

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL APPELL

Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la Théorie de la chaleur

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 8 (1892), p. 187-216.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1892_4_8_187_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la Théorie de la chaleur ;

PAR M. PAUL APPELL.

L'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, qui se présente dans la Théorie de la chaleur, a été l'objet d'un grand nombre de travaux. Intégrée par Fourier, Poisson, Ampère ⁽¹⁾, elle a été étudiée en détail par Riemann dans son Ouvrage sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique ⁽²⁾, et par Schläfli, dans un Mémoire inséré au Tome 72 du *Journal de Crelle*. M. Jordan l'a traitée comme exemple dans le Tome III de son *Cours d'Analyse* (p. 387). M. Boussinesq a résumé les méthodes générales d'intégration propres à cette équation et aux autres équations de la Physique mathématique dans le Tome II de son *Cours d'Analyse infinitésimale (Calcul intégral, Compléments)*. Citons encore M^{me} Kowalevski ⁽³⁾, qui a appliqué à cette équation spéciale les méthodes de Cauchy, M. Bourlet, qui l'a prise comme exemple dans sa Thèse de doctorat, en regardant l'équation comme résultant de l'élimination de v entre les deux équations

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y},$$

⁽¹⁾ *Journal de l'École Polytechnique*, t. X, p. 587.

⁽²⁾ *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen*, p. 107, 122; 1869.

⁽³⁾ *Journal de Crelle*, t. 80, p. 22.

qui forment un système canonique et complètement intégrable. Ces équations admettent comme système d'intégrales le plus général des fonctions z et v qui, pour $x = x_0$, se réduisent respectivement à des fonctions données à l'avance de la variable y ⁽¹⁾. On ne peut pas affirmer qu'il existe une intégrale z qui, pour $y = 0$, se réduise à une fonction donnée de x . M^{me} Kowalevski a montré, par exemple (*loc. cit.*), que cette équation n'a pas d'intégrale qui se réduise à $\frac{1}{x}$ pour $y = 0$. M. Darboux ⁽²⁾ a rappelé cet exemple de M^{me} Kowalevski à propos d'une Note de M. Méray ⁽³⁾ sur un fait de même nature.

L'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

constitue le type le plus important auquel on peut réduire les équations linéaires à coefficients constants.

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial z}{\partial x} + 2E \frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0$$

dans le cas *parabolique* $B^2 - AC = 0$, comme on le verra dans un Mémoire récent de M. du Bois-Reymond (*Journal de Crelle*, t. 104). Le cas elliptique $B^2 - AC < 0$ a été étudié par de nombreux auteurs, Lejeune-Dirichlet, Riemann, Schwarz, Weber ⁽⁴⁾. Plus récemment, M. Picard a consacré d'importants Mémoires à l'étude de ce cas, même dans l'hypothèse des coefficients variables ⁽⁵⁾; il a montré que, si $B^2 - AC > 0$, l'intégrale n'est pas nécessairement analytique. M. du Bois-Reymond s'est occupé, dans le Mémoire cité (*Crelle*, t. 104), du

⁽¹⁾ BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées*, Thèse de doctorat, p. 53.

⁽²⁾ *Comptes rendus*, t. CVI, p. 651.

⁽³⁾ *Ibid.*, p. 648.

⁽⁴⁾ *Mathematische Annalen*, t. I.

⁽⁵⁾ *Acta mathematica*, t. XII; *Journal de Mathématiques*, 1890; *Journal de l'École Polytechnique*, LX^e Cahier, 1890; *Comptes rendus*, 1891, premier semestre.

cas hyperbolique $B^2 - AC > 0$, en employant principalement la considération de l'équation adjointe et une méthode analogue à celle de Riemann ⁽¹⁾.

Dans ce travail, nous ne reprenons pas les résultats que donnent les méthodes de Cauchy; nous nous plaçons surtout au point de vue de la Physique mathématique, en supposant x, y et z réels, et nous nous inspirons des méthodes de Riemann. Nous nous attachons principalement (nos 10 et suivants) à répondre à une question qui nous a été posée par M. Boussinesq sur la Théorie de la chaleur et que nous avons résolue en partie dans une Note présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 27 mai 1890. Cette question peut s'énoncer comme il suit. On considère un conducteur indéfini dans lequel la température u est supposée dépendre uniquement de l'abscisse x . Cette température u étant donnée arbitrairement en fonction de x , $u = f(x)$, à l'instant initial $t = 0$, les formules de Fourier déterminent la température à un instant postérieur t quelconque, $t > 0$. Mais on demande : 1° si l'état initial donné pour u , $u = f(x)$, provient lui-même d'un état antérieur ($t < 0$); 2° lorsque cet état antérieur existe, s'il est unique, et comment on peut le trouver. Nous pensons avoir répondu d'une manière satisfaisante à ces deux questions : l'état antérieur n'existe pas toujours; quand il existe, il est unique et peut être déterminé dans des cas très généraux. Pour que l'état antérieur existe, il est nécessaire (mais non suffisant) que la fonction donnée $f(x)$ soit une fonction transcendante entière de x , c'est-à-dire une fonction développable en une série procédant suivant les puissances entières positives de x , convergente quel que soit x .

1. Résolvons d'abord la question suivante :

Chercher toutes les transformations de la forme

$$z = \lambda(x, y)z', \quad x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y),$$

⁽¹⁾ Voir DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, Chap. IV.

Journ. de Math. (4^e série), tome VIII. — Fasc. II, 1892.

qui ramènent l'équation

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

à la même forme

$$\delta z' = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} - \frac{\partial z'}{\partial y'} = 0.$$

Un calcul facile, mais un peu long, conduit au résultat suivant, qu'on peut aussi déduire des propositions données par M. Lie, dans son *Mémoire Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Classe linearen partiellen Differentialgleichungen*, p. 356. La substitution la plus générale, conservant à l'équation sa forme, est

$$z = \frac{C}{\sqrt{y-x}} e^{-\frac{(x-\beta)^2}{4(y-x)}} z',$$

$$x' = \frac{k(x-\beta)}{y-x} + \beta', \quad y' = -\frac{k^2}{y-x} + \alpha',$$

où $C, k, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$ désignent des constantes arbitraires dont les deux premières sont différentes de zéro.

Cette substitution générale est composée avec les substitutions simples

$$(1) \quad z = C z', \quad x' = kx + \alpha, \quad y' = k^2 y + \beta,$$

$$(2) \quad z = \frac{z'}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}, \quad x' = \frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{1}{y},$$

dont la première est évidente. On voit en particulier que, si $z = F(x, y)$ est une solution de l'équation $\delta z = 0$,

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} F\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right)$$

en est une autre. La transformation

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{1}{y}$$

est une transformation homographique du plan des xy , qui remplace ici l'inversion de Thomson pour le potentiel.

Par exemple, la solution

$$z = e^{ax+a^2y},$$

où a désigne une constante arbitraire, donne, par la transformation ci-dessus, la solution

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{(x-2a)^2}{4y}},$$

qui est bien connue.

2. La solution de l'équation $\partial z = 0$,

$$z = e^{ax+a^2y},$$

est finie et continue en tous les points à distance finie, et admet des dérivées de tous les ordres. Il existe des solutions plus simples possédant cette propriété, ce sont les solutions qui sont des polynômes en x et y .

Si l'on développe e^{ax+a^2y} en série ordonnée suivant les puissances de a ,

$$(3) \quad e^{ax+a^2y} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{1 \cdot 2 \dots v} V_v(x, y),$$

les coefficients $V_v(x, y)$ sont des polynômes en x et y homogènes et du degré v par rapport à x et $\sqrt{y}$; ces polynômes vérifient évidemment l'équation différentielle, puisque la fonction (3) la vérifie quelle que soit la constante a . La méthode des coefficients indéterminés montre, en outre, que ce sont les seuls polynômes vérifiant l'équation.

Il est à remarquer que ces polynômes s'expriment simplement à l'aide des polynômes à une variable que M. Hermite (1) a déduits de la différentiation de l'exponentielle e^{-z^2} . Les polynômes de M. Hermite sont, en effet, définis par la série

$$e^{-2hz-h^2} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{h^v}{1 \cdot 2 \dots v} P_v(z).$$

(1) *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 93, 266.

Faisons

$$h = a\sqrt{-y}, \quad z = -\frac{x}{2\sqrt{-y}},$$

nous aurons

$$e^{ax+ay} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^v}{1.2\dots v} (-y)^{\frac{v}{2}} P_v\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}}\right),$$

d'où, en comparant au développement (3),

$$V_v(x, y) = (-y)^{\frac{v}{2}} P_v\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}}\right).$$

Les polynômes $P_v(z)$ de M. Hermite ayant toutes leurs racines réelles et deux à deux égales et de signes contraires, l'équation

$$V_v(x, y) = 0$$

représentera, si v est pair, $\frac{v}{2}$ paraboles de la forme

$$-\frac{x^2}{4y} = p^2,$$

et si v est impair, l'axe $x = 0$, avec $\frac{v-1}{2}$ paraboles de la même forme.

Ces fonctions $V_v(x, y)$ jouent un rôle analogue aux fonctions de Laplace, c'est-à-dire aux fonctions harmoniques de Tait et Thomson, dans la théorie du potentiel.

Si nous posons

$$V_{-(v+1)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} V_v\left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y}\right) = y^{-\frac{v+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} P_v\left(-\frac{x}{2\sqrt{y}}\right),$$

cette fonction est homogène et du degré $-(v+1)$ en x et $\sqrt{y}$ et vérifie aussi l'équation différentielle; elle s'annule en tous les points des paraboles symétriques des précédentes par rapport à l'axe Ox , l'origine exceptée.

On a ainsi des solutions $V_\mu(x, y)$ définies pour toutes les valeurs

positives et négatives de l'indice μ . Les fonctions correspondant aux valeurs positives de μ sont des polynômes ; celles qui correspondent aux valeurs négatives de μ , des fonctions transcendentes ayant l'axe $y = 0$ comme ligne singulière.

On peut d'ailleurs former directement une fonction génératrice des fonctions V_μ à indices négatifs, en appliquant la transformation (2), page 190, aux deux membres du développement (3).

On a ainsi

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{(x-2y)^2}{4y}} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{a^\nu}{1.2 \dots \nu} V_{-(\nu+1)}(x, y).$$

On serait conduit également à ces fonctions $V_\mu(x, y)$ en cherchant des solutions de l'équation $\delta z = 0$ de la forme

$$z = y^{\frac{\mu}{2}} \varphi\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right).$$

Pour cela, on transformera l'équation en posant

$$\frac{x}{2\sqrt{y}} = p,$$

et prenant comme nouvelles variables y et p . L'équation devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + 2p \frac{\partial z}{\partial p} - 4y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Si l'on cherche des solutions de la forme

$$z = y^{\frac{\mu}{2}} \varphi(p),$$

on trouve, pour déterminer φ , l'équation

$$(5) \quad \frac{d^2 \varphi}{dp^2} + 2p \frac{d\varphi}{dp} - 2\mu \varphi = 0,$$

qui, pour μ entier et positif, est bien identique à celle que vérifient

les polynômes $P_\mu(z)$ de M. Hermite, dans lesquels on remplace z par $p\sqrt{-1}$.

Cette équation (5) a pour solutions les fonctions $V_\mu(2p, 1)$, pour toutes les valeurs entières de μ ; elle admet, pour chaque valeur entière de μ , une deuxième solution qu'il est facile d'exprimer par des quadratures et qui se présente ici comme les *Kugelfunctionen zweiter Art* de Heine.

Enfin cette équation pourrait servir à définir les $V_\mu(x, y)$ à indices fractionnaires.

Contentons-nous ici de détailler le cas $\mu = 0$. Nous avons alors la solution $\varphi = \text{const.}$, puis

$$\varphi_0(p) = \int_0^p e^{-p^2} dp = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1.2\dots n} \frac{p^{2n+1}}{2n+1}.$$

Comme $\mu = 0$, la fonction

$$z = \varphi_0(p) = \varphi_0\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right)$$

vérifie l'équation $\partial z = 0$; elle a pour coupure l'axe Ox et devient imaginaire quand on traverse cette coupure. Si on lui applique la transformation homographique (2), on en déduit la solution

$$z' = \frac{1}{\sqrt{\pm y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \varphi_0\left(\frac{x}{2\sqrt{\pm y}}\right),$$

qui donnerait une intégrale de l'équation (5) pour $\mu = -1$. Cette solution z' présente encore l'axe Ox comme ligne singulière, mais elle reste réelle quand on franchit cet axe; elle est en effet donnée par la série

$$z' = \frac{x}{2y} e^{-\frac{x^2}{4y}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1.2\dots n} \frac{x^{2n} (4y)^{-n}}{2n+1},$$

qui ne contient y qu'à des puissances entières *negatives*. Toutes les dérivées partielles de z' sont des solutions présentant la même propriété.

Nous ne nous arrêterons pas aux formules qui expriment les dérivées partielles des fonctions V_μ à l'aide de ces fonctions, formules qui résultent immédiatement du développement (3) différencié successivement par rapport à x , y et a , ou encore des formules relatives aux polynômes de M. Hermite.

3. Formule analogue à la formule de Green. — La notion d'équation adjointe due à Riemann conduit immédiatement à l'extension du théorème de Green ; c'est ce qui se trouve particulièrement mis en évidence dans les *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de M. Darboux (t. II, Chapitre IV) et dans le Mémoire de M. du Bois-Reymond ⁽¹⁾ (*Journal de Crelle*, t. 104).

Soit une équation linéaire quelconque d'ordre n

$$\mathfrak{J}(z) = \sum \sum A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0,$$

l'équation

$$\mathfrak{G}(u) = \sum \sum (-1)^{i+k} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} (A_{ik} u) = 0$$

est l'*adjointe* de la première, qui, inversement, est l'adjointe de $\mathfrak{G}(u) = 0$. On a l'identité

$$u \mathfrak{J}(z) - z \mathfrak{G}(u) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

où M et N dépendent de z , de u et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$. D'après cela, si l'on considère une aire plane (A) simplement connexe et limitée par un contour (S) , on a

$$\iint_{(A)} [u \mathfrak{J}(z) - z \mathfrak{G}(u)] dx dy = \int_{(S)} (M dy - N dx),$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire (A) et l'intégrale simple au contour (S) de l'aire dans le sens positif. On connaît l'usage que Riemann et du Bois-Reymond ont fait de cette formule. Nous nous en

⁽¹⁾ Voyez aussi du même auteur : *Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen*. Leipzig, 1864.

servirons dans ce qui suit, en l'appliquant à l'équation

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

dont l'équation adjointe est

$$\delta' u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Il est à remarquer que si une expression $f(x - x_0, y - y_0)$ considérée comme fonction de x et y vérifie $\delta z = 0$, considérée comme fonction de x_0 et y_0 , elle vérifie l'équation adjointe $\delta' z = 0$.

La formule générale devient ici

$$(6) \quad \int_{(A)} (u \delta z - z \delta' u) dx dy = \int_{(B)} \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + u z dx,$$

ce qu'il est facile de vérifier.

Supposons que l'on prenne pour u et z des fonctions qui, dans l'aire A , sont finies, continues, admettent les dérivées qui figurent dans les formules et vérifient les équations

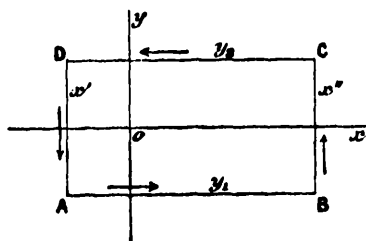
$$\delta z = 0, \quad \delta' u = 0;$$

la formule deviendra

$$(7) \quad \int_{(B)} \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + u z dx = 0.$$

4. Appliquons cette dernière formule au cas où le contour S est un rectangle ABCD (fig. 1) dont les côtés AB et CD sont des parallèles

Fig. 1.



à l'axe ox ayant pour ordonnées y_1 et y_2 , et dont les côtés AD, BC sont des parallèles à oy ayant pour abscisses x' et x'' .

Comme sur AB et CD, on a $dy = 0$, et sur BC et DA, $dx = 0$, on obtient la formule

$$(8) \int_{x'}^{x''} (z_1 u_1 - z_2 u_2) dx = \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right)' - \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right)' \right] dy,$$

où $z_1 u_1$ et $z_2 u_2$ sont les valeurs de zu sur les côtés y_1 et y_2 , $\left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right)'$ et $\left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right)''$ les valeurs de $\left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ sur les côtés x' et x'' .

Comme première conséquence de cette formule, nous allons établir une propriété fondamentale des polynômes $V_\nu(x, y)$, propriété qui se déduirait d'ailleurs facilement des propriétés connues des polynômes de M. Hermite.

Supposons que y_1 et y_2 soient des quantités *négligables* quelconques, prenons pour z le polynôme en x et y

$$z = V_\nu(x, y) = (-y)^{\frac{\nu}{2}} P_\nu \left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}} \right),$$

homogène et de degré ν en x et $\sqrt{y}$. Puis remarquons que, d'après la transformation homographique du n° 1, la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} V_\mu \left(\frac{x}{y}, -\frac{1}{y} \right) = y^{-\frac{\mu+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4y}} P_\mu \left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}} \right),$$

où μ désigne un entier positif, vérifie, comme z , l'équation $\delta z = 0$. Nous en concluons que la fonction, obtenue en changeant y de signe,

$$u = \frac{1}{\sqrt{-y}} e^{\frac{x^2}{4y}} V_\mu \left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y} \right) = (-y)^{-\frac{\mu+1}{2}} e^{\frac{x^2}{4y}} P_\mu \left(-\frac{x}{2\sqrt{-y}} \right),$$

vérifie l'équation adjointe $\delta' u = 0$, qui se déduit précisément de la proposée $\delta u = 0$ par le changement de y en $-y$.

Ces deux fonctions z et u sont finies, continues et admettent les dérivées figurant dans les équations, dans l'intérieur du rectangle ABCD, y_1 et y_2 étant négatifs, x' et x'' étant arbitraires. Nous pour-

rons donc appliquer, dans ces conditions, la formule (8). Supposons que, dans cette formule, on fasse croître x' jusqu'à $+\infty$ et décroître x'' jusqu'à $-\infty$. Les quantités

$$\left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x}\right)', \quad \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x}\right)'$$

tendront vers zéro; en effet, à cause du facteur exponentiel $e^{\frac{x^2}{4y}}$, ($y < 0$), qui se trouve multiplié par des expressions algébriques en x , chacun des termes des produits

$$u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x}$$

tend vers zéro quand x devient $\pm \infty$.

Le second membre de la formule (8) tend donc vers zéro, et l'on a

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (z_1 u_1 - z_2 u_2) dx = 0,$$

formule dans laquelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z_1 u_1 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-y_1)^{\frac{\nu-\mu-1}{2}} e^{\frac{x^2}{4y_1}} P_\nu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y_1}}\right) P_\mu\left(-\frac{x}{2\sqrt{-y_1}}\right) dx,$$

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} z_2 u_2 dx$ ayant une expression analogue où l'indice ν est remplacé par 2. La formule ainsi obtenue exprime la propriété fondamentale des polynômes de M. Hermite. Faisons, en effet, dans l'intégrale ci-dessus, le changement de variable

$$x = -2\sqrt{-y_1} t;$$

nous aurons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z_1 u_1 dx = 2(-y_1)^{\frac{\nu-\mu}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P_\nu(t) P_\mu(t) dt;$$

nous aurons pour $\int_{-\infty}^{+\infty} z_2 u_2 dx$ une expression analogue, et la formule

(9) nous donnera

$$\left[(-y_1)^{\frac{\nu-\mu}{2}} - (-y_2)^{\frac{\nu-\mu}{2}} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} P_\nu(t) P_\mu(t) dt = 0;$$

d'où il résulte immédiatement que, si ν est différent de μ , on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} P_\nu(t) P_\mu(t) dt = 0.$$

5. Voici une deuxième application de la formule (8), obtenue, comme nous l'avons vu, en prenant l'intégrale (7) le long du contour du rectangle ABCD (*fig. 1*).

Soit

$$z = f(x, y)$$

une intégrale de l'équation $\partial z = 0$, finie et continue, et admettant les dérivées qui figurent dans les formules pour toutes les valeurs de y comprises entre deux limites a et b ou égales à ces limites,

$$a \leq y \leq b,$$

c'est-à-dire pour tous les points du plan situés dans la bande comprise entre les parallèles $y = a$ et $y = b$ à l'axe Ox , et sur ces parallèles; supposons de plus que z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ restent finis quand x croît indéfiniment ou, si ces fonctions deviennent infinies, que leurs produits par une exponentielle de la forme e^{-kx} , k étant une constante arbitraire non nulle, tendent vers zéro, pour x infini. Nous prendrons pour u la fonction

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\eta-y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta-y)}},$$

où η et ξ désignent deux constantes, η étant supposé supérieur à la plus grande valeur de y que nous allons considérer,

$$\eta > y_2;$$

cette fonction u vérifie l'équation $\delta'u = 0$; comme fonction de η et ξ , elle vérifie l'équation $\delta u = 0$. Nous pouvons alors appliquer la formule (8), en y supposant y_1 et y_2 compris entre a et b ; nous aurons

$$\int_{x'}^x (z_1 u_1 - z_2 u_2) dx = \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right)' - \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right)'' \right] dy.$$

Faisons croître x' indéfiniment et décroître x'' indéfiniment; le second membre tend vers zéro, et nous avons, comme plus haut, la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z_1 u_1 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} z_2 u_2 dx,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\eta-y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_1) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta-y_1)}} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\eta-y_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y_2) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\eta-y_2)}} dx. \end{aligned}$$

Remplaçant η par y , ξ par x et la variable d'intégration x par λ , on peut dire que la fonction

$$(10) \quad F(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, y_1) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_1)}} d\lambda,$$

où $y > y_1$, est indépendante de y_1 . On aura, en particulier, puisqu'on peut faire $y_1 = a$,

$$(10') \quad F(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, a) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-a)}} d\lambda.$$

Or, quand y tend vers y_1 , on sait ⁽¹⁾ que la première intégrale (10)

(1) Cette propriété se trouve démontrée en toute rigueur dans le Mémoire de M. Weierstrass, *Ueber Functionen einer reellen Veränderlichen (Sitzungsberichte, p. 803; 1885)*. On trouvera une traduction française de ce Mémoire dans le *Journal de Mathématiques* de M. Jordan, t. II, p. 105.

qui donne $F(x, y)$ tend vers $f(x, y_1)$; on a donc la formule

$$(11) \quad f(x, y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y_1-a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, a) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y_1-a)}} d\lambda,$$

qui détermine la valeur de la fonction $f(x, y)$ dans l'intérieur de la bande considérée, quand on connaît la valeur de cette fonction sur le bord $y = a$.

Donc, dans les hypothèses faites sur la fonction $z = f(x, y)$ et ses dérivées, cette fonction se trouve déterminée par ses valeurs sur le bord inférieur $y = a$ de la bande considérée. Comme la formule (11) conserve un sens quelque grand que soit y_1 , on peut prolonger la fonction en dehors de la bande en traversant la limite $y = b$, jusqu'à l'infini positif pour y .

La fonction $F(x, y)$ définie par les formules (10) et (10') est, d'après (11), égale à $f(x, y)$ et l'on a la formule

$$(12) \quad f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, y_1) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4(y-y_1)}} d\lambda,$$

où

$$y > y_1,$$

formule indépendante de y_1 , exprimant la valeur de la fonction pour $y > y_1$ à l'aide des valeurs qu'elle prend le long de la droite $y = y_1$. On emploie ces formules dans la Théorie de la chaleur, en laissant de côté la condition relative à $\frac{\partial z}{\partial x}$.

6. Une fonction uniforme $z = f(x, y)$ vérifiant l'équation $\delta z = 0$, existant dans toute la partie du plan située au-dessous d'une certaine parallèle à l'axe Ox , $y \leq b$, et restant finie, ainsi que sa dérivée par rapport à x , dans cette partie du plan, pour toutes les valeurs finies ou infinies de x et y , se réduit à une constante. (La dérivée par rapport à x peut même devenir infinie avec x , pourvu qu'elle se comporte comme on l'a supposé dans le n° 3.)

Dans cette hypothèse, la bande considérée dans le numéro précédent s'étend jusqu'à $y = -\infty$ et l'on a, d'après la formule (12) dans

laquelle on donne successivement à x deux valeurs distinctes x et x'

$$f(x, y) - f(x', y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, y_1) \left[e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\frac{(x'-\lambda)^2}{4(y-y_1)}} \right] d\lambda,$$

y_1 désignant une valeur quelconque inférieure à b , et y étant supérieur à y_1 .

Nous allons conclure de cette formule, en donnant à y_1 des valeurs négatives de plus en plus grandes, que la différence $f(x, y) - f(x', y)$ est, en valeur absolue, plus petite que tout nombre positif, et, par suite, qu'elle est nulle.

Supposons $x > x'$, la fonction de λ

$$\varphi(\lambda) = e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\frac{(x'-\lambda)^2}{4(y-y_1)}},$$

où $y > y_1$, s'annule pour $\lambda = \frac{x+x'}{2}$. Elle est négative pour $\lambda < \frac{x+x'}{2}$, positive pour $\lambda > \frac{x+x'}{2}$. Appelons M un nombre positif plus grand que la plus grande valeur absolue que prend la fonction $f(x, y)$ quand on donne à x et y toutes les valeurs finies et infinies au-dessous de $y = b$; ce nombre M existe par hypothèse. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x', y) \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}} \left[\int_{-\infty}^{\frac{x+x'}{2}} f(\lambda, y_1) \varphi(\lambda) d\lambda + \int_{\frac{x+x'}{2}}^{+\infty} f(\lambda, y_1) \varphi(\lambda) d\lambda \right]. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale du second membre $\varphi(\lambda)$ est négatif; cette intégrale est en valeur absolue moindre que

$$-M \int_{-\infty}^{\frac{x+x'}{2}} \varphi(\lambda) d\lambda;$$

la deuxième est moindre, en valeur absolue, que

$$M \int_{\frac{x+x'}{2}}^{+\infty} \varphi(\lambda) d\lambda.$$

$$\text{SUR L'ÉQUATION } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

203

On a donc

$$|f(x, y) - f(x', y)| < \frac{M}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}} \left[-\int_{-\frac{x+x'}{2}}^{\frac{x+x'}{2}} \varphi(\lambda) d\lambda + \int_{\frac{x+x'}{2}}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda \right].$$

Dans la première des intégrales du second membre, faisons

$$\lambda = \frac{x+x'}{2} - \mu, \quad \frac{x-x'}{2} = t$$

et, dans la seconde,

$$\lambda = \frac{x+x'}{2} + \mu,$$

nous aurons, pour ces deux intégrales, la même valeur

$$-\int_{-\frac{x+x'}{2}}^{\frac{x+x'}{2}} \varphi(\lambda) d\lambda = \int_{\frac{x+x'}{2}}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}} \right] d\mu,$$

d'où

$$|f(x, y) - f(x', y)| < \frac{M}{\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}} \right] d\mu;$$

mais on a, en faisant successivement $\mu = t + \varphi$ et $\mu = -t + \varphi$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}} d\mu &= \int_{-t}^{\infty} e^{-\frac{\varphi^2}{4(y-y_1)}} d\varphi, \\ \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}} d\mu &= \int_t^{\infty} e^{-\frac{\varphi^2}{4(y-y_1)}} d\varphi; \end{aligned}$$

d'où, en retranchant,

$$\int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(\mu-t)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\frac{(\mu+t)^2}{4(y-y_1)}} \right] d\mu = \int_{-t}^t e^{-\frac{\varphi^2}{4(y-y_1)}} d\varphi.$$

Cette dernière intégrale est moindre que $2t$, car l'élément différentiel est moindre que 1; on a donc enfin

$$|f(x, y) - f(x', y)| < \frac{2Mt}{\sqrt{\pi}(y-y_1)}.$$

Or, en faisant croître y , indéfiniment par valeurs négatives, on rendra le second membre plus petit que tout nombre positif donné, si petit qu'il soit.

On a donc

$$f(x, y) - f(x', y) = 0,$$

quels que soient x, x' et y ; la fonction $z = f(x, y)$ est donc indépendante de x ; l'équation $\delta z = 0$ montre alors qu'elle est indépendante de y : elle est donc *constante*.

7. Considérons une fonction $z = f(x, y)$ vérifiant l'équation $\delta z = 0$ et uniforme dans une certaine région du plan. Convenons d'appeler *point singulier de la fonction* un point où cette fonction ou sa dérivée $\frac{\partial z}{\partial x}$ cesse d'être finie et déterminée. D'après ce qui précède, une fonction uniforme pour toutes les valeurs de y *inférieures* à une certaine limite a nécessairement pour ces valeurs des singularités à distance finie ou infinie : il peut arriver, au contraire, qu'une fonction uniforme pour toutes les valeurs de y *supérieures* à une certaine limite n'ait aucune singularité pour ces valeurs.

Par exemple, la fonction

$$z = \frac{1}{\sqrt{-y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

est uniforme pour toutes les valeurs de y inférieures à un nombre négatif donné; elle devient infinie avec x, y étant négatif.

Au contraire,

$$z = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

est uniforme pour les valeurs de y supérieures à un nombre positif donné; pour ces valeurs, elle n'a aucun point singulier à distance finie ou infinie. Les deux fonctions prises comme exemples n'existent pas dans tout le plan; elles admettent comme ligne de points singuliers l'axe $y = 0$.

Soient a , b et c des constantes réelles : la partie réelle de

$$\frac{a + bi}{\sqrt{y - ci}} e^{-\frac{x^2}{2(y-ci)}}$$

est une fonction de x et y , existant dans tout le plan, uniforme dans tout le plan et vérifiant l'équation $\partial z = 0$: elle devient infinie à l'infini pour des valeurs *négligables* de y .

On peut faire une remarque analogue sur la fonction formée par la partie réelle de

$$(a + bi)e^{kx + ky},$$

k étant une constante *imaginaire* ou *réelle*.

8. Il est intéressant de remarquer que l'équation $\partial z = 0$ ne peut pas admettre de solution uniforme dans tout le plan, n'ayant aucun point singulier à l'infini, et ayant un seul point singulier $x = a$, $y = b$ à distance finie ; en effet, une telle fonction serait constante pour toutes les valeurs de y *inférieures* à b .

Il y a donc là une différence remarquable avec les équations linéaires dans le cas elliptique qui admettent des intégrales avec un seul point singulier ; par exemple,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

admet l'intégrale

$$z = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

qui a comme seul point singulier l'origine.

9. La plupart des solutions simples de l'équation $\partial z = 0$ admettent des lignes de discontinuité parallèles à Ox . La transformation homographique (2) fait aussi apparaître des lignes de cette nature. On les retrouve encore en cherchant des solutions de l'une des deux formes suivantes :

1° Cherchons l'expression la plus générale d'une solution qui soit une série entière en x

$$z = A_0 + \frac{A_1}{1} x + \frac{A_2}{1.2} x^2 + \dots + \frac{A_n}{1.2 \dots n} x^n + \dots,$$

les coefficients A_n étant des fonctions de y . Substituant dans l'équation $\delta z = 0$, on trouve immédiatement

$$A_n = \frac{dA_{n-1}}{dy}.$$

Donc en posant

$$\begin{aligned} A_0 &= \varphi(y), & A_1 &= \psi(y), \\ A_{2n} &= \frac{d^n \varphi(y)}{dy^n}, & A_{2n+1} &= \frac{d^n \psi(y)}{dy^n}; \end{aligned}$$

ce qui donne la solution

$$z = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n}}{1.2 \dots 2n} \frac{d^n \varphi(y)}{dy^n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n+1}}{1.2 \dots (2n+1)} \frac{d^n \psi(y)}{dy^n}.$$

En remplaçant $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ par des polynômes en y , on retrouve des solutions composées avec les polynômes $V_n(x, y)$; en remplaçant $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ par des fractions rationnelles en y , on obtient des solutions qui admettent pour *coupures* ou lignes de points *singuliers* les droites parallèles à l'axe Ox sur lesquelles les fractions rationnelles deviennent *infinies*.

La solution la plus générale, développable en série entière de y , est de même

$$z = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y^n}{1.2 \dots n} \frac{d^{2n} \varphi(x)}{dx^{2n}};$$

mais, si l'on voulait faire apparaître des coupures parallèles à Oy en remplaçant $\varphi(x)$ par une fonction rationnelle en x , la série serait *divergente* dès que $\varphi(x)$ ne serait plus un simple polynôme (1).

(1) Par exemple, en remplaçant $\varphi(x)$ par $\frac{1}{1-x}$, on retrouverait la série di-

2° Soient α et β deux constantes positives, $g(x, y)$ et $h(x, y)$ deux fonctions de x et y finies continues et admettant les dérivées premières et secondes qui figurent dans les équations, dans une certaine région du plan; ces fonctions g et h pourront être, par exemple, des séries entières en x et y . Voyons s'il est possible de vérifier l'équation

$$\partial z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

en prenant

$$z = \frac{[g(x, y)]^\alpha}{[h(x, y)]^\beta} = g^\alpha h^{-\beta}.$$

L'équation devient, après simplification,

$$gh(\alpha h \partial g - \beta g \partial h) + \alpha(\alpha - 1)h^2 \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \\ - 2\alpha\beta gh \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \beta(\beta + 1)g^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Si la fonction $h(x, y)$ s'annule dans la portion du plan considérée, la fonction z admet comme ligne singulière la courbe

$$h(x, y) = 0.$$

Or, d'après l'équation ci-dessus, pour un point de cette courbe on a nécessairement

$$g^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = 0;$$

d'où, en supposant g différent de zéro,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Donc, en tout point simple de la courbe $h = 0$ qui n'annule pas g ,

vergente qui se présente dans l'exemple de M^{me} Kovalewski (*Journal de Crelle*, t. 80, p. 22).

la tangente est parallèle à l'axe Ox . Cette courbe est donc formée de points isolés et de *parallèles à l'axe Ox* : on retrouve donc ainsi les lignes singulières formées de parallèles à l'axe Ox .

10. Application à la Théorie de la chaleur. — Un grand nombre de problèmes relatifs à la propagation de la chaleur se ramènent à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dans laquelle k désigne une constante positive, t le temps, x une coordonnée et u la température, fonction de x et de t ; cette équation se ramène à la forme $\delta u = 0$ par la substitution $kt = y$.

Si l'on suppose la température u donnée par une fonction $f(x)$ à un certain instant initial t_0 , les formules de Fourier permettent de calculer u à tous les instants t qui suivent t_0 , $t > t_0$. M. Boussinesq m'ayant engagé à examiner si l'état initial donné peut être considéré comme provenant d'un état calorifique *antérieur*, $t < t_0$, je me suis d'abord occupé du cas simple de la propagation de la chaleur dans une armille (FOURIER, *Théorie de la chaleur*, Chap. IV) et les résultats ont confirmé les indications que m'avait données M. Boussinesq sur la nature probable de la solution. Nous reprendrons d'abord ce cas particulier en y ajoutant quelques remarques, puis nous traiterons le cas général.

11. Armille. — Prenons pour unité le rayon de l'armille et appelons x l'arc de circonférence compté à partir d'un point fixe : la température u est évidemment une fonction de x admettant pour période la longueur 2π de la circonférence.

Supposons que, pour $t = t_0$, u ait une valeur donnée exprimée par une fonction $f(x)$ finie continue admettant la période 2π ; d'après Fourier, cette fonction sera développable en une série de la forme

$$(13) \quad f(x) = b_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + \dots + a_n \sin nx + b_n \cos nx + \dots$$

et la température u à l'instant $t > t_0$ sera

$$(14) \quad \begin{cases} u = b_0 + e^{-h(t-t_0)}(a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \dots \\ \quad + e^{-n^2 h(t-t_0)}(a_n \sin nx + b_n \cos nx) + \dots, \end{cases}$$

série évidemment convergente pour $t > t_0$.

Nous ferons sur cette solution les deux remarques suivantes :

1° Comme le montre M. Weierstrass dans ses articles *Ueber Functionen einer reellen Veränderlichen* ⁽¹⁾ (traduits dans le tome II du Journal de M. Jordan), la fonction u représentée par la série (14) où $t > t_0$ est une fonction entière de x développable, pour toutes les valeurs de x , en série procédant suivant les puissances entières positives de x .

2° Si l'on donne à t une valeur déterminée t_1 , supérieure à t_0 , u devient une fonction $f_1(x)$ représenté par la série

$$(15) \quad \begin{cases} f_1(x) = b_0 + e^{-h(t_1-t_0)}(a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \dots \\ \quad + e^{-n^2 h(t_1-t_0)}(a_n \sin nx + b_n \cos nx) + \dots \end{cases}$$

L'état initial $u = f(x)$, donné pour l'armille, est le *seul* qui, de l'instant t_0 à l'instant t_1 , conduise à la température $f_1(x)$; en effet, une fonction étant développable d'une seule manière en série trigonométrique, du développement de $f_1(x)$ en série trigonométrique identifié avec (15), on déduit un seul système de valeurs pour les coefficients a_n et b_n .

Ces deux remarques donnent les résultats suivants :

1° Une certaine distribution de température de l'armille, $u_1 = f_1(x)$, donnée en fonction de x à un instant t_1 , ne provient pas nécessairement d'un état antérieur; pour qu'il existe un état antérieur il *faut* que la température donnée, $f_1(x)$, soit une *fonction transcendante entière* de x ; condition qui n'est, d'ailleurs, pas suffisante.

⁽¹⁾ *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1885, p. 803. Ces recherches de M. Weierstrass ont été étendues par M. Sommerfeld au cas où la fonction réelle $f(x)$ est discontinue ou même infinie (*Inaugural Dissertation*, Königsberg, 1891).

2° Si l'état antérieur existe, il est *unique*, et se trouve déterminé par la série même de Fourier. Pour reconnaître si l'état antérieur existe, il suffira donc de voir si la série de Fourier converge pour des valeurs de t inférieures à la valeur initiale du temps.

Par exemple, si l'état initial est

$$u_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^2} \cos nx,$$

transcendante entière en x analogue à une fonction θ , l'état antérieur existe, car la série

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^2 - n^2 k(t-t_0)} \cos nx$$

converge pour $t < t_0$, et cela quel que soit t ; on peut donc remonter indéfiniment dans le *passé*. Il faut cependant remarquer que, quand t devient infiniment grand négatif, les termes de u augmentent indéfiniment, ce qu'on pouvait prévoir, car nous avons vu qu'il ne peut pas exister de solution de l'équation $\delta z = 0$ finie pour toutes les valeurs de y inférieures à une certaine limite.

Si l'état initial est

$$u_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^2} \cos nx,$$

ce qui est encore une transcendante entière en x , l'état antérieur n'existe pas, car la série

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-n^2 - n^2 k(t-t_0)} \cos nx$$

diverge pour $t < t_0$ ⁽¹⁾.

(¹) La Théorie de la chaleur fournit ainsi des exemples de fonctions possédant des propriétés analogues à celles que M. Fredholm a signalées (*Acta mathematica*, t. XV, p. 279).

12. Cas général. — Remplaçons kt par y , de façon à ramener l'équation de la chaleur à la forme

$$\partial u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Supposons que l'on se donne la valeur

$$u_0 = f(x)$$

de u pour $y = y_0$, la fonction $f(x)$ étant finie continue, et restant, pour toutes les valeurs finies ou infinies de x , inférieure en valeur absolue à un nombre positif déterminé. D'après les formules connues ⁽¹⁾, la température u devient, pour $t > t_0$, $y > y_0$.

$$(16) \quad u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_0)}} d\lambda.$$

En particulier, à un instant déterminé $t_1 > t_0$, $y_1 > y_0$, on a

$$(17) \quad u_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y_1-y_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y_1-y_0)}} d\lambda.$$

M. Weierstrass montre ⁽²⁾ que u_1 est encore une fonction transcendante entière de x . Nous retrouvons donc, dans le cas général, la condition déjà trouvée dans le cas de l'armille. Pour qu'un état donné $u_1 = f_1(x)$, $f_1(x)$ étant finie et continue, provienne d'un état antérieur, il faut que $f_1(x)$ soit une fonction *transcendante entière* de x ; cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante, comme nous l'avons vu par un exemple dans le cas de l'armille.

13. Si l'état antérieur existe, on peut se demander s'il est *unique*. Cela est en quelque sorte évident, si l'on fait intervenir des considérations de Physique mathématique. En effet, pour remonter d'un état

⁽¹⁾ Voir, par exemple, RIEMANN, *loc. cit.*, p. 109.

⁽²⁾ *Loc. cit.*

actuel à un état antérieur, il suffit de faire passer la chaleur des parties plus froides aux parties plus chaudes, suivant les lois inverses des lois du mouvement de la chaleur : on obtient ainsi un état antérieur unique, si cet état est possible. Nous pouvons démontrer ce fait analytiquement de la façon suivante. Supposons qu'il existe deux fonctions vérifiant l'équation $\delta u = 0$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, finies continues pour toutes les valeurs de y supérieures à un nombre donné négatif $-a$ et devenant identiques pour $y = 0$ et, par suite, pour $y > 0$; il s'agit de prouver que ces fonctions sont aussi identiques pour y compris entre 0 et $-a$.

La fonction

$$u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

vérifie l'équation $\delta u = 0$, et est nulle pour toutes les valeurs de y supérieures ou égales à zéro; il s'agit de montrer qu'elle est nulle pour y compris entre 0 et $-a$. Nous avons démontré que la fonction

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y-y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y_1) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4(y-y_1)}} d\lambda$$

est indépendante de y_1 , y étant $> y_1$ et $y_1 > -a$. Faisons $y_1 = y - c$, c positif, la fonction

$$(18) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y-c) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4c}} d\lambda$$

est indépendante de c . Partant de cette formule, nous allons montrer que $u(x, y)$ est identiquement nulle pour $y = -\frac{a}{6}$ et, par suite, pour toutes les valeurs de y supérieures à $-\frac{a}{6}$.

En effet, dans la formule ci-dessus (18), supposons $y > 0$, $0 < c < a$, nous aurons, par hypothèse,

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y-c) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4c}} d\lambda,$$

quels que soient x, y, c . Multiplions les deux membres par

$$u(x, \eta - c) dx,$$

η étant tel que $\eta - c > -a$, puis intégrons par rapport à x de $-\infty$ à $+\infty$.

Comme l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, \eta - c) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4c}} dx$$

est, d'après la formule (18), où l'on changerait x en λ et λ en x , égale à

$$u(\lambda, \eta),$$

on aura

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y - c) u(\lambda, \eta) d\lambda.$$

Faisons, pour avoir un résultat précis,

$$c = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{6}, \quad \eta = -\frac{a}{6}, \quad y - c = -\frac{a}{6};$$

toutes les conditions supposées seront remplies,

$$c > 0, \quad y > 0, \quad \eta - c > -a,$$

et l'on aura

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[u\left(\lambda, -\frac{a}{6}\right) \right]^2 d\lambda,$$

ce qui exige évidemment $u\left(\lambda, -\frac{a}{6}\right) = 0$.

Nous avons donc réduit de $\frac{1}{6}$ l'intervalle dans lequel la fonction u n'est pas identiquement nulle; on réduira de même le nouvel intervalle de $\frac{1}{6}$, etc., et l'on arrivera à montrer que la fonction $u(x, y)$ est nulle jusqu'à une distance aussi petite qu'on le veut de la droite $y = -a$.

14. Il reste, dans cet ordre d'idées, une question à résoudre. En

supposant qu'on donne pour $y = 0$ une fonction transcendante entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

dont la valeur absolue reste finie pour $x = \pm \infty$, reconnaître s'il existe une solution $u(x, y)$ de l'équation $\delta u = 0$, finie pour des valeurs négatives de y et se réduisant à $f(x)$ pour $y = 0$, et former cette fonction si elle existe. Voici la méthode qui paraît la plus simple pour résoudre cette question.

Supposons que la fonction $u(x, y)$ existe pour les valeurs négatives de y depuis $y = 0$ jusqu'à la valeur négative $y = -a$ inclusivement. $a > 0$.

D'après les formules connues de la théorie de la chaleur, précédemment rappelées, cette fonction $u(x, y)$ est donnée pour toutes les valeurs de y supérieures à $-a$ par la formule

$$(19) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y+a}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, -a) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y+a)}} d\lambda,$$

expression qui doit, en particulier, se réduire à la valeur donnée $f(x)$, pour $y = 0$. La fonction $u(x, y)$ définie par la formule (19), dans laquelle $y > -a$, est une fonction transcendante entière de x développable en une série de puissances entières et positives de x , convergente quel que soit x ; cette même fonction $u(x, y)$ est une fonction de y qui, pour les valeurs de y dont la valeur absolue est moindre que a ,

$$-a < y < a,$$

est développable en une série procédant suivant les puissances entières et positives de y . Donc, pour ces valeurs de y , la température $u(x, y)$ est développable en une série entière en x , dont les coefficients sont des séries entières en y ; elle est donc, comme nous l'avons vu, n° 9, de la forme

$$(20) \quad u = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n}}{1 \cdot 2 \dots 2n} \frac{d^n \varphi(y)}{dy^n} + \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} \frac{d^n \psi(y)}{dy^n},$$

où $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des séries entières en y .

En identifiant la forme de ce développement pour $y = 0$ avec le développement de $f(x)$, on a

$$a_{2n} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \dots 2n}, \quad a_{2n+1} = \frac{\psi^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)}.$$

Alors, d'après la formule de Maclaurin qui est applicable, puisque $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont des séries entières convergentes pour $-a < y < a$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{1 \cdot 2 \dots n} a_{2n} y^n, \\ \psi(y) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1 \cdot 2 \dots (2n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} a_{2n+1} y^n. \end{aligned}$$

Les fonctions $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ étant ainsi déterminées, pour que l'état antérieur existe, jusqu'à la valeur $y = -a$, il faudra que la série (20) soit convergente pour y compris entre $-a$ et $+a$ ⁽¹⁾.

Prenons par exemple

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{1 \cdot 2 \dots n}.$$

Alors

$$\psi(y) = 0, \quad \varphi(y) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{(1 \cdot 2 \dots n)^2} y^n$$

ou

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) \dots (\frac{1}{2}+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} (4y)^n, \\ \varphi(y) &= (1+4y)^{-\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

⁽¹⁾ M^{me} Kowalevski a examiné les conditions de convergence dans son Mémoire du *Journal de Crelle*, t. 80.

la série (20) donne ensuite

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+4y}} e^{-\frac{x^2}{1+4y}},$$

fonction qui existe depuis $y = 0$ jusqu'à $y = -\frac{1}{4}$ exclusivement.

15. Lorsque l'état antérieur existe, il est impossible que la température

$$u(x, y), \quad (y = kt)$$

soit finie pour toute valeur finie et infinie de x et t , t étant négatif, à moins que la température ne soit constante. En d'autres termes, si la température u n'est pas constante, *on ne peut pas remonter indéfiniment dans le passé*, sans que la fonction u qui représente la température devienne infinie ou cesse d'exister, *au moins pour* $t = -\infty$.

En effet, soit $u(x, y_1)$ la température à un instant t_1 , $y_1 = kt_1$, on a, d'après Fourier, pour $t > t_1$, $y > y_1$,

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{y - y_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda, y_1) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4(y-y_1)}} d\lambda,$$

expression indépendante de y_1 . En supposant que, pour toutes les valeurs de λ et les valeurs négatives de y_1 , quelque grandes qu'elles soient, la température $u(\lambda, y_1)$ reste inférieure en valeur absolue à une limite fixe, on démontrera, à l'aide de cette formule, comme on l'a fait dans le n° 6, que la fonction $u(x, y)$ est *constante*. Donc, en exceptant ce dernier cas, on ne peut pas remonter à un état antérieur indéfiniment reculé dans le passé, *la fonction u restant finie pour* $t = -\infty$.
