JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERNEST DUPORCQ

De l'aire plane balayée par un vecteur variable

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 1 (1895), p. 443-465.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1895_5_1__443_0>

De l'aire plane balayée par un vecteur variable,

PAR M. ERNEST DUPORCQ,
Élève-Ingénieur des Télégraphes.

Les principales questions dont je me suis occupé dans cette étude avaient déjà, pour la plupart, été abordées à diverses reprises par différents auteurs : dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de 1878, M. Liguine a fait de leurs travaux un historique très complet qu'il me suffira de résumer en quelques lignes.

Steiner, dans un Mémoire publié en 1840 dans le *Journal de Crelle*, étudie, entre autres questions, les relations qui ont lieu entre les aires décrites par les vecteurs qui joignent les différents points d'un plan mobile à son centre instantané de rotation : il trouve que, pour un mouvement donné, les points de ce plan mobile auxquels correspondent ainsi des aires équivalentes sont les points d'une circonférence; il suppose d'ailleurs convexes les deux arcs (ω) et (ω') formés par les centres instantanés dans le plan fixe et dans le plan mobile. Dans le cas particulier où tous les points du plan mobile décrivent des courbes fermées, il trouve que le centre de la circonférence obtenue coïncide avec le centre de gravité de la courbe (ω), à la condition d'attribuer aux divers éléments de cette courbe une masse proportionnelle à la somme des courbures correspondantes des arcs (ω) et (ω').

Indépendamment de ce travail de Steiner, M. Holditch énonce, en 1858, le théorème suivant :

Lorsqu'une corde d'une longueur donnée et invariable se meut dans une courbe fermée en parcourant la circonférence totale de la courbe par ses extrémités A, B, *et si l'on considère la courbe décrite par un point* P *de cette corde qui la divise en deux parties,* $AP = C_1$, $BP = C_2$, *l'aire comprise entre les deux courbes fermées est égale à* $\pi C_1 C_2$.

En 1877, M. Williamson généralise ce théorème et obtient, sous une autre forme, le résultat que j'énonce au n° **18**.

D'un autre côté, M. Leudesdorf établit entre les aires A, B, C et P des courbes fermées (a), (b), (c) et (p) décrites par quatre points liés invariablement, a, b, c et p, la relation

$$P = Ax + By + Cz + \pi t^2,$$

x, y et z désignant les coordonnées triangulaires du point p par rapport au triangle abc, et t^2 le carré de la tangente menée du point p au cercle abc.

De ce théorème M. Kempe en déduit un autre, équivalent, dont l'énoncé, rectifié par M. Liguine, revient à celui que j'énonce au n° **15**.

Sur les mêmes sujets, il faut encore citer cet énoncé de M. Zeuthen, proposé en 1870 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques :*

Les aires engendrées par quatre segments de droites qui font partie d'une même figure plane et invariable qui se meut dans son plan satisferont toujours à une équation linéaire et homogène.

Enfin, M. Darboux, à la suite du travail de M. Liguine, expose aussi ses recherches personnelles sur ces questions : c'est par le calcul qu'il étudie le premier les relations entre les aires balayées par les vecteurs qui joignent à un point fixe les points d'un plan mobile : il trouve que ceux de ces points, auxquels correspondent des aires équivalentes, sont sur une circonférence, dont il définit géométriquement le centre dans le cas particulier où le point fixe choisi est le centre de la rotation finie par laquelle on pourrait amener le plan mobile de sa position initiale à sa position finale.

Comme on va le voir, c'est par l'application d'une même méthode géométrique générale que j'ai été conduit à retrouver la plupart de ces résultats, qui se trouvent, par là même, exposés didactiquement, en même temps que complétés de propriétés nouvelles, et même généralisés dans la dernière partie de ce travail.

ERNEST DUPORCQ.

Fontainebleau, 19 décembre 1894.

I.

1. Définissons d'abord avec précision l'aire balayée par un vecteur qui se déplace d'une manière quelconque dans le plan, et dont la longueur même est variable.

Dans le cas où l'origine, o, du vecteur considéré, $\overline{oa}$, reste fixe dans le plan, la valeur de l'aire, que balaye ce vecteur dans un déplacement élémentaire, devra évidemment être représentée par la différentielle

$$\tfrac{1}{2}\overline{oa}^2 . d\varphi,$$

$d\varphi$ désignant l'angle élémentaire dont tourne le sens du vecteur, angle dont la valeur pourra être positive ou négative, quand on aura choisi un sens positif de rotation.

Dans le cas où le vecteur $\overline{ab}$ se déplace d'une manière quelconque dans le plan, soit o le point où la droite ab touche son enveloppe; dans un déplacement élémentaire, l'origine, o, des vecteurs $\overline{oa}$ et $\overline{ob}$ peut être considérée comme fixe : par définition, l'aire balayée par le vecteur $\overline{ab}$ dans ce déplacement élémentaire sera égale à la différence des aires balayées dans le même déplacement par les vecteurs $\overline{ob}$ et $\overline{oa}$.

La définition de cette aire élémentaire suffit à déterminer la valeur de l'aire balayée par le vecteur $\overline{ab}$ dans un déplacement fini.

Nous représenterons, désormais, cette aire par la notation

$$(\overline{ab}).$$

2. Soit o un point fixe : si un point a décrit une courbe fermée, on voit que, en grandeur et en signe, l'aire balayée par le vecteur $\overline{oa}$ est indépendante du point o : sa valeur est, par définition, celle de l'aire de la courbe fermée considérée.

3. On peut se rendre compte également que :

Si les deux extrémités, a et b, d'un vecteur $\overline{ab}$ décrivent des courbes fermées (a) et (b), l'aire balayée par le vecteur $\overline{ab}$ est, en grandeur et en signe, égale à l'excès de l'aire de la courbe (a) sur l'aire de la courbe (b).

4. Si, en particulier, la courbe (a) est l'enveloppe de la droite ab, l'aire balayée par le vecteur $\overline{ab}$ sera, d'après sa définition même (**1**), égale à l'aire de la courbe (m), lieu des extrémités des vecteurs $\overline{om}$, identiques aux vecteurs $\overline{ab}$, et issus d'un point fixe, o.

On obtient, par exemple, ainsi la propriété suivante :

Soient (p) la podaire, relative à un point o, d'une courbe fermée (a), et (q) la podaire, relative au même point, de la développée de (a) : l'aire de la courbe (p) est égale à la somme des aires des courbes (a) et (q).

5. De la définition, ou plutôt des conventions de signes qui précèdent, résulte immédiatement que, si un vecteur $\overline{ab}$, de grandeur fixe, tourne d'un angle φ autour d'un point fixe ω, pris dans le plan, on aura

$$(\overline{ab}) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\omega b}^2 - \overline{\omega a}^2\right)\varphi.$$

6. Si c représente un point invariablement lié au segment $\overline{ab}$, on voit ainsi que

$$(\overline{ab}) + (\overline{bc}) + (\overline{ca}) = 0.$$

Cette propriété, vraie pour une rotation infiniment petite, sera vraie encore, par suite, pour un déplacement quelconque du triangle *abc*, car on peut considérer ce déplacement comme résultant de la succession d'une infinité de rotations élémentaires autour de centres instantanés de rotation : nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si un polygone fermé quelconque, abc... la, de grandeur invariable, se déplace d'une manière quelconque dans le plan, la somme des aires balayées par les vecteurs $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, ..., $\overline{la}$ *est nulle.*

Plus généralement :

Un contour fermé quelconque balaye toujours une aire nulle.

6 *bis*. Les expressions des aires balayées par les trois vecteurs $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ et $\overline{cc'}$, qui tournent d'un angle φ autour d'un point fixe ω, peuvent encore s'écrire

$$(\overline{aa'}) = \overline{aa'}.\bar{\alpha}.\varphi,$$
$$(\overline{bb'}) = \overline{bb'}.\bar{\beta}.\varphi,$$
$$(\overline{cc'}) = \overline{cc'}.\bar{\gamma}.\varphi,$$

$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ désignant les distances respectives du centre ω aux perpendiculaires élevées aux milieux des segments considérés. Comme ces distances sont liées par une relation linéaire, indépendante du centre ω, on voit qu'il en est de même des aires en question. En considérant une suite de rotations élémentaires, on trouve donc ainsi que :

Les aires balayées par trois vecteurs qui font partie d'une même figure plane et invariable qui se meut dans son plan satisferont toujours à une équation linéaire.

II.

7. Supposons qu'un plan P se meuve sur un plan fixe Q. Soit a un point du plan P : nous nous proposons de chercher quels sont les

points m du plan P, tels que, dans un déplacement donné de ce plan, les vecteurs $\overline{am}$ balayent dans le plan fixe des aires équivalentes à une aire donnée.

8. Un cas particulièrement simple est celui où le déplacement considéré du plan P est une rotation autour d'un point ω : le lieu cherché est alors une circonférence de centre ω, puisque (5), si l'on désigne par φ l'angle dont tourne le plan P,

$$\left(\overline{am}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\omega m}^2 - \overline{\omega a}^2\right)\varphi.$$

Cela posé, supposons que le plan P tourne successivement des angles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ autour des centres respectifs $\omega_1, \omega_2, \ldots$ pris dans ce plan P : l'aire balayée par le vecteur $\overline{am}$ dans le déplacement total du plan P aura pour valeur

$$\tfrac{1}{2}\left(\overline{\omega_1 m}^2 . \varphi_1 + \overline{\omega_2 m}^2 . \varphi_2 + \ldots\right) - \tfrac{1}{2}\left(\overline{\omega_1 a}^2 . \varphi_1 + \overline{\omega_2 a}^2 . \varphi_2 + \ldots\right)$$

ou, si l'on désigne par γ_ω le centre de gravité du système des points $\omega_1, \omega_2, \ldots$ du plan P, considérés comme de masses proportionnelles aux angles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, et par φ l'angle total de rotation du plan P,

$$\left(\overline{am}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\gamma_\omega m}^2 - \overline{\gamma_\omega a}^2\right)\varphi.$$

9. Or, un déplacement quelconque du plan P peut généralement être considéré comme formé par la succession d'une infinité de rotations élémentaires : le point γ_ω devient alors le centre de gravité de l'arc de courbe (ω) formé dans le plan P par les centres instantanés de rotation, à la condition d'attribuer à un arc quelconque de cette courbe une masse proportionnelle à l'angle correspondant dont tourne le plan P.

10. On peut obtenir le mouvement du plan P en faisant rouler sans glissement l'arc (ω) sur l'arc de même longueur (ω'), formé par les centres instantanés dans le plan fixe Q; soient r et r' les rayons de courbure respectifs de ces deux courbes aux deux points correspondants ω et ω' : il est bien facile de voir que la densité à attribuer à l'arc (ω) autour du point ω devra être proportionnelle à la somme $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$, à la condition de considérer les rayons r et r' comme de même signe lorsque les cercles osculateurs correspondants deviennent tangents extérieurement, et comme de signes différents dans le cas contraire; on pourra, évidemment, avoir à considérer ainsi des arcs de masse négative : d'une manière générale, la densité en un point, proportionnelle à la somme $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$, devra changer de signe quand la rotation du plan P changera de sens.

11. S'il arrive, par exemple, que l'angle total de rotation du plan P soit nul, la masse totale de l'arc (ω) le sera également, et le point γ_ω sera rejeté à l'infini, dans la direction de la droite qui joint le centre de gravité des éléments de masses positives à celui des éléments de masses négatives.

12. Notre raisonnement suppose que le plan P ne subit pas, pendant son déplacement, de translation finie.

Supposons donc que le plan P, après avoir subi un déplacement A, constitué par une suite de rotations, subisse une translation. Soit φ l'angle total de rotation du plan P, et soit γ_ω le point de ce plan tel que l'aire balayée, pendant le déplacement A, par un vecteur quelconque, $\overline{\gamma_\omega m}$, issu de ce point, ait pour valeur

$$\tfrac{1}{2}\overline{\gamma_\omega m}^2 . \varphi .$$

Soient m_1 et m_2 les positions occupées par le point m au début et à la fin de la translation : désignons par $\bar{l}$ la longueur $\overline{m_1 m_2}$; et par α l'angle, positif ou négatif, que fait avec la direction $m_1 m_2$ le vecteur $\overline{\gamma_\omega m}$, pendant la translation : l'aire $(\overline{\gamma_\omega m})$ correspondant à la translation aura évidemment pour valeur

$$\bar{l} . \overline{\gamma_\omega m} \sin\alpha .$$

L'aire totale balayée par $\overline{\gamma_\omega m}$ sera donc

$$\tfrac{1}{2}\overline{\gamma_\omega m}^2.\varphi + \bar{l}.\overline{\gamma_\omega m}\sin\alpha.$$

En égalant cette expression à une constante, on trouve pour le lieu du point m une circonférence : son centre, O, est tel que le vecteur $\overline{\gamma_\omega O}$ ait pour longueur

$$\frac{\bar{l}}{\varphi},$$

et, quand ce vecteur occupe sa position finale, la direction $m_1 m_2$ fait avec lui un angle droit positif.

L'aire totale balayée par le vecteur $\overline{om}$ aura pour valeur

$$\tfrac{1}{2}\overline{om}^2.\varphi.$$

13. Les résultats précédents nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

Quand un plan P *se déplace d'une manière quelconque sur un plan fixe, il existe toujours dans ce plan* P *un point o, tel que tout vecteur du plan* P *balaye une aire équivalente à celle qu'il balayerait si le plan* P *tournait autour du point o d'un angle égal à son angle total de rotation pendant le déplacement considéré.*

Ce point o est généralement le centre de gravité γ_ω de l'arc (ω) formé dans le plan P *par les centres instantanés de rotation ω, en supposant la masse d'un élément quelconque de cette courbe proportionnelle à l'angle de la rotation correspondante du plan* P.

14. Comme application immédiate de ce théorème, nous nous bornerons à énoncer la proposition suivante :

Une courbe fermée admettant un centre o roule sans glisser sur une droite, jusqu'à ce qu'elle ait accompli une révolution : l'aire balayée par un vecteur $\overline{om}$ entraîné dans le mouvement est égale à l'aire du cercle de rayon $\overline{om}$.

En particulier :

L'aire balayée par un rayon d'un cercle qui accomplit une révolution en roulant sur une droite est égale à l'aire de ce cercle.

15. Un cas particulièrement intéressant est celui où le plan P revient, à la fin du déplacement, à sa position initiale, de sorte que tous ses points décrivent dans le plan Q des courbes fermées : car, alors (**3**), l'aire balayée par un vecteur $\overline{om}$ a pour valeur la différence des aires des courbes fermées (m) et (o) décrites par ses extrémités. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Si un plan P *se déplace sur un plan* Q, *de sorte que tous ses points décrivent des courbes fermées, tous les points de ce plan qui décrivent des courbes d'aires équivalentes sont les points d'une circonférence de centre* o : *si le plan* P *a accompli* n *révolutions, dans le sens positif, l'aire de la courbe décrite par un de ses points,* m, *est équivalente à l'aire de la courbe décrite par le centre* o, *augmentée de la somme des aires de* n *cercles de rayon* $\overline{om}$.

Le centre o *sera généralement le centre de gravité* γ_ω *de la courbe* (ω) *formée dans le plan* P *par les centres instantanés, pourvu que la masse d'un arc quelconque de cette courbe soit proportionnelle à l'angle correspondant de rotation du plan* P.

16. Considérons le cas particulier d'une courbe fermée C′, qui roule sans glisser sur une courbe identique, C, de sorte que ces deux courbes soient constamment symétriques par rapport à leur tangente commune au point de contact : le point o sera dans ce cas le centre de gravité de la courbe C′ si l'on suppose en chacun de ses points la densité proportionnelle à la courbure, ou inversement proportionnelle à la longueur du rayon de courbure ; le point o est appelé le *centre de gravité des courbures* de la courbe C.

D'ailleurs, m' étant un point lié invariablement à la courbe C′, soit m le point correspondant lié à la courbe C, avec lequel m' coïncide lorsque C′ coïncide avec C : ces points m et m' restent constamment symétriques par rapport à la tangente au point de contact, de sorte que la trajectoire (m') a une aire égale au quadruple de l'aire de la podaire du point m relativement à la courbe C. Il résulte de là que :

Le lieu des points m dont les podaires, relatives à une même courbe fermée C, *ont des aires équivalentes, est une circonférence, dont le centre est le centre de gravité des courbures de la courbe* C.

Remarque. — De cette propriété combinée au théorème obtenu au n° **4** résulte immédiatement la propriété suivante :

Une courbe fermée a le même centre de gravité des courbures que sa développée.

On voit donc que :

Des courbes fermées parallèles entre elles ont le même centre de gravité des courbures.

17. Nous signalerons encore le cas particulier suivant :

Si le plan P *est entraîné par le mouvement d'une courbe à centre, qui roule sans glisser sur une courbe à centre de même longueur, le point o sera le centre de la courbe mobile.*

On voit, par exemple, ainsi que :

L'aire de l'épicycloïde à n rebroussements, décrit par un point d'un cercle de rayon r, qui roule sur un cercle de rayon nr, a pour valeur

$$(n+1)(n+2)\pi r^2.$$

L'aire de l'hypocycloïde analogue sera de même

$$(n-1)(n-2)\pi r^2.$$

18. Considérons, en particulier, dans le plan P, une droite Δ : si l'on connaît les aires A et B des courbes fermées (a) et (b) décrites par deux de ses points, a et b, il sera facile d'en déduire l'aire C de la courbe (c) décrite par l'un quelconque de ses points c.

Supposons, en effet, que la droite Δ ait accompli n révolutions dans le sens positif, et désignons par O l'aire de la courbe fermée décrite par le point o (**15**). On a

$$\mathrm{A} = \mathrm{O} + n\pi.\overline{oa}^2,$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{O} + n\pi.\overline{ob}^2,$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{O} + n\pi.\overline{oc}^2.$$

Grâce à la relation de Stewart, on déduit de ces égalités que :

Les aires A, B *et* C *des courbes fermées décrites par trois points* a, b *et* c *d'une droite qui se déplace dans le plan, et revient à sa position initiale après avoir accompli* n *révolutions, sont liées par la relation*

$$\mathrm{A}.\overline{bc} + \mathrm{B}.\overline{ca} + \mathrm{C}.\overline{ab} + n\pi.\overline{bc}.\overline{ca}.\overline{ab} = 0.$$

19. En particulier :

Si les extrémités a *et* b *d'un segment de grandeur fixe décrivent des courbes fermées d'aires équivalentes (par exemple, la même courbe) l'aire de la courbe décrite par un point* c *de* ab *sera égale à la valeur commune de ces aires équivalentes, augmentée de l'aire*

$$n\pi.\overline{ca}.\overline{cb}.$$

Si les points a et b décrivent des courbes d'aire nulle, l'aire de la trajectoire du point c aura pour valeur : $n\pi.\overline{ca}.\overline{cb}$. On en déduit la propriété suivante :

On suppose que les deux extrémités a *et* b *d'un segment* $\overline{ab}$, *au lieu de se déplacer sur deux droites, de sorte qu'un point quelconque du segment décrive une ellipse, se déplacent, dans des conditions analogues, sur deux courbes quelconques : l'aire de la* *courbe fermée, décrite par un point quelconque du segment $\overline{ab}$, sera égale à l'aire de l'ellipse correspondante.*

III.

20. Soit a un point d'un plan Q, sur lequel se meut un plan P. Proposons-nous de chercher quels sont les points m du plan P tels que, dans un déplacement donné de ce plan, les aires balayées par les vecteurs $\overline{am}$ soient équivalentes à une aire donnée.

21. Considérons d'abord le cas d'une rotation élémentaire : soit ω le centre de rotation du plan P, et $d\varphi$ l'angle élémentaire dont il tourne. Désignons par p la projection du point a sur la perpendiculaire mp à ωm, et par h le point du plan P qui coïncide avec le milieu du segment $\overline{a\omega}$: l'aire élémentaire balayée par $\overline{am}$ a évidemment pour valeur

$$\tfrac{1}{2}\overline{\omega m}.\overline{ap}.d\varphi,$$

les vecteurs $\overline{\omega m}$ et $\overline{ap}$ étant pris de même signe, s'ils sont de même sens. Or, on a alors, en grandeur et en signe, l'égalité

$$\overline{\omega m}.\overline{ap} = \overline{hm}^2 - \overline{ha}^2 = \overline{hm}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{a\omega}^2.$$

La valeur de l'aire élémentaire balayée par $\overline{am}$ peut donc s'écrire

$$\tfrac{1}{2}\overline{hm}^2.d\varphi - \tfrac{1}{8}\overline{a\omega}^2.d\varphi.$$

22. Dans le cas d'un déplacement quelconque, soit ω le point du plan P qui devient son centre instantané de rotation à un instant donné, soit ω' le point du plan Q, avec lequel ω coïncide à cet instant; enfin, soit h le point du plan P qui coïncide alors avec le milieu du segment $\overline{a\omega'}$. De la même manière que plus haut (**9**), on déduit du résultat précédent que le lieu cherché (**20**) pour le point m est une circonférence : son centre, A, est le centre de gravité de l'arc de courbe (h), formé dans le plan P par les points h, pourvu qu'on attribue aux différents arcs de cette courbe une masse proportionnelle à l'angle de la rotation correspondante du plan P.

Désignons, comme précédemment (**10**), par r et r' les rayons de courbure des arcs (ω) et (ω') aux points correspondants ω et ω'. Soit γ_ω le centre de gravité de l'arc (ω), dont on suppose la densité, au point ω, proportionnelle à la somme $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$. Considérons la courbe (α) du plan P, dont les points α viennent successivement coïncider avec a, et attribuons à chaque arc de cette courbe une masse égale à celle de l'arc correspondant de la courbe (ω); soit γ_α le centre de gravité de la courbe hétérogène ainsi déterminée : le point A est évidemment le milieu du segment $\overline{\gamma_\omega \gamma_\alpha}$.

La courbe (α) n'est d'ailleurs autre que la trajectoire du point a dans le plan P, supposé fixe, lorsque, dans un mouvement inverse de celui que nous considérons, le plan Q est entraîné par le roulement sans glissement de l'arc (ω') sur l'arc (ω).

23. En désignant par φ l'angle total de rotation du plan P, on voit, en intégrant l'expression de l'aire élémentaire balayée par $\overline{am}$ (**21**), que, pour un déplacement fini du plan P,

$$(\overline{am}) - \tfrac{1}{2}\overline{\mathrm{A}m}^2 . \varphi = \text{const.},$$

la constante ne dépendant que de la position du point a dans le plan Q.

24. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Un plan P *se déplace sur un plan* Q : *a désignant un point fixe du plan* Q, *le lieu des points m, du plan* P, *tels que les vecteurs* $\overline{am}$ *balayent des aires équivalentes à une aire donnée, est une circonférence de centre* A.

Si φ *désigne l'angle total de rotation du plan* P, *l'aire* $(\overline{am})$ *équivaut à l'aire* $(\overline{a\mathrm{A}})$, *augmentée de l'aire*

$$\tfrac{1}{2}\overline{\mathrm{A}m}^2 . \varphi.$$

Le point A *est généralement le milieu du segment* $\overline{\gamma_\omega \gamma_\alpha}$, *déterminé comme il suit : on considère, dans le plan* P, *la courbe* (ω) *formée par les centres instantanés de rotation, et la courbe* (α) *formée par les points* α *qui viennent coïncider successivement avec le point* a : *les points* γ_ω *et* γ_α *sont les centres de gravité de ces courbes, pourvu qu'on suppose que la masse d'un arc quelconque soit proportionnelle à l'angle dont tourne le plan* P *dans le déplacement correspondant.*

25. Dans le cas où l'angle φ sera nul, le point A sera rejeté à l'infini, et les circonférences concentriques, obtenues dans le cas général, se réduiront à des droites parallèles.

26. Parmi les cas particuliers, le plus simple est celui où le plan P est entraîné par le mouvement d'une circonférence qui roule sans glisser à l'intérieur d'une circonférence de rayon double, le point a étant au centre de cette circonférence fixe : car le point h (**21**) reste fixe dans le plan P, et coïncide constamment avec le centre de la circonférence mobile. On déduit de là que, m étant un point quelconque du plan P, le secteur d'ellipse balayé par le vecteur $\overline{am}$ est proportionnel à l'angle de rotation du plan P.

27. Un autre cas simple est celui où le plan P tourne d'un angle φ autour d'un point fixe, ω : le point A est alors le centre de gravité de l'arc de cercle homogène du plan P dont les points viennent successivement coïncider avec le milieu du segment $\overline{\omega a}$.

28. On obtiendra d'ailleurs le point A en prenant le centre de gravité d'un arc homogène, toutes les fois que le plan P sera entraîné par le mouvement épicycloïdal d'un cercle roulant sans glisser sur un cercle fixe du plan Q admettant le point a pour centre.

29. Des résultats généraux obtenus, on déduit, comme nous avons fait déjà dans un cas analogue (**18**) que :

Les aires ($\overline{ap}$), ($\overline{aq}$) *et* ($\overline{ar}$) *balayées par les vecteurs* $\overline{ap}$, $\overline{aq}$ *et*

$\overline{ar}$, *qui joignent un point fixe, a, à trois points, p, q et r, d'une droite mobile dans le plan, sont liées par la relation*

$$(\overline{ap}).\overline{qr}+(\overline{aq})\,\overline{rp}+(\overline{ar})\,\overline{pq}+\tfrac{1}{2}\varphi.\overline{qr}.\overline{rp}.\overline{pq}=0,$$

φ *représentant l'angle dont tourne la droite pqr dans son déplacement.*

30. En particulier, si r est le milieu du segment $\overline{pq}$, on a

$$(\overline{ar})=\tfrac{1}{2}[(\overline{ap})+(\overline{aq})]+\tfrac{1}{2}\varphi.\overline{rp}.\overline{rq}.$$

On déduit de là, par exemple, la propriété suivante :

Soient C *et* C′ *deux branches de courbe indéfinies, limitées à leur point commun, a, et telles que* C *coïncide avec* C′ *après avoir tourné de l'angle* φ *autour du point a. Un vecteur* $\overline{pq}$, *de grandeur fixe, se déplace de sorte que ses extrémités p et q restent respectivement sur les courbes* C *et* C′ : *le point a est à la fois la position initiale du point q sur* C′ *et la position finale du point p sur* C. *Soit r le milieu de* $\overline{pq}$: *l'aire balayée par le vecteur* $\overline{ar}$ *est indépendante de la courbe* C, *et a la même valeur absolue que l'expression*

$$\tfrac{1}{8}(\pi-\varphi)\overline{pq}^2.$$

31. Considérons spécialement le cas où le déplacement du plan P sur le plan Q est tel que tous ses points m décrivent des courbes fermées : dans ce cas, l'aire balayée par le vecteur $\overline{am}$, égale à l'aire de la courbe fermée décrite par le point m, est indépendante du point a. La position du point A ne dépendra donc pas du point a, et ce point coïncidera toujours, d'après ce que nous avons vu précédemment (**13**) avec le point γ_ω.

On déduit de là le théorème suivant :

Un plan Q *se déplace sur un plan* P, *de sorte que tous ses points décrivent des courbes fermées. Si l'on suppose que la masse d'un* *arc quelconque de ces courbes soit proportionnelle à l'angle correspondant dont tourne le plan* Q, *toutes ces trajectoires hétérogènes ont le même centre de gravité.*

Ce point coïncide, en général, avec le centre de gravité de la courbe formée dans le plan P *par les centres instantanés de rotation, pourvu qu'on suppose encore la masse de tout arc de cette courbe proportionnelle à l'angle correspondant de rotation du plan* Q.

IV.

32. Quand l'angle φ, dont tourne le plan P dans son déplacement, n'est pas multiple de 2π, il existe toujours dans le plan P un point s, qui revient, à la fin du déplacement, à sa position initiale. Ce point, décrivant une courbe fermée, l'aire balayée par le vecteur $\overline{as}$, issu d'un point quelconque, a, du plan Q, est indépendante du choix de ce point a. Soit, dans le plan P, A le centre correspondant au point a (**24**); on a

$$(\overline{as}) = (\overline{aA}) + \tfrac{1}{2}\overline{As}^2.\varphi$$

et

$$(\overline{am}) = (\overline{aA}) + \tfrac{1}{2}\overline{Am}^2.\varphi.$$

En posant

$$(\overline{as}) - (\overline{am}) = \tfrac{1}{2}K^2\varphi,$$

on a donc

$$\overline{As}^2 - \overline{Am}^2 = K^2.$$

On voit, par suite, que :

Toutes les circonférences (m) *du plan* P *qui correspondent* (**24**) *aux différents points* a *du plan* Q *et à une aire donnée coupent orthogonalement le cercle de centre* s, *dont le rayon* K, *réel ou imaginaire, est tel que* $\frac{1}{2}K^2\varphi$ *représente l'excès sur l'aire donnée de l'aire de la courbe fermée décrite par le point* s.

33. Pour obtenir le cercle correspondant au point a et à une aire donnée, il suffira donc de connaître son centre A. Nous allons étudier comment les points A du plan P correspondent aux points a du plan Q.

34. Nous ferons d'abord la remarque suivante.

Le plan P subissant un déplacement donné, soient, dans le plan Q, m_1 et m_2 les positions initiale et finale d'un point m du plan P. Le lieu des points a du plan Q, tels que les aires $(\overline{am})$ soient équivalentes, est visiblement une parallèle à la droite $m_1 m_2$.

35. Soit a un point quelconque de cette parallèle (a), et soit A le point correspondant du plan P. La différence

$$(\overline{as}) - (\overline{am})$$

étant constante, il en est de même (**24**) de la différence

$$\overline{\mathrm{A}s}^2 - \overline{\mathrm{A}m}^2,$$

ce qui prouve que les points A ont la même projection sur la droite sm.

Ainsi, quand le point a se déplace, dans le plan Q, sur une parallèle (a) à $m_1 m_2$, le point A se déplace, dans le plan P, sur une perpendiculaire (A) à sm.

36. Soit, dans le plan Q, s_1 la position initiale et finale du point s ; comme l'angle $m_1 s_1 m_2$ est précisément égal à l'angle φ, on voit que, si l'on fait tourner le plan P de l'angle $\frac{\varphi}{2}$ à partir de sa position initiale, la droite (A) deviendra parallèle à sa correspondante (a). Par suite :

La correspondance des points a et A *donne lieu, dans les plans* Q *et* P, *à des figures semblables.*

37. Soient (a) et (b) deux droites du plan Q parallèles à $m_1 m_2$, (A) et (B) leurs correspondantes dans le plan P, α et β les points où ces dernières coupent sm. Soit $\overline{q}$ la distance des parallèles (a) et (b), soit $\overline{p}$ celle des parallèles (A) et (B). On a évidemment

$$(\overline{am}) - (\overline{bm}) = \tfrac{1}{2}\overline{q}.\overline{m_1 m_2} = \overline{q}.\overline{m_1 s_1}.\sin\tfrac{\varphi}{2}.$$

D'ailleurs

$$(\overline{am}) - (\overline{as}) = \tfrac{1}{2}.\varphi\left(\overline{\mathrm{A}m}^2 - \overline{\mathrm{A}s}^2\right) = \tfrac{1}{2}.\varphi.\overline{ms}(\overline{m\alpha} - \overline{\alpha s}),$$
$$(\overline{bm}) - (\overline{bs}) = \tfrac{1}{2}.\varphi\left(\overline{\mathrm{B}m}^2 - \overline{\mathrm{B}s}^2\right) = \tfrac{1}{2}.\varphi.\overline{ms}(\overline{m\beta} - \overline{\beta s}).$$

On a donc encore

$$(\overline{am}) - (\overline{bm}) = \varphi.\overline{ms}.\overline{\alpha\beta} = \varphi.\overline{ms}.\overline{p}.$$

On voit donc que

$$\overline{q}.\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \overline{p}.\varphi.$$

Par suite :

Le rapport de similitude de deux figures correspondantes (A) *et* (a) *a pour valeur*

$$\frac{1}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

38. Ces résultats, bien évidents quand le déplacement du plan P est une rotation, peuvent d'ailleurs être déduits de ce cas particulier.

Soit, en effet, D un déplacement quelconque du plan P, dans lequel il tourne de l'angle φ; soit s le point de ce plan qui revient, à la fin du déplacement, à sa position initiale, s_1; désignons par P_1 et P_2 les positions initiale et finale du plan P sur le plan Q. Considérons les rotations R_1 et R_2 du plan P autour du point s_1, qui amèneraient ce plan, la première, de la position P_1 à la position P_2 en le faisant tourner de l'angle φ; la seconde, de la position P_2 à la position P_1, en le faisant tourner de l'angle $(2\pi - \varphi)$. Soit, enfin, pour le déplacement D, γ_ω le centre de gravité de l'arc hétérogène (ω) (**24**).

Désignons par A, A_1 et A_2 les centres qui, dans le plan P, correspondent (**24**) au point a du plan Q pour les déplacements D, R_1

et R_2. Supposons les masses des deux premiers proportionnelles à l'angle φ, la masse du troisième, proportionnelle à l'angle $(2\pi - \varphi)$.

Si le plan P subit successivement les rotations R_1 et R_2, le point o (**15**) correspondant à son déplacement total coïncide avec s; s'il subit successivement le déplacement D et la rotation R_2, le point o correspondant de même au nouveau déplacement total devient le centre de gravité γ des points γ_ω et s, supposés de masses proportionnelles aux angles φ et $(2\pi - \varphi)$. Par suite (**31**) le point s est le centre de gravité des masses A_1 et A_2; le point γ, celui des masses A et A_2.

On déduit de là que le vecteur $\overline{A_1A}$ est identique au vecteur $\overline{s\gamma_\omega}$, ce qui redonne les résultats précédents. On voit, de plus, que le point γ_ω est le point du plan P qui correspond au point s_1 du plan Q.

39. Comme le point A est (**24**) le milieu du segment $\overline{\gamma_\omega\gamma_\alpha}$, on obtient donc le théorème suivant :

Un plan Q *se mouvant sur un plan* P, *soit* (α) *la trajectoire décrite par l'un quelconque, a, de ses points. En supposant la masse de tout arc de cette courbe proportionnelle à l'angle correspondant dont tourne le plan* Q, *on fait, dans le plan* P, *correspondre au point a, le centre de gravité,* γ_α, *de cette trajectoire hétérogène.*

Deux figures correspondantes, (a) *et* (γ_α), *sont semblables; de plus, la figure* (γ_α) *devient homothétique de la figure* (a), *le rapport d'homothétie étant*

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}},$$

si le plan Q *tourne, à partir de sa position initiale, de l'angle* $\frac{\varphi}{2}$, φ *désignant son angle total de rotation pendant le déplacement considéré.*

De plus, au point du plan Q, *qui décrit une trajectoire fermée, correspond le centre de gravité de la courbe formée dans le plan* P *par les centres instantanés de rotation, supposés de masses proportionnelles aux rotations élémentaires correspondantes.*

V.

40. Pour compléter cette étude, nous indiquerons rapidement une généralisation des résultats précédents : nous ne développerons pas les démonstrations, à cause de leur analogie avec celles que nous avons données jusqu'ici.

41. *Soient* P *et* Q *deux plans mobiles qui éprouvent sur un plan fixe des déplacements simultanés. Soit a un point quelconque du plan* Q : *le lieu des points m du plan* P, *tels que les vecteurs $\overline{am}$ balayent sur le plan fixe des aires équivalentes à une aire donnée, est généralement une circonférence, de centre* A.

Soit φ l'angle total de rotation du plan P : *l'aire balayée par le vecteur $\overline{am}$ équivaut à l'aire balayée par le vecteur $\overline{a\mathrm{A}}$, augmentée de l'aire*

$$\tfrac{1}{2}\overline{\mathrm{A}m}^2.\varphi.$$

A un instant quelconque du déplacement, on considère, dans le plan P, *son centre instantané de rotation, ω, le point ε, qui coïncide avec le centre instantané de rotation, η, du plan* Q, *enfin, le point α, qui coïncide avec le point a. Si l'on attribue à tout arc de la courbe (ω) une masse proportionnelle à l'angle correspondant $\Delta\varphi$ dont tourne le plan* P, *à tout arc de la courbe (ε), une masse proportionnelle à l'angle correspondant, $\Delta\psi$, dont tourne le plan* Q, *enfin, à tout arc de la courbe (α), une masse proportionnelle à la différence correspondante ($\Delta\varphi - \Delta\psi$), le centre* A *sera le centre de gravité de l'ensemble des arcs hétérogènes (ω), (ε) et (α).*

42. On retrouve, comme cas particuliers, les résultats obtenus précédemment, d'abord, en faisant coïncider constamment les plans P et Q, puis en supposant le plan Q fixe.

43. A un point, a, du plan Q, correspond, dans le plan P, le centre de gravité γ_α de l'arc hétérogène (α) : le théorème du n° 39 montre que, à une figure, (a), du plan Q, correspond ainsi dans le plan P une figure semblable (γ_a) : ces deux figures deviennent homothétiques, si les plans P et Q tournent seulement, à partir de leurs positions initiales, des angles $\frac{\varphi}{2}$ et $\frac{\psi}{2}$, le rapport d'homothétie étant

$$\frac{2}{\varphi-\psi}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

On déduit de là que :

La correspondance des points a et A *donne lieu, dans les plans* Q *et* P, *à des figures semblables. Si* φ *et* ψ *désignent les angles dont tournent respectivement les plans* P *et* Q *dans leurs déplacements simultanés, ces figures deviennent homothétiques, quand on fait tourner les plans* P *et* Q *des angles* $\frac{\varphi}{2}$ *et* $\frac{\psi}{2}$ *à partir de leurs positions initiales; enfin, le rapport d'homothétie des figures* (A) *et* (a) *a pour valeur*

$$\frac{1}{\varphi}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

VI.

44. Dans la dernière Partie de ce Mémoire je vais exposer une généralisation fort intéressante des propriétés que j'ai obtenues dans la deuxième Partie : je vais supposer maintenant que la figure mobile P n'est plus assujettie à garder une grandeur invariable, mais qu'elle est astreinte seulement à rester semblable à une figure donnée, Π.

45. A un tel déplacement correspond une notion analogue à celle du centre instantané de rotation : le point o qui permet d'amener par une rotation une figure P, de grandeur invariable, d'une position P_1 à une position P_2 est tel que, si a_1 et b_1 désignent les positions initiales, a_2 et b_2 les positions finales de deux points quelconques a et b de la figure P, les triangles oa_1b_1 et oa_2b_2 sont égaux; on peut remarquer en outre que, si p désigne le point de rencontre des droites a_1b_1 et a_2b_2, les quadrilatères pa_1a_2o et pb_1b_2o sont tous deux inscriptibles à des circonférences. Supposons maintenant que les figures P_1 et P_2 sont simplement semblables entre elles; soient a_1 et a_2, b_1 et b_2 deux couples de points homologues : le second point d'intersection, o, des circonférences circonscrites aux triangles pa_1a_2 et pb_1b_2 est visiblement tel que les triangles oa_1b_1 et oa_2b_2 sont semblables. On peut donc, par une rotation autour de o, amener P_1 à être homothétique à P_2 par rapport à o.

Si P_1 et P_2 sont deux positions infiniment voisines de la figure II, dans le déplacement que nous avons envisagé, p devient le point où ab touche son enveloppe, et le point o est le second point d'intersection des circonférences qui passent par p et qui touchent respectivement en a et b les trajectoires (a) et (b).

La considération de ce point, qu'on peut appeler le *centre instantané d'homothétie rotatoire*, va nous permettre d'appliquer au cas d'une figure de forme invariable les méthodes employées dans ce qui précède.

46. Il est bien évident, en effet, que l'aire décrite par un vecteur $\overline{am}$ pendant un déplacement élémentaire de la figure P, diffère d'infiniment petits d'ordre supérieur de l'aire que décrirait le même secteur, si, sans varier de grandeur, il ne faisait que tourner du même angle autour du point o. Soit $d\varphi$ cet angle de rotation élémentaire; on aura (5)

$$d(\overline{am}) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{om}^2 - \overline{oa}^2\right) d\varphi.$$

Soit, dans la figure II, ω l'homologue du point de P qui coïncide avec o; soient α et μ les homologues de a et m; enfin soit K le rapport de similitude des figures P et II. On aura

$$d(\overline{am}) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\omega\mu}^2 - \overline{\omega\alpha}^2\right) K^2\, d\varphi.$$

47. Soit γ le centre de gravité de l'arc (ω) de la figure II, correspondant à un déplacement fini de la figure P, chaque élément de l'arc (ω) ayant une masse proportionnelle à la différentielle correspondante $K^2 d\varphi$. On aura

$$(\overline{am}) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\gamma\mu}^2 - \overline{\gamma\alpha}^2\right)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K^2\, d\varphi.$$

48. Nous ne considérerons que le cas particulier où toutes les trajectoires (m) sont des courbes fermées. On obtient alors le théorème suivant :

Si une figure P *se déplace dans le plan en restant semblable à une figure donnée* Π, *le lieu des points* μ *de la figure* Π, *dont les homologues m décrivent des trajectoires d'aires équivalentes, est une circonférence, de centre* γ.

La différence des aires (a) *et* (b), *correspondant à deux points* α *et* β, *est proportionnelle à la différence des carrés des longueurs* $\gamma\alpha$ *et* $\gamma\beta$.

49. On peut obtenir ainsi un grand nombre de théorèmes. Par exemple :

Par chaque point a d'une courbe fermée (a) *on mène deux droites, ab et am, faisant avec* (a) *des angles donnés; on suppose que l'extrémité b du vecteur* $\overline{ab}$ *décrit une courbe fermée* (b) *de même aire que a. Soit m le point où* $\overline{am}$ *coupe la circonférence qui touche* (a) *en a et qui passe par b : la courbe* (m) *a la même aire que les courbes* (a) *et* (b).

On peut pour (b) choisir la courbe (a) elle-même. Quand l'angle de ab avec (a) tend vers zéro, le cercle considéré tend vers le cercle osculateur en a. On obtient alors, à la limite, le théorème suivant :

Par chaque point a d'une courbe (a) *on mène une droite am, faisant avec elle un angle donné, qui coupe au point m le cercle osculateur en a : les courbes* (a) *et* (m) *ont des aires équivalentes.*