

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. CASPARY

Extrait d'une lettre à M. Hermite

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 5 (1889), p. 73-79.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1889_4_5_73_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1889_4_5_73_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Extrait d'une Lettre à M. HERMITE;

PAR M. F. CASPARY.

Berlin, le 18 novembre 1887.

En combinant les nouveaux résultats que vous avez eu la bonté de me communiquer le 6 septembre avec vos anciens, expliqués dans le tome 52 du *Journal de Crelle*, j'ai trouvé qu'il y a une liaison intime et intéressante entre vos recherches et celles de M. Weierstrass. Voici mes remarques :

1. Soit

$$\begin{aligned} f(y) &= \mathfrak{A}y^4 + 4\mathfrak{B}y^3 + 6\mathfrak{C}y^2 + 4\mathfrak{D}y + \mathfrak{E} \\ &= \mathfrak{A}(y-a)(y-b)(y-c)(y-d) \end{aligned}$$

une forme du quatrième degré. En substituant

$$(1) \quad y = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}$$

et en posant

$$(2) \quad \alpha = a\gamma, \quad -\frac{1}{4}\mathfrak{A} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2(a-b)(a-c)(a-d)},$$

$$(3) \quad \frac{b\delta - \beta}{(a-b)\gamma} = e_1, \quad \frac{c\delta - \beta}{(a-c)\gamma} = e_2, \quad \frac{d\delta - \beta}{(a-d)\gamma} = e_3,$$

l'expression différentielle $\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$ se transforme immédiatement dans

l'expression $\frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$. Si l'on soumet les quantités e_1, e_2, e_3 à la condition

$$(4) \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

et si l'on pose

$$(5) \quad e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\frac{1}{3}g_2, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{3}g_3,$$

cette expression différentielle prend la forme $\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$, qui est exactement celle que vous avez découverte (*Journal de Crelle*, t. 52, p. 8) et que M. Weierstrass a introduite comme forme normale. L'intégrale de cette expression est représentée par la fonction $s = p(u)$, dont la découverte est due à cet illustre géomètre.

D'après les formules (3) et (4), on a immédiatement

$$\begin{aligned} \beta &= m\gamma \left(\frac{b}{a-b} + \frac{c}{a-c} + \frac{d}{a-d} \right), \\ \delta &= m\gamma \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{a-d} \right), \end{aligned}$$

et la seconde formule (2) fournit pour le facteur m la valeur

$$m = -\frac{1}{12}(a-b)(a-c)(a-d).$$

Donc

$$(6) \quad y = \frac{ap(u) - \frac{1}{12}(a-b)(a-c)(a-d) \left(\frac{b}{a-b} + \frac{c}{a-c} + \frac{d}{a-d} \right)}{p(u) - \frac{1}{12}(a-b)(a-c)(a-d) \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{a-d} \right)}.$$

2. On peut donner à la substitution (1) la forme

$$y = \frac{\alpha(s-e_3) + \beta + \alpha e_3}{\gamma(s-e_3) + \delta + \gamma e_3}.$$

Comme les formules (3) fournissent les valeurs suivantes

$$\beta + \alpha e_3 = d(\delta + \gamma e_3), \quad \delta + \gamma e_3 = \frac{\gamma(a-b)(e_1-e_3)}{b-d},$$

on a

$$(7) \quad y = \frac{a(b-d) + d(a-b) \frac{e_1-e_3}{s-e_3}}{(b-d) + (a-b) \frac{e_1-e_3}{s-e_3}}.$$

D'après les formules (3), on trouve

$$e_1 - e_3 = \frac{b}{4}(a-c)(d-b), \quad e_2 - e_3 = \frac{b}{4}(a-b)(d-c)$$

et conséquemment

$$(e_2 - e_3):(e_1 - e_3) = (a-b)(c-d):(a-c)(b-d).$$

En posant

$$dl(e_2 - e_3):(e_1 - e_3) = k^2, \quad \sqrt{e_1 - e_3}u = \xi,$$

la formule (7) se transforme, à cause de l'identité

$$s - e_3 dl = \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3}u, k)},$$

dans la relation suivante

$$(8) \quad y = \frac{a(b-d) + d(a-b)\operatorname{sn}^2\xi}{b-d + (a-b)\operatorname{sn}^2\xi},$$

qui est exactement la vôtre. En changeant e_3 en e_1 et e_2 , on trouve

$$(9) \quad \begin{cases} y = \frac{a(b-d)\operatorname{cn}^2\xi + b(a-d)\operatorname{sn}^2\xi}{(b-d)\operatorname{cn}^2\xi + (a-d)\operatorname{sn}^2\xi} \\ = \frac{a(a-c)(b-d)\operatorname{dn}^2\xi + c(a-b)(a-d)\operatorname{sn}^2\xi}{(a-c)(b-d)\operatorname{dn}^2\xi + (a-b)(a-d)\operatorname{sn}^2\xi}. \end{cases}$$

Si l'on désigne par p et q deux quantités arbitraires, de la formule (8) résulte

$$py + q = \frac{(a-b)(pd+q)\operatorname{sn}^2\xi + (b-d)(pa+q)}{(a-b)\operatorname{sn}^2\xi + b-d}.$$

En comparant cette formule avec la suivante

$$\operatorname{sn}(\xi + \omega)\operatorname{sn}(\xi - \omega) = \frac{\operatorname{sn}^2\xi - \operatorname{sn}^2\omega}{1 - k^2\operatorname{sn}^2\xi\operatorname{sn}^2\omega},$$

on a, pour la détermination des quantités p et q , les relations

$$\begin{aligned}(a-b)(pd+q) &= b-d, \\ pa+q &= -\operatorname{sn}^2\omega, \\ (a-b):(b-d) &= -k^2\operatorname{sn}^2\omega,\end{aligned}$$

d'où résultent

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}^2\omega &= (c-a):(c-d), \\ pd+q &= -(b-d):(b-a), \\ pa+q &= -(c-a):(c-d).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}p &= (a-b-c+d):(a-b)(c-d), \\ q &= (bc-ad):(a-b)(c-d)\end{aligned}$$

et

$$(10) \quad y = \frac{ad-bc}{a-b-c+d} + \frac{(a-b)(c-d)}{a-b-c+d} \operatorname{sn}(\xi + \omega)\operatorname{sn}(\xi - \omega),$$

ce qui est votre deuxième relation.

5. On tire immédiatement des formules (3) les relations

$$(11) \quad e_2 - e_3 = -\frac{\kappa_0}{4} A, \quad e_3 - e_4 = -\frac{\kappa_0}{4} B, \quad e_4 - e_2 = -\frac{\kappa_0}{4} \Gamma,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\begin{aligned} A &= (a-b)(c-d), \\ B &= (a-c)(d-b), \\ \Gamma &= (b-c)(a-d). \end{aligned}$$

A cause de la relation (4) résultent des formules (11) les suivantes

$$(12) \quad e_1 = \frac{ab}{12} (B - \Gamma), \quad e_2 = \frac{ab}{12} (\Gamma - A), \quad e_3 = \frac{ab}{12} (A - B),$$

et par conséquent les expressions (5) se transforment ainsi

$$(13) \quad \begin{cases} g_2 = \frac{ab^2}{24} (A^2 + B^2 + \Gamma^2), \\ g_3 = \frac{ab^3}{16 \cdot 27} (B - \Gamma)(\Gamma - A)(A - B). \end{cases}$$

Si l'on pose de plus

$$(14) \quad (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2 = \mathfrak{G},$$

on a

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{16} (g_2^3 - 27g_3^2) = \frac{ab^6}{4^6} A^2 B^2 \Gamma^2.$$

En désignant par $\mathfrak{G}_2$ et $\mathfrak{G}_3$ les deux invariants de la forme homogène

$$f(y_1, y_2) = ay_1^4 + 4by_1^3y_2 + 6cy_1^2y_2^2 + 4dy_1y_2^3 + ey_2^4,$$

et en supposant que cette forme, par la substitution

$$y_1 = \alpha s_1 + \beta s_2, \quad y_2 = \gamma s_1 + \delta s_2,$$

se transforme dans la forme homogène

$$h(4s_1^3s_2 - g_2s_1s_2^2 - g_3s_2^4),$$

on a

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^4 \mathfrak{G}_2 = h^2 g_2, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma)^6 \mathfrak{G}_3 = h^3 g_3.$$

D'autre part, on trouve

$$\frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{\sqrt{f(y_1, y_2)}} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\sqrt{h}} \frac{s_2 ds_1 - s_1 ds_2}{\sqrt{4s_1^2 s_2 - g_2 s_1 s_2^2 - g_3 s_2^3}},$$

et l'on aura les relations introduites au commencement de cette Note, si l'on pose

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \sqrt{h}, \quad y_1 : y_2 = y; \quad s_1 : s_2 = s.$$

Donc $g_2 = g_2$ et $g_3 = g_3$. En posant de plus $\zeta = \frac{1}{16}\Delta$, on tire des formules (13) et (14) le résultat suivant

$$(15) \quad \frac{g_2^3}{(A^2 + B^2 + \Gamma^2)^3} = \frac{27}{2} \frac{g_3^2}{(B - \Gamma)^2 (\Gamma - A)^2 (A - B)^2} = \frac{1}{54} \frac{\Delta}{A^2 B^2 \Gamma^2} = \frac{16}{243},$$

qui se transforme si l'on introduit $A : B = -\rho$, $\Gamma : B = \rho - 1$, dans l'équation

$$(16) \quad \frac{g_2^3}{4(\rho^2 - \rho + 1)^3} = \frac{27 g_3^2}{(2 - \rho)^2 (2\rho - 1)^2 (1 + \rho)^2} = \frac{\Delta}{27\rho^2(1 - \rho)^2} = \frac{16}{27}(\rho^3 - \rho).$$

En posant $\rho + \frac{1}{\rho} = v + 1$, on a

$$\begin{aligned} \rho^2 + 1 &= \rho(v + 1), \\ \rho^2 - \rho + 1 &= \rho v, \\ \rho^2 - 2\rho + 1 &= \rho(v - 1), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et à cause de ces identités la formule (16) se transforme dans la suivante

$$(17) \quad \frac{g_2^3}{4v^3} = \frac{27 g_3^2}{4v^3 - 27v + 27} = \frac{\Delta}{27(v - 1)},$$

qui prend aussi la forme

$$(18) \quad 4\Delta v^3 - 27g_3^2 v + 27g_2^3 = 0.$$

Les formules (15) à (18) représentent pour $\rho = k^2$ les différentes formes de l'équation du douzième degré que vous avez bien voulu me communiquer. En Géométrie les six valeurs de ρ représentent les six rapports anharmoniques auxquels donnent lieu quatre points situés sur une ligne droite (Chasles, Möbius). Il y a encore quelques relations sur lesquelles je suis tombé en étudiant vos résultats excellents; cependant, pour ne pas abuser de votre indulgence, je termine.

