JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. HADAMARD

Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 9 (1893), p. 171-215.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1893_4_9__171_0>

Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann (1);

PAR M. J. HADAMARD.

1. La décomposition d'une fonction entière $F(x)$ en facteurs primaires, d'après la méthode de M. Weierstrass,

$$(1) \qquad F(x) = e^{G(x)} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_p}\right) e^{Q_p(x)}$$

a conduit à la notion du genre de la fonction F.

On dit que F est du genre E si, dans le second membre de l'équation (1), tous les polynômes Q_p sont de degré E, et que la fonction entière $G(x)$ se réduise également à un polynôme de degré E au plus.

Dans un article inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France* (2), M. Poincaré a démontré une propriété des fonctions de genre E. L'énoncé auquel il est parvenu est le suivant :

Dans une fonction entière de genre E, *le coefficient de* x^m, *mul-*

(1) Les principaux résultats contenus dans le présent Mémoire ont été présentés à l'Académie des Sciences dans un travail couronné en 1892 (grand prix des Sciences mathématiques).

(2) Année 1883, pages 136 et suiv.

tiplié par la racine $E+1^{ième}$ *du produit des m premiers nombres, tend vers zéro quand m croît indéfiniment.*

Je me propose de compléter ce théorème en étudiant, d'une façon générale, les relations qui lient les propriétés d'une fonction entière à la loi de décroissance des coefficients et, particulièrement, en démontrant la proposition inverse :

Si le coefficient de x^m *est moindre que* $\frac{1}{(m!)^{\frac{\lambda}{2}}}$, *la fonction est, en général, de genre moindre que* λ.

PREMIÈRE PARTIE.

RELATIONS ENTRE LA LOI DE DÉCROISSANCE DES COEFFICIENTS ET L'ORDRE DE GRANDEUR DE LA FONCTION POUR LES GRANDES VALEURS DE LA VARIABLE.

2. Le développement taylorien d'une fonction entière est caractérisé (1) par cette circonstance que la racine $m^{ième}$ du coefficient de x^m tend vers zéro quand m augmente indéfiniment.

Si donc une fonction entière $F(x)$ est donnée par le développement

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots, \tag{2}$$

le module de a_m peut être représenté par $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$, où $\varphi(m)$ est positif et infini avec m.

Pour obtenir une quantité supérieure au module de $F(x)$, nous remplacerons chaque terme de la série (2) par son module, de sorte que nous pourrons considérer a_m comme égal à $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$ et x comme réel et positif.

---

(1) HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, n° 6 (ce Journal, 4e série, t. VIII).

Nous supposerons, en outre, que $\varphi(m)$ est une fonction continue et croissante, avec cette condition que $L\varphi(m) + \frac{k}{m}$ soit, à partir d'une certaine valeur de m, constamment croissant, quel que soit le nombre k.

Dans les cas usuels, ces hypothèses se trouvent vérifiées d'elles-mêmes; mais on peut les supposer vérifiées dans le cas le plus général, à la condition de remplacer, d'une manière convenable, certains coefficients a_m par des nombres plus grands, ce qui est permis, puisque nous agrandissons ainsi la somme de la série (2).

En un mot, on peut déterminer une fonction $\chi(m)$ au plus égale, pour les valeurs entières de m, au module de a_m (l'égalité ayant lieu pour une infinité de ces valeurs) et telle que la fonction

$$\varphi(m) = \sqrt[m]{\chi(m)} \tag{3}$$

satisfasse aux conditions que nous venons d'indiquer.

3. A cet effet, soit a_{m_0} le premier coefficient non nul. La quantité $\left|\sqrt[m-m_0]{\frac{a_m}{a_{m_0}}}\right|$, diminuant indéfiniment à mesure que m augmente, doit prendre nécessairement une valeur plus grande que toutes les autres. Soit m_1 l'indice correspondant. Pour les valeurs entières de m comprises entre m_0 et m_1, nous prendrons comme valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progression géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_0}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_1}|}$, dont la raison sera, par suite, $\left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$; ce qui revient (en faisant intervenir non seulement les valeurs entières de m, mais les valeurs fractionnaires ou incommensurables) à prendre pour $\chi(m)$ une certaine exponentielle de la forme e^{am-b}, où l'on aura $a = \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$.

Soit de même m_2 l'indice plus grand que m_1 pour lequel la quantité $\left|\sqrt[m-m_1]{\frac{a_m}{a_{m_1}}}\right|$ prend la plus grande valeur. Entre $m = m_1$ et $m = m_2$, on prendra pour valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progres-

sion géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_1}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_2}|}$. La raison de cette progression, à savoir $\left|\sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}}\right|$, sera plus grande que la précédente, car l'inégalité

$$\left|\sqrt[m_2-m_0]{\frac{a_{m_2}}{a_{m_0}}}\right| < \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_0}}}\right|$$

ou

$$\left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_1-m_0}\left|\frac{a_{m_2}}{a_{m_2}}\right|^{m_1-m_0} > \left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_2-m_0}$$

peut s'écrire

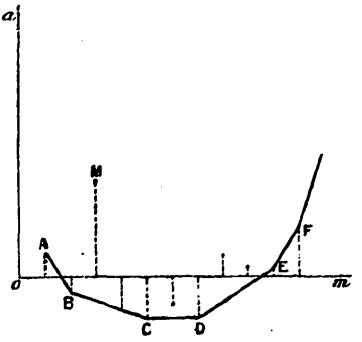
$$\left|\sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}}\right| > \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|.$$

On considérera ensuite la valeur m_3 de m pour laquelle $\left|\sqrt[m-m_2]{\frac{a_m}{a_{m_2}}}\right|$ sera le plus grand, et l'on continuera ainsi indéfiniment.

4. Au reste, ces opérations peuvent se ramener à la construction bien connue du polygone de Newton.

Pour cela on considérera m comme l'abscisse d'un point M (*fig.* 1) dont l'ordonnée sera fournie par la valeur correspondante de $L\left|\frac{1}{a_m}\right|$.

Fig. 1.



Nous aurons ainsi une suite indéfinie de points représentant les différents coefficients de notre série.

Prenons alors une demi-droite, tout d'abord parallèle à la partie négative de l'axe des y, et que nous ferons tourner autour du premier

point représentatif dans le sens trigonométrique jusqu'à ce qu'elle passe par un ou plusieurs des points suivants. Ce sera le premier côté AB de notre polygone. Pour obtenir le second, nous considérerons une droite issue du point B et que nous ferons tourner autour de ce point, etc.

Continuant ainsi à la manière ordinaire, nous tracerons une ligne brisée convexe ABC... d'une infinité de côtés, qui passera par une infinité de points représentatifs et laissera tous les autres en dessus. Les coefficients angulaires des côtés pourront être d'abord négatifs; mais, à partir d'un certain moment, ils deviendront nécessairement positifs et même de plus en plus grands.

L'ordonnée de cette ligne brisée représente le logarithme de la fonction $\chi(m)$ définie au numéro précédent, et le coefficient angulaire de OM donne la valeur de $L\varphi(m)$.

5. Nous voyons tout d'abord que $\chi(m)$ est une fonction croissante, et de manière que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit aussi croissant. Il en résulte que la fonction $\varphi(m)$, laquelle a une dérivée, sauf en des points isolés (1), est elle-même constamment et indéfiniment croissante.

En outre, m_0 étant un entier quelconque, la fonction $L\chi(m)$ est, entre $m = m_0$ et $m = m_0 + 1$, de la forme $am - b$, où

$$\begin{aligned} a &= L\chi(m_0+1) - L\chi(m_0), \\ b &= -(m_0+1)L\chi(m_0) + m_0 L\chi(m_0+1) \\ &= m_0(m_0+1)[L\varphi(m_0+1) - L\varphi(m_0)]. \end{aligned}$$

$L\varphi(m)$ étant par suite de la forme $a - \frac{b}{m}$, la quantité $L\varphi + \frac{k}{m}$ sera

(1) Si l'on voulait que χ et par suite φ aient une dérivée pour toute valeur de m (ce qui n'est pas nécessaire pour la suite), il suffirait de circonscrire au polygone ABC... une courbe convexe, ce qui est évidemment possible, par exemple à l'aide d'arcs de coniques se raccordant entre eux aux sommets successifs. On verrait aisément que les autres propriétés des fonctions χ et φ subsisteraient dans ces nouvelles conditions.

croissante si $b > k$. Ceci devant être vrai quel que soit le nombre k, pourvu que l'on prenne m_0 assez grand, nous avons à montrer que b augmente indéfiniment avec m_0.

Or b est constamment croissant, car l'inégalité

$$m\mathrm{L}\chi(m+1)-(m+1)\mathrm{L}\chi(m)\geq(m-1)\mathrm{L}\chi(m)-m\mathrm{L}\chi(m-1)$$

est équivalente à l'inégalité

$$\mathrm{L}\chi(m+1)-\mathrm{L}\chi(m)\geq\mathrm{L}\chi(m)-\mathrm{L}\chi(m-1).$$

D'ailleurs, si b restait inférieur à une quantité fixe k, on aurait

$$\mathrm{L}\varphi(m+1)-\mathrm{L}\varphi(m)<\frac{k}{m(m+1)}$$

et, comme le second membre est le terme général d'une série convergente, φ serait fini pour m infini, ce qui est contraire à nos hypothèses.

La fonction φ, définie comme il vient d'être dit, remplit donc les conditions que nous nous sommes imposées. Nous remarquerons que, moyennant ces conditions, λ étant un nombre fixe supérieur d'aussi peu que l'on veut à l'unité, on a, pour les grandes valeurs de m,

$$\frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)}>1+\frac{1}{m}, \tag{4}$$

car la fonction

$$\mathrm{L}\varphi(tm)-\mathrm{L}\varphi(m)+\frac{\lambda}{\lambda-1}\left(\frac{1}{tm}-\frac{1}{m}\right),$$

considérée comme fonction de t, est croissante, d'après nos hypothèses, à partir de $t=1$, si m a été pris suffisamment grand. Étant nulle pour $t=1$, elle sera positive pour $t=\lambda$, d'où résulte

$$\frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)}>e^{m}>1+\frac{1}{m}.$$

6. Cela posé, soit $\psi(x)$ la fonction inverse de φ, qui est également une fonction positive, continue et croissante d'une variable positive.

Je dis que $F(x)$ *croît moins vite que* $x^{\varepsilon} e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx}$, le nombre ε étant positif, mais aussi petit qu'on le veut.

Pour le démontrer, soit x' un nombre supérieur à x. Dans la série qui représente $F(x')$, considérons le dernier terme qui soit plus grand que 1, c'est-à-dire tel que $\varphi(m) < x'$. Son rang m_0 sera le plus grand entier contenu dans $\psi(x')$.

Ayant isolé les m_0 premiers termes pour en former un premier groupe, nous séparerons un second groupe allant depuis $m = m_0 + 1$ jusqu'à la plus grande valeur de m qui satisfasse à l'inégalité

$$\varphi(m) < x'\left(1 + \frac{1}{m_0}\right),$$

valeur qui sera désignée par m_1.

Le nombre m_0 augmentant indéfiniment avec x, le rapport $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers l'unité, car l'inégalité (4) montre que ce rapport ne saurait demeurer supérieur à aucun nombre λ plus grand que 1.

Enfin un troisième groupe comprendra ce qui reste de la série depuis le terme de rang $m_1 + 1$ jusqu'à l'infini.

Dans la combinaison $F(x') - \left(\frac{x'}{x}\right)^{m_0} F(x)$, les m_0 premiers termes donneront une somme négative. Quant aux termes suivants, le terme en x'^{m_0+h} donnera

$$a_{m_0+h} x'^{m_0+h} \left[1 - \left(\frac{x}{x'}\right)^h\right].$$

Remplaçons $\left(\frac{x}{x'}\right)^h = e^{-h\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)}$ par la quantité plus petite $1 - h\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)$; nous voyons qu'il nous reste le produit de $\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)$ par une somme de termes de la forme $h a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$.

Considérons d'abord les termes du deuxième groupe. $a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$ étant inférieur à 1, la somme correspondante sera moindre que $\frac{(m_1 - m_0)^2}{2}$. Or nous pouvons supposer que $F(x')$ est supérieur à

$$e^{\int \frac{\psi x'}{x'} dx'} = e^{\int^{m_0} \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm},$$

sans quoi le théorème serait démontré; et nous allons voir que dans ces conditions le rapport $\frac{(m_1-m_0)^2}{F(x')}$ tend vers zéro.

D'abord il nous suffit de nous occuper de $\frac{m_0^2}{F(x')}$, puisque $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers 1. Or la quantité $\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}$ est, à partir d'un certain moment, plus grande que $\frac{3}{m}$, puisque la fonction $L\varphi(m)+\frac{3}{m}$ est croissante. Par suite l'intégrale $e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}\frac{dm}{m}}$ est plus grande que Am^3, A étant une constante différente de 0. $F(x')$ étant supposé plus grand que $e^{\int_{m_0}^{m_0} \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}\frac{dm}{m}}$, le rapport $\frac{m_0^2}{F(x')}$ tend bien vers zéro.

Dans les termes du troisième groupe, $a_{m_0+h}x'^{m_0+h}$ est moindre que $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m_0}}\right)^{m_0+h}$. Ces termes donnent donc une somme inférieure à la somme $\sum_{h=0}^{\infty} h\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m_0}\right)^h}=(m_0+1)^2$, laquelle est, comme la précédente, de la forme $\varepsilon F(x')$; de sorte que l'on peut écrire

$$F(x')\left[1-\varepsilon L\left(\frac{x'}{x}\right)\right] > F(x)\left(\frac{x'}{x}\right)^{\psi(x')}.$$

Prenons les logarithmes, divisons par $L\left(\frac{x'}{x}\right)$ et faisons tendre x' vers x, nous aurons

$$\frac{dL\,F(x)}{dLx} < \psi(x)+\varepsilon, \tag{5}$$

ce qui, en intégrant, donne bien (1)

$$F(x) < Ax^{\varepsilon}e^{\int \frac{\psi(x)}{x}dx}, \tag{6}$$

A étant fini.

---

(1) Plus exactement, nous voyons que, pour les valeurs de x plus grandes qu'une certaine limite, ou bien $F(x)$ est moindre que $e^{\int \frac{\psi(x)}{x}dx}$, ou bien on a l'inégalité (5). Ceci suffit manifestement pour que l'inégalité (6) soit constamment vérifiée.

Par exemple, pour la fonction

$$\mathcal{F}(x)=\sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2}x^m, \qquad |q|<1 \tag{7}$$

[qui est une moitié du développement d'une fonction $\theta(z)$ où l'on aurait posé $e^{2i\pi\frac{z}{\omega}}=x$], on a

$$\varphi(m)=r^m$$

(en désignant par r le module de $\frac{1}{q}$); d'où

$$\psi(x)=\frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}r}.$$

En appliquant le théorème précédent, on voit que $\mathcal{F}(x)$ augmente indéfiniment moins vite que $e^{\int\frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}r}\frac{dx}{x}}=e^{\frac{\mathrm{L}^2x}{2\mathrm{L}r}}$, ce qui est bien conforme aux résultats fournis par la théorie des fonctions elliptiques (1).

7. Envisageons en particulier le cas où l'on a

$$|a_m|\leq\frac{1}{(m!)^\alpha}, \tag{8}$$

α étant un nombre positif quelconque.

Les formules connues pour l'approximation de la fonction Γ nous montrent que cette expression est de la forme

$$\frac{ke^{(m+1)\alpha}}{(m+1)^{\alpha\left(m+\frac{3}{2}\right)}},$$

(1) Les formules connues correspondant à l'addition des périodes dans la fonction θ donnent

$$\mathcal{F}(x)<\mathrm{A}e^{\frac{\mathrm{L}^2x}{2\mathrm{L}r}}.$$

La limite donnée par le théorème précédent est donc un peu trop élevée, ce dont il sera rendu compte plus loin.

k étant fini, de sorte que nous pouvons prendre

$$\varphi(m) = \left(\frac{m}{H}\right)^{\alpha},$$

H étant une constante.

$\psi(x)$ sera de la forme $Hx^{\frac{1}{\alpha}}$ et l'intégrale $\int \frac{\psi(x)+\varepsilon}{x}\,dx$ aura la même forme. Nous arrivons donc à l'énoncé suivant :

Si le coefficient de x^m est moindre que $\frac{1}{(m!)^{\alpha}}$, la fonction croît moins vite que $e^{Hx^{\frac{1}{\alpha}}}$, où H *est une certaine constante.*

8. Au reste, dans ce cas particulier, on arriverait à la même conclusion par la comparaison directe des deux séries

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)}$$

(laquelle, en vertu des propriétés de la fonction Γ, peut être substituée dans notre raisonnement à $\sum \frac{x^m}{(m!)^{\alpha}}$), et

$$e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} = \sum \frac{x^{\frac{n}{\alpha}}}{\Gamma(1+n)}.$$

En posant $\frac{n}{\alpha} = m'$ et comparant les parties des deux séries qui correspondent aux valeurs de m et de m' comprises entre les mêmes limites, on reconnaît aisément que, pour $\alpha > 1$, on a

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)} < e^{x^{\frac{1}{\alpha}}};$$

et, pour $\alpha < 1$,

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)} < \mathrm{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right) x^{\frac{1}{\alpha}} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}},$$

où, bien entendu, $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ désigne le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{\alpha}$.

Enfin, si α est un nombre entier, on peut mettre ce résultat en évidence par l'emploi de la formule

$$(9)\quad \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^{\alpha-1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\alpha-1})} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_{\alpha-1},$$

où $F_{\alpha-1}$ est une fonction finie.

On peut démontrer cette formule en partant de la remarque suivante :

Si

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

et

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + \ldots$$

désignent des séries entières, la valeur de la série

$$f_3(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_m b_m x^m + \ldots$$

sera donnée par l'intégrale définie

$$(10)\quad f_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x^\mu e^{i\theta}) f_2(x^{1-\mu} e^{-i\theta})\, d\theta,$$

μ désignant un exposant quelconque compris entre 0 et 1.

D'après cela, supposons la formule (9) démontrée pour une certaine valeur de α. Nous pourrons, dans l'égalité (10), faire $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$ avec $\mu = \frac{1}{\alpha+1}$. Cette égalité prendra bien alors la forme

$$\sum \frac{x^m}{(m!)^{\alpha+1}} = \frac{1}{(2\pi)^\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha+1}} F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha)} d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_\alpha,$$

pourvu que l'on pose

$$F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha) = e^{i\theta_\alpha} + e^{-\frac{i\theta_\alpha}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\alpha-1}).$$

La formule (9) conduit d'ailleurs précisément à l'évaluation pré-

cédemment obtenue pour la série $\sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$, car l'intégrale qui figure au second membre est évidemment plus petite que $e^{M|x|^{\frac{1}{\alpha}}}$, où M est le module maximum de $F_{\alpha-1}$.

9. Inversement, on peut chercher la loi de décroissance des coefficients, connaissant la loi de croissance de la fonction pour les grandes valeurs de x.

Dans son Mémoire précédemment cité, M. Poincaré résout cette question pour le cas particulier des fonctions que nous venons de considérer aux deux numéros précédents, en introduisant une fonction entière auxiliaire (1),

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-t^\alpha} F(tx)\, dt, \tag{11}$$

l'intégrale étant prise sur la partie positive de l'axe réel ou suivant un chemin équivalent.

On peut étendre cette méthode au cas le plus général où, par exemple (V étant une fonction quelconque positive et indéfiniment croissante avec la variable), la fonction F est supposée croître moins vite que $e^{V(r)}$. Il faudra de même considérer l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-V(t)} F(tx)\, dt, \tag{12}$$

(1) Nous transformons, par un changement de variable, l'expression de M. Poincaré. Sous cette nouvelle forme, les fonctions (11) et (12) présentent une remarquable analogie avec les expressions que j'ai considérées dans un Mémoire précédent (*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, nos 35-37). En cet endroit, l'intégrale est prise entre les limites 0 et 1 : la fonction ainsi obtenue n'admet alors d'autres points singuliers que ceux de F, et il n'est besoin que d'hypothèses très simples sur la fonction désignée par $V(t)$. Dans le cas actuel, l'intégrale, étant prise entre 0 et ∞, est en général infinie; mais, toutes les fois qu'elle est finie, elle représente une fonction entière, ainsi qu'on le verrait par une discussion analogue à celle que j'ai présentée à l'endroit cité.

dans laquelle θ est une fonction de t telle que le rapport $\frac{\theta}{t}$ soit infini avec t, par exemple $t\mathrm{L}t$ ou $t^{1+\varepsilon}$.

Cette intégrale est finie, quel que soit x, et représente une fonction entière. Il en résulte immédiatement que les coefficients a_m de $\mathrm{F}(x)$ sont plus petits que les inverses des quantités successives

$$\int_0^x e^{-\mathrm{V}(t)} t^m \, dt. \tag{13}$$

Pour voir la loi de décroissance de a_m, il suffira donc d'étudier la manière dont varie la quantité (13) lorsque m augmente indéfiniment.

Mais on peut arriver au même résultat plus directement par la simple considération des intégrales définies qui fournissent les coefficients lorsqu'on donne les valeurs de la fonction

$$a_m = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z^{m+1}}.$$

Si, en effet, on prend pour le contour C une circonférence de rayon R, on voit que a_m est moindre que

$$\frac{e^{\mathrm{V}(\mathrm{R})}}{\mathrm{R}^m}. \tag{14}$$

10. Dans cette expression, le rayon R est entièrement arbitraire. Faisons $\mathrm{R} = \mathrm{U}(m)$, en désignant par U la fonction inverse de V; nous voyons que $|\sqrt[m]{a_m}|$ est inférieur à $\frac{e}{\mathrm{U}(m)}$.

Pour $\mathrm{V}(\mathrm{R}) = \mathrm{R}^{\frac{1}{\alpha}}$, ceci donne bien le résultat obtenu par M. Poincaré, et d'après lequel $|\sqrt[m]{a_m}| < \frac{e}{m^\alpha}$.

On voit encore, par ce procédé, que, dans le développement de e^{x^α}, on a

$$|a_m| < \left(\frac{e}{\mathrm{L}m}\right)^m;$$

et, en général, la série qui donne le développement de

$$e^{e^{\cdots^{e^x}}}$$

(le nombre des exponentielles superposées étant μ) a ses coefficients plus petits que ceux de la série

$$\sum \frac{(ex)^m}{(\mathrm{LL}\ldots\mathrm{L}m)^m}$$

(le nombre des signes L étant $\mu - 1$).

11. Mais cette manière d'opérer donne pour a_m une limite trop élevée. Pour obtenir une limite plus approchée, posons

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}) = \int \frac{\psi(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}\, d\mathrm{R}$$

et cherchons le minimum de l'expression (14). Il vient, en prenant la dérivée,

$$\psi(\mathrm{R}) = m,$$

ou bien (φ étant la fonction inverse de ψ)

$$\mathrm{R} = \varphi(m)$$

et, pour cette valeur de R, l'expression (14) devient

$$\frac{e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}\, dm}}{\varphi(m)^m}. \tag{15}$$

Supposons que la fonction $\psi(x)$ croisse plus vite que $x^{\frac{1}{\alpha}}$. La fonction $\varphi(m)$ croît moins vite que m^α, de sorte que l'on a

$$\left|\sqrt[m]{\frac{1}{a_m}}\right| > e^{-\alpha}\varphi(m).$$

Il peut arriver que la fonction ψ augmente plus vite que n'importe

quelle puissance de x. Dans ce cas, on peut considérer α comme infiniment petit et écrire

$$\sqrt[m]{\left|\frac{1}{a_m}\right|} > (1-\varepsilon)\varphi(m).$$

Ceci peut être considéré comme la réciproque du théorème démontré au n° 6. On peut donc dire que, dans ce cas, ce théorème donne la véritable relation cherchée.

Si la fonction ψ croît plus lentement que toute puissance de la variable, et par suite φ plus vite que n'importe laquelle de ces puissances, les transformations précédentes de l'expression (15) ne sont plus applicables.

Si $\varphi(m)$ est à croissance moins rapide que celle de e^{m^k}, on aura

$$\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)\mathrm{L}\varphi(m)} = \frac{d}{dm}|\mathrm{LL}\varphi(m)| < \frac{k}{m};$$

d'où résultera

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < k\,\mathrm{L}\varphi(m)$$

ou

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < \frac{k}{k+1}\frac{d}{dm}|m\,\mathrm{L}\varphi(m)|,$$

et $\sqrt[m]{a_m}$ est moindre que $\frac{1}{\varphi(m)^{\frac{1}{k+1}}}$. C'est le cas de la fonction $\mathfrak{z}(x)$ étudiée au n° 6.

Enfin, si la fonction φ est, pour les grandes valeurs de m, supérieure à toute fonction de la forme e^{m^k}, on peut affirmer en tout cas que $\sqrt[m]{a_m}$ est inférieur à $\frac{1}{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)}$.

En effet l'expression (15) peut s'écrire

$$e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}dm - m\,\mathrm{L}\varphi(m)} = e^{-\int \mathrm{L}\varphi(m)\,dm}.$$

Or, f étant une fonction quelconque à dérivée croissante, on a

$$f(m) > \frac{m}{2} f'\left(\frac{m}{2}\right) + f\left(\frac{m}{2}\right),$$

car $f(m) - f\left(\frac{m}{2}\right)$ est de la forme $\frac{m}{2} f'\left(\frac{m}{2} + \frac{\theta m}{2}\right)$. En intégrant (1), il en résulte

$$\int f(m)\, dm > m f\left(\frac{m}{2}\right).$$

En posant $f(m) = \mathrm{L}\varphi(m)$, on obtient bien

$$e^{-\int \mathrm{L}\varphi(m)\, dm} < \frac{1}{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)^m}.$$

12. Nous allons maintenant nous occuper d'une certaine classe de fonctions qui jouent un grand rôle dans l'étude des fonctions entières : je veux parler des fonctions de la forme $e^{G(x)}$, où G est lui-même une fonction entière.

Le module d'une pareille fonction dépendant de la partie réelle de $G(x)$, nous présenterons tout d'abord quelques remarques sur la partie réelle d'une fonction entière.

Soit

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

une fonction holomorphe dans un cercle C ayant pour centre l'origine et pour rayon R; P la partie réelle de cette fonction au point $x = \mathrm{R} e^{i\theta}$ de ce cercle. Le coefficient a_m sera donné par la formule

$$(16) \qquad a_m = \frac{1}{2\pi \mathrm{R}^m} \int_0^{2\pi} \mathrm{P}\, e^{-mi\theta}\, d\theta.$$

Faisons croître R indéfiniment et supposons que P reste *algébri-*

(1) Nous négligeons la constante d'intégration, qui donne dans le résultat final un facteur constant.

quement (ainsi il faut remarquer qu'il n'est rien supposé sur les valeurs négatives de P) inférieur à R^λ, où λ est un certain exposant positif, soit

$$P < R^\lambda. \tag{17}$$

Je dis que F est un polynôme de degré au plus égal à λ.

Partageons, en effet, la circonférence du cercle C en deux parties : l'une C_1, formée par l'ensemble des arcs où P est positif; l'autre C_2, comprenant tous les arcs où cette quantité est négative. Soient I_1 l'intégrale $\int P\,d\theta$ considérée le long de C_1; I_2 l'intégrale $\int -P\,d\theta$ prise le long de C_2.

Le rapport $\frac{I_1}{R^m}$ tendra vers zéro pour $m > \lambda$, d'après les hypothèses faites sur P; et il en sera de même pour $\frac{I_2}{R^m}$, car la différence $I_1 - I_2$ est une constante, à savoir la partie réelle de $2\pi a_0$.

Or la formule (16) montre que le module du coefficient a_m est inférieur à $\frac{I_1 + I_2}{R^m}$. Ce coefficient ne peut donc être que nul.

En particulier, pour $\lambda = 1$, on voit que, si la partie réelle d'une fonction croît moins vite que le module de la variable, la fonction se réduit à une simple constante.

13. Nous avons supposé que l'inégalité (17) avait lieu pour toutes les valeurs suffisamment grandes de la variable; mais nous remarquerons que cette hypothèse n'est point complètement nécessaire. Les raisonnements précédents sont valables dès que l'on peut trouver une suite infinie de circonférences C dont les rayons aillent en augmentant indéfiniment et sur lesquelles l'inégalité (17) soit vérifiée.

14. Revenons maintenant aux fonctions considérées au n° **7.** Il sera préférable ici d'introduire, au lieu du nombre α, son inverse, que nous désignerons par la lettre λ, de sorte que l'on aura, pour les grandes valeurs de x

$$|F(x)| < e^{|x|^\lambda}. \tag{18}$$

Supposons qu'une pareille fonction soit de la forme $e^{G(x)}$: la partie réelle de $G(x)$ devra rester algébriquement plus petite que $H|x|^\lambda$, et par suite la fonction $G(x)$ ne peut être qu'un polynôme. En particulier, si λ est plus petit que 1, la fonction G doit se réduire à une constante.

Ainsi, *lorsqu'une fonction* $F(x)$ *est de la forme* $e^{G(x)}$, *les coefficients de son développement ne peuvent pas décroître plus vite que* $\frac{1}{(n!)^\alpha}$, *à moins que* $G(x)$ *ne soit un polynôme.*

Il en serait de même si $F(x)$ était de la forme $\Phi(x)e^{G(x)}$ (la lettre Φ représentant un polynôme quelconque); car la multiplication ou la division par un polynôme n'altèrent pas le fait exprimé par l'inégalité (18).

15. Les résultats précédents présentent cette particularité de ne pas changer si l'on ajoute à la fonction $F(x)$ un polynôme quelconque; aussi peuvent-ils servir à démontrer, du moins pour les fonctions qui satisfont à la condition (8) (n° 7), le théorème connu de M. Picard (1) sur les fonctions entières.

Considérons d'abord une fonction entière F dont les coefficients vérifient la condition (8) avec $\alpha > 1$. Le nombre λ sera plus petit que 1 et il sera impossible que F soit de la forme $\Phi e^{G(x)}$, du moins si G ne se réduit pas à une constante. L'équation $F = 0$ admettra donc une infinité de racines, et il en sera évidemment de même pour l'équation $F(x) = P(x)$, où P est un polynôme quelconque.

C'est par exemple le cas de la fonction ζ définie par l'égalité (7). (n° 6).

16. Supposons maintenant α quelconque, et soit E l'entier immédiatement supérieur à $\frac{1}{\alpha}$. L'identité

$$F(x) = P(x) + \Phi(x)e^{G(x)} \tag{19}$$

pourra avoir lieu, mais G devra être un polynôme de degré E au plus.

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IX; 1880.

Or, dans ces conditions, l'identité (19) ne peut avoir lieu de deux façons différentes, car c'est un fait bien connu que l'équation

$$(20) \qquad Px + \mathfrak{P}(x)e^{G(x)} + P_1(x) + \mathfrak{P}_1(x)e^{G_1(x)} + \ldots = 0,$$

où P, P_1, ..., $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, ..., G, G_1 sont des polynômes, n'admet pas d'autre solution que ses solutions banales.

On peut même ajouter que si F_1, F_2, F_3, ... sont des fonctions entières dont les coefficients vérifient toujours la condition (8) et qui n'ont chacune qu'un nombre fini de zéros, la somme $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$ aura nécessairement un nombre infini de racines, à moins que F_1, F_2, ... ne soient identiques à des facteurs constants et à des polynômes près. Cela résulte de la même proposition relative à l'équation (20).

17. La fonction F étant donnée, on peut résoudre l'équation (19) dès que l'on connaît le degré de $P(x)$. Il suffira pour cela de différentier un nombre de fois supérieur à ce degré. Le second membre prendra la forme Qe^G (où Q sera un nouveau polynôme), et, par conséquent, devra admettre un nombre fini de racines. Si l'on a obtenu ces racines, on connaîtra les polynômes Q et G, et la résolution d'équations linéaires fera connaître $\mathfrak{P}$.

En faisant, par exemple, P constant, on pourra, par ce procédé, reconnaître si l'équation

$$F = a + \mathfrak{P}e^G$$

est possible, et de la résoudre s'il y a lieu. On n'aura qu'une seule dérivée à prendre, et il viendra

$$Q = \mathfrak{P}' + G'\mathfrak{P}.$$

En égalant, dans cette identité, les coefficients de chaque puissance de x, on aura une série d'équations linéaires auxquelles devront satisfaire les coefficients de $\mathfrak{P}$.

Dans un grand nombre de cas, on pourra reconnaître immédiatement que l'équation (19) est impossible.

Faisons, par exemple,

$$F(x) = \frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \Gamma(x)\sin\pi x.$$

D'après les propositions connues relatives à la fonction Γ, le polynôme G devrait être du premier degré, ce qui est contraire à ce fait que la fonction F croît comme $|x|L|x|$. Donc les équations $\frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \mathfrak{P}(x)$, $\frac{\pi}{\Gamma(1-x)} + k\sin x = \mathfrak{P}(x)$, ... ont toujours une infinité de racines.

En général, pareil fait se produira toutes les fois que F augmentera plus vite que e^{kx^n} et moins vite que $e^{\frac{1}{k}x^{n+1}}$, quelque grand que soit k.

18. Les considérations précédentes démontrent le théorème de M. Picard pour toutes les fonctions satisfaisant à la condition (8). C'est, d'après le théorème de M. Poincaré, le cas de toutes les fonctions qui ont un genre fini.

On peut étendre une partie de ces conclusions à des fonctions de genre infini au moyen d'un raisonnement devenu classique dans cette théorie. On sait, en effet, que, si la fonction

$$F(x) = e^{G(x)},$$

qui n'a aucun zéro, était telle que l'équation $F(x) = 1$ n'admette non plus aucune solution, on en conclurait immédiatement que les mêmes propriétés appartiennent à la fonction

$$F_1(x) = \frac{1}{2i\pi} G(x).$$

Si, d'ailleurs, F croît moins vite que $e^{\psi(x)}$, on peut déduire de notre théorie que F_1 croîtra moins vite que $\psi(x)$.

Formons alors la suite des fonctions

$$f_1 = e^x, \qquad f_2 = e^{e^x}, \qquad f_3 = e^{e^{e^x}}, \qquad \ldots$$

Si la fonction donnée F est dépassée par une fonction f_m de cette

suite, il suffira d'appliquer m fois le raisonnement précédent pour ramener F à vérifier la condition (8).

Mais, même à l'aide de l'extension précédente, la démonstration ne s'applique pas à une fonction quelconque; car on peut former une fonction entière croissant plus vite que n'importe quelle fonction f_m. On pourra, par exemple, procéder de la façon suivante :

Ayant pris une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h, \ldots$ qui tendent vers zéro, on appellera m_1 le plus petit entier tel que la racine $m_1^{\text{ième}}$ du coefficient de x^m dans $f_1(x)$ soit plus petite que ε_1, puis m_2 le plus petit entier tel que la racine $m_2^{\text{ième}}$ du coefficient de x^{m_2} dans $f_2(x)$ soit plus petite que ε_2, et ainsi de suite.

En écrivant les termes de f_1 jusqu'au rang $m_2 - 1$, puis les termes de f_2 depuis le rang m_2 jusqu'au rang $m_3 - 1$, puis les termes de f_3 depuis le terme de rang m_3 jusqu'au terme de rang $m_4 - 1$, ..., on obtiendra une fonction entière qui jouira manifestement des propriétés demandées.

DEUXIÈME PARTIE.

RECHERCHE DE L'ORDRE DE GRANDEUR DES RACINES ET DU GENRE.

19. Les résultats obtenus dans notre première Partie permettent de compléter les conclusions de M. Poincaré, dans le cas des fonctions de genre zéro.

Soit, en effet,

$$F(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_p}\right)\cdots$$

une fonction de genre zéro, et $\varphi(p)$ une fonction positive et croissante telle que le module ρ_p de x_p soit supérieur à $\varphi(p)$. Nous supposerons de plus que $\varphi(p)$ soit supérieur à p^α (où α est un nombre plus grand que 1), et cela de telle manière que le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha-\varepsilon}}$ soit croissant, mais le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha+\varepsilon}}$ décroissant.

Le module de F ne peut dépasser la quantité

$$(21) \qquad F_0(R) = \left[1 + \frac{R}{\varphi(1)}\right]\left[1 + \frac{R}{\varphi(2)}\right]\cdots\left[1 + \frac{R}{\varphi(p)}\right]\cdots,$$

où R est le module de x.

Pour évaluer F_0, prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation (21); nous trouvons

$$(22) \qquad \frac{d}{dR} LF_0(R) = \frac{1}{\varphi(1)+R} + \frac{1}{\varphi(2)+R} + \ldots + \frac{1}{\varphi(p)+R} + \ldots$$

Soit ψ la fonction inverse de φ et, dans le second membre, isolons les $p_0 = \psi(R)$ premiers termes. Leur somme sera moindre que $\frac{\psi(R)}{R}$. Quant à la somme des termes qui restent, elle est inférieure à

$$\frac{1}{\varphi(p_0)} + \frac{1}{\varphi(p_0+1)} + \ldots.$$

Cette dernière quantité s'évalue à l'aide des procédés employés dans la théorie élémentaire des séries. On la remplace tout d'abord par la somme

$$(23) \qquad \frac{(l-1)p_0}{\varphi(p_0)} + \frac{(l^2-l)p_0}{\varphi(lp_0)} + \frac{(l^3-l^2)p_0}{\varphi(l^2p_0)} + \ldots,$$

où l est un nombre quelconque plus grand que 1. D'ailleurs, les hypothèses relatives à la fonction φ donnent

$$\varphi(l^\mu p_0) > l_0^{\mu\alpha'}\varphi(p_0),$$

où $(\alpha' = \alpha - \varepsilon)$. La série (23) est donc moindre que

$$\frac{(l-1)p_0}{\varphi(p_0)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{l^{\mu(\alpha'-1)}} = \frac{p_0}{\varphi(p_0)} \cdot \frac{l^{\alpha'-1}(l-1)}{l^{\alpha'-1}-1}.$$

Le second facteur $\frac{l^{\alpha'-1}(l-1)}{l^{\alpha'-1}-1}$ a pour limite $\frac{1}{\alpha'-1}$ lorsque l tend

vers 1, de sorte que la série (23) peut être remplacée par

$$\frac{1+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{p_0}{\varphi(p_0)}=\frac{1+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{\psi(R)}{R}.$$

Il vient donc (¹)

$$\frac{d}{dR}\operatorname{L}F_0(R)<\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{\psi(R)}{R},$$

ou

$$F_0(R)<e^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-1}\int^R\frac{\psi(R)}{R}dR}. \tag{24}$$

20. Ainsi le module de F ne peut croître plus vite que le second membre de l'inégalité précédente.

Si maintenant nous appliquons les conclusions du n° **11**, en supposant, pour fixer les idées, que α soit fini, nous voyons que la racine $m^{\text{ième}}$ du coefficient a_m est moindre que $\dfrac{e^{\alpha}}{\varphi\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\varepsilon}m\right)}$, ce qui peut encore s'écrire $\dfrac{\left(\dfrac{e\alpha}{\alpha-1}\right)^{\alpha}+\varepsilon}{\varphi(m)}$, puisque $\varphi(m)$ croît moins vite que $m^{\alpha+\varepsilon}$.

(¹) La limite ainsi obtenue est trop élevée. On peut, dans la plupart des cas, en obtenir une plus approchée en formant un second groupe avec les termes de la série (22) dont le rang est compris entre $\psi(R)$ et $2^{\frac{1}{\alpha}}\psi(R)$, lesquels sont tous plus petits que $\frac{1}{2R}$; puis un troisième groupe allant du rang $2^{\frac{1}{\alpha}}\psi(R)$ au rang $3^{\frac{1}{\alpha}}\psi(R)$, les termes étant alors plus petits que $\frac{1}{3R}$. Après séparation d'un certain nombre de ces groupes, on calcule le reste de la série comme il a été expliqué. On trouve ainsi pour la série (22) [en laissant de côté le facteur $\frac{\psi(R)}{R}$] les limites $\dfrac{1+\frac{\alpha}{\alpha-1}2^{\alpha}}{2}+\varepsilon$, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{6}+\dfrac{\frac{\alpha}{\alpha-1}3^{\frac{1}{\alpha}}}{3}+\varepsilon$, ...

Pour $\alpha=2$, le coefficient de $\frac{\psi(R)}{R}$ serait (au terme ε près)

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}+2\frac{\sqrt{3}}{3}=1,88\ldots$$

au lieu de 2.

21. Nous allons maintenant nous occuper de la question inverse et chercher comment on peut obtenir la loi de distribution des racines quand on connaît la loi des coefficients.

Cette recherche repose sur les formules que j'ai données dans un précédent travail (¹), et qui permettent de calculer les zéros successifs d'une fonction à l'aide des coefficients de son développement. Je vais tout d'abord résumer succinctement la marche suivie pour arriver à ces formules, en renvoyant pour les détails au Mémoire dont je viens de parler.

On commence par introduire une définition, celle de la *limite supérieure* d'une suite telle que

$$(25) \qquad u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_m, \quad \ldots,$$

pour m infini (les u étant des nombres réels).

C'est la plus petite quantité qui ne soit pas dépassée, ou du moins soit infiniment peu dépassée par les termes de la suite (25) à indices infiniment grands; ou encore, cette limite supérieure l est le plus grand nombre jouissant de cette propriété que dans la suite (25) on puisse trouver une série indéfinie de termes tendant vers l.

Dans un grand nombre de cas, l est la seule quantité satisfaisant à cette dernière condition. Alors l est, pour la suite (25), une limite, au sens ordinaire du mot. Nous exprimerons souvent ce fait en disant que les termes de la suite (25) *tendent régulièrement* vers l.

La notion de limite supérieure fournit d'abord une expression du rayon de convergence d'une série entière quelconque

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots.$$

Il suffit, en effet, de former la suite

$$|a_1|, \quad |\sqrt[2]{a_2}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[m]{a_m}|, \quad \ldots.$$

(¹) *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, 1re et 2e Parties (ce Journal, 4e série, t. VIII; 1892).

Soit l la limite supérieure (supposée finie) de cette suite. Le rayon cherché est donné par la formule $\rho = \frac{1}{l}$.

22. Proposons-nous maintenant d'exprimer que les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ sont des pôles au nombre de P (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité).

S'il en est ainsi, on pourra débarrasser la fonction de ces pôles en la multipliant par un polynôme de degré P

$$\mathfrak{P}_P = 1 + A^{(1)}x + \ldots + A^{(P)}x^P$$

et la nouvelle série ainsi obtenue

$$F_1 = \Sigma b_m x^m$$

sera convergente dans un cercle de rayon $\rho' > \rho$, de sorte qu'on pourra écrire

$$(26) \qquad b_{m+P} = a_{m+P} + A^{(1)}a_{m+P-1} + \ldots + A^{(P)}a_m = \left[\frac{\theta(1+\varepsilon)}{\rho'}\right]^m,$$

où θ est de module inférieur à 1 et ε un infiniment petit.

Réciproquement, s'il existe des nombres $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(P)}$ jouissant de la propriété précédente, la fonction donnée ne pourra posséder sur le cercle primitif d'autres points singuliers que des pôles, dont les affixes seront racines de l'équation

$$(27) \qquad 1 + A^{(1)}x + \ldots + A^{(P)}x^P = 0.$$

Elle admettra bien tous ces pôles s'il est impossible de trouver un polynôme de degré moindre que P et remplissant les mêmes conditions.

23. Considérons alors le déterminant symétrique d'ordre $p+1$

$$(28) \qquad D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & \ldots & a_{m+2p} \end{vmatrix},$$

p étant un entier quelconque. Nous désignerons par l_p la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,p}|}$ pour un infini (p restant fixe).

Tout d'abord, quels que soient les points singuliers de notre fonction sur son cercle de convergence, l_p ne peut dépasser $\left(\frac{1}{\rho}\right)^{p-1}$, d'après ce qui a été supposé sur l'ordre de grandeur de a_m.

Mais, si le polynôme $\mathfrak{P}_p$ existe, nous trouverons pour l_p une valeur nécessairement moindre que la limite précédente. Car on pourra, dans la dernière colonne du déterminant (28), remplacer les a par les b de même indice, lesquels sont inférieurs à $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho'}\right)^m$. Il viendra donc

$$l_p \leq \frac{1}{\rho^p \rho'}.$$

24. Inversement, supposons que l'inégalité

$$l_p < \frac{1}{\rho^{p-1}} \tag{29}$$

soit vérifiée pour $p = P$, mais non pour aucune valeur moindre de p.

En particulier, la quantité $\sqrt[m]{|D_{m,P-1}|}$ a pour limite supérieure $\rho^{\frac{1}{P}}$.

On démontre tout d'abord qu'elle tend régulièrement vers cette limite; puis on détermine les coefficients $A_m^{(1)}, \ldots, A_m^{(P)}$ par les équations

$$\begin{aligned}
&a_{m+P} + A_m^{(1)} a_{m+P-1} + \ldots + A_m^{(P)} a_m = 0,\\
&a_{m+P+1} + A_m^{(1)} a_{m+P} + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m+2P-1} + A_m^{(1)} a_{m+2P-2} + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+P-1} = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on fait augmenter m indéfiniment, on constate que $A_m^1, A_m^2, \ldots A_m^{(P)}$ tendent respectivement vers des limites $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(P)}$, lesquelles vérifient les équations (26) en prenant pour ρ' la valeur fournie par l'équation $l_p = \frac{1}{\rho^p \rho'}$.

La fonction, considérée sur le cercle de rayon ρ, admet donc au plus P pôles, les racines de l'équation (27). Elle les admet d'ailleurs tous, sans quoi l'inégalité (29) serait vérifiée pour $p < P$.

Soient $x = x_1$, $x = x_2$, .. , $x = x_p$, ... les différents pôles de notre fonction, rangés par ordre de module croissant (les pôles de module égal étant rangés dans un ordre arbitraire); $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots$ leurs modules. Les P premiers de ces modules seront tous égaux à ρ, de sorte que l'on aura, pour toutes les valeurs de p inférieurs à P, l'équation

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_p} = l_{p-1}. \tag{30}$$

25. Considérons maintenant les valeurs de p supérieures à P. Pour une quelconque de ces valeurs, l_p sera au plus égal à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}} \rho'^{p-\mathrm{P}+1}}$, et cela quels que soient les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ', ainsi qu'on le voit en transformant à l'aide des équations (26) les $p - \mathrm{P} + 1$ dernières colonnes du déterminant (28).

Mais si ces points singuliers sont des pôles au nombre de P′, une nouvelle réduction se produira pour $p = \mathrm{P} + \mathrm{P}'$; car il existera un polynôme de degré $\mathrm{P} + \mathrm{P}'$,

$$\mathfrak{P}'_{\mathrm{P}+\mathrm{P}'} = 1 + \mathrm{B}^{(1)} x + \ldots + \mathrm{B}^{(\mathrm{P}+\mathrm{P}')} x^{\mathrm{P}+\mathrm{P}'},$$

tel que la série $\mathrm{F}_2 = \mathfrak{P}'\mathrm{F} = \Sigma c_m x^m$ ait un rayon de convergence ρ'' supérieur à ρ'. Comme dans le déterminant $\mathrm{D}_{m,\mathrm{P}+\mathrm{P}'}$ on peut remplacer les éléments de la dernière colonne par les c de même indice, on voit que $l_{\mathrm{P}+\mathrm{P}'}$ ne peut être supérieur à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}} \rho'^{\mathrm{P}'} \rho''}$.

Inversement, considérant la suite des valeurs de p à partir de $p = \mathrm{P}$, on en rencontrera d'abord un certain nombre (qui peuvent d'ailleurs se réduire à une seule, $p = \mathrm{P}$) pour lesquelles l_p est égal à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}} \rho'^{p-\mathrm{P}+1}}$.

Si après cette série de valeurs en survient une, $p = \mathrm{P} + \mathrm{P}'$, pour laquelle l_p soit égal à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}} \rho'^{\mathrm{P}'} \rho''}$, où ρ'' est supérieur à ρ', cette circonstance dénotera, comme on le démontre à l'aide de raisonnements analogues aux précédents, la présence de P′ pôles sur le cercle de rayon ρ'.

Les modules $\rho_{P+1}, \ldots, \rho_{P+P'}$ sont donc tous égaux à ρ', et, par suite, on aura pour les valeurs de p comprises entre P et P + P′ inclusivement

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_p} = \frac{1}{\rho'^{p}\rho'^{p-P}},$$

c'est-à-dire l'équation (3o), d'après ce que nous savons sur les nombres $l_p, \ldots, l_{P+P'}$.

Ayant ainsi étudié les valeurs de l_p jusqu'à $p = P + P'$, on considérera les valeurs suivantes, et ainsi de suite indéfiniment.

On constate tout d'abord par ce procédé que le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ ne va jamais en diminuant. La condition nécessaire et suffisante pour que notre fonction soit méromorphe dans tout le plan est que ce rapport augmente indéfiniment. S'il en est ainsi, les raisonnements précédents, appliqués aux valeurs de p pour lesquelles le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ présente une croissance, permettent de calculer les affixes des différents pôles. Mais nous n'avons besoin, pour ce qui va suivre, que des modules de ces pôles.

A ce point de vue nos conclusions peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

L'équation (3o) *est générale.*

26. Ayant appris à calculer les pôles d'une fonction $F(x)$ donnée par un développement taylorien quelconque, nous sommes à même de résoudre le même problème pour les zéros d'une telle fonction, car ces zéros ne sont autres que les pôles de la fonction $\frac{1}{F(x)}$.

Le calcul des coefficients d'une fonction à l'aide des coefficients de son inverse n'offre aucune difficulté.

Soit, comme précédemment, la fonction

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots, \tag{2}$$

dans laquelle seulement a_0 est supposé différent de zéro. On multipliera

cette série par la série

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m + \ldots,$$

et, en égalant à zéro les coefficients de la série produit, à partir du second, on déterminera $C_0, C_1, \ldots$, etc. Des valeurs ainsi trouvées on déduit aisément l'expression du déterminant $D_{m,p}$ formé, comme nous l'avons expliqué, à l'aide des coefficients de la série $f(x)$. On trouve ainsi pour ce déterminant la valeur

$$(-1)^{m(p-1)+\frac{p(p+1)}{2}} \frac{E_{m,p}}{a_0^{m+2p+1}},$$

où l'on a posé

$$(31) \qquad E_{m,p} = \begin{vmatrix} a_{p+1} & a_p & a_0 & 0 & . & \ldots & 0 \\ a_{p+2} & a_{p+1} & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{m+p-1} & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & a_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{m+2p} & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & a_{p+1} \end{vmatrix}$$

et l'équation (30) devient, en y changeant p en $p+1$,

$$(32) \qquad \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{p+1}} = l_p = \limsup_{m=\infty} \sqrt[m]{\left|\frac{E_{m,p}}{a_0^{m+2p+1}}\right|} = \frac{1}{|a_0|} \limsup_{m=\infty} \sqrt[m]{|E_{m,p}|},$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots$ désignant cette fois les modules des zéros de $F(x)$.

Telle est la formule dont nous avions besoin de rappeler la démonstration et qui va nous servir de point de départ.

27. Supposons que $F(x)$ soit une fonction entière et que le coefficient a_m soit moindre que $\frac{1}{\chi(m)} = \frac{1}{\varphi(m)^m}$, où $\varphi(m)$ est une fonction positive indéfiniment croissante de m. Nous admettrons en outre que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ est constamment croissant, hypothèse toujours légitime, d'après ce qui a été expliqué aux n^{os} **3-5**.

Nous aurons un maximum du déterminant $E_{m,p}$, défini par la for-

mule (31), en y considérant tous les termes comme positifs et remplaçant chaque coefficient a_m par la valeur correspondante de $\frac{1}{\chi(m)}$, autrement dit en imaginant que dans le déterminant

$$(33)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\chi(p+1)} & \frac{1}{\chi(p)} & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\chi(p+2)} & \frac{1}{\chi(p+1)} & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{\chi(m+p-1)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} \\ \frac{1}{\chi(m+p)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\chi(m+2p)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(p+1)} \end{vmatrix}$$

on convienne de prendre tous les termes avec le signe $+$.

Dans le déterminant (33), l'élément $a_{i,k}$ correspondant à la colonne de rang i et à la ligne de rang k est égal à zéro si $i-k>p+1$ et à $\frac{1}{\chi(p+1+k-i)}$ dans le cas contraire. Le nombre des termes est

$$(p+2)^{m-1}(p+1)!$$

Je dis que le plus grand terme est celui qui correspond à la diagonale principale.

Effectivement tout autre terme que celui-là présente au moins une *inversion*, suivant la locution usitée dans la théorie élémentaire des déterminants. Il contient donc en facteurs deux éléments $a_{i,k'}.a_{i',k}$ tels que $i<i'$, $k<k'$. Si à ce produit on substitue le produit $a_{i,k}.a_{i',k'}$, on obtient un autre terme du déterminant, et ce nouveau terme est plus grand que le précédent. Ceci résulte de ce que le rapport $\frac{a_{i+1,k}}{a_{i,k}}=\frac{\chi(p+1+k-i)}{\chi(p+1+k-i-1)}$ est croissant avec k, d'après les hypothèses faites sur la fonction χ. Il en est de même des rapports

$\frac{a_{i+2,k}}{a_{i+1,k}}, \ldots, \frac{a_{i',k}}{a_{i'-1,k}}$ et par suite de leur produit $\frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$. On a donc bien

$$\frac{a_{i',k'}}{a_{i,k'}} > \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}.$$

Le plus grand terme est donc celui qui ne renferme pas d'inversion, c'est-à-dire le terme principal.

Il en résulte

$$|E_{m,p}| \leq (p+1)!\,(p+2)^{m-1}\left[\frac{1}{\chi(p+1)}\right]^{m+p-1}$$

et

$$l_p \leq \frac{p+2}{|a_0|\cdot\chi(p+1)}.$$

Mais le produit $\rho_1\rho_2\ldots\rho_{p+1}$ est égal à $\frac{1}{l_p}$. Le plus grand facteur de ce produit, à savoir le dernier, est donc au moins égal à $\sqrt[p+1]{\frac{1}{l_p}}$, c'est-à-dire, à un facteur près qui tend vers l'unité pour p infini, au moins égal à $\varphi(p+1)$.

Le raisonnement précédent ne s'appliquerait plus si la fonction s'annulait à l'origine. Mais on ramènerait ce cas au cas général en divisant par une puissance convenable de x et en raisonnant sur la fonction ainsi débarrassée de ses racines nulles.

Nous avons également supposé que l'inégalité

$$|a_m| < \frac{1}{\chi(m)} \tag{34}$$

était vérifiée, quel que soit m. Mais il suffit manifestement qu'elle ait lieu pour les grandes valeurs de l'indice; car on ramènerait les premiers coefficients à vérifier la même inégalité en divisant toute la série par un certain nombre constant, ce qui ne changerait pas les racines.

La condition que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit croissant peut également n'être vérifiée que pour les grandes valeurs de m; car on pourra remplacer, s'il y a lieu, les valeurs de $\chi(m)$ jusqu'à un certain rang par d'autres qui satisfassent à cette condition.

Nous arrivons donc à cette conclusion :

THÉORÈME. — *Si le coefficient a_m décroît plus vite que $\frac{1}{\varphi(m)^m}$, la $p^{ième}$ racine a un module supérieur à $(1-\varepsilon)\varphi(p)$*, où ε est infiniment petit pour p infini.

En un mot, *les modules des racines vont en croissant plus vite que* $\frac{1}{\sqrt[m]{|a_m|}}$.

Par exemple, les racines de la fonction

$$f(x) = \Sigma q^{n^2} x^n,$$

considérée au n° 6, croissent au moins aussi vite que q^n. Il en est de même pour les racines de l'équation $f(x) = R(x)$, où R est une fonction rationnelle quelconque.

28. Venons maintenant à notre objet principal et proposons-nous d'étudier le genre d'une fonction donnée par son développement en série entière.

Pour cela, nous appliquerons le résultat que nous venons d'obtenir aux fonctions, étudiées au n° 7, pour lesquelles on a

$$\gamma(m) = (m!)^\alpha,$$

et, par suite,

$$\varphi(m) = m^\alpha.$$

Comme précédemment, nous introduirons, au lieu du nombre α, son inverse, que nous désignerons par la lettre λ.

Nous savons donc que le module ρ_p de la $p^{ième}$ racine croît, lorsque p augmente indéfiniment, plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Si λ n'est pas entier, et que $E+1$ soit l'entier immédiatement supérieur, la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ est convergente. Nous en conclurons plus loin que la fonction est du genre E.

Lorsque λ est un entier, il y a doute. C'est à cette hypothèse que se rattache l'exemple dont parle M. Poincaré dans son Mémoire (¹) et relatif à la fonction

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\,l^2\,n}\right).$$

Il faudrait, dans les cas de cette espèce, étudier directement la convergence de la série $\sum_p \frac{1}{\varphi(p)^{\bar\lambda}}$.

Quoi qu'il en soit, nous supposons que, le coefficient a_m étant moindre que $\frac{1}{(m!)^{\bar\lambda}}$, nous désignerons par $E+1$ l'entier immédiatement supérieur (et non égal) à λ, de sorte que la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ soit certainement convergente. Nous pourrons former, d'après la méthode de M. Weierstrass, la fonction

$$\Phi(x)=\prod\left(1-\frac{x}{x_p}\right)e^{Q_E\left(\frac{x}{x_p}\right)}, \tag{35}$$

(¹) M. Poincaré démontre, non seulement que a_m est plus petit que $\frac{1}{(m!)^{\bar\lambda}}$, mais que le produit $a_m(m!)^{\bar\lambda}$ tend vers zéro. On peut même déduire de sa démonstration que la racine $m^{\text{ième}}$ de ce produit tend vers zéro; car $a_m(m!)^{\bar\lambda}$ se présente comme $m^{\text{ième}}$ coefficient d'une série entière.

Inversement, si la série $m^{\text{ième}}$ de $a_m(m!)^{\bar\lambda}$ tend vers zéro, nous savons que ρ_p est égal au produit de $p^{\bar\lambda}$ par une quantité qui augmente indéfiniment. La série $\sum \frac{1}{\rho_p^{\lambda}}$ est donc telle que ses termes soient avec ceux de la série harmonique dans un rapport infiniment petit pour p infini. Mais une telle série n'est pas nécessairement convergente, et le contraire se produit précisément dans l'exemple donné par M. Poincaré.

où $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ sont les racines successives et $Q_E(z)$ est le polynôme

$$\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^E}{E},$$

obtenu en prenant dans le développement de $-L(1-z)$ les E premiers termes.

La fonction donnée $F(x)$ sera égale au produit de $\Phi(x)$ par un facteur de la forme $e^{G(x)}$. Puisque nous avons déjà démontré que les polynômes de la formule (1) sont de degré E, tout se réduit à établir que $G(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à E.

29. Or je vais faire voir qu'*on peut décrire, avec l'origine comme centre, des cercles aussi grands qu'on le veut sur lesquels la fonction* $\Phi(x)$ *reste constamment supérieure à* $e^{-|x|^{\lambda+\varepsilon}}$.

Les rayons de ces cercles seront déterminés ainsi qu'il suit :

Les modules ρ_p, d'après nos hypothèses, croissent plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Admettons en outre que la quantité $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, ce qui peut évidemment se faire en donnant, s'il y a lieu, un petit accroissement à λ.

Puisque $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, il existera une infinité d'entiers p pour chacun desquels cette quantité prendra une valeur plus petite que toutes les valeurs suivantes. Soit p_0 un tel entier, de sorte qu'on ait pour $h > 0$

$$\rho_{p_0+h}^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda > h. \tag{36}$$

Nous déterminerons R par la relation

$$R^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda = \tfrac{1}{2}, \tag{37}$$

de sorte que l'inégalité (36) pourra s'écrire

$$\rho_{p_0+h} > (h - \tfrac{1}{2} + R^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{38}$$

Pour chaque valeur de l'entier p_0, nous aurons ainsi une valeur de R; nous obtenons donc bien une suite de cercles dont les rayons vont en augmentant indéfiniment. Je dis que ces cercles satisfont à la condition indiquée.

30. Pour plus de clarté, je considérerai d'abord le cas où λ est plus petit que 1 (l'égalité étant exclue), de façon qu'on a $E = 0$. Les facteurs exponentiels disparaissant, la formule (35) se réduit à

$$\Phi(x) = \prod \left(1 - \frac{x}{x_p}\right), \tag{35'}$$

et, lorsque le point x décrira le cercle de rayon R, le module de $\Phi(x)$ restera supérieur à la quantité

$$\prod_{p=1}^{p_0} \left(\frac{R}{\rho_p} - 1\right) \prod_{p=p_0+1}^{\infty} \left(1 - \frac{R}{\rho_p}\right). \tag{39}$$

Nous évaluerons cette expression en partageant les facteurs qui la composent en trois groupes. Le premier Π_1 comprendra tout ce qui figure sous le premier signe Π,

$$\Pi_1 = \prod_{p=1}^{p_0} \left(\frac{R}{\rho_p} - 1\right). \tag{40}$$

Le nombre p_0 de ces facteurs est, nous le savons, moindre que $R^\lambda - \frac{1}{2}$. Le plus petit est le dernier, égal à

$$\frac{R}{(R^\lambda - \frac{1}{2})^{\frac{1}{\lambda}}} - 1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} - 1,$$

par conséquent supérieur à $\frac{1}{2R^\lambda}$, puisque λ est plus petit que 1.

Si nous envisageons les autres facteurs du produit (39), la formule

(38) nous montre que l'on a

$$(41) \qquad 1 - \frac{R}{\rho_{p_0+h}} > 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Nous composerons le produit Π_2 avec tous les facteurs pour lesquels $h - \frac{1}{2}$ est plus petit que R^λ. Le nombre de ces facteurs est moindre que $R^\lambda + \frac{1}{2}$. Le plus petit est le premier, au moins égal à $1 - \frac{R}{(R^\lambda + \frac{1}{2})^{\frac{1}{\lambda}}}$, par conséquent supérieur à $\frac{k}{2R^\lambda}$ (k restant fini pour R infini).

Les facteurs restants, qui forment le produit Π_3, peuvent se mettre sous la forme $1 - u$, où $u = \frac{1}{\left(1 + \frac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ est plus petit que $\frac{1}{2}$.

Or, sous cette condition, on voit aisément que $1 - u$ est supérieur à e^{-2u}. Chacun des facteurs du produit Π_3 est donc plus grand que la valeur correspondante de $e^{-\frac{2}{\left(1 + \frac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}}$, ou, plus simplement, de $e^{-\frac{2R}{h^{\frac{1}{\lambda}}}}$.

D'après ces remarques, on voit que le produit Π_1 est supérieur à $\left(\frac{1}{2R^\lambda}\right)^{R^\lambda}$, ou (comme $2R^\lambda$ croît moins vite que e^{R^ε}, si petit que soit ε) supérieur à $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Une évaluation semblable s'applique au produit Π_2.

Quant au produit Π_3, il est plus grand que $e^{-R\sigma}$, où σ est le reste de la série $\sum \frac{1}{h^{\frac{1}{\lambda}}}$ arrêtée au terme qui a pour rang l'entier h_0 immédiatement supérieur à $R^\lambda + \frac{1}{2}$. Or le reste d'une pareille série est de l'ordre de $h_0^{1-\frac{1}{\lambda}}$ ou de $R^{\lambda-1}$, de sorte que Π_3 est aussi moindre que $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Nous trouvons donc bien, ainsi que nous l'avons annoncé,

$$\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 > e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}.$$

31. Pour généraliser cette proposition au cas d'un genre quelconque, nous remarquerons que, pour $u < 1$, la quantité $(1-u)e^{Q_E(u)}$ est supérieure à $1-u^{E+1}$. C'est ce qui résulte des deux développements

$$(42)\quad \begin{cases} L(1-u)+Q_E(u) \\ \quad = -\dfrac{u^{E+1}}{E+1} - \dfrac{u^{E+2}}{E+2} - \ldots - \dfrac{u^{2E+1}}{2(E+1)} - \ldots - \dfrac{u^{3E+1}}{3(E+1)} - \ldots, \end{cases}$$

$$(43)\qquad L(1-u^{E+1}) = -u^{E+1} - \frac{u^{2(E+1)}}{2} - \frac{u^{3(E+1)}}{3} - \ldots.$$

Les termes de la série (42) sont constamment décroissants en valeur absolue. Le premier terme de la série (43) sera donc (en valeur absolue) supérieur à l'ensemble des $E+1$ premiers termes de la série (42); le deuxième terme de (43) à la somme des $E+1$ suivants, etc.

D'après cela, au lieu des facteurs $1 - \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ qui composaient tout à l'heure les produit Π_2 et Π_3, nous aurons à considérer des facteurs de la forme $1 - \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{E+1}{\lambda}}}$.

Pour les valeurs de h inférieures à $R^\lambda + \frac{1}{2}$, nous remplacerons $\frac{E+1}{\lambda}$ par l'unité, et nous trouverons pour le produit Π_2 de ces facteurs la même évaluation que précédemment.

Quant aux facteurs suivants, nous constaterons comme plus haut que leur produit est supérieur à $e^{-R^{E+1}\sigma'}$, où σ' est le reste de la série $\dfrac{1}{h^{\frac{E+1}{\lambda}}}$, arrêtée au terme de rang h_0.

Ce reste étant comparable à $\dfrac{1}{h_0^{\frac{E+1}{\lambda}-1}}$, le produit Π_3 est encore supérieur à $e^{-R^{\lambda+1}}$.

Au produit Π_1 correspondra un produit de facteurs polynômes et de facteurs exponentiels. Les premiers sont en nombre au plus égal

à $R^\lambda - \frac{1}{2}$. Le plus petit est supérieur à $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} - 1$, quantité de la forme $\frac{k}{R^\lambda}$, où k est fini. Leur produit satisfait donc encore aux conclusions précédentes.

Les facteurs exponentiels sont respectivement plus grands que les quantités $e^{-\left(\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^E}{E}\right)}$, où $u = \frac{R}{\rho_p}$ est plus grand que 1. Nous diminuerons encore une telle quantité en supprimant les dénominateurs du polynôme Q_E. Le plus grand terme de ce polynôme devient alors le dernier et nous pourrons remplacer tous les autres par celui-là. Nous trouvons donc un produit plus grand que l'expression

$$e^{-ER^E \sum_{p=1}^{p_0} \frac{1}{\rho_p^E}}. \tag{44}$$

ρ_p étant de l'ordre de $p^{\frac{1}{\lambda}}$, la série $\frac{1}{\rho_p^E}$ est divergente; mais sa somme, lorsqu'on la limite au terme de rang p_0, n'augmente pas plus vite que $p_0^{1-\frac{E}{\lambda}}$.

En prenant $p_0 = R^\lambda$ et substituant dans l'expression (44), on arrive pour cette dernière au même résultat que pour les précédentes.

32. Notre proposition auxiliaire est donc démontrée. Sur chacun des cercles de rayon R, l'inégalité

$$|\Phi(x)| > e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$$

est vérifiée.

Comme on a, d'autre part, ainsi qu'il a été vu au n° **7**,

$$|F(x)| < e^{HR^\lambda},$$

il vient

$$\left|\frac{F}{\Phi}\right| = |e^{Gx^\lambda}| < e^{R^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer à la fonction $e^{G(x)}$ les considérations développées aux nos **12-15**, et nous en concluons que $G(x)$ est un polynôme de degré E au plus, de sorte que notre fonction F est bien du genre E.

33. Ainsi, nous avons établi que, *lorsque le coefficient* a_m *est de l'ordre de* $\frac{1}{(m!)^{\frac{\lambda}{1}}}$, *où* λ *n'est pas entier, la fonction* $\Sigma a_m x^m$ *est du genre* E, *en désignant par* $E+1$ *l'entier immédiatement supérieur à* λ. La réciproque du théorème de M. Poincaré est donc bien établie pour λ non entier.

Si λ est un entier $E+1$, il y a doute. Notre fonction peut être du genre E ou du genre $E+1$.

A cause de ce cas douteux, les recherches précédentes ne permettent pas encore de résoudre complètement la question posée par M. Poincaré dans son Mémoire, et de décider si le genre se conserve dans la différentiation ou dans une combinaison linéaire. Nous pouvons seulement affirmer que la dérivée d'une fonction de genre E ou la somme de deux pareilles fonctions est *en général* de genre E et *au plus* de genre $E+1$.

Le cas où les résultats précédents affectent la forme la plus simple est celui où, λ étant plus petit que 1, le genre est égal à zéro.

C'est ce qui arrivera, par exemple, pour $\frac{\sin x}{x}$ si l'on considère cette quantité comme fonction de x^2. Nous complétons ainsi, comme on le voit, la démonstration de la formule

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots.$$

On sait en effet que, dans les cours de Calcul intégral (1), on n'arrive pas à déduire immédiatement cette formule du théorème de M. Weierstrass. Une démonstration spéciale est nécessaire pour établir que le facteur exponentiel disparaît.

(1) *Voir*, par exemple, PICARD, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 151.

Ici, cette circonstance apparaît tout d'abord, en supposant seulement connu le développement taylorien de $\sin x$, ou, plus simplement encore, en partant de sa relation avec la fonction exponentielle.

La fonction $\mathcal{F}(x)$ du n° 6 est également du genre zéro, ainsi que ses combinaisons linéaires avec d'autres fonctions analogues ou des polynômes, etc.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION A LA FONCTION DE RIEMANN.

34. Dans son Mémoire intitulé : *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (¹), Riemann utilise les propriétés de la fonction

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

dont l'étude est elle-même ramenée à celle d'une fonction entière $\xi(x)$ donnée par la formule

$$(45) \qquad \xi(x) = \frac{1}{2} - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^{\infty} \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{x}{2} \log t\right) dt,$$

où

$$(46) \qquad \Psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}.$$

L'analyse de Riemann repose sur ce fait que $\xi(x)$, considéré comme fonction de x^2, est de genre zéro, fait qui est énoncé dans son Mémoire, mais sans démonstration suffisante.

Les recherches précédentes vont nous permettre de déterminer en toute rigueur le genre de $\xi(x)$.

(¹) RIEMANN, *Œuvres complètes* (Ed. Weber et Dedekind), p. 136 et suiv.

35. Nous aurons tout d'abord à développer ξ en série. L'intégrale qui figure au second membre de la formule (45) est de la forme $\Sigma(-1)^m C_{2m} x^{2m}$, où l'on a

$$C_m = \frac{1}{2^m m!} \int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} (\log t)^m \, dt. \tag{47}$$

On aura donc, en considérant ξ comme fonction de x^2,

$$\xi(x) = \sum_0^\infty a_m x^{2m}, \tag{48}$$

où les coefficients a sont donnés, à l'exception du premier, par la formule

$$a_m = (-1)^m \left(\frac{C_{2m}}{4} - C_{2m-2} \right). \tag{49}$$

36. Remarquons tout d'abord que la série $\Psi(t)$ peut être remplacée, à un facteur fini (1) près, par son premier terme $e^{-\pi t}$. On peut également faire abstraction du facteur $t^{-\frac{3}{4}}$ qui est plus petit que 1.

D'ailleurs, si ε est un nombre positif, mais aussi petit qu'on le voudra, l'inégalité

$$(\log t)^m < e^{\varepsilon t}$$

ou

$$\log t < e^{\frac{\varepsilon t}{m}} \tag{50}$$

est vérifiée à partir de la valeur $t = m^{1+\varepsilon}$, du moins pour les grandes valeurs de m; car on a bien, pour m suffisamment grand,

$$(1+\varepsilon) \log m < e^{\varepsilon m^\varepsilon}$$

---

(1) Ce facteur est même très voisin de 1. Il est inférieur à

$$1 + \frac{e^{-3\pi}}{1 - e^{-5\pi}} < 1 + \frac{1}{10000}.$$

et de plus, en prenant les dérivées des deux membres de l'inégalité (50), on trouve

$$\frac{1}{t} < \frac{\varepsilon}{m}\, e^{\frac{\varepsilon t}{m}},$$

inégalité dont le premier membre est décroissant tandis que le second est croissant et qui est vérifiée pour $t = m^{1+\varepsilon}$, si m est suffisamment grand.

Si donc, dans la formule (47), nous décomposons l'intégrale qui multiplie $\frac{1}{2^m m!}$ en deux, l'une prise entre les limites 1 et $m^{1+\varepsilon}$, l'autre entre $m^{1+\varepsilon}$ et $+\infty$, la seconde sera moindre que $\frac{e^{-(\pi-\varepsilon)m^{1+\varepsilon}}}{\pi-\varepsilon}$, c'est-à-dire infiniment petite pour m infini.

La première sera manifestement inférieure à

$$C_0 (1+\varepsilon)^m (\log m)^m,$$

où C_0 est l'intégrale $\int_1^\infty e^{-\pi t} t^{-\frac{3}{2}}\, dt$.

C_m sera donc au plus de l'ordre de $\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^m \frac{(\log m)^m}{m!}$, ce qui donne

$$|a_m| < \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{2m} \frac{(\log 2m)^{2m}}{(2m)!}.$$

Il faut donc prendre (1)

$$\varphi(m) = \left(\frac{2}{1+\varepsilon}\,\frac{2m}{e \log m}\right)^2.$$

D'après ce qui précède, cette formule exprime également la loi de croissance des racines de l'équation $\xi(x) = 0$, considérée comme équation en x^2.

Si l'on considère x comme l'inconnue de l'équation, il faut prendre

(1) La fonction $\varphi(m)$ ainsi définie satisfait manifestement aux conditions indiquées au n° 27.

la racine carrée de l'expression précédente et l'on trouve

$$\rho_p > \frac{kp}{\log p}, \tag{51}$$

en posant

$$k = \frac{4-\varepsilon}{e}. \tag{52}$$

37. Si nous voulions avoir une limite supérieure des modules des racines successives, il faudrait commencer par trouver une limite inférieure du module de a_m. Or on aura une limite inférieure de C_m en prenant l'intégrale entre les limites $m^{1-\varepsilon}$ et $m^{1-\varepsilon'}$ (où ε et $\varepsilon' < \varepsilon$ sont deux nombres positifs très petits. On trouve ainsi

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m e^{-\pi m^{1-\varepsilon'}} m^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon')}}{2^m m!} (m^{1-\varepsilon'} - m^{1-\varepsilon}),$$

ce qui peut s'écrire

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m}{2^m m!},$$

en réunissant tous les facteurs de la forme $(1-\varepsilon)^m$.

D'ailleurs le rapport $\frac{C_m}{C_{m-2}}$ tend vers zéro; car dans l'évaluation de ce rapport on peut, d'après ce que nous avons vu, considérer l'intégrale prise seulement jusqu'à la limite $t = m^{1+\varepsilon}$, et il vient alors

$$C_m < C_{m-2} \frac{(1+\varepsilon)^2 \log^2 m}{4m(m-1)}.$$

Il en résulte que $|a_m|$ est, à un facteur constant près, supérieur à C_{2m-2} ou à $\frac{(1-\varepsilon)^{2m} (\log m)^{2m}}{2^{2m}(2m)!}$.

Nous pourrons alors appliquer les raisonnements des nos **19-20** en prenant $\varphi(p) = \left(\frac{k'p}{\log p}\right)^2$, où k' est une constante indéterminée. On a

ici $\alpha = 2 - \varepsilon$, et l'on trouve

$$|a_m| < \left[\frac{(2e+\varepsilon)\log m}{k' m}\right]^{2m}.$$

En appliquant la réduction indiquée dans la note 1 (p. 21), on obtient une limite un peu moins élevée

$$|a_m| < \left[\frac{(1,88+\varepsilon)\, e \log m}{k' m}\right]^{2m}.$$

Si l'on compare cette valeur à celle qui vient d'être trouvée pour a_m, il vient

$$k' = 7,56\ldots.$$

Telle est la quantité que $\frac{\rho_p \log p}{p}$ ne saurait dépasser constamment, lorsque p grandit indéfiniment.

Les conclusions auxquelles nous arrivons sont donc les suivantes :

Le rapport $\frac{1}{\rho_p}\frac{p}{\log p}$ *reste fini et sa limite supérieure, pour p infini, est comprise entre* $\frac{1}{7,56}$ *et* $\frac{e}{4}$.

Riemann donne, entre un module ρ et le nombre p des racines de module plus petit que ρ, la relation approchée

$$p = \frac{\rho}{2\pi}\left(\log\frac{\rho}{2\pi} - 1\right). \tag{53}$$

Pour comparer ce résultat à ceux que nous venons d'obtenir, il faut résoudre cette équation par rapport à ρ, ce qui se fait aisément par la méthode des approximations successives. On trouve ainsi comme valeur approchée

$$\rho = \frac{2\pi p}{\log p},$$

de sorte que le rapport $\frac{1}{\rho}\frac{p}{\log p}$ devrait tendre vers $\frac{1}{2\pi}$. Cette valeur

est comprise entre les deux limites précédemment indiquées, de sorte que nous ne sommes pas à même de décider si le coefficient $\frac{1}{2\pi}$ de la formule (53) est exact ou non.

38. Mais, ainsi que nous l'avons dit plus haut, ce point n'est pas celui sur lequel repose le raisonnement de Riemann. C'est la détermination du genre de $\xi(x)$ qui constitue la question essentielle et les recherches qui précèdent en donnent immédiatement la solution.

Nous avons, en effet, constaté que, en considérant toujours $\xi(x)$ comme fonction de x^2, son développement satisfait à la condition (8) avec $\alpha = 2 - \varepsilon$, et, par conséquent, $\lambda = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Dès lors, les conclusions du n° **33** nous permettent d'affirmer la proposition suivante :

La fonction $\xi(x)$ (considérée comme fonction de x^2) est de genre zéro.

Elle s'exprime par le produit de facteurs primaires et d'une simple constante, sans aucun facteur exponentiel.

C'est le résultat que nous nous proposions d'établir.