position du point x sur le segment $\mu\nu$, puisque $\frac{1}{\Delta^s}$ jouit de cette propriété au point particulier N situé à la rencontre de la circonférence $|x| = 1$ et de $\mu\nu$.

Supposons : 2° que z est un point du segment $z_1 z_2$ de l'axe des abscisses (fig. 4). — On a vu (n° 4) que $\varphi(z)$ est alors réel et positif et que $\frac{a_1^2}{r^2}$ est réel, positif et inférieur à 1 (n° 6). Les points μ et ν oc-

Fig. 6.



cupent donc, dans le plan de la variable x , la position indiquée (fig. 6), sur la partie positive de l'axe des abscisses.

Cela étant, on voit, comme précédemment, que $\frac{1}{\Delta^s}$ a le même argument pour tout point x situé sur le segment $\mu\nu$. D'autre part, si l'on fait varier z dans son plan, sur le segment $z_1 z_2$ de l'axe des abscisses (fig. 4), les points μ et ν se déplacent, dans le plan des x , sur l'axe des abscisses et ne se rencontrent pas si l'on évite de donner à z les valeurs z_1 et z_2 (n° 5). On voit donc que $\frac{1}{\Delta^s}$ conserve le même argument, lorsque le point x se déplace sur le segment $\mu\nu$, et le point z sur le segment $z_1 z_2$. Or $\frac{1}{\Delta^s}$ est réel et positif, comme on l'a vu ci-dessus, lorsque l'on donne à z la valeur particulière 1, qui fait partie du segment $z_1 z_2$; $\frac{1}{\Delta^s}$ jouit donc de cette propriété, quelle que soit la position du point z sur le segment $z_1 z_2$ et la position du point x sur le segment $\mu\nu$.

Supposons : 3° que z , partant d'un point de la circonférence $|z| = 1$, suive un chemin quelconque qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1, z_2 (fig. 4). On a

identiquement

$$\nu - \mu = -\mu \frac{r^2 - a_1^2}{r^2}.$$

Il en résulte, à un multiple de 2π près, entre les arguments de deux membres,

$$\arg(\nu - \mu) = \arg(-\mu) + \arg \frac{r^2 - a_1^2}{r^2}.$$

Figurons (*fig. 7*), dans le plan de la variable x , le point μ et l'origine des coordonnées O .



La demi-droite, issue du point μ et faisant avec l'axe des abscisses un angle égal à $\arg(-\mu)$, n'est autre que μO . Il faut donc, pour rencontrer le point ν , en partant du point μ , partir dans une direction $\mu\nu$ telle que l'angle $\nu\mu O$ soit égal à $\arg \frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$.

$\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$ étant réel et positif, lorsque z est un point de la circonférence $|z| = 1$ (n° 6), le point ν est alors situé sur μO , comme on l'a déjà vu il y a un moment. Or, l'argument de $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$ varie d'une quantité inférieure à π en valeur absolue, lorsque z suit un chemin quelconque qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1 et z_2 (n° 6); l'angle $\nu\mu O$ est donc inférieur à π en valeur absolue.

Ainsi se trouve établi un résultat dont nous avons déjà parlé au n° 5. Il en résulte que l'on peut, pour toute valeur de z située le long d'un chemin qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1 et z_2 , prendre l'intégrale $J(z)$ (13) le long d'un contour de première espèce par rapport au point μ , tracé dans le plan de la variable x , comme on l'a déjà expliqué à la fin du n° 5.

8. Application de la méthode de M. Darboux à $J(z)$. — En vertu

de ce qui précède, en posant (12)

$$F(x, z) = \left[\frac{\nu x}{-a_1^2(x - \mu)(x - \nu)} \right]^s \frac{r}{az} f_1(t^{-\theta}x) f(z)$$

l'intégrale suivante, prise le long d'un contour de première espèce, par rapport au point μ , parcouru dans le sens direct pour un observateur placé à l'origine, a pour valeur $J(z)$:

$$J(z) = \frac{1}{2i\pi} \int F(x, z) \frac{dx}{x^{m_1+1}}.$$

La considération du point $x = \mu$ permet donc d'obtenir une expression de $J(z)$ en appliquant la méthode de M. Darboux (1). Il faut, à cet effet, former le développement de la fonction $F(x, z)$ dans le voisinage du point μ .

Le facteur $f_1(t^{-\theta}x)$ étant un polynôme en x et $\frac{1}{x}$, ce facteur est holomorphe dans le voisinage du point μ et l'on peut écrire

$$(18) \quad f_1(t^{-\theta}x) = f_1(t^{-\theta}\mu) \left[1 + \left(1 - \frac{x}{\mu} \right) \times \text{fonct. holom. de } \left(1 - \frac{x}{\mu} \right) \right].$$

Pour développer le facteur

$$\frac{1}{\Delta^s} = \left[\frac{\nu x}{-a_1^2(x - \mu)(x - \nu)} \right]^s,$$

il convient de poser

$$1 - \frac{x}{\mu} = \xi,$$

et de développer $\frac{1}{\Delta^s}$ suivant les puissances de ξ . On a, en remplaçant $a_1^2 \frac{\mu - \nu}{\nu}$ par sa valeur $r^2 - a_1^2$, tirée des formules (11) :

$$(19) \quad \frac{1}{\Delta^s} = \left[\frac{1 - \xi}{(r^2 - a_1^2) \xi \left(1 - \frac{\mu}{\mu - \nu} \xi \right)} \right]^s$$

(1) HANU, *loc. cit.*, p. 394.

ou, en développant et remplaçant ξ par $1 - \frac{x}{\mu}$,

$$(19)' \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta^s} = r^{-2s} \left(\frac{r^2 - a_1^2}{r^2} \right)^{-s} \left(1 - \frac{x}{\mu} \right)^{-s} \\ \times \left[1 + \left(1 - \frac{x}{\mu} \right) \times \text{fonction holomorphe de} \left(1 - \frac{x}{\mu} \right) \right]. \end{array} \right.$$

r est une fonction uniforme de z (4) et $2s$ un entier; le facteur r^{-2s} a donc un sens parfaitement défini pour toute valeur de z . Il n'en est pas de même pour le facteur $\left(\frac{r^2 - a_1^2}{r^2} \right)^{-s}$ qui a deux déterminations. Afin de choisir entre ces deux déterminations, donnons à x une valeur x' infiniment voisine de μ , figurée, dans le plan de la variable x , sur la droite qui joint le point μ à l'origine, entre ces deux points. $1 - \frac{x'}{\mu}$ a une valeur réelle positive, ainsi que l'une des déterminations de $\left(1 - \frac{x}{\mu} \right)^{-s}$. Convenons d'adopter, dans le développement de $\frac{1}{\Delta^s}$, la détermination particulière de $\left(1 - \frac{x}{\mu} \right)^{-s}$, qui est réelle et positive pour $x = x'$. Il est alors aisé de bien fixer le sens du facteur $\left(\frac{r^2 - a_1^2}{r^2} \right)^{-s}$.

Supposons d'abord que l'on donne à z une valeur de module égal à 1; $\frac{1}{\Delta^s}$ a alors une valeur réelle positive pour $x = x'$ (n° 7, 1°); le crochet qui est en facteur dans le second membre de la formule (19) se réduit à 1, puisque $1 - \frac{x'}{\mu}$ est infiniment petit; $\left(1 - \frac{x'}{\mu} \right)^{-s}$ est réel et positif ainsi que r^{-2s} (n° 6). Il en résulte que $\left(\frac{r^2 - a_1^2}{r^2} \right)^{-s}$ est réel et positif. La détermination du facteur $\left(\frac{r^2 - a_1^2}{r^2} \right)^{-s}$, qui rentre dans le développement (19), est donc celle dont l'argument est nul pour $|z| = 1$.

Faisons maintenant varier z d'une façon continue, en partant d'une valeur de module égal à 1, et en suivant un chemin qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses des z qu'entre les points z_1 , z_2 (fig. 4). L'argument de $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$ varie alors d'une quantité inférieure à π en valeur absolue (n° 6). On voit ainsi que la détermination de

$\left(\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}\right)^{-s}$, qui figure dans le développement (19), est celle dont l'argument s'obtient en multipliant par $-s$ l'argument de $\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}$ compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

On tire maintenant des formules (18) et (19) :

$$F(x, z) = \frac{r^{1-2s}}{\alpha z} f_1(t^{-\theta} \mu) f(z) \left(\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}\right)^{-s} \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{-s} \\ \times \left[1 + \left(1 - \frac{x}{\mu}\right) \times \text{fonction holomorphe de } \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)\right].$$

La détermination adoptée pour le facteur $\left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{-s}$ étant celle qui est positive et réelle lorsque x est l'affixe d'un point du segment de droite qui joint le point μ à l'origine, on a, d'après la méthode de M. Darboux (1),

$$J(z) = \frac{r^{1-2s}}{\alpha z} f_1(t^{-\theta} \mu) f(z) \left(\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}\right)^{-s} \\ \times \left[\text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans le développement de } \left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{-s} \right. \\ \left. + \text{un terme de l'ordre de } \frac{m_1^{s-2}}{\mu^{m_1}}\right].$$

En remplaçant μ et $t^{-\theta} \mu$ par leurs valeurs (11) et posant, après avoir développé la factorielle qui fait partie du coefficient de x^{m_1} , dans le développement de $\left(1 - \frac{x}{\mu}\right)^{-s}$, suivant les puissances descendantes de m_1 (2),

$$(20) \quad \Psi(z) = \frac{r^{1-2s}}{\alpha z} \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\frac{r^2 - a_1^2}{r^2}\right)^{-s} f(z) f_1 \left[\frac{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(z - \tan \frac{\psi}{2}\right)^2}{z z} \right],$$

on peut écrire

$$(21) \quad J(z) = \frac{1}{m_1^{1-s}} \Psi(z) z^{m_1}(z) \left(1 + \frac{R}{m_1}\right),$$

(1) ДАРБУ, *loc. cit.*, p. 396 et 397 (remarque II).

(2) ДАРБУ, *loc. cit.*, p. 402, formule (36).

R étant une fonction de z et de m_1 , qui reste finie lorsque m_1 croît indéfiniment.

Cette expression de $J(z)$ est valable pour les valeurs de z situées le long d'un chemin quelconque qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses (*fig. 4*) qu'entre les points z_1, z_2 . Mais il convient de remarquer qu'elle n'est pas applicable pour des valeurs de z , pour lesquelles $\frac{\mu}{\mu - \nu} \xi$ devient infini, car on ne peut plus alors développer, comme nous l'avons fait, l'expression (19) de $\frac{1}{\Delta^2}$ suivant les puissances de $\xi = 1 - \frac{x}{\mu}$; il faut y joindre les valeurs de z pour lesquelles $\mu = \infty$, car la méthode de M. Darboux ne peut s'appliquer qu'autant que le point μ reste à distance finie.

Le rapport $\frac{\nu}{\mu}$ (11) est égal à 1 pour les valeurs de z qui annulent la différence $\alpha_1^2 - r^2$, c'est-à-dire pour les racines des équations (15); μ ne devient infini que pour $z = 0$ ou $z = \infty$; ξ devient infini pour $\mu = 0$, c'est-à-dire pour $z = \tan \frac{\psi}{2}$ et pour $z = 0$ ou $z = \infty$ (n° 5).

L'expression (21) de $J(z)$ est donc valable pour tous les points d'un chemin qui ne rencontre la partie positive de l'axe des abscisses qu'entre les points z_1, z_2 (*fig. 4*) et qui n'est infiniment voisin d'aucun point singulier de $J(z)$.

On peut remarquer que la fonction $R\Psi'(z)$ qui est finie, le long d'un pareil chemin, d'après la méthode de M. Darboux, lorsque m_1 croît indéfiniment, n'a aucune singularité le long de ce chemin.

C'est ce qui résulte de la formule (21) et de ce que 1° la fonction $\Psi'(z)$ n'a pas de singularités en dehors de celles de $J(z)$; 2° de ce que $\varphi^{m_1}(z)$ n'a pas de singularités en dehors de celles de $J(z)$, et de ce que l'équation $\varphi^{m_1}(z) = 0$ n'a pas de racines en dehors de $z = 0$ ou $z = \infty$, ainsi qu'il résulte des formules (11).

III.

 Étude de la dérivée de la fonction $\varphi(z)$.

9. De l'expression (11) de $\varphi(z)$, on déduit

$$2z^2 \left(z - \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right) \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = V(z),$$

en faisant

$$(22) \quad V(z) = \theta \sin \psi \left(z - \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right)^2 \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right) - 2z \left(z + \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right).$$

$\varphi(z)$ ne pouvant s'annuler que pour $z = 0$ ou $z = \infty$, les racines de l'équation $\varphi'(z) = 0$, en dehors de $z = 0$, $z = \infty$, s'obtiennent en considérant l'équation $V(z) = 0$.

Étude de l'équation $V(z) = 0$. — L'équation $V(z) = 0$, résolue par rapport à θ , est

$$(23) \quad \theta = \frac{2}{\sin \psi} \frac{z \left(z + \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right)}{\left(z - \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right)^2 \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right)};$$

on en tire

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{2}{\sin \psi} \frac{\left(z - \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right) \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right) \left(2z + \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right) - z \left(z + \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right) \left[z - \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} + 2 \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right) \right]}{\left(z - \operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right)^3 \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2}.$$

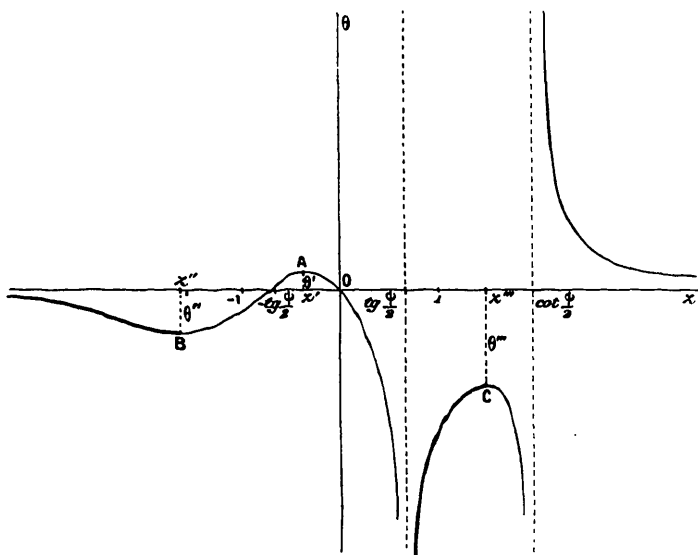
Le numérateur de $\frac{d\theta}{dz}$, du troisième degré en z , a ses racines réelles, savoir : $z = z'' \left(-\infty < z'' < -\operatorname{tang} \frac{\psi}{2} \right)$; $z = z' \left(-\operatorname{tang} \frac{\psi}{2} < z' < 0 \right)$; $z = z''' \left(\operatorname{tang} \frac{\psi}{2} < z''' < \cot \frac{\psi}{2} \right)$. Nous donnerons, dans un instant, les valeurs de z' , z'' , z''' et les valeurs correspondantes θ' , θ'' , θ''' de θ .

En considérant θ comme l'ordonnée d'une courbe dont z est l'abscisse, on construit immédiatement le lieu représenté par l'équa-

tion (23), en remarquant que θ est maximum pour $z = z'$, minimum pour $z = z''$ et $z = z'''$ (fig. 8).

En coupant la courbe par une parallèle à l'axe des abscisses, à une

Fig. 8.



distance de cet axe égale à la valeur de θ qui figure dans l'équation $V = 0$, les racines de cette équation sont figurées géométriquement par les abscisses des points de rencontre. On voit que z'' est racine double de l'équation $V = 0$ pour $\theta = \theta''$, z' racine double pour la valeur $\theta = \theta'$, z''' racine double pour la valeur $\theta = \theta'''$. Or, en posant

$$U(z) = \theta \sin \psi \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right)^2 + 2z \left(z + \cot \frac{\psi}{2} \right),$$

on a l'identité

$$V\left(\frac{1}{z}\right) = - \frac{\tan \frac{\psi}{2}}{z^3} U(z).$$

Les racines de l'équation $V(z) = 0$ sont donc inverses des racines de l'équation $U(z) = 0$, étudiée dans un Mémoire précédent (').

(') HAMY, *loc. cit.*, Chap. III, p. 416.

L'équation $U(z) = 0$ a une racine double égale à

$$-\cot \frac{\psi}{6} \quad \text{pour} \quad \theta = \frac{1}{8} \sec^3 \frac{\psi}{3},$$

une racine double égale à

$$-\tan \left(30^\circ - \frac{\psi}{6} \right) \quad \text{pour} \quad \theta = -\frac{1}{8} \sec^3 \left(60^\circ - \frac{\psi}{3} \right),$$

une racine double égale à

$$\tan \left(30^\circ + \frac{\psi}{6} \right) \quad \text{pour} \quad \theta = -\frac{1}{8} \sec^3 \left(60^\circ + \frac{\psi}{3} \right).$$

Il en résulte que les coordonnées des points A, B, C de la *fig.* 8 sont, puisque ψ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$,

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A} \left\{ \begin{array}{l} z' = -\tan \frac{\psi}{6}, \\ \theta' = \frac{1}{8} \sec^3 \frac{\psi}{3}; \end{array} \right. \\ \text{B} \left\{ \begin{array}{l} z'' = -\cot \left(30^\circ - \frac{\psi}{6} \right), \\ \theta'' = -\frac{1}{8} \sec^3 \left(60^\circ - \frac{\psi}{3} \right); \end{array} \right. \\ \text{C} \left\{ \begin{array}{l} z''' = \cot \left(30^\circ + \frac{\psi}{6} \right), \\ \theta''' = -\frac{1}{8} \sec^3 \left(60^\circ + \frac{\psi}{3} \right). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On voit que l'on a

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} z'' < -1 < -\tan \frac{\psi}{2} < z' < 0 < \tan \frac{\psi}{2} < 1 < z''' < \cot \frac{\psi}{2}, \\ |z''| > z''', \\ \theta''' < \theta'' < 0 < \theta'. \end{array} \right.$$

La *fig.* 8 permet de se rendre facilement compte de la nature des racines de l'équation $V(z) = 0$.

1° $0 < \theta''$. L'équation $V(z) = 0$ a trois racines réelles : une racine comprise entre 0 et $\tan \frac{\psi}{2}$; une racine comprise entre $\tan \frac{\psi}{2}$ et z'' ; une racine comprise entre z'' et $\cot \frac{\psi}{2}$. La seconde racine, que nous désignerons désormais par Z , croît de $\tan \frac{\psi}{2}$ à z'' lorsque θ croît de $-\infty$ à $0''$.

2° $0'' < 0 < \theta''$. L'équation $V(z) = 0$ a une racine réelle positive comprise entre 0 et $\tan \frac{\psi}{2}$, et deux racines imaginaires. On voit, sur la figure, que la racine réelle décroît lorsque θ augmente; d'autre part, le produit des racines de l'équation $V(z) = 0$ ne dépendant pas de θ , il faut, par compensation, que le module des racines imaginaires croisse lorsque θ croît. Nous désignerons ces racines imaginaires par Z_i et Z_{-i} . D'après ce qui précède, $|Z_i|$ croît de z'' à $|z''|$ lorsque θ croît de $0''$ à $0'$.

3° $0'' < 0 < 0$. L'équation $V(z) = 0$ a trois racines réelles : une racine positive comprise entre 0 et $\tan \frac{\psi}{2}$; une racine négative comprise entre $-\tan \frac{\psi}{2}$ et z'' ; une autre racine négative comprise entre z'' et $-\infty$. Cette dernière racine, que nous désignerons encore par Z , décroît de z'' à $-\infty$ quand θ croît de $0''$ à zéro.

4° $0 < \theta < 0'$. L'équation $V(z) = 0$ a ses racines réelles : une racine supérieure à $\cot \frac{\psi}{2}$; une racine négative comprise entre zéro et z' ; une autre racine négative comprise entre $-\tan \frac{\psi}{2}$ et z' .

5° $0' < 0$. L'équation $V(z) = 0$ a une racine réelle supérieure à $\cot \frac{\psi}{2}$, et deux racines imaginaires.

Remarque relative aux cas 1° et 2°. — En supposant $\psi < 45^\circ$, c'est-à-dire $e < 0,707$, ce qui a lieu dans toutes les applications, on a

$$|z''| < \cot \frac{\psi}{2}.$$

Il en résulte que, dans les cas 1° et 2°, Z ou $|Z_i|$ est compris entre $\tan \frac{\psi}{2}$ et $\cot \frac{\psi}{2}$.

10. Résolution de l'équation $V(z) = 0$. — La résolution de l'équation $V(z) = 0$ se ramène à celle de l'équation

$$\nu^3 - (1 - 2\theta \cos \psi)\nu + 2\theta = 0,$$

en posant

$$z = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} \operatorname{tang} \frac{\psi}{2}.$$

1° $\theta < \theta''$ ou $\theta'' < \theta < 0$. En raisonnant, comme nous l'avons fait, dans un Mémoire précédent, pour résoudre l'équation $U(z) = 0$, lorsqu'elle a ses racines réelles ⁽¹⁾, on trouve que la racine Z , définie au n° 9, a pour valeur

$$Z = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} \operatorname{tang} \frac{\psi}{2},$$

en posant

$$\cos \chi = -\theta \left(\frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \quad 0 < \chi < 90^\circ,$$

$$\nu = -2 \sqrt{\frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3}} \cos \left(60^\circ - \frac{\chi}{3} \right).$$

2° $\theta'' < \theta < 0''$. Les racines imaginaires Z_i et Z_{-i} de l'équation $V(z) = 0$, définies au n° 9, sont données par le Tableau de formules

$$\sin 2\chi = -\frac{1}{\theta} \left(\frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \operatorname{tang} \xi = \sqrt[3]{\operatorname{tang} \chi},$$

$$\nu = -\sqrt{\frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3}} \frac{1}{\sin 2\xi} \pm \sqrt{-1} \sqrt{1 - 2\theta \cos \psi} \cot 2\xi,$$

$$Z_i = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} \operatorname{tang} \frac{\psi}{2}, \quad Z_{-i} = \text{la conjuguée de } Z_i.$$

Nous supposons le signe de $\sqrt{-1}$ dans ν choisi de façon que Z_i ait sa partie imaginaire positive.

Nous n'aurons pas à résoudre l'équation $V(z) = 0$ lorsque θ sera compris entre d'autres limites que les précédentes.

⁽¹⁾ HANV, *loc. cit.*, p. 470.

IV.

Étude du module de la fonction $\varphi(z)$.

Nous avons trouvé (11)

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z}{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2} \left[z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} \right]^{-6}.$$

En posant

$$z = R e^{i\omega},$$

on trouve

$$(26) \quad |\varphi(z)| = \frac{\alpha}{\cos^2 \frac{\psi}{2}} \frac{R}{R^2 - 2R \tan \frac{\psi}{2} \cos \omega + \tan^2 \frac{\psi}{2}} \left[R E^{-\frac{\sin \psi}{2} \cos \omega \left(R - \frac{1}{R} \right)} \right]^{-6}.$$

11. Étude de $|\varphi(z)|$ le long de la partie positive de l'axe des abscisses. — En faisant $\omega = 0$ dans l'équation (26), on a

$$|\varphi(z)| = \frac{\alpha R}{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(R - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2} \left[R E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right)} \right]^{-6} = \varphi(R).$$

On en tire

$$\frac{2R^2 \left(R - \tan \frac{\psi}{2} \right)}{|\varphi(z)|} \frac{d|\varphi(z)|}{dR} = V(R),$$

$V(R)$ étant le polynome (22) où R est mis à la place de z .

De la discussion de l'équation $V(z) = 0$, faite au n° 9, on déduit ce qui suit :

1° $0 < \theta''$. Pour R très petit, $\frac{d}{dR} |\varphi(z)| < 0$, $V(0)$ ayant le signe de -0 ; $|\varphi(z)|$ décroît donc lorsque R part de zéro, jusqu'à ce que R atteigne la racine de $V = 0$ inférieure à $\tan \frac{\psi}{2}$. $|\varphi(z)|$ croît ensuite, devient infini pour $R = \tan \frac{\psi}{2}$, décroît jusqu'à ce que R atteigne la racine Z de $V = 0$, comprise entre $\tan \frac{\psi}{2}$ et z'' , croît ensuite jusqu'à ce que R atteigne la troisième racine de $V = 0$, puis décroît lorsque R croît indéfiniment.

On voit que lorsque la variable z parcourt l'axe des abscisses, $|\varphi(z)|$ passe par un minimum pour la valeur $z = Z$, qui est racine de $\varphi'(z) = 0$.

2° $0'' < \theta < 0$. $|\varphi(z)|$ décroît de $R = 0$ à la racine positive de $V = 0$, inférieure à $\tan \frac{\psi}{2}$; croît de cette racine à $R = \tan \frac{\psi}{2}$ et décroît ensuite lorsque R croît indéfiniment.

3° $0 > \theta$. $\frac{d}{dR} |\varphi(z)|$ est positif pour R très petit; $|\varphi(z)|$ croît donc lorsque R part de zéro, jusqu'à ce que R atteigne la valeur $R = \tan \frac{\psi}{2}$, devient infini pour $R = \tan \frac{\psi}{2}$, décroît ensuite jusqu'à ce que R atteigne la racine de $V = 0$, supérieure à $\cot \frac{\psi}{2}$, puis croît lorsque R dépasse cette racine.

12. Étude de $|\varphi(z)|$ le long de la partie négative de l'axe des abscisses. — En faisant $\omega = \pi$ dans l'équation (26), on a

$$|\varphi(z)| = \frac{zR}{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(R + \tan \frac{\psi}{2} \right)^2} \left[R E^{\frac{\sin \psi}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right)} \right]^{-1}.$$

on tire

$$\frac{2R^2 \left(R + \tan \frac{\psi}{2} \right)}{|\varphi(z)|} \frac{d|\varphi(z)|}{dR} = V(-R).$$

1° $0 < \theta''$. $V(R) = 0$ n'a pas de racines négatives (n° 9), et pour R très petit, $V(-R)$ est positif; $|\varphi(z)|$ croît donc lorsque R croît, c'est-à-dire lorsque la variable z partant de l'origine va à $-\infty$.

2° $0'' < \theta < 0$. $|\varphi(z)|$ va en croissant lorsque R croît de zéro jusqu'à la valeur absolue de la racine de $V(z) = 0$ la plus voisine de zéro, décroît ensuite jusqu'à ce que R atteigne la valeur absolue $-Z$ de la racine négative de $V(z)$, la plus grande en valeur absolue, puis décroît lorsque R croît de $-Z$ à $+\infty$.

On voit que $|\varphi(z)|$ passe par un minimum lorsque la variable z , en cheminant sur l'axe des abscisses, rencontre la valeur $z = Z$, qui est racine de l'équation $\varphi'(z) = 0$.

3° $0 < \theta < \theta'$. Pour R très petit, $V(-R) < 0$. Il en résulte que

$\varphi(z)$ décroît jusqu'à ce que z atteigne la racine négative la plus voisine de zéro de $V(z)$, croît ensuite jusqu'à ce que z atteigne la racine comprise entre z' et $-\tan\frac{\psi}{2}$, puis décroît lorsque z décroît.

4° $\theta > \theta'$. $|\varphi(z)|$ décroît lorsque z décroît de zéro à $-\infty$.

15. Étude de $|\varphi(z)|$ le long d'une circonférence, décrite de l'origine comme centre, avec un rayon R . — On tire de la formule (26)

$$\frac{1}{|\varphi(z)|} \frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \omega} = \sin \omega \frac{-4R^2 \tan\frac{\psi}{2} - \theta \sin \psi (R^2 - 1) \left(R^2 - 2R \tan\frac{\psi}{2} \cos \omega + \tan^2\frac{\psi}{2} \right)}{2R \left(R^2 - 2R \tan\frac{\psi}{2} \cos \omega + \tan^2\frac{\psi}{2} \right)}.$$

$\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \omega}$ a le signe de

$$(27) \quad \begin{cases} N = -\sin \omega \left[4R^2 \tan\frac{\psi}{2} + \theta \sin \psi (R^2 - 1) \right. \\ \left. \times \left(R^2 - 2R \tan\frac{\psi}{2} \cos \omega + \tan^2\frac{\psi}{2} \right) \right]. \end{cases}$$

Supposons d'abord $\theta < 0$:

1° $R \leq 1$. N a le signe de $-\sin \omega$. Il en résulte que, lorsque z décrit la circonférence R , $|\varphi(z)|$ passe par un maximum absolu pour $\omega = 0$ et par un minimum absolu pour $\omega = \pi$.

2° $R > 1$. On tire de l'équation (27)

$$\frac{N}{-\theta \sin \psi \cdot 2R \tan\frac{\psi}{2} (R^2 - 1)} = -\sin \omega (\cos \omega + P),$$

en posant

$$P = \frac{2R}{-\theta \sin \psi (R^2 - 1)} - \frac{R^2 + \tan^2\frac{\psi}{2}}{2R \tan\frac{\psi}{2}}.$$

N a le signe de

$$-\sin \omega (\cos \omega + P),$$

pour $\theta < 0$ et $R > 1$. Or, dans cette hypothèse

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{4 \tan \frac{\psi}{2} R^2 (1 + R^2) - \theta \sin \psi (R^2 - 1)^2 \left(R^2 - \tan^2 \frac{\psi}{2} \right)}{2 \theta \sin \psi (R^2 - 1)^2 \tan \frac{\psi}{2} R^2} < 0;$$

P décroît donc alors de $+\infty$ à $-\infty$, lorsque R croît de 1 à $+\infty$.

Appelons R_1 la valeur de R pour laquelle $P = 1$ et R_2 la valeur de R pour laquelle $P = -1$; on a $R_1 < R_2$.

Si $R < R_1$, P est supérieur à 1; l'équation $\cos \omega + P = 0$ n'a pas de racines réelles et N a le signe de $-\sin \omega$. Il en résulte que, lorsque z décrit la circonférence R, $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour $\omega = 0$, minimum pour $\omega = \pi$.

Si $R_1 < R < R_2$, P est compris entre 1 et -1 et l'équation $\cos \omega + P = 0$ a une racine ω_1 , comprise entre 0 et π , et une racine $2\pi - \omega_1$, comprise entre π et 2π . On en déduit que, lorsque z décrit la circonférence R, $|\varphi(z)|$ devient maximum pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$ et minimum pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = 2\pi - \omega_1$.

Si $R_2 < R$, P est inférieur à -1 et $\cos \omega + P$ est essentiellement négatif. N a donc le signe de $\sin \omega$. Il en résulte que, lorsque z décrit la circonférence R, $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour $\omega = \pi$, minimum pour $\omega = 0$.

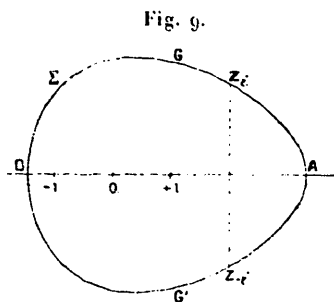
Supposons, en second lieu, $\theta > 0$.

En considérant seulement le cas où $R > 1$, le crochet qui fait partie de N (27) est essentiellement positif, donc N a le signe de $-\sin \omega$.

Il en résulte que, lorsque z chemine le long de la circonférence R, $|\varphi(z)|$ devient maximum pour $\omega = 0$, minimum pour $\omega = \pi$.

14. Lorsque $\theta < 0$, P croît de -1 à $+1$ quand R décroît de R_2 à R_1 (n° 13), R_2 et R_1 vérifiant les inégalités $R_2 > R_1 > 1$. Il en résulte que l'équation $\cos \omega + P = 0$ définit, en coordonnées polaires, une courbe fermée Σ , symétrique par rapport à l'axe polaire, dont le

rayon vecteur décroît de R_2 à R_1 lorsque ω croît de 0 à π (*fig. 9*) ou décroît de 0 à $-\pi$.



Variation de $|\varphi(z)|$ le long de la courbe Σ . — Lorsque la variable $z = RE^{i\omega}$ chemine le long de la courbe Σ , $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \omega}$ est identiquement nulle, puisque cette dérivée contient $\cos \omega + P$ en facteur (n° 15). Cela étant, si la dérivée $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ s'annule en un point (R, ω) de Σ , l'imaginaire $z = RE^{i\omega}$ est racine de l'équation $\varphi'(z) = 0$, puisque les deux dérivées $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \omega}$ et $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ sont alors simultanément nulles ⁽¹⁾. Réciproquement, si $z = RE^{i\omega}$ est racine de l'équation $\varphi'(z) = 0$, les équations $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \omega} = 0$, $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R} = 0$ admettent la solution R, ω . Si ω est différent de zéro ou de π , c'est-à-dire si la racine z est imaginaire, $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \omega}$ n'étant nulle qu'autant que $\cos \omega + P$ est nul (n° 15), la racine z de $\varphi'(z) = 0$ se trouve alors sur la courbe Σ .

Cela posé, il est facile de voir comment $|\varphi(z)|$ varie le long de la courbe Σ .

Distinguons plusieurs cas.

1° $0 < \theta''$. L'équation $\varphi'(z) = 0$ n'a alors, à distance finie, que des racines réelles dont aucune n'est négative (n° 9). $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ ne pouvant changer de signe sans passer par zéro, comme on s'en assure en dif-

(1) HAMY, *loc. cit.*, p. 404, n° 5.

érentiant la formule (26), cette dérivée, dis-je, a le même signe tout le long de la courbe Σ . Or $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ est positive le long de la partie négative de l'axe des abscisses (n° 12), en particulier au point B. $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ a donc une valeur positive tout le long de la courbe Σ .

En observant que $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial \omega}$ est nulle le long de la courbe Σ , on a, en faisant suivre à la variable $z = RE^{i\omega}$ le chemin AGB ou le chemin AG'B,

$$(28) \quad d|\varphi(z)| = \frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R} dR,$$

d'où il résulte

$$d|\varphi(z)| < 0,$$

puisque R va en décroissant.

Ainsi $|\varphi(z)|$ décroît constamment quand z suit le chemin AGB ou le chemin AG'B.

2° $0''' < 0 < 0''$. L'équation $\varphi'(z) = 0$ n'a, en dehors de la circonférence $|z| = 1$, que deux racines imaginaires conjuguées Z_i et Z_{-i} , à distance finie (n° 9). Ces racines se trouvent nécessairement, comme on l'a remarqué plus haut, sur la courbe Σ , en Z_i et en Z_{-i} . $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$

est nulle en Z_i et Z_{-i} et différente de zéro en tout autre point de Σ . Or $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ est positive tout le long de la partie négative de l'axe des abscisses (n° 12), en particulier au point B; $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ est donc positive

tout le long de l'arc $Z_i B Z_{-i}$ de la courbe Σ . De même $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ étant négative au point A (n° 11), est négative tout le long de l'arc $Z_i A Z_{-i}$.

D'après la formule (28), lorsque la variable z parcourt l'arc AGB, $|\varphi(z)|$ croît le long de AZ_i et décroît le long de l'arc $Z_i GB$. De même $|\varphi(z)|$ croît le long de l'arc AZ_{-i} et décroît le long de l'arc $Z_{-i} GB$.

3° $0 > 0 > 0''$. L'équation $\varphi'(z) = 0$ n'a, à distance finie, que des racines réelles, dont aucune n'est supérieure à 1 (n° 9). $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ con-

serve donc le même signe tout le long de la courbe Σ . Or $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ est négative le long de la partie positive de l'axe des abscisses pour $R > \tan \frac{\psi}{2}$ (n° 11), en particulier au point A. $\frac{\partial |\varphi(z)|}{\partial R}$ est donc négative tout le long de la courbe Σ .

On voit ainsi que, lorsque la variable z parcourt l'axe AGB ou l'axe AG'B, $|\varphi(z)|$ croît d'après la formule (28).

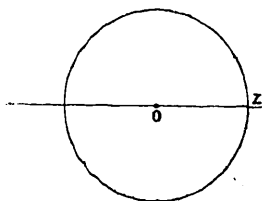
13. Le contour D lorsque $\theta < 0$. — Les considérations précédentes permettent de construire un contour fermé D contenant l'origine et passant soit par la racine Z de l'équation $\varphi'(z) = 0$, si cette équation a toutes ses racines réelles, soit par les racines Z_i et Z_{-i} de l'équation $\varphi'(z) = 0$, si cette équation a des racines imaginaires, un contour, dis-je, le long duquel $|\varphi(z)|$ est maximum absolu, soit pour $z = Z$, soit pour $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$.

1° $0 < \theta''$. L'équation $\varphi'(z) = 0$ a alors ses racines réelles (n° 9) et la racine Z est comprise entre $\tan \frac{\psi}{2}$ et $\cot \left(30^\circ + \frac{\psi}{6} \right)$.

Décrivons de l'origine comme centre une circonférence passant par le point Z. $|\varphi(z)|$ passe par un minimum lorsque la variable z décrivant l'axe des abscisses passe par le point $z = Z$ (n° 11, 1°). Il en résulte, puisque $\varphi'(Z) = 0$, que $|\varphi(z)|$ passe par un maximum lorsque la variable z décrivant la circonférence, qui est normale à l'axe des abscisses, passe par le point Z⁽¹⁾. Cela étant, il y a deux cas à considérer.

Si $\cos \omega + P$ ne s'annule pas le long de la circonférence, ce qui

Fig. 10.



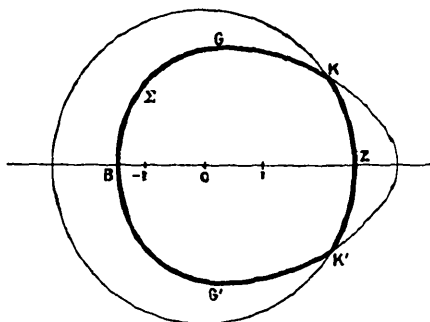
arrive en particulier si $Z < 1$, $|\varphi(z)|$ est nécessairement maximum

(1) HAMY, *loc. cit.*, p. 404, n° 3.

absolu sur la circonférence au point Z (n° 13). Cette circonférence (fig. 10) constitue ainsi le contour cherché D.

Si $\cos \omega + P$ s'annule, le long de la circonférence, aux points K, K', cette circonférence rencontre aux points K, K' la courbe Σ dont il a été question au n° 14. Or $|\varphi(z)|$ va en décroissant le long des arcs ZK, ZK' de la circonférence (n° 13), et en décroissant le long

Fig. 11.



des arcs KGB, K'G'B de la courbe Σ (n° 14, 1°). Le chemin ZKGBG'K'Z, marqué sur la fig. 11 en traits gras, constitue donc le contour cherché D.

Remarque. — Lorsque la variable parcourt le contour D dans le sens des arguments croissants, elle passe au point Z dans une direction formant un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ avec la partie positive de l'axe des abscisses.

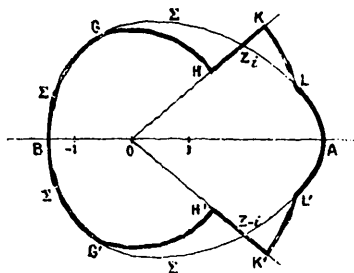
2° $0'' < \theta < \theta''$. — L'équation $\varphi'(z) = 0$ a alors deux racines imaginaires Z_i et Z_{-i} , de module supérieur à 1, qui se trouvent sur la courbe Σ (n° 14). D'autre part $|\varphi(z)|$ est maximum absolu le long de cette courbe pour $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$. Nous pourrions donc adopter la courbe Σ pour le contour D; mais il y aurait dans ce choix un inconvénient, résultant de ce que la direction de la tangente à la courbe Σ , aux points Z_i et Z_{-i} , ne s'obtient pas immédiatement, une fois les racines Z_i et Z_{-i} connues.⁽¹⁾ Aussi convient-il de modifier comme il suit le chemin Σ .

Considérons la circonférence décrite de l'origine comme centre avec

(1) Il est nécessaire de connaître la direction de la tangente au contour D, en chacun de ces points, pour fixer le sens de certains radicaux.

le rayon OZ_i . $\cos \omega + P$ s'annule le long de cette circonférence pour $z = Z_i$ et pour $z = Z_{-i}$, puisque ces points appartiennent à Σ . Il en résulte que $|\varphi(z)|$ devient minimum lorsque la variable z , décrivant la circonférence, passe par les points Z_i et Z_{-i} (n° 13, 2°).

Fig. 12.



Z_i et Z_{-i} étant des racines de $\varphi'(z)$, $|\varphi(z)|$ passe par un maximum lorsque la variable z , cheminant le long du rayon OZ_i ou du rayon OZ_{-i} , qui sont normaux à la circonférence, passe par le point Z_i ou Z_{-i} (1).

Cela étant, prenons sur le rayon OZ_i des points H et K, à une distance finie du point Z_i d'ailleurs aussi petite que l'on veut; décrivons, de l'origine comme centre, les arcs de cercle HG, KL limités à la courbe Σ . Je dis que $|\varphi(z)|$ décroît le long du chemin $Z_i H G B$ et le long du chemin $Z_i K L A$.

Effectivement, $|\varphi(z)|$ passant par un maximum au point Z_i , le long de HK, $|\varphi(z)|$ décroît le long de $Z_i H$, H étant pris suffisamment près de Z_i . D'autre part, $\cos \omega + P$ étant nul au point G, le long de la circonférence de rayon OH, $|\varphi(z)|$, va en diminuant le long de l'arc HG de cette circonférence (n° 13, 2°). Enfin $|\varphi(z)|$ diminue le long de l'arc GB de la courbe Σ (n° 14, 2°).

De même, en prenant K suffisamment près de Z_i , $|\varphi(z)|$ décroît le long de $Z_i K$. D'autre part, $\cos \omega + P$ étant nul au point L, le long de la circonférence de rayon OK, $|\varphi(z)|$ va en diminuant le long de l'arc KL de cette circonférence (n° 13, 2°). Enfin $|\varphi(z)|$ diminue le long de l'arc LA de la courbe Σ (n° 14, 2°).

(1) HAMY, *loc. cit.*, p. 404, n° 5.

On verrait de même que le long du chemin $BG'H'Z_iK'L'A$, $|\varphi(z)|$ passe par un maximum pour $z=Z_i$. Ainsi, nous pouvons prendre, pour le contour cherché D, le chemin marqué en traits gras sur la *fig.* 12.

Remarques. — Soit Ω l'argument de Z_i . Lorsque la variable z parcourt le contour D dans le sens des arguments croissants, elle passe au point Z_i dans une direction formant un angle égal à $\pi + \Omega$, à un multiple près de 2π , avec la direction des abscisses positives. La direction du chemin suivi au point Z_i forme, avec la direction des abscisses positives, un angle égal à $-\Omega$.

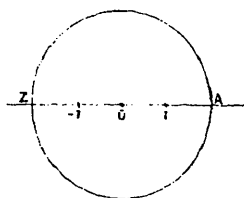
Le contour D rencontre la partie positive de l'axe des abscisses à une distance de l'origine supérieure à 1.

3° $0 > \theta > 0''$. — L'équation $\varphi'(z) = 0$ a alors ses racines réelles : la racine Z est négative et supérieure, en valeur absolue, à $\cot\left(30^\circ - \frac{\psi}{6}\right)$, quantité plus grande que 1.

Décrivons de l'origine comme centre une circonférence passant par le point Z. $|\varphi(z)|$ passe par un minimum lorsque la variable z , décrivant l'axe des abscisses, passe par le point Z (n° 12, 2°). Il en résulte, comme précédemment, que $|\varphi(z)|$ passe par un maximum, lorsque la variable z , décrivant la circonférence, passe par le point Z. Cela étant, il y a deux cas à considérer.

Si $\cos \omega + P$ ne s'annule pas le long de la circonférence, $|\varphi(z)|$ est nécessairement maximum absolu au point Z le long de la circonférence

Fig. 13.

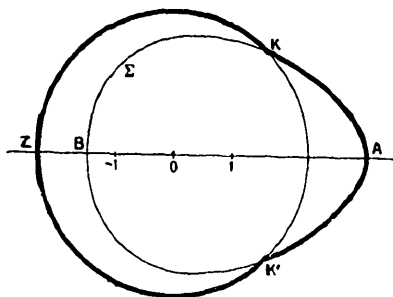


(n° 13, 2°). Cette circonférence (*fig.* 13) constitue donc le contour cherché D.

Si $\cos \omega + P$ s'annule le long de la circonférence aux points K, K' (*fig.* 14), cette circonférence rencontre aux points K, K' la courbe Σ du n° 14. Or $|\varphi(z)|$ décroît le long des arcs ZK, ZK' de

la circonférence (n° 15) et décroît le long des arcs KA , $K'A$ de la courbe Σ (n° 14, 3°). Le chemin marqué en traits gras sur la *fig.* 14 constitue donc le contour cherché D .

Fig. 14.



Remarques. — Lorsque la variable z parcourt le contour D dans le sens des arguments croissants, elle passe au point Z dans une direction formant un angle égal à $\frac{3\pi}{2}$ avec la partie positive de l'axe des abscisses.

Le contour D rencontre la partie positive de l'axe des abscisses à une distance de l'origine supérieure à 1.

16. *Le contour D lorsque $\theta > 0$.* — Nous désignerons alors par D une circonférence décrite, de l'origine comme centre, avec un rayon arbitraire compris entre $\cot \frac{\psi}{2}$ et la racine $z_1 > 1$ de la première équation (15) (n° 5); la différence entre ce rayon et les limites qui le comprennent est, d'ailleurs, supposée finie.

On a vu que, le long d'un pareil chemin, $|\varphi(z)|$ est maximum absolu au point où ce chemin rencontre la partie positive de l'axe des abscisses (n° 15).

V.

Changement du contour d'intégration de l'intégrale I.

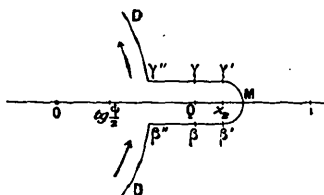
17. Le contour D , qui vient d'être défini, va nous servir pour le calcul de l'intégrale I. Dans certains cas, ce sera ce contour lui-même

qui nous permettra d'évaluer l'intégrale ; dans d'autres cas, il faudra le déformer comme nous allons tout d'abord l'expliquer.

Supposons, en premier lieu, que le point où le contour D rencontre la partie positive de l'axe des abscisses soit plus rapproché de l'origine que le point singulier z_2 de $J(z)$ (ce cas se présente seulement lorsque $0 < \theta''$ et $Z < z_2$). Il faut alors déformer ce contour de façon qu'il renferme le point z_2 , si l'on veut qu'il soit équivalent à la circonférence $|z| = 1$ pour l'intégrale I (n° 6, *remarque*).

Du point z_2 , comme centre, décrivons une demi-circonférence $\beta'M\gamma'$, avec un rayon très petit. Menons, à l'axe des abscisses, les parallèles $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$, limitées au contour D. Ce contour, modifié comme l'indique la *fig.* 15, est équivalent, pour l'intégrale I, à la circonférence $|z| = 1$.

Fig. 15.



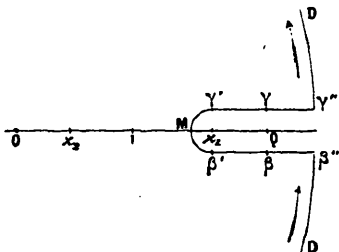
Nous prendrons sur les droites $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ des points β , γ symétriques par rapport à l'axe des abscisses et à distance finie du point z_2 , mais assez rapprochés de ce point pour qu'un développement que nous rencontrerons plus loin, qui converge dans le domaine de z_2 , soit valable jusqu'en β , γ .

Supposons, en second lieu, que le point où le contour D rencontre la partie positive de l'axe des abscisses soit plus éloigné de l'origine que le point singulier z_1 de $J(z)$. Il faut alors déformer ce contour, de façon que le point z_1 n'y pénètre pas, si l'on veut qu'il soit équivalent à la circonférence $|z| = 1$ pour l'intégrale I (n° 6).

Du point z_1 comme centre, décrivons une demi-circonférence $\beta'M\gamma'$, avec un rayon très petit. Menons à l'axe des abscisses les parallèles $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$, limitées à la circonférence D. Ce contour, modifié comme l'indique la *fig.* 16, est équivalent pour l'intégrale I à la circonférence $|z| = 1$. Nous prendrons sur les droites $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ des points β , γ , symétriques par rapport à l'axe des abscisses et à distance finie du

point z_1 , mais assez rapprochés de ce point pour qu'un développement que nous rencontrerons plus loin, qui converge dans le domaine de z_1 , soit valable jusqu'en β , γ .

Fig. 16.



Ces points β , γ seront d'ailleurs assujettis à la condition que leur projection Q , sur l'axe des abscisses, se trouve à une distance de l'origine inférieure à $\cot \frac{\psi}{2}$.

Nous désignerons dorénavant par D' le contour $\beta\beta'M\gamma'\gamma$ et par D'' le reste du contour (*fig.* 15 et 16). Nous appellerons I' la partie de l'intégrale I prise le long de D' , et I'' la seconde partie de I prise le long de D'' .

Nous démontrerons plus loin que I' , dans le cas de la *fig.* 15, est égale au produit d'une quantité finie par $m_1^{2s-2}\varphi^{m_1}(z_2)$ et que, dans le cas de la *fig.* 16, I' est égale au produit d'une quantité finie par $m_1^{2s-2}\varphi^{m_1}(z_1)$.

18. Pour évaluer l'intégrale I lorsque le chemin D est équivalent à la circonférence $|z|=1$ ou la partie I'' de cette intégrale prise le long de D'' , dans les cas des *fig.* 15 et 16, on peut remplacer sous le signe $\int$ la fonction $J(z)$ par son expression (21) pour des motifs qui ont été exposés à la fin du n° 8. On est ainsi conduit à considérer l'intégrale

$$(29) \quad \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \int \Psi^*(z) \left(1 + \frac{R}{m_1}\right) \varphi^{m_1}(z) dz.$$

Toutefois, s'il arrive, dans le cas de la *fig.* 16, que le contour D rencontre la partie positive de l'axe des abscisses à une distance de l'origine

supérieure à $\cot \frac{\psi}{2} (')$, les parallèles $\gamma\gamma''$, $\beta\beta''$ sont voisines du point singulier $z = \cot \frac{\psi}{2}$ de $J(z)$ et peut-être aussi du point $z = z'_1$. Il convient alors, pour pouvoir employer l'expression (21) de $J(z)$, tout le long du chemin D'' , il convient, dis-je, de dilater $\beta\beta''$ et $\gamma\gamma''$, dans le voisinage des points $z = \cot \frac{\psi}{2}$ et $z = z'_1$, de façon que ces singularités de $J(z)$ soient à distance finie du chemin d'intégration. Les déformations de $\beta\beta''$ et $\gamma\gamma''$ peuvent d'ailleurs être construites assez petites pour que $|\varphi(z)|$ soit inférieur à $|\varphi(z_1)|$, le long de ces déformations, puisque $\left| \varphi \left(\cot \frac{\psi}{2} \right) \right| < |\varphi(z_1)|$ et $|\varphi(z'_1)| < |\varphi(z_1)|$ (n° 11, 2°). On voit donc que s'il existe sur le contour D'' (fig. 16), avant la déformation de $\gamma\gamma''$, $\beta\beta''$, un point z où $|\varphi(z)|$ est supérieur à $|\varphi(z_1)|$, ce point jouira de la même propriété après la déformation de ces parallèles; si $|\varphi(z)|$ est inférieur à $|\varphi(z_1)|$ tout le long de D'' avant la déformation des droites $\gamma\gamma''$, $\beta\beta''$, il en sera encore de même après leur déformation. C'est là ce qu'il importe de savoir, et nous n'aurons plus à revenir sur ces déformations de $\gamma\gamma''$, $\beta\beta''$ qui ne jouent aucun rôle dans le problème qui nous occupe.

19. Les considérations qui précèdent permettent de trouver la valeur de I dans les différents cas qui peuvent se présenter.

Supposons d'abord $0 < 0''$:

1° $Z < z_2$. Le contour D doit être déformé comme il est indiqué (fig. 15), pour être équivalent à la circonférence $|z| = 1$. Or $|\varphi(z)|$ est inférieur à $|\varphi(z_2)|$ tout le long de la partie D'' du contour de la fig. 15 (nos 13 et 11). L'intégrale (29) prise le long de D'' étant égale à I' , on a asymptotiquement, pour les motifs qui ont été donnés dans l'avant-propos du présent Mémoire, et d'après ce que nous avons dit à la fin du n° 17, on a

$$I = I'.$$

2° $z_1 > Z > z_2$. Le contour D est équivalent pour l'intégrale I à la circonférence $|z| = 1$, et l'intégrale (29) prise le long de D est égale

(1) D'après la définition du contour D (nos 13 et 16) et la discussion de l'équation $V(z) = 0$ (n° 9), cette hypothèse n'est possible que si $0'' < 0 < 0$.

à I. Les fonctions $\Psi(z) \left(1 + \frac{R}{m_1}\right)$ et $\varphi(z)$ sont holomorphes le long du chemin d'intégration (n° 8); d'autre part, lorsque la variable décrit ce contour $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour la valeur $z = Z$ qui est racine de $\varphi'(z)$. L'évaluation approchée de l'intégrale I s'obtient donc par la considération de ce point $Z^{(1)}$ et l'on peut écrire

$$(30) \quad I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \sqrt{-\frac{2\varphi(Z)}{\varphi''(Z)}} \Psi(Z) \varphi^{m_1}(Z) (1 + \varepsilon),$$

le produit $m_1 \varepsilon$ restant fini lorsque m_1 croît indéfiniment.

La direction de la tangente au contour au point Z faisant l'angle $\frac{\pi}{2}$ avec la direction positive de l'axe des abscisses, la partie imaginaire du radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi''}}$ est positive.

3° $Z > z_1$. Le contour D doit être déformé, comme il est indiqué (fig. 16), pour être équivalent à la circonférence $|z| = 1$. Or $|\varphi(z)|$ est inférieur à $|\varphi(z_1)|$ tout le long de la partie D' du contour de la fig. 16 (nos 13 et 11). L'intégrale (29) prise le long de D' étant égale à I', on a asymptotiquement, pour les mêmes raisons que plus haut,

$$I = I'.$$

Supposons en second lieu $\theta''' < \theta < \theta''$.

1° Si le point où le contour D de la fig. 12 rencontre la partie positive de l'axe des abscisses est plus rapproché de l'origine que le point z_1 , ce contour est équivalent à la circonférence $|z| = 1$ et l'intégrale (29), prise le long de ce chemin D, est égale à I. Le long de ce contour $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour $z = Z_i$ et $z = Z_{-i}$. L'évaluation approchée de I s'obtient donc par la considération de ces points $(^1)$ et l'on a

$$(31) \quad \left\{ I = \frac{m_1^{s-1}}{2i\pi} \left[\sqrt{-\frac{2\varphi(Z_i)}{\varphi''(Z_i)}} \Psi(Z_i) \varphi^{m_1}(Z_i) + \sqrt{-\frac{2\varphi(Z_{-i})}{\varphi''(Z_{-i})}} \Psi(Z_{-i}) \varphi^{m_1}(Z_{-i}) \right] (1 + \varepsilon), \right.$$

le produit $m_1 \varepsilon$ restant fini lorsque m_1 croît indéfiniment.

(¹) HAMY, *loc. cit.*, p. 403.

En appelant Ω l'argument de Z_i ($0 < \Omega < \pi$) la direction de la tangente au contour au point Z_i est $\Omega + \pi$, par rapport à la direction positive de l'axe des abscisses; la direction de la tangente au contour au point Z_{-i} est $2\pi - \Omega$ (n° 15, remarques); il n'y a donc qu'à appliquer la règle donnée dans un Mémoire précédent (') pour avoir le sens

des radicaux $\sqrt{-\frac{2\varphi(Z_i)}{\varphi''(Z_i)}}$ et $\sqrt{-\frac{2\varphi(Z_{-i})}{\varphi''(Z_{-i})}}$.

Dans ce cas, on a nécessairement $|\varphi(z_i)| < |\varphi(Z_i)|$ (n°s 15 et 11).

2° Si le point où le contour D de la fig. 12 rencontre la partie positive de l'axe des abscisses est plus éloigné de l'origine que le point z_i , il faut déformer ce contour, comme il est indiqué (fig. 16), pour qu'il devienne équivalent à la circonférence $|z| = 1$. L'intégrale I peut alors se décomposer en deux parties I'' et I' (n° 17).

L'intégrale I'' s'évalue comme dans le cas précédent et sa valeur est donnée par la formule (31). L'intégrale I' contient, comme nous l'avons dit au n° 17, $m_i^{2s-2} \varphi^{m_i}(z_i)$ en facteur. D'après les remarques faites dans l'avant-propos du présent Mémoire, si $|\varphi(Z_i)| > |\varphi(z_i)|$, la valeur asymptotique de I est donnée par I'', c'est-à-dire par la formule (31); si, au contraire, $|\varphi(Z_i)| < |\varphi(z_i)|$, I' est la valeur asymptotique de I.

Considérons en troisième lieu le cas où $0'' < 0 < 0$.

1° Si le point A où le contour D (fig. 13 ou 14) rencontre la partie positive de l'axe des abscisses est plus près de l'origine que le point z_i , ce contour est équivalent à la circonférence $|z| = 1$ et l'intégrale (29), prise le long de D, est égale à I. Le long de ce chemin $|\varphi(z)|$ devient maximum absolu pour $z = Z$. L'évaluation approchée de I s'obtient donc par la considération de ce point et l'on a

$$(32) \quad I = \frac{m_i^{s-1}}{2i\pi} \sqrt{-\frac{2\varphi(Z)}{\varphi''(Z)}} \Psi(Z) \varphi^{m_i}(Z) (1 + \varepsilon),$$

le produit $m_i \varepsilon$ restant fini lorsque m_i croît indéfiniment.

La direction de la tangente au contour au point Z, menée dans le sens de l'intégration, fait l'angle $\frac{3\pi}{2}$ avec la direction positive de l'axe

(') HAMY, *loc. cit.*, p. 404.

des abscisses; la partie imaginaire du radical $\sqrt{-\frac{2\varphi}{\varphi'}}$ est donc négative.

Dans ce cas, on a nécessairement $|\varphi(z_1)| < |\varphi(Z)|$ (nos 13 et 11).

2° Si le contour D (fig. 13 ou 14) rencontre la partie positive de l'axe des abscisses en un point A plus éloigné de l'origine que le point z_1 , il faut déformer ce contour comme il est indiqué (fig. 16), pour qu'il devienne équivalent à la circonférence $|z| = 1$. L'intégrale I peut alors se décomposer en deux parties I' et I'' (n° 17).

L'intégrale I' s'évalue comme dans le cas précédent, et sa valeur est donnée par la formule (32). L'intégrale I' contient $m_1^{2s-2} \varphi^{m_1}(z_1)$ en facteur comme nous l'avons dit au n° 17. Si donc $|\varphi(Z)| < |\varphi(z_1)|$, la valeur asymptotique de I est donnée par I'', c'est-à-dire par la formule (32); si $|\varphi(Z)| > |\varphi(z_1)|$, on a asymptotiquement $I = I'$.

Considérons en quatrième lieu le cas où $\theta > 0$.

Le contour D du n° 16 doit être déformé comme il est indiqué (fig. 16), pour être équivalent à la circonférence $|z| = 1$. $|\varphi(z)|$ est inférieur à $|\varphi(z_1)|$ tout le long de la partie D'' du contour ainsi modifié (nos 16 et 11); on a donc asymptotiquement $I = I'$, d'après ce qui a été dit au n° 17 et dans l'avant-propos du présent Mémoire.

Il reste, pour avoir la valeur de I dans tous les cas possibles, à déterminer la valeur de l'intégrale I' qui a été définie au n° 17. C'est de cette détermination que nous allons maintenant nous occuper, en nous plaçant dans le cas de la fig. 16, pour fixer les idées. Un simple changement d'indice, dans le résultat obtenu, sera ensuite suffisant pour obtenir la valeur de I', dans le cas de la fig. 15.

VI.

20. Il faut tout d'abord mettre la fonction $F(x, z)$ (12) sous une forme particulière. Posons

$$(33) \quad x_1 = \frac{1}{\varphi(z_1)},$$

et considérons l'expression du carré de la distance des planètes qui peut s'écrire, d'après les formules (11),

$$(34) \quad \Delta = -\frac{r^2 \varphi(z)}{x} \left[x - \frac{1}{\varphi(z)} \right] \left[x - \frac{\alpha^2}{r^2} \frac{1}{\varphi(z)} \right].$$

Δ est une fonction holomorphe de $x - x_1$ et de $z - z_1$ dans un certain domaine. Cette fonction a deux racines égales à z_1 pour $x = x_1$, puisque r^2 est égal à α_1^2 pour $z = z_1$ (n° 5).

Il résulte de là que, pour x voisin de x_1 , Δ a deux racines σ' , σ'' voisines de z_1 , et que l'on peut poser identiquement (1)

$$(35) \quad \Delta = \frac{1}{H(z - z_1, x - x_1)} (z - \sigma') (z - \sigma'').$$

Dans cette expression, le polynome $(z - \sigma') (z - \sigma'')$ a pour coefficients des fonctions holomorphes de $x - x_1$. La fonction $\frac{1}{H(z - z_1, x - x_1)}$ est d'ailleurs holomorphe en $z - z_1$, $x - x_1$, dans un certain domaine, et ne s'annule pas pour $x = x_1$, $z = z_1$. Il en résulte que $H(z - z_1, x - x_1)$ ne s'annule pas pour $x = x_1$, $z = z_1$, et est elle-même holomorphe en $z - z_1$, $x - x_1$, dans un certain domaine.

Il est facile de calculer ces racines σ' et σ'' par des moyens analogues à ceux que j'ai employés pages 439 et 440 de mon Mémoire déjà cité.

La racine σ' de l'équation $x = \frac{1}{\varphi(z)}$, développée suivant les puissances de $\frac{x - x_1}{x_1}$, est

$$(36) \quad z = \sigma' = z_1 - \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} \frac{x - x_1}{x_1} + \dots$$

La racine σ'' de l'équation $x = \frac{\alpha_1^2}{r^2} \frac{1}{\varphi(z)}$, développée suivant les puissances de $\frac{x - x_1}{x_1}$, est

$$(37) \quad z = \sigma'' = z_1 + \frac{1}{\frac{\sin \psi}{\alpha} \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}} \frac{x - x_1}{x_1} + \dots$$

(1) POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 316 et 317. — PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 241.

De ces expressions on déduit

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} h = \frac{\sigma' + \sigma''}{2} &= z_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\frac{\sin \psi}{\alpha} \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}} - \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} \right] \frac{x - x_1}{x_1} + \dots, \\ k = \left(\frac{\sigma' - \sigma''}{2} \right)^2 &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\frac{\sin \psi}{\alpha} \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}} + \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)} \right]^2 \left(\frac{x - x_1}{x_1} \right)^2 + \dots \end{aligned} \right.$$

Des formules (34), (35), (38) on tire, d'autre part,

$$(39) \quad \frac{1}{\Pi(0, 0)} = \alpha_1^2 \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} \left[\frac{\sin \psi}{\alpha} \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} \right].$$

D'après les formules (35), (38), l'expression de $F(x, z)$ peut s'écrire

$$F(x, z) = \left[\frac{\Pi(z - z_1, x - x_1)}{(z - h)^2 - k} \right]^s \frac{r}{\alpha z} f_1(t^0 x) f(z),$$

ou, en posant

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda^{(s)}(z - z_1, x - x_1) &= [H(z - z_1, x - x_1)]^s \frac{r}{\alpha z} f_1(t^0 x) f(z), \\ F(x, z) &= \frac{\lambda^{(s)}(z - z_1, x - x_1)}{[(z - h)^2 - k]^s}, \end{aligned} \right.$$

la fonction $\lambda^{(s)}$ étant holomorphe en $x - x_1$, $z - z_1$ dans un certain domaine et ne s'annulant pas pour $x = x_1$, $z = z_1$. On a d'ailleurs, d'après les formules (11) et (39),

$$(41) \quad \lambda^{(s)}(0, 0) = [H(0, 0)]^s \frac{r}{\alpha z_1} f_1 \left[\frac{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(z_1 - \tan^2 \frac{\psi}{2} \right)^2}{\alpha z_1} \right] f(z_1).$$

La fonction $\lambda^{(s)}$ est développable suivant les puissances de $z - z_1$ et de $x - x_1$, et h suivant les puissances de $x - x_1$; cette fonction est donc développable suivant les puissances de $z - h$ puisque h se réduit à z_1 pour $x = x_1$ (38). Ainsi l'on peut écrire

$$(42) \quad F(x, z) = \frac{D_0 + (z - h) D_1 + (z - h)^2 D_2 + \dots}{[(z - h)^2 - k]^s}.$$

les fonctions de x , D_0 , D_1 , D_2 , ... étant holomorphes en $x = x_1$. La valeur de D_0 pour $x = x_1$ n'est autre que $\lambda'(0, 0)$, puisque h se réduit à z_1 pour $x = x_1$.

Remarque. — Reportons-nous à la *fig.* 16. Appelons Q la projection des points γ , β sur l'axe des abscisses, projection qui est à une distance de l'origine inférieure à $\cot \frac{\psi}{2}$ (n° 18), et soit y l'affixe d'un point quelconque pris sur le segment MQ de l'axe des abscisses. On voit sans peine (n° 9) que l'on a

$$V(y) < 0.$$

D'après l'identité

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{V(z)}{2z^2 \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right)},$$

il en résulte

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} < 0, \\ \left| \frac{\sin \psi}{\alpha} \frac{y^2 - 1}{y^2} - \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right| > \left| \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right| > 0. \end{cases}$$

On déduit de là, en faisant $y = z_1$ (39),

$$H(0, 0) < 0.$$

On trouverait de même, dans le cas de la *fig.* 15, que la quantité $H(0, 0)$ qui se déduit de la formule (39) en remplaçant z_1 par z_2 , que cette quantité, dis-je, est encore négative. Si l'on appelle y un point du segment MQ (*fig.* 15), on a en effet dans ce cas

$$V(y) > 0, \\ \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} > 0 > \frac{\sin \psi}{\alpha} \frac{y^2 - 1}{y^2} - \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}.$$

21. Il a pour valeur l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int J(z) dz,$$

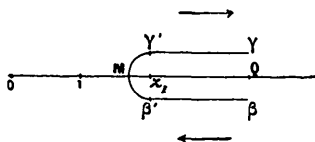
prise le long du chemin $\beta\beta'M\gamma'\gamma$ (*fig.* 17), (cas de la *fig.* 16). La

fonction $J(z)$ est d'ailleurs définie par l'intégrale

$$J(z) = \frac{1}{2i\pi} \int F(x, z) \frac{dx}{x^{m_1+1}},$$

prise le long d'un contour S qui renferme le point v (*fig. 2*), dont tous les points sont plus éloignés de l'origine que le point μ , sauf dans le

Fig. 17.



voisinage de ce point, et tel que la droite μO rencontre ce contour en un point unique (nos 7 et 5).

Il est facile de déterminer les points μ et v lorsque z est un point quelconque du chemin représenté (*fig. 17*).

Supposons d'abord que z soit un point de la demi-circonférence $\beta'M\gamma'$ (*fig. 17*), dont le rayon ε est infiniment petit. Les expressions (4), (11), (33) donnent, en observant que $r = a_1$ pour $z = z_1$,

$$\begin{aligned} \frac{\mu - x_1}{x_1} &= - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} (z - z_1), \\ \frac{v - x_1}{x_1} &= \left[\frac{\sin \psi}{\alpha} \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} - \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)} \right] (z - z_1). \end{aligned}$$

Supposons en second lieu que z soit un point de $\beta\beta'$. Appelons y l'abscisse de ce point et posons $x' = \frac{1}{\varphi(y)}$. Son ordonnée étant infiniment petite et égale à $-\varepsilon$, on a

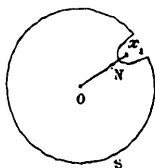
$$\begin{aligned} \frac{\mu - x'}{x'} &= \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \varepsilon \sqrt{-1}, \\ \frac{v - x'}{x'} &= \left(\frac{a_1}{r} \right)_y^2 - 1 + \left(\frac{a_1}{r} \right)_y \left[\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} - \left(\frac{a_1}{r} \right)_y \frac{\sin \psi}{\alpha} \frac{y^2 - 1}{y^2} \right] \varepsilon \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

En changeant ε en $-\varepsilon$ dans ces formules, on obtient les expressions de μ et de v qui correspondent au cas où z est un point de $\gamma\gamma'$; y étant supérieur à z_1 , on a $\left(\frac{a_1}{r} \right)_y > 1$ (no 6); le coefficient de $\varepsilon \sqrt{-1}$

dans $\frac{\gamma - x'}{x'}$ est donc supérieur en valeur absolue au même coefficient dans $\frac{\mu - x'}{x'}$, d'après les inégalités (43). On peut d'ailleurs supposer que les points β, γ ont été pris assez près de z_1 , tout en étant à distance finie de ce point, pour que la plus grande valeur absolue de $\frac{\varphi'(\gamma)}{\varphi(\gamma)}$ soit inférieure à la plus petite valeur absolue du coefficient de $\varepsilon \sqrt{-1}$ dans l'expression de $\frac{\gamma - x'}{x'}$, lorsque z chemine le long de $\beta\beta'$ ou de $\gamma\gamma'$.

Cela étant, on voit par des considérations analogues à celles que j'ai employées dans mon Mémoire plusieurs fois cité (p. 447 et suivantes) : 1° que l'on peut prendre dans le plan de la variable x pour l'intégrale $J(z)$, un contour unique S , *quelle que soit la position du point z sur le chemin de la fig. 17*; 2° le contour S est une circonfé-

Fig. 18.



rence de rayon supérieur à $|x_1|$, déformée le long de la droite Ox_1 , de façon à laisser le point x_1 à l'extérieur du contour (fig. 18); 3° on peut écrire

$$(44) \quad l' = \frac{1}{2i\pi} \int_S \Phi(x) \frac{dx}{x^{m_1+1}},$$

$\Phi(x)$ désignant la fonction

$$(45) \quad \Phi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int F(x, z) dz,$$

où l'intégrale est prise le long du chemin $C' = \beta\beta' M \gamma' \gamma$ de la fig. 17; 4° en s'appuyant sur ce que $H(0,0) < 0$ et sur les considérations développées au n° 7, on reconnaît que le point $x = x_1$ est un point singulier de la fonction $\Phi(x)$.

22. Le développement de la fonction $\Phi(x)$ autour du point $x = x_1$

s'obtient en partant de la formule (42) et écrivant

$$\Phi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{D_0 + (z-h)D_1 + (z-h^2)D_2 + \dots}{[(z-h)^2 - k]^s} dz.$$

En posant

$$J_p^{(s)} = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{(z-h)^p}{[(z-h)^2 - k]^s} dz,$$

il vient

$$\Phi(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} D_p J_p^{(s)}.$$

J'ai antérieurement étudié ces intégrales $J_p^{(s)}$, et comme je n'aurais à répéter ici que ce que j'ai déjà dit, je n'y reviendrai pas. L'intégrale $J_0^{(\frac{1}{2})}$ ou du moins sa partie non holomorphe est égale, dans le cas actuel, à $-\log k$ au lieu de $\log k$, à cause du sens de l'intégration. Il en résulte aussi un changement de signe dans la partie non holomorphe de $J_p^{(s)}$. La partie non holomorphe du développement de $\Phi(x)$, qui se trouve page 456 de mon Mémoire, doit donc être ici changée de signe. Ainsi l'on a, dans le voisinage du point $x = x_1$,

$$\begin{aligned} 2i\pi \Phi(x) = & - \sum_{p=0}^{p=2s-3} 2 \frac{2 \cdot 4 \dots (2s-3-p)}{(p+1)(p+3) \dots (2s-2)} \frac{(-1)^{s-\frac{3}{2}-\frac{p}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}} D_p \\ & - \log \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \sum_{p=2s-1}^{p=\infty} 2 \frac{2s(2s+2) \dots (p-1)}{2 \cdot 4 \dots (p-2s+1)} k^{\frac{p+1}{2}-s} D_p \\ & + \text{fonction holomorphe;} \end{aligned}$$

l'entier p ne devant recevoir que des valeurs paires positives, y compris zéro; la factorielle $\frac{2s(2s+2) \dots (p-1)}{2 \cdot 4 \dots (p-2s+1)}$ devant être remplacée par 1 pour $p=0$ et $s=\frac{1}{2}$, ainsi que la factorielle $\frac{2 \cdot 4 \dots (2s-3-p)}{(p+1)(p+3) \dots (2s-2)}$ pour $p=0$ et $s=\frac{3}{2}$.

Cherchons, dans le développement de $\Phi(x)$, le terme de la partie non holomorphe qui contient la puissance de $1 - \frac{x}{x_1}$ avec son plus faible exposant.

1° Si $s = \frac{1}{2}$, le premier signe $\sum$ disparaît du développement de $\Phi(x)$, et le premier terme du second signe $\sum$ a pour valeur

$$-2D_0 \log \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \quad (s = \frac{1}{2}).$$

D_0 est holomorphe en $x - x_1$; son terme constant (n° 20), pour $s = \frac{1}{2}$, a pour valeur $\lambda^{\frac{1}{2}}(0,0)$. On peut donc écrire, pour $s = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & -\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(0,0)}{i\pi} \log \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \\ & \times \left[1 + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \text{fonction holomorphe de } \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\right] \\ & + \text{fonction holomorphe.} \end{aligned}$$

2° Si $s \geq \frac{2}{3}$, le terme du développement de $\Phi(x)$, qui correspond à $p = 0$, est sous le premier signe $\sum$. Il a pour expression

$$-2 \frac{2.4 \dots (2s-3)}{1.3 \dots (2s-2)} \frac{(-1)^{s-\frac{3}{2}}}{k^{s-\frac{1}{2}}} D_0.$$

Le terme cherché s'obtient en remplaçant D_0 par son terme constant $\lambda^s(0,0)$ (n° 20) et k par son premier terme (38). On peut donc écrire, pour $s \geq \frac{2}{3}$,

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \frac{2.4 \dots (2s-3)}{1.3 \dots (2s-2)} \frac{(-1)^{s-\frac{1}{2}} \lambda^s(0,0)}{i\pi} \left[\frac{\frac{\sin \psi}{2} \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} \frac{\varphi(z_1)}{\varphi'(z_1)}}{\frac{\sin \psi}{2} \frac{z_1^2 - 1}{z_1^2} \frac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}} \right]^{-2s+1} \\ & \times \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^{-2s+1} \left[1 + \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \times \text{fonction holomorphe}\right] \\ & + \text{fonction holomorphe;} \end{aligned}$$

la factorielle $\frac{2.4 \dots 2s-3}{1.3 \dots 2s-2}$ devant être remplacée par 1 pour $s = \frac{3}{2}$.

La valeur donnée pour $J_0^{(\frac{1}{2})}$ suppose essentiellement que l'argument

choisi pour $\sqrt{H(o,o)}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ à un multiple près de 2π . Le facteur $[H(o,o)]^s$ qui rentre dans $\lambda^s(o,o)$ peut donc s'écrire

$$[H(o,o)]^s = (-1)^{s-\frac{1}{2}} i [-H(o,o)]^s,$$

$[-H(o,o)]^s$ ayant un sens purement arithmétique. Il en résulte

$$(-1)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\lambda^s(o,o)}{i} = [-H(o,o)]^s \frac{\alpha}{z_1} f_1 \left[\frac{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(z_1 - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2}{\alpha z_1} \right] f(z_1).$$

En tenant compte de la formule (39) et posant

$$\begin{aligned} B^{(s)}(z) &= \frac{\alpha^{-2s}}{\pi z} \left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{\sin \psi}{\alpha} \frac{z^2 - 1}{z^2} \right) \right]^{s-1} \left[\frac{\sin \psi (z^2 - 1)}{2 z^2} \right]^{-2s+1} \\ &\times f_1 \left[\frac{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2}{\alpha z} \right] f(z), \end{aligned}$$

on peut écrire

$$(44) \left\{ \begin{array}{ll} \text{pour } s = \frac{1}{2}, & \Phi(x) = -B^{(\frac{1}{2})}(z_1) \log \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \\ & \times \left[1 + \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \times \text{fonct. holom. de } 1 - \frac{x}{x_1} \right] \\ & + \text{fonction holomorphe,} \\ \text{pour } s \geq \frac{3}{2}, & \Phi(x) = \frac{2 \cdot 4 \dots (2s-3)}{1 \cdot 3 \dots (2s-2)} B^{(s)}(z_1) \left(1 - \frac{x}{x_1} \right)^{-2s+1} \\ & \times \left[1 + \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \times \text{fonction holomorphe} \right. \\ & \quad \left. + \left(1 - \frac{x}{x_1} \right)^{2s-1} \log \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \right. \\ & \quad \left. \times \text{fonct. holom.} \right] + \text{fonct. holomorphe.} \end{array} \right.$$

23. De tous les points singuliers de $\Phi(x)$ extérieurs au contour S , le point x_1 est le plus rapproché de l'origine (n° 21). La considération de ce point singulier conduit donc à la valeur asymptotique de I' , en appliquant la méthode de M. Darboux. Prenant comme point de dé-

part les formules (44), on a

$$\text{Pour } s = \frac{1}{2}, \quad I' = -B^{(\frac{1}{2})}(z_1) \\ \times \left[\text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans } \log \left(1 - \frac{x}{x_1} \right) \right] \left(1 + \frac{k'}{m_1} \right);$$

$$\text{Pour } s \geq \frac{3}{2}, \quad I' = \frac{2 \cdot 4 \dots (2s-3)}{1 \cdot 3 \dots (2s-2)} B^{(s)}(z_1) \\ \times \left[\text{coefficient de } x^{m_1} \text{ dans } \left(1 - \frac{x}{x_1} \right)^{1-2s} \right] \left(1 + \frac{k''}{m_1} \right);$$

k' et k'' restant finis lorsque m_1 augmente indéfiniment.

Finalement, si l'on remplace x_1 par sa valeur $\frac{1}{\varphi(z_1)}$, on arrive à l'expression suivante, valable pour $s \geq \frac{1}{2}$,

$$I' = \frac{B^{(s)}(z_1)}{[1 \cdot 3 \dots (2s-2)]^2} \times \frac{1}{m_1^{2(1-s)}} \zeta_1^{m_1}(z_1) \left(1 + \frac{k}{m_1} \right),$$

k restant fini lorsque m_1 croît indéfiniment.

Cette valeur de I' correspond au cas de la *fig.* 16. On en déduit la valeur de I' qui correspond à la *fig.* 15 en y changeant z_1 en z_2 .

Résumé.

On considère deux planètes P, P_1 , se mouvant dans le même plan. P décrit une orbite elliptique (u , anomalie excentrique; r , rayon vecteur; $e = \sin \psi$, excentricité; a demi grand axe; ζ , anomalie moyenne); P_1 décrit une orbite circulaire qui est enveloppée par l'orbite de P sans la toucher (a_1 , rayon vecteur et demi grand axe; ζ_1 , anomalie).

On se propose, m et m_1 désignant deux entiers très grands ($m_1 > 0$), de trouver la valeur asymptotique des coefficients de $\frac{\cos}{\sin} (m\zeta + m_1\zeta_1)$ dans le développement de

$$\frac{f(E^{(u)})f_1(E^{(\zeta_1)})}{\Delta^s}.$$

E base des log. nép.; $i = \sqrt{-1}$; $f(E^{iu})$, fonction entière de $\sin u$ et $\cos u$; $f_1(E^{i\zeta_1})$, fonction entière de $\sin \zeta_1$ et $\cos \zeta_1$; Δ carré de la distance PP_1 ; $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

Le coefficient de $\cos(m\zeta + m_1\zeta_1)$ a pour valeur la partie réelle et le coefficient de $\sin(m\zeta + m_1\zeta_1)$ est égal au multiplicateur de $-\sqrt{-1}$, dans une imaginaire 21 qui se calcule comme on va l'indiquer.

Ce dernier coefficient est nul, lorsque les fonctions f, f_1 proviennent d'un premier développement de la fonction perturbatrice ordinaire, effectué suivant les puissances du sinus carré de la demi-inclinaison des orbites de deux planètes dont les mouvements ne s'effectuent pas dans le même plan.

Posons

$$\frac{m}{m_1} = 0,$$

$$\theta'' = -\frac{1}{8} \sec^3 \left(60^\circ - \frac{\psi}{3} \right), \quad \theta''' = -\frac{1}{8} \sec^3 \left(60^\circ + \frac{\psi}{3} \right) \quad (1),$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha} < 1,$$

$$r = -\alpha \frac{\sin \psi}{2z} \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right) \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right),$$

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z}{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2} \left[z E^{-\frac{\sin \psi}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)} \right]^{-0} \quad (2).$$

Faisons

$$H(z) = \frac{m_1^{\frac{s-3}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma(s)} \frac{r^{1-2s}}{\alpha z} \left(\frac{r^2 - \alpha_1^2}{r^2} \right)^{-s} \sqrt{\frac{2\varphi(z)}{\varphi''(z)}} \varphi_1^{m_1}(z) f(z) f_1 \left[\frac{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2}{\alpha z} \right] \quad (3),$$

(1) J'ai donné une Table fournissant les valeurs de θ'' et θ''' en fonction de l'excentricité $e = \sin \psi$ (*loc. cit.*, p. 466).

(2) Il est indifférent d'adopter l'une ou l'autre des déterminations du facteur élevé à la puissance -0 .

(3) L'expression qui suit f_1 n'est pas un facteur; c'est ce que l'on doit substituer à $E^{i\zeta_1}$ dans $f_1(E^{i\zeta_1})$.

et

$$V(z) = \theta \sin \psi \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2 \left(z - \cot \frac{\psi}{2} \right) - 2z \left(z + \tan \frac{\psi}{2} \right).$$

Ce sont les racines de l'équation $V(z) = 0$ que l'on aura à substituer dans la fonction $H(z)$.

$V(z)$ a ses racines réelles lorsque $\theta < \theta''$ ou lorsque $0 > \theta > \theta''$. Nous désignerons alors par Z la racine de $V(z)$ donnée par le Tableau de formules

$$\cos \chi = -\theta \left[\frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3} \right]^{-\frac{2}{3}}, \quad 0 < \chi < 90^\circ,$$

$$\nu = -2 \sqrt{\frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3}} \cos \left(60^\circ - \frac{\chi}{3} \right),$$

$$Z = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} \tan \frac{\psi}{2}.$$

$V(z)$ a des racines imaginaires lorsque $\theta'' > \theta > \theta'''$. Ces racines sont données par la suite des formules

$$\sin 2\chi = -\frac{1}{\theta} \left[\frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3} \right]^{\frac{2}{3}},$$

$$\tan \xi = \sqrt[3]{\tan \chi},$$

$$\nu = -\sqrt{\frac{1 - 2\theta \cos \psi}{3}} \frac{1}{\sin 2\xi} \pm \sqrt{-1} \sqrt{1 - 2\theta \cos \psi} \cot 2\xi,$$

$$Z_i = \frac{\nu - 1}{\nu + 1} \tan \frac{\psi}{2}, \quad Z_{-i} = \text{la conjuguée de } Z_i.$$

Nous supposons le signe de $\sqrt{-1}$, dans ν , choisi de façon que Z_i ait sa partie imaginaire positive.

Appelons z_1 et z_2 ($z_1 > 1 > z_2 > 0$) les racines de l'équation

$$\sin \psi z^2 - 2(1 - \alpha)z + \sin \psi = 0,$$

et posons

$$\Xi(z) = \frac{2}{\pi z} \frac{1}{a^{2s}} \frac{m_1^{2s-2}}{[1.3 \dots 2s-2]^2} \left[-\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \left| \frac{\sin \psi}{\alpha} \frac{z^2 - 1}{z^2} - \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \right]^{s-1} \\ \times \left[\frac{2z^2}{\sin \psi (z^2 - 1)} \right]^{2s-1} \varphi^{m_1}(z) f(z) f_1 \left[\frac{\cos^2 \frac{\psi}{2} \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right)^2}{\alpha z} \right].$$

Voici la valeur de $2I$ dans tous les cas possibles, ε désignant une quantité telle que le produit m, ε reste fini lorsque m , croît indéfiniment.

$$\begin{aligned}
 \theta < \theta'' & \begin{cases} 1^\circ & Z < z_2, & 2I = \Xi(z_2)(1 + \varepsilon), \\ 2^\circ & z_2 < Z < z_1, & 2I = H(Z)(1 + \varepsilon), \\ 3^\circ & Z > z_1, & 2I = \Xi(z_1)(1 + \varepsilon), \end{cases} \\
 \theta'' > \theta > \theta''' & \begin{cases} 4^\circ & |\varphi(Z_i)| > |\varphi(z_i)|, & 2I = [-H(Z_i) + H(Z_{-i})](1 + \varepsilon), \\ 5^\circ & |\varphi(Z_i)| < |\varphi(z_i)|, & 2I = \Xi(z_i)(1 + \varepsilon), \end{cases} \\
 0 > \theta > \theta''' & \begin{cases} 6^\circ & |\varphi(Z)| > |\varphi(z_i)|, & 2I = -H(Z)(1 + \varepsilon), \\ 7^\circ & |\varphi(Z)| < |\varphi(z_i)|, & 2I = \Xi(z_i)(1 + \varepsilon), \end{cases} \\
 \theta > 0 > \theta''' & 2I = \Xi(z_i)(1 + \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Remarques. — I. Les puissances fractionnaires qui rentrent dans $\Xi(z_2)$, $\Xi(z_1)$, $H(Z)$ ont un sens arithmétique.

II. Dans $H(Z_i)$ et $H(Z_{-i})$: 1° l'argument de $\left(\frac{r^2 - a_i^2}{r^2}\right)^{-s}$ s'obtient en multipliant par $-s$ l'argument de $\frac{r^2 - a_i^2}{r^2}$ compris entre $+\pi$ et $-\pi$; 2° la partie imaginaire du radical $\sqrt{\frac{2\varphi(Z_i)}{\varphi''(Z_i)}}$ est négative, si l'argument Ω de Z_i est compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$; la partie réelle positive, si Ω est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$; la partie imaginaire positive, si Ω est compris entre $\frac{3\pi}{4}$ et π ; 3° la partie imaginaire du radical $\sqrt{\frac{2\varphi(Z_{-i})}{\varphi''(Z_{-i})}}$ est négative, si Ω est compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$; la partie réelle négative, si Ω est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$; la partie imaginaire positive, si Ω est compris entre $\frac{3\pi}{4}$ et π .

III. Les valeurs de z que l'on doit substituer à z dans $H(z)$ sont, comme nous l'avons déjà dit, racines de $V(z)$ et, par conséquent, de

l'équation $\varphi'(z) = 0$. On peut donc faire sous le radical $\sqrt{\frac{2\varphi(z)}{\varphi''(z)}}$,

$$\frac{2\varphi(z)}{\varphi''(z)} = \frac{4z^2 \left(z - \tan \frac{\psi}{2} \right)}{V'(z)}.$$

ERRATA

*A mon Mémoire inséré au « Journal de Mathématiques pures et appliquées »
(1894).*

Page 426, lignes 5 et 6, en descendant. *Effacer les mots* « donne son signe à l'expression $\frac{d|\varphi(z)|}{dR}$. Ce facteur ».

Page 413, note. *Au lieu de* (n° 20, remarque), *lire* (n° 19, remarque) *et au lieu de* $\nu - \mu = -\mu(a_1^2 - r^2)$, *lire* $\nu - \mu = -\frac{\mu}{a_1^2}(a_1^2 - r^2)$.

Page 461, dernière ligne. *Au lieu de* « imaginaire 1 », *lire* « imaginaire 2 I ».

Par suite de l'oubli de ce facteur 2, il y a lieu de doubler les coefficients des inégalités calculées, pages 468, 469 et 470.

