JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERNEST LINDELÖF

Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 10 (1894), p. 117-128.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1894_4_10__117_0>

Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires;

PAR M. ERNEST LINDELÖF.

La présente étude a pour but de donner une exposition succincte de la méthode d'approximations successives de M. Picard en tant qu'elle s'applique aux équations différentielles ordinaires ([1]). Je commence par démontrer, d'une manière très simple, qu'il ne peut y avoir qu'un seul système d'intégrales de nos équations prenant des valeurs initiales données. Les conditions dans lesquelles je me place sont assez générales; ainsi je ne suppose pas l'existence des dérivées des fonctions qui figurent dans les seconds membres (les équations étant réduites à la forme normale). Puis j'expose la méthode de M. Picard avec la modification que j'y ai apportée dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences (séance du 26 février 1894). A la fin j'applique la méthode exposée à la démonstration d'un théorème connu de M. Poincaré concernant les équations différentielles dépendant d'un paramètre arbitraire.

([1]) E. PICARD, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, Chap. V (*Journal de Mathématiques* et *Journal de l'École Polytechnique*, 1890).

Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires, Chap. I (*Journal de Mathématiques*, 1893).

1. Considérons le système des équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Nous supposons que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ soient finies et continues pour les valeurs *réelles* de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ comprises dans les intervalles

$$(2)\qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + a; \qquad |y_i - y_i^0| \leqq b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

a et b étant deux nombres positifs. De plus, on aura, pour

$$|y'_i - y_i^0| < b,$$

$x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ restant dans les mêmes intervalles,

$$(3)\qquad \begin{cases} |f_i(x, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \\ \quad < k_1|y'_1 - y_1| + k_2|y'_2 - y_2| + \ldots + k_n|y'_n - y_n| \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

$k_1, k_2, \ldots, k_n$ étant des nombres positifs.

Nous allons d'abord démontrer qu'il ne peut exister qu'un système d'intégrales des équations (1), continues dans un intervalle

$$x_0 \text{——} x_0 + \rho \quad (\rho \leqq a),$$

et prenant les valeurs $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ pour $x = x_0$.

Supposons, en effet, qu'il existe deux tels systèmes d'intégrales

$$\mathrm{Y}_1, \quad \mathrm{Y}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{Y}_n \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}_1, \quad \mathrm{Z}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{Z}_n.$$

Posons

$$\frac{dY_i}{dx} = f_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \varphi_i(x),$$

$$\frac{dZ_i}{dx} = f_i(x, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = \psi_i(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$$\varphi_i(x) - \psi_i(x) = \Phi_i(x).$$

Les fonctions $\Phi_i(x)$ seront continues dans un certain intervalle $x_0 — x_0 + \rho_1 (\rho_1 \leqq \rho)$, et s'annuleront pour $x = x_0$. Il en sera de même de la fonction

$$\Psi(x) = |\Phi_1(x)| + |\Phi_2(x)| + \ldots + |\Phi_n(x)|.$$

Or, considérons le quotient

$$Q(x) = \frac{\Sigma_i |f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n) - f_i(x, Z_1, \ldots, Z_n)|}{|Y_1 - Z_1| + |Y_2 - Z_2| + \ldots + |Y_n - Z_n|}.$$

On aura, d'après les inégalités (3),

$$Q(x) < n \frac{k_1 |Y_1 - Z_1| + k_2 |Y_2 - Z_2| + \ldots + k_n |Y_n - Z_n|}{|Y_1 - Z_1| + |Y_2 - Z_2| + \ldots + |Y_n - Z_n|},$$

ou encore, en désignant par K le produit par n du plus grand des nombres k_i,

$$Q(x) < K,$$

inégalité qui aura lieu pour $x_0 < x < x_0 + \rho_2 (\rho_2 \leqq \rho_1)$.

D'autre part nous aurons, d'après la notation adoptée,

$$Q(x) = \frac{|\Phi_1(x)| + \ldots + |\Phi_n(x)|}{\left|\int_{x_0}^{x} \Phi_1(x)\, dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_0}^{x} \Phi_n(x)\, dx\right|}$$

$$\geqq \frac{|\Phi_1(x)| + \ldots + |\Phi_n(x)|}{\int_{x_0}^{x} [|\Phi_1(x)| + \ldots + |\Phi_n(x)|]\, dx},$$

ou bien

$$Q(x) \geqq \frac{\Psi(x)}{\int_{x_0}^{x} \Psi(x)\, dx}.$$

Soit Δ une quantité positive plus petite que $\frac{1}{K}$ et ρ_2, ε la plus grande valeur de la fonction $\Psi(x)$ dans l'intervalle $(x_0, x_0+\Delta)$ et $x_0+\Delta_1$ $(\Delta_1 \leqq \Delta)$ la valeur de x correspondant à ce maximum. On aura

$$Q(x_0+\Delta_1) \geqq \frac{\varepsilon}{\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+\Delta_1} \Psi(x)\,dx} > \frac{\varepsilon}{\varepsilon\Delta_1} \geqq \frac{1}{\Delta},$$

ou encore

$$Q(x_0+\Delta_1) > K,$$

ce qui est en contradiction avec le résultat obtenu plus haut. Donc il ne peut exister qu'un seul système d'intégrales de (1) satisfaisant aux conditions posées. C. Q. F. D.

2. Considérons toujours le système (1), en faisant sur les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les mêmes hypothèses qu'au début du numéro précédent. Pour former effectivement les intégrales de ce système qui se réduisent à $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ pour $x = x_0$, on aura, d'après la méthode de M. Picard, à former n suites de fonctions

$$y_i^1, \quad y_i^2, \quad \ldots, \quad y_i^k, \quad \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

définies par les formules

$$\begin{aligned}
\frac{dy_i^1}{dx} &= f_i(x, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0), \\
\frac{dy_i^2}{dx} &= f_i(x, y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{dy_i^k}{dx} &= f_i(x, y_1^{k-1}, y_2^{k-1}, \ldots, y_n^{k-1}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les constantes d'intégration étant déterminées en sorte qu'on ait, pour $x = x_0$,

$$y_i^k = y_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Posons, d'une manière générale,

$$u_i^k = y_i^k - y_i^{k-1} = \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1^{k-1}, \ldots, y_n^{k-1}) - f(x, y_1^{k-2}, \ldots, y_n^{k-2})]\, dx,$$

et considérons les séries

$$(4) \qquad Y_i = y_i^0 + u_i^1 + u_i^2 + \ldots + u_i^k + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On aura successivement, en désignant par M_0 la plus grande valeur absolue des fonctions $f_i(x, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ pour $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$,

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned}
|u_i^1| &= \left|\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)\, dx\right| \\
&< M_0(x - x_0), \\
|u_i^2| &< \int_{x_0}^{x} [k_1 |u_1^1| + k_2 |u_2^1| + \ldots + k_n |u_n^1|]\, dx \\
&< M_0(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)\, \frac{(x - x_0)^2}{2!}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
|u_i^k| &< \int_{x_0}^{x} [k_1 |u_1^{k-1}| + k_2 |u_2^{k-1}| + \ldots + k_n |u_n^{k-1}|]\, dx \\
&< M_0(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)^{k-1}\, \frac{(x - x_0)^k}{k!}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

Ces inégalités subsisteront tant que les courbes y_i^k resteront comprises dans les intervalles (2), soit pour $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho (\rho \leqq a)$. Pour ces valeurs de x les séries (4) seront uniformément convergentes, leurs termes successifs étant plus petits que ceux de la série exponentielle

$$\frac{M_0}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} \sum \frac{[(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)(x - x_0)]^i}{1.2 \ldots i}.$$

Il s'ensuit que, dans ledit intervalle de x, ces séries représentent les intégrales cherchées du système (1). On aura, en effet, à partir d'une certaine valeur K de k,

$$|Y_i - y_i^k| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où

$$\left|\int_{x_0}^{x} \{f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n) - f_i(x, y_1^k, \ldots, y_n^k)\} dx\right|$$
$$< \varepsilon(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)(x - x_0),$$

ε étant une quantité positive si petite qu'on voudra. De l'identité

$$y_i^{k+1} - y_i^0 = \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^k, \ldots, y_n^k)\, dx$$

on pourra donc tirer l'inégalité suivante

$$\left|Y_i - y_i^0 - \int_{x_0}^{x} f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)\, dx\right| < \varepsilon[1 + (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)\rho],$$

qui aura lieu dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \rho)$ de x et pour $k > K$. Le premier membre étant indépendant de K et pouvant d'autre part, pour des valeurs assez grandes de K, être rendu plus petit qu'une quantité positive quelconque, quelque petite qu'elle soit, il s'ensuit qu'on aura identiquement

$$Y_i = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)\, dx,$$

d'où

$$\frac{dY_i}{dx} = f_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ représentent donc bien les intégrales cherchées du système (1) lorsque x reste dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \rho)$.

(C. Q. F. D.).

3. Occupons-nous maintenant du domaine de convergence des séries que nous venons de former. Il s'agit de trouver une expression pour la quantité désignée plus haut par ρ.

On voit d'abord immédiatement qu'on pourra mettre $\rho = \rho_1$, ρ_1 étant la plus petite des deux quantités

$$a \quad \text{et} \quad \frac{b}{M},$$

où M désigne la valeur absolue maxima des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dans les intervalles (2). On aura en effet, pour $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho_1$,

$$|y_i^k - y_i^0| \leqq M\rho_1 \leqq b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \infty).$$

On peut encore choisir $\rho = \rho_2$, en désignant par ρ_2 la plus petite des deux quantités

$$a \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} \log\left[1 + \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)\, b}{M_0}\right].$$

Il suit, en effet, des inégalités (5) qu'on aura

$$|y_i^k - y_i^0| < b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

tant que la quantité

$$M_0(x - x_0) + M_0 K \frac{(x - x_0)^2}{2!} + M_0 K^2 \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \ldots$$
$$= \frac{M_0}{K}\left[e^{K(x - x_0)} - 1\right] \qquad (K = k_1 + k_2 + \ldots + k_n)$$

restera inférieure ou égale à b, ce qui a certainement lieu pour

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho_2.$$

Il est bien évident que ρ_2 est, dans certains cas, plus grand que ρ_1.

Remarque. — Au lieu de choisir, comme première approximation, les valeurs initiales $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, on pourra partir de n courbes continues quelconques

$$\overline{y}_1^0, \quad \overline{y}_2^0, \quad \ldots, \quad \overline{y}_n^0,$$

pourvu que, pour $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$, elles soient comprises tout entières dans le domaine (2), et que les fonctions

$$f_i(x, \overline{y}_1^0, \overline{y}_2^0, \ldots, \overline{y}_n^0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

soient intégrables dans le même intervalle de x. Les deux expressions que nous venons de trouver pour le domaine de convergence des séries (4) seront encore valables pour les nouvelles séries, à cette différence près qu'on aura à remplacer M_0 par la valeur absolue maxima des fonctions

$$f_i(x, \overline{y}_1^0, \overline{y}_2^0, \ldots, \overline{y}_n^0)$$

pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle $(x_0, x_0 + a)$.

4. On peut indiquer des cas étendus où le domaine de convergence des séries (4) est encore plus large. Ainsi, considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

la fonction $f(x, y)$ étant finie, continue et positive pour $x_0 \leqq x < x_1$, y ayant une valeur finie quelconque; de plus, dans les mêmes intervalles, $f(x, y)$ va toujours en décroissant lorsque y croît; enfin, à tout domaine fini compris entre les droites $x = x_0$ et $x = x_1 - \varepsilon$, ε étant une quantité positive si petite qu'on voudra, il correspond un nombre positif k tel qu'on ait

$$|f(x, y') - f(x, y)| < k|y' - y|,$$

les points (x, y') et (x, y) restant intérieurs à ce domaine.

Ces conditions supposées remplies, *la série*

$$y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_k - y_{k-1}) + \ldots,$$

fournie par la méthode des approximations successives, sera uniformément convergente dans l'intervalle $(x_0 — x_1 - \varepsilon)$, *quelque petite que soit la quantité positive* ε.

En effet, on aperçoit facilement que, dans l'intervalle $(x_0 — x_1 - \varepsilon)$, les courbes $y_2, y_3, \ldots$ seront tout entières comprises entre les deux courbes y_0 et y_1, finies et continues elles-mêmes dans ledit intervalle. Il existe donc un nombre k valable pour toutes ces valeurs de x; c'est le nombre k relatif à l'aire comprise entre y_0, y_1 et la droite $x = x_1 - \varepsilon$. La démonstration s'achève comme dans le n° **2**.

Il en est de même si la fonction $f(x, y)$, au lieu de décroître, va toujours en croissant lorsque y croît, pourvu que l'intégrale dont il s'agit soit finie et continue dans l'intervalle $(x_0 — x_1 - \varepsilon)$, ε étant une quantité positive si petite qu'on voudra.

5. Pour terminer, je vais appliquer la méthode des approximations successives à la démonstration d'un théorème de M. Poincaré [1]. Cette application a déjà été faite par M. Picard [2]. Seulement, en faisant usage de la seconde limite de convergence que j'ai introduite dans le n° **3**, je pourrai éviter une transformation dont se sert M. Picard pour se débarrasser des termes du premier ordre.

Théorème. — *Considérons le système des équations différentielles*

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où μ désigne un paramètre arbitraire, et soient

$$x_1 = \theta_1(t), \qquad x_2 = \theta_2(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \theta_n(t)$$

les intégrales s'annulant avec t de ce système, lorsqu'on y fait $\mu = 0$. Nous supposons que les fonctions $\theta_i(t)$ soient finies et continues lorsque t reste dans l'intervalle

$$(7) \qquad 0 \leqq t \leqq t_0,$$

et que, pour les mêmes valeurs de t, les f_i soient développables en séries suivant les puissances entières et positives de

$$\mu, \quad x_1 - \theta_1(t), \quad x_2 - \theta_2(t), \quad \ldots, \quad x_n - \theta_n(t).$$

Admettons que, pour $t = t_1$, ces séries sont convergentes lorsque

$$|\mu| < P(t_1), \qquad |x_i - \theta_i(t)| < Q(t_1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1] *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 58-61.

[2] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 9 avril 1894.

Il nous faut supposer encore que, lorsque t_1 varie depuis zéro jusqu'à t_0, $P(t_1)$ et $Q(t_1)$ aient des limites inférieures, ρ et r, différentes de zéro (¹).

Ces conditions supposées remplies, *les intégrales de* (6) *s'annulant pour* $t=0$ *seront développables en séries suivant les puissances entières et positives de* μ, *ces séries étant convergentes lorsque* $|\mu|$ *reste au-dessous d'une certaine limite,* t *ayant une valeur quelconque dans l'intervalle* (7).

Effectuons un changement de fonctions, en posant

$$x'_i = x_i - \theta_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Les x'_i satisferont aux équations différentielles

$$\begin{aligned}\frac{dx'_i}{dt} &= f_i[x'_1+\theta_1(t), \ldots, x'_n+\theta_n(t), \mu, t] - f_i[\theta_1(t), \ldots, \theta_n(t), 0, t]\\ &= \bar{f}_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \mu, t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n);\end{aligned}$$

les $\bar{f}_i$ seront développables en séries suivant les puissances entières et positives de μ, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, ces séries étant convergentes pour

$$|\mu| < \rho, \qquad |x'_i| < r \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

t ayant une valeur quelconque dans l'intervalle (7); d'ailleurs les fonctions $\bar{f}_i$ s'annuleront identiquement lorsqu'on y fait

$$\mu = x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n = 0.$$

Soient ρ_1 et r_1 deux nombres positifs plus petits respectivement

---

(¹) Il est facile de former des fonctions f_i pour lesquelles cette dernière condition n'est pas remplie. Ainsi, par exemple, la fonction

$$(t_0 - 2t)\left(1 - \frac{\mu + x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{t_0 - 2t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

est bien développable suivant les puissances de μ, x_1, x_2, ..., x_n, t ayant une valeur quelconque dans l'intervalle (7), mais le domaine où converge cette série tend vers zéro lorsque t tend vers $\frac{t_0}{2}$.

que ρ et r, et désignons par $M(\rho')$ la valeur absolue maxima des fonctions

$$\overline{f}_i(0, 0, \ldots, 0, \mu, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour

$$|\mu| \leqq \rho'(\leqq \rho_1), \qquad 0 \leqq t \leqq t_0,$$

et par k_i la valeur absolue maxima des dérivées

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \overline{f}_j(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \mu, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

pour les valeurs des variables comprises dans les intervalles

$$|x'_i| \leqq r_1, \qquad |\mu| \leqq \rho_1, \qquad 0 \leqq t \leqq t_0.$$

On aura alors les inégalités

$$\begin{aligned} &|\overline{f}_i(\overline{x}'_1, \ldots, \overline{x}'_n, \mu, t) - \overline{f}_i(x'_1, \ldots, x'_n, \mu, t)| \\ &\quad \leqq k_1 |\overline{x}'_1 - x'_1| + \ldots + k_n |\overline{x}'_n - x'_n| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

les variables restant dans les intervalles considérés.

Cela posé, appliquons la méthode des approximations successives à la recherche des intégrales du système

$$\frac{dx'_i}{dt} = \overline{f}_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \mu, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui s'annulent avec t. On aura à poser

$$x_i^k = \int_0^t \overline{f}_i(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \ldots, x_n^{k-1}, \mu, t)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \infty),$$

en observant que $x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_n^0 = 0$.

Alors, d'après le n° **3**, les séries

$$\varphi_i(\mu, t) = x_i^1 + (x_i^2 - x_i^1) + \ldots + (x_i^k - x_i^{k-1}) + \ldots$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

seront uniformément convergentes et représenteront les intégrales cherchées pour les valeurs de μ et de t comprises dans les intervalles

$$|\mu| < \rho' (\leqq \rho_1), \qquad 0 \leqq t \leqq t',$$

t' désignant la plus petite des deux quantités

$$(8) \qquad t_0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{k_1+k_2+\ldots+k_n} \log\left[1 + \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)r_1}{M(\rho')}\right].$$

Or, $M(\rho')$ tendra évidemment vers zéro en même temps que ρ'. Dès lors, il existe un nombre ρ_2 tel que, pour $\rho' < \rho_2$, la seconde des limites (8) sera plus grande que la première et, par suite, on pourra affirmer que les séries $\varphi_i(\mu, t)$ convergent uniformément dans tout l'intervalle $0 — t_0$, pourvu qu'on ait $|\mu| < \rho_2$. Les termes de ces séries étant d'ailleurs des fonctions holomorphes de μ pour $|\mu| < \rho$, on en conclut, en se reportant à un théorème bien connu de M. Weierstrass ([1]), que les fonctions $\varphi_i(\mu, t)$ et, par suite, les intégrales cherchées du système (6), sont développables en séries suivant les puissances entières et positives de μ, ces séries étant convergentes pour $|\mu| < \rho_2$, la variable t ayant une valeur quelconque dans l'intervalle $(0 — t_0)$. C. Q. F. D.

([1]) *Abhandlungen aus der Funktionenlehre* (Berlin, 1886), p. 73.