JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ED. MAILLET

Quelques extensions du théorème de Fermat sur les nombres polygones

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 2 (1896), p. 363-380.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__363_0>

Quelques extensions du théorème de Fermat sur les nombres polygones (¹);

PAR M. ED. MAILLET.

Nous avons communiqué au Congrès de Bordeaux (*Association française pour l'avancement des Sciences*, 1895) la propriété suivante :

Tout nombre entier est la somme de dix-sept cubes d'entiers positifs au plus, dont douze au plus différents de 1 *ou* 0.

La méthode qui nous y a conduit, et qui est directement inspirée des démonstrations données par Cauchy (²) et Legendre (³) du théorème de Fermat sur les nombres polygones, s'étend, avec des modifications sensibles, des cubes aux nombres entiers positifs de la forme

$$\varphi(x) = ax^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5,$$

où les coefficients $a, a_1, \ldots, a_5$ sont entiers ou fractionnaires, mais tels

(¹) Nous avons déjà établi d'autres extensions du théorème de Fermat par une méthode différente dans le *Bulletin de la Société Mathém.*, t. XXIII; 1895.

(²) *Exerc. de Math.*, t. I, p. 273, et *Mémoires de l'Institut.*

(³) *Théorie des nombres*, 3ᵉ édit., t. II, p. 338.

que $\varphi(x)$ soit entier et positif pour toute valeur entière de $x \geqq \mu$, μ étant fini, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si l'expression*

$$\varphi(x) = ax^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5,$$

où $a, a_1, \ldots, a_5$ sont donnés et rationnels, est entière et positive pour toute valeur entière de $x \geqq \mu$, μ étant fini, et de degré 2, 3, 4 ou 5, tout nombre entier supérieur à une certaine limite fonction de a, $a_1, \ldots, a_5$ est la somme d'un nombre limité (au plus 6 pour le degré 2, 12 pour le degré 3, 96 pour le degré 4, 192 pour le degré 5) de nombres positifs $\varphi(x)$, à un nombre limité d'unités près.

Nous en ferons application en particulier aux nombres pyramidaux (théorème II).

La méthode que nous allons indiquer donnera, en même temps, un moyen d'effectuer cette décomposition par un nombre de manières qui augmente indéfiniment, quand le nombre entier à décomposer croît indéfiniment.

D'après les hypothèses faites, le terme indépendant de x est entier, et si le théorème est vrai pour $\varphi(x)$, il le sera pour $\varphi(x) - a_5$, et réciproquement; la limite inférieure, à partir de laquelle le théorème est vrai, et la quantité μ pourront seulement varier d'un nombre limité. Il suffit donc d'établir le théorème en supposant $a_5 = 0$.

I. — Cas où $\varphi(x)$ est de degré 2 ou 3.

Nous admettrons d'abord que les coefficients de $\varphi(x)$ soient entiers; l'extension de la propriété, au cas où ils sont fractionnaires, se fera ensuite sans peine.

Soit alors, en changeant légèrement la notation,

$$\varphi(x) = ax^3 + a_1 x^2 + a_2 x,$$

avec $a > 0$, ou $a = 0$, $a_1 > 0$, puisqu'on suppose $\varphi(x)$ positif pour x

suffisamment grand, et μ la plus petite valeur entière de x, telle que $\varphi(x) \geqq 0$ pour $x \geqq \mu$. Considérons l'identité

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha + x) + \varphi(\alpha - x) = 2[\varphi(\alpha) + (3a\alpha + a_1)x^2] \\ \text{où} \\ 0 \leqq x \leqq \alpha - \mu \qquad \text{et} \qquad \alpha \geqq 0; \end{cases}$$

les deux termes du premier membre sont positifs.

Donnons à x trois valeurs x_1, x_2, x_3 entières satisfaisant à (1), et additionnons membre à membre les identités (1) correspondantes; il vient

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^3{}_i [\varphi(\alpha + x_i) + \varphi(\alpha - x_i)] \\ \displaystyle\qquad = 2[3\varphi(\alpha) + (3a\alpha + a_1)\sum_1^3{}_i x_i^2] \\ \qquad = 2[3\varphi(\alpha) + (3a\alpha + a_1)m], \end{cases}$$

en posant

$$m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Les conditions (1) relatives à x_1, x_2, x_3 seront d'ailleurs forcément satisfaites, si

$$(3)\qquad 0 \leqq m \leqq (\alpha - \mu)^2 \qquad \text{et} \qquad \alpha \geqq 0,$$

ce que nous supposerons.

Dès lors, tout nombre entier m, qui n'est pas de la forme

$$4^h(8n + 7) \quad \text{avec} \quad h \geqq 0,$$

étant (¹) la somme de trois carrés, donnera lieu à une identité de la forme (2), s'il satisfait à (3).

(¹) LEGENDRE, *Théorie des nombres*, 3e édit., t. I, p. 393 et suiv.

Posant maintenant (m, m', α, α' étant entiers)

$$(4)\qquad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 0 \leqq m \leqq (\alpha-\mu)^2 \\ 0 \leqq m' \leqq (\alpha-\mu)^2 \end{array}\right\} m \text{ et } m' \neq 4^h(8n+7), \\ 0 \leqq \alpha < \alpha', \end{cases}$$

$$k = 3a\alpha + a_1, \qquad k' = 3a\alpha' + a_1,$$

$$(5)\qquad A - 3[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] = km + k'm' = A',$$

tout nombre entier $2A$ ainsi obtenu sera, d'après (2), la somme de douze nombres positifs $\varphi(x)$.

Ceci va nous permettre d'établir le théorème pour les nombres entiers compris dans un certain intervalle dépendant de α et α'.

Soit δ le plus grand commun diviseur de $3a$ et de a_1,

$$(6)\qquad \begin{cases} 3a = a'\delta, \qquad a_1 = a'_1\delta, \\ \text{avec } a' \text{ et } a'_1 \text{ premiers entre eux,} \\ k = \delta(a'\alpha + a'_1), \qquad k' = \delta(a'\alpha' + a'_1). \end{cases}$$

Posant

$$(7)\qquad \alpha' = \alpha + 2^\nu \qquad (\nu \text{ entier} \geqq 1),$$

et prenant α impair, quand a' impair et a'_1 pair, α pair dans les autres cas [1], on voit que $a'\alpha + a'_1$ et $a'\alpha' + a'_1$ sont impairs, puisque a' et a'_1 sont premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur devant diviser $a'(\alpha' - \alpha)$ et $a'_1(\alpha' - \alpha)$: δ est donc le plus grand commun diviseur de k et k', et si

$$(8)\qquad \begin{cases} k_1 = a'\alpha + a'_1, \qquad k'_1 = a'\alpha' + a'_1, \qquad A'' = k_1 m + k'_1 m', \\ \text{où } k_1,\ k'_1 \text{ sont impairs et premiers entre eux,} \end{cases}$$

---

[1] Quand a_1 pair et a'_1 impair, on pourrait prendre aussi α impair. Nous supposons α assez grand pour que $k > 0$, $k' > 0$.

l'on a

$$(9)\qquad \begin{cases} k = \delta k_1, & k' = \delta k'_1, \\ A - 3[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] = \delta A'', & A' = \delta A'', \end{cases}$$

en tenant compte de (5).

Considérons maintenant l'égalité

$$(10)\qquad m' = \frac{A'' - k_1 m}{k'_1},$$

déduite de (8). A'' étant un entier arbitrairement choisi, si l'on substitue dans cette égalité à m les $8k'_1$ valeurs consécutives

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad 8k'_1 - 1,$$

elle donnera pour m' des valeurs entières ou non, mais positives, si

$$(11)\qquad A'' \geqq 8k_1 k'_1,$$

ce que nous supposerons. Admettant, de plus, que l'on ait

$$(12)\qquad 8k'_1 \leqq (\alpha - \mu)^2, \qquad A'' \leqq k'_1(\alpha' - \mu)^2,$$

les valeurs m et m' obtenues satisferont aux conditions

$$0 \leqq m \leqq (\alpha - \mu)^2, \qquad 0 \leqq m' \leqq (\alpha' - \mu)^2.$$

De plus, je dis qu'il y aura toujours un des systèmes m, m' au moins tel que m et m' soient entiers sans être de la forme $4^h(8n + 7)$.

En effet, parmi les nombres

$$A'',\quad A'' - k_1,\quad A'' - 2k_1,\quad \ldots,\quad A'' - (8k'_1 - 1)k_1,$$

on en aura exactement 8 divisibles par k'_1, car on n'a

$$A'' - lk_1 \equiv A'' - l'k_1 \qquad (\bmod k'_1)$$

que si $(l - l')k_1 \equiv 0 (\bmod k'_1)$, ce qui exige $l \equiv l' (\bmod k'_1)$, puisque k_1

et k'_1 sont premiers entre eux. Dès lors les 8 systèmes m, m' correspondant aux 8 valeurs $A'' - lk_1$ divisibles par k'_1 sont formés de valeurs m, m' entières et de la forme

$$(13)\qquad m_1 + jk'_1,\quad m'_1 - jk_1 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, 7),$$

respectivement. Les 8 nombres $0, k'_1, 2k'_1, \ldots, 7k'_1$ sont incongrus entre eux (mod 8), puisque k'_1 est impair; de même pour les 8 nombres $0, k_1, 2k_1, \ldots, 7k_1$. Par suite, parmi les 8 nombres $m_1 + jk'_1$ il y en a 3 au plus de la forme $4^h(8n+7)$; de même parmi les 8 nombres $m'_1 - jk_1$. Donc, parmi les 8 systèmes (13), il y en a deux au moins pour lesquels ni m, ni m' ne sont de la forme $4^h(8n+7)$; prenant l'un de ces systèmes, m et m' sont chacun la somme de 3 carrés, et si $\alpha \geqq 0$, d'après (4), (5), (9) et (12), le nombre $2A$, correspondant à la valeur de A'', valeur satisfaisant à (8), (11) et (12), est la somme de 12 nombres positifs $\varphi(x)$.

Les conditions trouvées pour A, A'', α, α' peuvent s'écrire, d'après (4), (6), (7), (8), (11) et (12),

$$(14)\qquad \begin{cases} 0 \leqq \alpha = \alpha' - 2^{\nu} & (\nu \geqq 1) \\ 0 \leqq 3a\alpha + a_1 & \\ 8(3a\alpha' + a_1) \leqq \delta(\alpha - \mu)^2, & \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{avec } \alpha \text{ pair, sauf quand } \frac{3a}{\delta} \text{ est} \\ \text{impair et } \frac{a_1}{\delta} \text{ pair,} \end{array} \right.$$

$$(15)\qquad \frac{8}{\delta}(3a\alpha + a_1)(3a\alpha' + a_1) \leqq \delta A'' \leqq (3a\alpha' + a_1)(\alpha' - \mu)^2;$$

or, ν' étant donné, on peut toujours prendre α assez grand pour que (14) ait lieu quand ν est un entier quelconque $\leqq \nu'$. Donc, d'après (9), on peut prendre α assez grand pour que tout nombre entier

$$(16)\qquad 2A = 6[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] + 2\delta A'',$$

où A'' est un entier quelconque satisfaisant à (15), soit la somme de 12 nombres positifs $\varphi(x)$, ν étant supposé $\leqq \nu'$. Donnant alors à A'' toutes les valeurs entières compatibles avec (15), puis ajoutant à chaque nombre $2A$ obtenu λ unités avec $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 2\delta - 1$, on obtient tous les nombres entiers B tels que

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &6[\varphi(\alpha)+\varphi(\alpha')]+\frac{16}{\delta}(3a\alpha+a_1)(3a\alpha'+a_1)+2\delta \\ &\quad \leqq B \leqq 6[\varphi(\alpha)+\varphi(\alpha')]+2(3a\alpha'+a_1)(\alpha'-\mu)^2,\end{aligned}\right.$$

et le théorème I est vrai pour ces nombres B, qui sont la somme de 12 nombres positifs $\varphi(x)$ et de $2\delta-1$ unités au plus (la réduction de ce nombre à 6 quand $a=0$ ne sera opérée que plus loin, dans la Remarque II).

Si maintenant nous donnons à α des valeurs paires ou impaires suivant les conditions (14), mais croissantes à partir de la limite inférieure résultant de (14), comme nous l'avons indiqué, nous obtenons une suite d'intervalles limités par les valeurs du premier et du dernier membre de (17), et pour lesquels le théorème est vrai ; pour établir ce dernier dans toute sa généralité, il suffit donc de montrer que, pour α assez grand, les intervalles ne sont séparés par aucun nombre entier, auquel cas nous dirons qu'ils sont contigus.

Considérons deux intervalles (17) correspondant à des valeurs α et $\alpha+2$; il suffira que la limite supérieure du premier soit au moins égale à la limite inférieure du deuxième, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} &6[\varphi(\alpha)+\varphi(\alpha')]+2(3a\alpha'+a_1)(\alpha'-\mu)^2 \\ &\quad \geqq 6[\varphi(\alpha+2)+\varphi(\alpha'+2)] \\ &\qquad +\frac{16}{\delta}[3a(\alpha+2)+a_1][3a(\alpha'+2)+a_1]+2\delta,\end{aligned}$$

condition à laquelle on satisfait, pour $\nu\leqq\nu'$, en prenant α supérieur à une limite finie et déterminée, puisque les deux membres de cette inégalité sont des polynomes du troisième (ou du deuxième si $a=0$) degré en α, quand on y remplace α' par $\alpha+2^{\nu}$, et que le coefficient de α^3 (ou de α^2) sont respectivement dans le premier et le deuxième membre $18a$ et $12a$ (ou $14a_1$ et $12a_1$). C. Q. F. D.

Remarque. — Nous avons établi que le nombre des décompositions augmente indéfiniment avec B, par ce fait que l'on peut toujours prendre B assez grand pour que le nombre des valeurs de ν acceptables soit aussi grand qu'on veut. On peut encore obtenir le même résultat en remarquant que l'on peut prendre B assez grand pour que le nombre des intervalles (17) dont il fait partie soit aussi grand qu'on veut. En effet, si $\psi(\alpha)$ et $\chi(\alpha)$ sont le premier et le dernier membre de (17), on peut prendre α_1 assez grand pour que, ρ étant un entier donné, on ait pour $\alpha \geqq \alpha_1$,

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \chi(\alpha) \geqq \psi(\alpha + 2\rho), \\ \dfrac{d\psi(\alpha)}{d\alpha} \geqq 0, \qquad \dfrac{d\chi(\alpha)}{d\alpha} \geqq 0. \end{array} \right.$$

Si B est suffisamment grand, on peut trouver α (pair ou impair suivant les cas) tel que $\alpha \geqq \alpha_1$, et que

$$\psi(\alpha + 2\rho) \geqq B \geqq \psi(\alpha + 2\rho - 2).$$

D'après (18), B est compris dans les ρ intervalles (17) correspondant aux valeurs de α égales à α, $\alpha + 2$, $\alpha + 4$, ..., $\alpha + 2\rho - 2$; à chacun de ces intervalles correspond alors au moins une décomposition de B conformément au théorème établi.

On peut d'ailleurs prendre ν' ou ρ assez grand pour que, parmi les décompositions obtenues ainsi pour un même nombre B, on en ait autant qu'on veut de distinctes; car soit

$$B = \sum_{i}^{12}{}_{1} \varphi(\xi_i) + \varepsilon,$$

où ξ_i, ε entiers, $0 \leqq \varepsilon \leqq 2\delta - 1$, une décomposition de B; les valeurs de α qui ont pu la donner sont comprises parmi les nombres $\xi_i + \xi_j$, avec $i \neq j$, c'est-à-dire en nombre $\leqq C_{12}^2 = 66$. Donc, parmi les décompositions ci-dessus indiquées, en nombre au moins égal à ν ou ρ, on en aura au moins $\frac{\nu}{66}$ ou $\frac{\rho}{66}$ essentiellement distinctes, ce qui établit le résultat annoncé.

Nous avons ainsi établi le théorème dans le cas où a, a_1, a_2 sont entiers. S'ils sont fractionnaires, il faudra et il suffira [1], pour que

---

[1] Comparer, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, les réponses à la question 484.

$\varphi(x)$ soit entier pour les valeurs de $x \geqq \mu$, que $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ et $\varphi(3)$ le soient, puisque $\varphi(x)$ est le terme général d'une suite récurrente d'équation génératrice $(y-1)^4 = 0$. On en conclut sans peine que le plus petit dénominateur commun de a_1, a_2, a_3 est un diviseur de 6. Alors $6\varphi(x)$ a ses coefficients entiers, et l'on peut lui appliquer les résultats précédemment obtenus. On en conclura que tout multiple de 6 supérieur à une certaine limite est, à un nombre limité, mais multiple de 6, d'unités près, la somme de 12 nombres $6\varphi(x)$ positifs.

Un nombre quelconque supérieur à une certaine limite est alors, à un nombre limité d'unités près, la somme de 12 nombres $\varphi(x)$ positifs : ce que nous avons dit du nombre des décompositions distinctes reste applicable.

Application aux nombres pyramidaux. — Ils sont de la forme $\frac{x^3-x}{6}$, avec $x \geqq 0$.

Considérant $\varpi(x) = x^3 - x$, on a

$$a = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 = -1, \qquad \mu = 0, \qquad \delta = 3.$$

Prenons $\nu = 1$, α impair, $\alpha' = \alpha + 2$,

$$2A = 6C = 6[\varpi(\alpha) + \varpi(\alpha')] + 6A'',$$

où C est entier : (15) donnera

$$8\alpha\alpha' \leqq A'' \leqq \alpha'^3.$$

La condition (14) donne $8\alpha' \leqq \alpha^2$, c'est-à-dire $\alpha \geqq 11$, puisque α est impair. On en conclut que, pour $\alpha \geqq 11$, tout nombre 6C multiple de 6, et tel que

$$(19) \qquad \alpha^3 - \alpha + \alpha'^3 - \alpha' + 8\alpha\alpha' \leqq C \leqq \alpha^3 - \alpha + 2\alpha'^3 - \alpha'$$

est la somme de 12 nombres $\varpi(x)$ positifs.

Prenant alors α assez grand pour que

$$\begin{aligned}\alpha^3 - \alpha + 2'^3 - \alpha' \geqq (\alpha+2)^3 - (\alpha+2) + (\alpha'+2)^3 - (\alpha'+2)\\ + 8(\alpha+2)(\alpha'+2),\end{aligned}$$

ce qui exige

$$\alpha^3 - 14\alpha^2 - 84\alpha - 116 \geqq 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha \geqq 19;$$

on en conclut que, pour $\alpha \geqq 19$, les intervalles (19) sont contigus, et que tout nombre $6C$, multiple de 6, et tel que

$$C \geqq \overline{19}^3 - 19 + \overline{21}^3 - 21 + 8.19.21 = 19272$$

est la somme de 12 nombres positifs $\varpi(x)$. Par suite, tout nombre

$$C \geqq 19272$$

est la somme de 12 nombres positifs de la forme $\frac{\varpi(x)}{6} = \frac{x^3 - x}{6}$, et

Théorème II. — *Tout nombre entier $\geqq 19272$ est la somme de douze nombres pyramidaux au plus* (¹).

A titre d'application numérique, prenons $C = 20000$: on peut prendre $\alpha = 19$, et (10) devient

$$3920 = 19m + 21m'.$$

On a six systèmes de valeurs de m et de m', dont aucune n'est de la forme $4^h(8n + 7)$; l'un d'eux, par exemple, $m = 14$, $m' = 174$, donnera, d'après $14 = 3^2 + 2^2 + 1^2$,

$$174 = \overline{13}^2 + 2^2 + 1^2 = \overline{11}^2 + 7^2 + 2^2 = \overline{10}^2 + 7^2 + 5^2,$$

(¹) De même, la formule (16) permet de montrer

1° Quand $\varphi(x)$ a ses coefficients entiers et que $\delta = 3$, que tout multiple de 6 supérieur à une certaine limite est la somme de 12 nombres positifs $\varphi(x)$;

2° Quand $\varphi(x)$ a ses coefficients a, a_1, a_2 fractionnaires, si D est leur plus petit dénominateur commun, et si le plus grand commun diviseur de $3Da$ et Da_1 est 3, que tout multiple de 6 supérieur à une certaine limite est la somme de 12 nombres positifs $D\varphi(x)$, en sorte que tout entier supérieur à une certaine limite, et multiple de $\frac{6}{D}$, est la somme de 12 nombres positifs $\varphi(x)$.

en partant, par exemple, de la première décomposition de 174 en une somme de 3 carrés :

$$20000 = \sum_{1}^{12}{}_i \frac{x_i^3 - x_i}{6},$$

où les 12 valeurs de x_i sont

$$22, \quad 16, \quad 21, \quad 17, \quad 20, \quad 18, \quad 34, \quad 8, \quad 23, \quad 19, \quad 22, \quad 20.$$

Remarque I. — Nous avons utilisé ici la représentation des nombres m, m' à l'aide d'une somme de trois carrés. En utilisant d'autres représentations, on peut obtenir des théorèmes analogues. Nous en avons donné un exemple au Congrès de Bordeaux.

Remarque II. — Quand $\varphi(x)$ est du deuxième degré, c'est-à-dire quand $a = 0$, $a_1 > 0$, $\delta = a_1$, $k_1 = k'_1 = 1$, les raisonnements précédents peuvent être simplifiés : en effet, supposons d'abord que $\varphi(x)$ ait ses coefficients entiers; pour une valeur donnée de α, remarquant que, sur 3 nombres consécutifs, on en a un $\neq 4^h(8n+7)$, on voit que, quand m prend toutes celles des valeurs $0, 1, 2, \ldots, (\alpha - \mu)^2$ différentes de $4^h(8n+7)$, $6\varphi(\alpha) + 2a_1 m$ prend, à $6a_1 - 1$ unités près au plus, toutes les valeurs comprises entre $6\varphi(\alpha)$ et

$$6\varphi(\alpha) + 2a_1(\alpha - \mu)^2,$$

et tout nombre compris dans cet intervalle est, d'après (1), (2) et (3), la somme de 6 nombres positifs $\varphi(x)$, à un nombre limité d'unités près. On voit d'ailleurs que les intervalles, obtenus en faisant varier α, sont contigus dès que α est supérieur à une certaine limite, que le nombre des décompositions distinctes augmente encore indéfiniment avec le nombre à décomposer, et que ces propriétés s'étendent au cas où a_1 et a_2 seraient fractionnaires. Donc, quand $\varphi(x)$ est du deuxième degré, tout entier supérieur à une certaine limite est la somme de 6 nombres positifs $\varphi(x)$ seulement.

On sait que, pour une foule de valeurs a_1 et a_2, il suffit, en réalité, de 4 nombres positifs $\varphi(x)$, d'après le théorème de Fermat sur les nombres polygones, perfectionné par Cauchy et Legendre, et les extensions que nous en avons données (1). Mais il est à remarquer que les décompositions obtenues ici sont d'un genre spécial, en ce sens que les 6 valeurs des x, entrant dans $\varphi(x)$, sont telles que les 3 sommes 2 à 2 de ces 6 quantités formées convenablement sont égales à un même nombre α; en sorte que nous avons résolu ici, en réalité, le problème suivant (2) :

Trouver 6 valeurs de x, telles que

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\varphi(x_4)+\varphi(x_5)+\varphi(x_6)$$

ne diffère d'un nombre donné B au moins égal à une limite déterminée que d'un nombre limité d'unités et qu'on ait en même temps

$$x_1+x_2=x_3+x_4=x_5+x_6.$$

II. — Cas où $\varphi(x)$ est de degré 4 ou 5.

La méthode précédente s'étend, à l'aide d'un raisonnement plus compliqué, au cas où $\varphi(x)$ est du quatrième ou du cinquième degré. On peut encore supposer $a_5=0$. De plus, le plus petit dénominateur commun aux a_i étant limité, quand quelques uns de ceux-ci sont fractionnaires, il suffit d'établir le théorème I pour le cas où les coefficients a_i sont entiers.

Soit donc

$$\varphi(x)=ax^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x,$$

avec $a, a_1, \ldots, a_4$ entiers et si $a=0$, $a_1>0$.

Considérons

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(\alpha+x)+\varphi(\alpha-x)=2\left[\varphi(\alpha)+\dfrac{\varphi''(\alpha)}{2!}x^2+\dfrac{\varphi^{\text{IV}}(\alpha)}{4!}x^4\right], \\ \text{où} \\ 0\leqq x\leqq \alpha-\mu \qquad \text{et} \qquad \alpha\geqq 0; \end{array}\right.$$

(1) *Bull. de la Soc. math., loc. cit.*

(2) Des remarques analogues s'appliquent au paragraphe suivant.

et

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi''(\alpha)}{2!} = A_1 = 10a\alpha^3 + 6a_1\alpha^2 + 3a_2\alpha + a_3, \\[2ex] \dfrac{\varphi^{IV}(\alpha)}{4!} = B_1 = 5a\alpha + a_1. \end{cases}$$

On sait, d'après Cauchy ([1]), que l'on peut toujours trouver, k et l étant impairs et donnés, f, g, h, e entiers, positifs, et tels que

$$k = f^2 + g^2 + h^2 + e^2, \qquad l = f + g + h + e,$$

si

$$\sqrt{3k-2} - 1 < l < \sqrt{4k},$$

ou, *a fortiori*, si

$$(22)\qquad \sqrt{3k} < l < \sqrt{4k}.$$

On en conclut sans peine, d'après un théorème de Liouville ([2]), que l'on peut trouver λ valeurs x_i, avec $\lambda \leqq 48$, et telles que

$$6l = \sum_1^\lambda{}_i\, x_i^2, \qquad 6k = \sum_1^\lambda{}_i\, x_i^4,$$

sous les mêmes conditions (22).

Si l'on suppose alors

$$(23)\qquad 6l \leqq (\alpha - \mu)^2, \qquad 6k \leqq (\alpha - \mu)^4,$$

les valeurs x_i^2 seront $\leqq (\alpha-\mu)^2$ et telles que $\varphi(\alpha - x_i)$ et $\varphi(\alpha + x_i)$ soient positifs. Les valeurs x_i donneront chacune lieu à une identité (20), et l'addition membre à membre de ces identités montre que

$$(24)\qquad 2\lambda\varphi(\alpha) + 12(A_1 l + B_1 k) = \sum_1^\lambda{}_i [\varphi(\alpha + x_i) + \varphi(\alpha - x_i)],$$

([1]) *Loc. cit.*

([2]) Voir *Bull. de la Soc. math.*, 1895, *loc. cit.*, et Le Besgue, *Exercices d'Analyse numérique*. Librairie Leiber et Faraguet, Paris, 1859, p. 113.

d'après (21), et le premier membre de (24) est la somme de 2λ nombres positifs $\varphi(x)$ au plus.

On peut remarquer que la seconde des conditions (23) est superflue d'après (22), car $3k < l^2$ donne

$$6k < \frac{(\alpha-\mu)^4}{18}.$$

Alors, pour une valeur donnée impaire de l satisfaisant à (23), on aura $\rho + 1$ valeurs impaires de k

$$(25) \qquad k_1, \quad k_1+2, \quad k_1+4, \quad \ldots, \quad k_1+2\rho,$$

satisfaisant à (22), par suite à (23), si

$$(26) \qquad \sqrt{3(k_1+2\rho)} < l < \sqrt{4k_1},$$

et tout nombre impair k_1 satisfera à ces conditions, pourvu que

$$(27) \qquad \rho \leqq \frac{k_1}{12}, \qquad \sqrt{\tfrac{7}{2}k_1} < l < \sqrt{4k_1}, \qquad l \geqq 15,$$

car ces conditions entraînent la condition (26) et la condition

$$\sqrt{3(k_1+2\rho)} \leqq \sqrt{\tfrac{7}{2}k_1} \leqq \sqrt{4k_1} - 2.$$

En résumé, l étant un nombre impair satisfaisant à (23) et (27), et k_1 un impair satisfaisant à (27), si l'on prend pour ρ un entier quelconque satisfaisant à (27), les ρ valeurs (25) sont des valeurs impaires de k satisfaisant à (22) et (23), et dont chacune donne lieu avec l à une identité (24).

Pour une autre valeur $\alpha' \geqq 0$ de α, on aura des valeurs l', k', ρ', k'_1, A'_1, B'_1, analogues à l, k, ρ, k_1, A_1, B_1, avec les relations

$$6l' = \sum_{1}^{\lambda}{}_i\, x'^2_i, \qquad 6k' = \sum_{1}^{\lambda}{}_i\, x'^4_i,$$

$$(23\ bis) \qquad 6l' \leqq (\alpha' - \mu)^2,$$

(24 *bis*) $$2\lambda\varphi(\alpha') + 12(A'_1 l' + B'_1 k') = \sum_1^{\lambda} {}_i [\varphi(\alpha' + x'_i) + \varphi(\alpha' - x'_i)],$$

(27 *bis*) $$\rho' \leqq \frac{k'_1}{12}, \qquad \sqrt{\tfrac{7}{2} k'_1} < l' < \sqrt{4 k'_1}, \qquad l' \geqq 15,$$

les $\rho' + 1$ valeurs admissibles de k' étant

(25 *bis*) $$k'_1, \quad k'_1 + 2, \quad k'_1 + 4, \quad \ldots, \quad k'_1 + 2\rho'.$$

Considérons alors l'expression

(28) $$M = A_1 l + B_1 k + A'_1 l' + B'_1 k',$$

où k et k' prennent les valeurs (25) et (25 *bis*), puis posons

(29) $$\left\{\begin{array}{l} k = k_1 + 2\theta, \qquad k' = k'_1 + 2\theta', \\ \qquad \text{où} \\ \qquad \theta = 0, 1, 2, \ldots, \rho, \qquad \theta' = 0, 1, 2, \ldots, \rho', \\ P = A_1 l + B_1 k_1 + A'_1 l' + B'_1 k'_1, \\ Q = B_1 \theta + B'_1 \theta' = (5a\alpha + a_1)\theta + (5a\alpha' + a_1)\theta', \\ M = P + 2Q, \end{array}\right.$$

d'après (21) et (28).

Si δ est le plus grand commun diviseur de $5a$ et de a_1, et si l'on pose

(30) $$5a = a'\delta, \qquad a_1 = a'_1 \delta, \qquad \text{où} \qquad a_1,\ a'_1 \text{ premiers entre eux,}$$

(31) $$\alpha' - \alpha = 2^\nu \qquad (\nu \geqq 1),$$

le plus grand commun diviseur de $5a\alpha + a_1$ et $5a\alpha' + a_1$ sera δ, à condition de choisir α pair si a'_1 impair, α impair si a'_1 pair, et l'on pourra écrire

$$Q = Q'\delta, \qquad Q' = (a'\alpha + a'_1)\theta + (a'\alpha' + a'_1)\theta',$$

où $a'\alpha + a'_1$ et $a'\alpha' + a'_1$ sont premiers entre eux.

Alors, par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait à propos de la formule (10), on voit qu'en supposant

$$a'\alpha + a'_1 > 0, \qquad \rho + 1 \geqq a'\alpha' + a'_1,$$

ce qui entraîne, d'après (31), $a'\alpha' + a'_1 > 0$, on peut toujours déterminer au moins une valeur entière de $\theta \leqq \rho$ et une de $\theta' \leqq \rho'$, telles que Q' soit un nombre entier arbitraire satisfaisant à

$$\rho(a'\alpha + a'_1) \leqq Q' \leqq \rho'(a'\alpha' + a'_1).$$

On peut donc disposer de θ et de θ' de façon que M prenne toutes les valeurs $P + 2\delta Q'$, c'est-à-dire que M prenne, à $2\delta - 1$ unités près au plus, toutes les valeurs entières comprises entre

$$P + 2\delta\rho(a'\alpha + a'_1) \qquad \text{et} \qquad P + 2\delta\rho'(a'\alpha' + a_1),$$

ou, *a fortiori*, d'après (27), (27 *bis*) et (30), toutes les valeurs entières comprises entre

$$(32) \qquad P + \frac{k_1}{6}B_1 \qquad \text{et} \qquad P + \left(\frac{k'_1}{6} - 2\right)B'_1,$$

à condition de prendre

$$\frac{k_1}{12} \geqq a'\alpha' + a'_1, \qquad \rho \geqq \frac{k_1}{12} - 1, \qquad \rho' \geqq \frac{k'_1}{12} - 1.$$

En faisant varier l' et k'_1 sous les conditions (23 *bis*) et (27 *bis*) pour une valeur déterminée de α, on obtient toute une série d'intervalles analogues à (32); nous allons voir que, pour α assez grand, ces intervalles sont contigus.

En effet, faisons croître k'_1 de deux unités : il pourra se faire que la même valeur l' soit admissible, et, quand on la prend, P croît de $2B'_1$ (en supposant α assez grand pour que A_1, B_1, A'_1, B'_1 soient positifs). Si cette même valeur de l' n'est pas admissible, on pourra prendre en général [sous la condition (23 *bis*) correspondante], au lieu de l', la valeur $l' + 2$, car on avait $\sqrt{\frac{1}{2}k'_1} < l'$, et l'on a, comme on voit facilement,

$$\sqrt{\tfrac{7}{2}(k'+2)} \leqq \sqrt{\tfrac{7}{2}k'_1} + 2,$$

puisque $l' \geqq 15$: alors P croît de $2(A'_1 + B'_1)$.

On obtient ainsi un nouvel intervalle comprenant en particulier tous les nombres compris entre

$$P + 2(A'_1 + B'_1) + \frac{k_1}{6}B_1 \qquad \text{et} \qquad P + \left(\frac{k'_1}{6} - 2\right)B'_1,$$

et le nouvel intervalle est contigu au premier dès que

$$\left(\frac{k'_1}{6} - 2\right)B'_1 \geqq \frac{k_1}{6}B_1 + 2(A'_1 + B'_1).$$

Cette condition sera toujours satisfaite pour α assez grand si

$$(33) \qquad \begin{cases} k'_1 \geqq sk_1, & \text{avec} \quad s-1 \text{ fini}, \\ k'_1 \geqq \alpha^{2+\eta}, & \text{avec} \quad \eta > 0 \text{ et } \eta \text{ fini}. \end{cases}$$

On voit de même que si, laissant k'_1 fixe, et faisant croître l' de deux unités, au cas où cela serait possible, le nouvel intervalle (32) est contigu au premier pour α assez grand quand les conditions (33) ont lieu.

Dès lors, l et k_1 étant des impairs donnés, et choisissant $s = 2$, $k_1 \geqq \alpha^{2+\eta}$, ce qui entraîne pour α assez grand la condition $\frac{k_1}{12} \geqq a'\alpha' + a'_1$, la plus petite valeur admissible de k'_1, d'après (33), est $2k_1 + 1$, et la plus petite valeur admissible de l' est $\leqq 2l + 1$, car $\sqrt{\tfrac{7}{2}k_1} < l$ entraîne $\sqrt{\tfrac{7}{2}(2k_1 + 1)} < 2l + 1$.

D'autre part, la plus forte valeur admissible de l' est, d'après (23 *bis*), le plus grand entier impair $\leqq \frac{(\alpha' - \mu)^2}{6}$, c'est-à-dire qu'elle est telle que

$$l' + 2 > \frac{(\alpha' - \mu)^2}{6}, \qquad \text{ou} \qquad l' > \frac{(\alpha' - \mu)^2}{6} - 2;$$

la plus forte valeur correspondante de k'_1 admissible est telle que

$$4k'_1 > l'^2, \qquad \text{ou} \qquad k'_1 > \frac{1}{4}\left[\frac{(\alpha' - \mu)^2}{6} - 2\right]^2.$$

De là et de ce qui précède on conclut que, l et k_1 étant donnés avec $s = 2$ et $k_1 \leqq \alpha^{2+\eta}$, pour une valeur donnée de α, les intervalles (32) obtenus en faisant varier l' et k'_1, pris tous ensemble, renferment, pour α assez grand, tous les nombres compris entre

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta_1 = A_1 l + B_1 k_1 + A'_1(2l+1) + B'_1(2k_1+1) + \frac{k_1}{6}B_1 \\ \text{et} \\ \Delta_2 = A_1 l + B_1 k_1 - 2B'_1 + A'_1\left[\frac{(\alpha'-\mu)^2}{6} - 2\right] + \frac{7}{24}B'_1\left[\frac{(\alpha'-\mu)^2}{6} - 2\right]^2, \end{array}\right.$$

d'après (29), en sorte que M peut prendre, à $2\delta - 1$ unités près, toutes les valeurs entières comprises dans l'intervalle (34).

Additionnant membre à membre (24) et (24 *bis*), on voit que $2\lambda[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] + 12M$ est la somme de 4λ nombres positifs $\varphi(x)$, et peut prendre, à $12(2\delta - 1) + 11 = 24\delta - 1$ unités près au plus, toute valeur entière comprise entre

$$(35)\quad 2\lambda[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] + 12\Delta_1 \quad \text{et} \quad 2\lambda[\varphi(\alpha) + \varphi(\alpha')] + 12\Delta_2.$$

Alors, choisissons $l \leqq \alpha^{2-\zeta}$, où ζ fini et > 0, d'où $k_1 < \frac{2}{7}l^2 \leqq \frac{2}{7}\alpha^{4-2\zeta}$, d'après (27), et remplaçons dans (34) et (35) α' par sa valeur (31); Δ_1 est au plus égal à un polynome de degré inférieur à 5 (à 4, si $a = 0$), et Δ_2 est au moins égal à un polynome de degré 5 (4, si $a = 0$), en α. On en conclut sans peine, par un raisonnement déjà employé, que les intervalles (35) obtenus en donnant à α toutes les valeurs, paires ou impaires suivant les cas, sont contigus dès que α est supérieur à une certaine limite et le théorème I se trouve ainsi établi (sauf en ce qui concerne le nombre des nombres $\varphi(x)$ nécessaires quand $a = 0$).

On voit encore que le nombre des décompositions augmente indéfiniment avec le nombre à décomposer, et l'on peut même, dans des limites très étendues, choisir arbitrairement l et k_1.

Dans le cas où $\varphi(x)$ est du quatrième degré, c'est-à-dire quand $a = 0$, on peut encore réduire de moitié le nombre des fonctions $\varphi(x)$ nécessaires.

On pourrait être tenté d'appliquer la même méthode au cas où $\varphi(x)$ est de degré $\leqq 3$; mais alors la considération des intervalles (32) deviendrait illusoire.