

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PH. GILBERT

**Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque
suivant trois directions rectangulaires variables**

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 4 (1888), p. 465-473.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4_465_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les composantes des accélérations d'ordre quelconque
suivant trois directions rectangulaires variables ;*

PAR M. PH. GILBERT.

Ce problème, en ce qui concerne l'accélération du *second* ordre et ses projections sur la tangente, la normale principale et la *binormale* à la trajectoire, a été traité géométriquement par M. Resal ⁽¹⁾ et par M. Schell ⁽²⁾ ; pour les accélérations d'ordre quelconque, analytiquement par Bouquet ⁽³⁾ et par Somoff ⁽⁴⁾. La méthode facile et sûre que nous proposons ici s'applique à ce problème et à d'autres plus généraux.

1. Considérons un point mobile M, et soit M_n son *index* d'ordre quelconque n par rapport à une origine fixe O, c'est-à-dire que le rayon vecteur OM_n représente en grandeur et en direction l'accélération d'ordre n , j_n , du point M.

⁽¹⁾ *Traité de Cinématique pure*, p. 269.

⁽²⁾ *Theorie der Bewegung und Kräfte*, t. I, p. 544.

⁽³⁾ *Annales de l'École Normale*, p. 147; 1874.

⁽⁴⁾ *Mémoire sur les accélérations de divers ordres* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Petersbourg*, 7^e série, t. VIII).

Soient

$Oxyz$ un système d'axes rectangulaires mobile suivant une loi quelconque autour du point O ;

p, q, r les composantes de la rotation de ce système suivant les directions Ox, Oy, Oz ;

j_{nx}, j_{ny}, j_{nz} les composantes de l'accélération j_n , qui sont en même temps les coordonnées de M_n .

La vitesse absolue du point M_n représente, en grandeur et en direction, l'accélération d'ordre $n + 1$ du point M ; or, cette vitesse est la résultante de la vitesse *relative* de M_n par rapport aux axes mobiles, et de sa vitesse d'*entraînement* due à la rotation du système $Oxyz$ autour du point O . Il en résulte immédiatement les formules générales

$$(2) \quad \begin{cases} j_{n+1,x} = \frac{dj_{nx}}{dt} + qj_{nz} - rj_{ny}, \\ j_{n+1,y} = \frac{dj_{ny}}{dt} + rj_{nx} - pj_{nz}, \\ j_{n+1,z} = \frac{dj_{nz}}{dt} + pj_{ny} - qj_{nx}, \end{cases}$$

qui servent de base à tout ce qui suit.

2. Prenons d'abord, pour la direction Ox , celle du rayon vecteur $OM = u$ du point mobile; pour Oz la normale à la surface conique décrite par ce rayon vecteur, élevée du côté du plan tangent vers lequel le cône tourne sa convexité; pour Oy la perpendiculaire au plan xz , menée du côté où la rotation de Oz vers Ox paraît se faire de gauche à droite. Si nous nommons ω la vitesse angulaire du rayon u autour de Oz , prise avec le signe $+$ ou le signe $-$ selon qu'elle est dirigée de gauche à droite ou de droite à gauche par rapport à Oz ; R le rayon de courbure de la section du cône normale à OM à la distance 1 du point O , on verra sans peine que l'on a ici

$$p = -\frac{\omega}{R}, \quad q = 0, \quad r = \omega.$$

Les formules (1) deviendront

$$(2) \quad \begin{cases} j_{n+1,x} = \frac{dj_{nx}}{dt} - \omega j_{ny}, \\ j_{n+1,y} = \frac{dj_{ny}}{dt} + \omega j_{nx} + \frac{\omega}{R} j_{nz}, \\ j_{n+1,z} = \frac{dj_{nz}}{dt} - \frac{\omega}{R} j_{ny}, \end{cases}$$

et permettront de calculer de proche en proche les composantes cherchées. En effet, pour $n = 0$, j_n se confond avec la vitesse du point M; on a, comme on sait,

$$j_{0x} = \frac{du}{dt}, \quad j_{0y} = \omega u, \quad j_{0z} = 0;$$

les équations (2) donneront les composantes de l'accélération j , ou j du premier ordre, savoir

$$(3) \quad \begin{cases} j_x = \frac{d^2 u}{dt^2} - \omega^2 u, \\ j_y = 2\omega \frac{du}{dt} + u \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{u} \frac{d(\omega u^2)}{dt}, \\ j_z = -\frac{\omega^2 u}{R}. \end{cases}$$

On déduirait de celles-ci les composantes j_{2x} , j_{2y} , j_{2z} de la suraccélération, et ainsi de suite. Ces formules sont commodes lorsque le mobile reste sur une surface conique donnée, par exemple, sur un cône de révolution dont le sommet est O et l'angle d'ouverture 2α ; on a alors

$$R = \text{tang} \alpha.$$

Si le mouvement a lieu dans un plan, $R = \infty$ et j_z est nul.

2. Comme deuxième application, cherchons les composantes de l'accélération j_{n+1} parallèlement à la vitesse, à la normale principale et à la binormale. Prenant respectivement, dans les équations (1), les

directions Ox , Oy et Oz parallèles à ces trois directions, nous remarquerons que l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins coïncide avec la tangente à la trajectoire, en sorte que, pour amener le trièdre $Oxyz$ dans la position infiniment voisine, on le fera tourner autour de l'arête Ox d'un angle égal à l'angle de torsion $\frac{ds}{T}$ et autour de l'arête Oz d'un angle égal à l'angle de contingence $\frac{ds}{R}$ de la trajectoire. On aura donc, v étant la vitesse de M ,

$$p = \frac{v}{T}, \quad q = 0, \quad r = \frac{v}{R},$$

et les formules (1) nous donneront

$$(4) \quad \begin{cases} j_{n+1,x} = \frac{dj_{nx}}{dt} - \frac{v}{R} j_{ny}, \\ j_{n+1,y} = \frac{dj_{ny}}{dt} + \frac{v}{R} j_{nx} - \frac{v}{T} j_{nz}, \\ j_{n+1,z} = \frac{dj_{nz}}{dt} + \frac{v}{T} j_{ny}. \end{cases}$$

Ces formules, que Somoff a obtenues par une voie beaucoup moins simple, serviront à passer des composantes tangentielle, normale et binormale de l'accélération j_n à celles de l'accélération d'ordre $n+1$. Si l'on part de $n=0$, $j_0 = v$, on a évidemment

$$j_{0x} = v, \quad j_{0y} = 0, \quad j_{0z} = 0;$$

d'où, par les formules (4),

$$j_{1x} = \frac{dv}{dt}, \quad j_{1y} = \frac{v^2}{R}, \quad j_{1z} = 0,$$

ce qui donne les composantes connues de l'accélération. De même, on trouvera pour les composantes de la suraccélération

$$\begin{aligned} j_{2x} &= \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{R^2}, \\ j_{2y} &= \frac{3v}{R} \frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{R^2} \frac{dR}{ds}, \\ j_{2z} &= \frac{v^3}{RT}. \end{aligned}$$

Ce sont les formules dues à M. Resal. On trouve de même, en faisant $n = 2$ dans les formules (4) et observant que $\frac{ds}{dt} = v$,

$$j_{3x} = \frac{d^3 v}{dt^3} - \frac{6v^2}{R^2} \frac{dv}{dt} + \frac{3v^4}{R^3} \frac{dR}{ds},$$

$$j_{3y} = \frac{4v}{R} \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{3}{R} \frac{dv^2}{dt^2} - \frac{6v^2}{R^2} \frac{dv}{dt} \frac{dR}{ds} - \frac{v^4}{R^3} \left(1 + \frac{R^2}{T^2} - \frac{dR^2}{ds^2} + R \frac{d^2 R}{ds^2} \right),$$

$$j_{3z} = \frac{6v^3}{RT} \frac{dv}{dt} - \frac{v^4}{RT} \left(\frac{2}{R} \frac{dR}{ds} + \frac{1}{T} \frac{dT}{ds} \right),$$

et ainsi de suite. Lorsqu'on suppose le mouvement uniforme, ce qu'on peut toujours faire lorsqu'on a en vue les applications géométriques, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2 v}{dt^2}$, ... s'annulent, ce qui simplifie beaucoup ces formules.

5. Comme dernière application des équations (1), supposons le point M déterminé par un système de coordonnées curvilignes composé de trois groupes de surfaces orthogonales, caractérisés par les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, et cherchons les composantes de j_{n+1} parallèlement aux normales Mn_1, Mn_2, Mn_3 aux trois surfaces qui se coupent en M, menées dans le sens où les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vont en croissant.

Nous désignerons par R_{ik} le rayon de courbure de la section principale de la surface λ_i qui est tangente à la direction Mn_k , pris avec le signe *positif* ou *négatif*, selon qu'il est dirigé dans le sens où λ_i va en *décroissant* ou en *croissant*.

Le trièdre O123 ayant ses arêtes respectives parallèles aux normales Mn_1, Mn_2, Mn_3 , pour trouver les composantes p, q, r de sa rotation suivant O1, O2, O3, il suffira d'observer : 1° que le déplacement infiniment petit du point M dans le temps dt peut être regardé comme résultant de trois déplacements simultanés ds_1, ds_2, ds_3 suivant les directions Mn_1, Mn_2, Mn_3 ; 2° que, dans chacun d'eux, par exemple dans le déplacement ds_1 , en vertu du théorème de Dupin, la normale à la surface λ_2 reste dans le plan tangent à la surface λ_3 , et la normale à la surface λ_3 dans le plan tangent à la surface λ_2 . Il en résulte que le déplacement angulaire du trièdre $Mn_1 n_2 n_3$ résulte d'une rotation autour de Mn_3 , égale à $-\frac{ds_1}{R_{21}}$, et d'une rotation autour de Mn_2 égale à

$\frac{ds_1}{R_{31}}$, eu égard à la convention sur le signe de R_{ik} et à la disposition des arêtes Mn_1, Mn_2, Mn_3 . En opérant de la même manière sur les deux autres mouvements ds_2, ds_3 du point M, désignant par v_1, v_2, v_3 les vitesses du point M parallèles aux directions O1, O2, O3, on aura évidemment, pour les valeurs cherchées de p, q, r ,

$$p = -\frac{v_2}{R_{32}} + \frac{v_3}{R_{23}}, \quad q = -\frac{v_3}{R_{13}} + \frac{v_1}{R_{31}}, \quad r = -\frac{v_1}{R_{21}} + \frac{v_2}{R_{12}},$$

et les formules (1) nous donneront, pour les composantes cherchées de l'accélération j_{n+1} ,

$$(5) \quad \begin{cases} j_{n+1,1} = \frac{dj_{n1}}{dt} + \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right)j_{n3} - \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right)j_{n2}, \\ j_{n+1,2} = \frac{dj_{n2}}{dt} + \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right)j_{n1} - \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right)j_{n3}, \\ j_{n+1,3} = \frac{dj_{n3}}{dt} + \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right)j_{n2} - \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right)j_{n1}. \end{cases}$$

Pour $n = 0$, j_{n1}, j_{n2}, j_{n3} se réduisent respectivement aux vitesses v_1, v_2, v_3 , et l'on obtient les composantes de l'accélération j_i ou j du premier ordre, données par Lamé, mais par une voie beaucoup plus longue,

$$(6) \quad \begin{cases} j_1 = \frac{dv_1}{dt} + \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right)v_3 - \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right)v_2, \\ j_2 = \frac{dv_2}{dt} + \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right)v_1 - \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right)v_3, \\ j_3 = \frac{dv_3}{dt} + \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right)v_2 - \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right)v_1. \end{cases}$$

On en déduirait, en faisant $n = 1$ dans les équations (5), les composantes de l'accélération du second ordre, et ainsi de suite.

On peut, dans les équations (5), introduire au lieu des vitesses v et des rayons R les paramètres des surfaces orthogonales, en désignant par h_1, h_2, h_3 les *paramètres différentiels* du premier ordre définis

par l'équation

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial z}\right)^2}.$$

On a les relations connues (1)

$$ds_i = \frac{d\lambda_i}{h_i}, \quad \mathbf{R}_{ik} = -\frac{h_i}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial \lambda_i},$$

et de simples substitutions donneront

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_{n+1,1} = \frac{dj_{n1}}{dt} + \left(\frac{h_1}{h_2^2} \frac{\partial h_2}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_2}{dt} - \frac{h_2}{h_1^2} \frac{\partial h_1}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_1}{dt} \right) j_{n2} \\ \quad \quad \quad + \left(\frac{h_1}{h_3^2} \frac{\partial h_3}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_3}{dt} - \frac{h_3}{h_1^2} \frac{\partial h_1}{\partial \lambda_3} \frac{d\lambda_1}{dt} \right) j_{n3}, \\ j_{n+1,2} = \frac{dj_{n2}}{dt} + \left(\frac{h_2}{h_3^2} \frac{\partial h_3}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_3}{dt} - \frac{h_3}{h_2^2} \frac{\partial h_2}{\partial \lambda_3} \frac{d\lambda_2}{dt} \right) j_{n3} \\ \quad \quad \quad + \left(\frac{h_2}{h_1^2} \frac{\partial h_1}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{h_1}{h_2^2} \frac{\partial h_2}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_2}{dt} \right) j_{n1}, \\ j_{n+1,3} = \frac{dj_{n3}}{dt} + \left(\frac{h_3}{h_1^2} \frac{\partial h_1}{\partial \lambda_3} \frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{h_1}{h_3^2} \frac{\partial h_3}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_3}{dt} \right) j_{n1} \\ \quad \quad \quad + \left(\frac{h_3}{h_2^2} \frac{\partial h_2}{\partial \lambda_3} \frac{d\lambda_2}{dt} - \frac{h_2}{h_3^2} \frac{\partial h_3}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_3}{dt} \right) j_{n2}. \end{array} \right.$$

Pour $n = 0$, on retrouverait les formules de Guiraudet (2) et Lamé (3).

4. Nous appliquerons les formules (6) au système de coordonnées sphériques composé des sphères de rayon r , des cônes de révolution dont l'ouverture est 2θ , et des plans passant par l'axe des cônes et faisant un angle ψ avec un plan fixe. Attribuant l'indice 1 aux sphères, l'indice 2 aux cônes, l'indice 3 aux plans, on trouvera ici, par des con-

(1) LAMÉ, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 51.

(2) *Mémoires de la Société des Sciences de Lille*, 1865.

(3) *Leçons sur les coordonnées curvilignes*.

sidérations géométriques directes,

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\theta, \quad ds_3 = r \sin \theta d\psi,$$

ce qui donnera les valeurs de ν_1, ν_2, ν_3 ; puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{12}} &= \frac{1}{r}, & \frac{1}{R_{13}} &= \frac{1}{r}, & \frac{1}{R_{21}} &= 0, \\ \frac{1}{R_{23}} &= \frac{1}{r \tan \theta}, & \frac{1}{R_{31}} &= 0, & \frac{1}{R_{32}} &= 0. \end{aligned}$$

Substituant dans les équations (5), on trouvera

$$(8) \quad \begin{cases} j_{n+1,r} = \frac{dj_{nr}}{dt} - j_{n\theta} \frac{d\theta}{dt} - j_{n\psi} \sin \theta \frac{d\psi}{dt}, \\ j_{n+1,\theta} = \frac{dj_{n\theta}}{dt} + j_{nr} \frac{d\theta}{dt} - j_{n\psi} \cos \theta \frac{d\psi}{dt}, \\ j_{n+1,\psi} = \frac{dj_{n\psi}}{dt} + j_{nr} \sin \theta \frac{d\psi}{dt} + j_{n\theta} \cos \theta \frac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Pour $n = 0$, on a

$$j_{0r} = \nu_r = \frac{dr}{dt}, \quad j_{0\theta} = r \frac{d\theta}{dt}, \quad j_{0\psi} = r \sin \theta \frac{d\psi}{dt},$$

d'où

$$(9) \quad \begin{cases} j_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \frac{d\theta^2}{dt^2} - r \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2}, \\ j_\theta = r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \cos \theta \frac{d\psi^2}{dt^2}, \\ j_\psi = r \sin \theta \frac{d^2 \psi}{dt^2} + 2 \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\psi}{dt} + 2r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\psi}{dt}, \end{cases}$$

ce qui s'accorde avec les formules de Guiraudet et Lamé. De même, on trouverait, pour les composantes sphériques de la suraccélération,

en faisant $n = 1$ dans les formules (8) et réduisant,

$$(10) \left\{ \begin{aligned} j_{2r} &= \frac{d^3 r}{dt^3} - 3 \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \\ &\quad - 3 \sin \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \frac{d \cdot r \sin \theta}{dt} - 3 r \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} \frac{d^2 \psi}{dt^2}, \\ j_{2\theta} &= r \frac{d^3 \theta}{dt^3} + 3 \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \\ &\quad - 3 r \sin \theta \cos \theta \frac{d\psi}{dt} \frac{d^2 \psi}{dt^2} - r \frac{d\theta^3}{dt^3} - 3 \cos \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \frac{d \cdot r \sin \theta}{dt}, \\ j_{2\psi} &= r \sin \theta \frac{d^3 \psi}{dt^3} + 3 \frac{d^2 \psi}{dt^2} \frac{d \cdot r \sin \theta}{dt} \\ &\quad + 3 \frac{d\psi}{dt} \left(\sin \theta \frac{d^2 r}{dt^2} + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) - r \sin \theta \frac{d\psi^3}{dt^3} \\ &\quad + 6 \cos \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\psi}{dt} - 3 r \sin \theta \frac{d\psi}{dt} \frac{d\theta^2}{dt^2}. \end{aligned} \right.$$

Les formules se compliquent rapidement. Lorsque, dans les équations (8), on suppose ψ constamment égal à zéro, on obtient les formules données par M. Laisant (1). L'application aux coordonnées elliptiques ne souffre aucune difficulté, mais elle ne nous a pas paru conduire à des résultats spécialement intéressants.

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 496; 1878.