JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. HUGONIOT

Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (première partie)

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 3 (1887), p. 477-492.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1887_4_3__477_0>

Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (première Partie);

PAR H. HUGONIOT (¹).

---

1. La théorie de la propagation du mouvement dans un fluide indéfini est restée jusqu'à présent bien incomplète. On ne s'est guère occupé que des gaz parfaits, du moins quand on a cherché à étudier le phénomène avec quelque rigueur. De plus, on a introduit dans les équations, que fournit l'Hydrodynamique pour représenter le mouvement de ces corps, des hypothèses déguisées, il est vrai, sous le nom d'*approximations,* mais qui altèrent singulièrement la valeur des résultats que l'on peut en déduire.

L'insuccès des tentatives faites jusqu'à ce jour paraît provenir de ce que les géomètres n'ont cru pouvoir obtenir l'expression de la vitesse de propagation du mouvement qu'au moyen des intégrales des équations, intégrales qui sont restées jusqu'ici inconnues, tout au moins dans leur généralité, et que l'on ne paraît pas près de découvrir.

Je vais montrer, dans ce travail, que l'expression analytique de la vitesse de propagation du mouvement dans un fluide indéfini s'obtient aisément et de la manière la plus générale, par la simple considération des équations de l'Hydrodynamique, sans qu'il soit aucunement besoin de se préoccuper de la forme des intégrales.

Il me suffira, pour cela, de généraliser les principes dont j'ai fait usage dans un travail antérieur (²), consacré du reste, en grande

---

(¹) Ce Mémoire posthume, retrouvé dans les papiers laissés par M. Hugoniot, nous a été communiqué par M. Léauté.

(²) *Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps, et spécialement dans les gaz parfaits,* présenté à l'Académie des Sciences le 26 octobre 1885.

partie, à l'étude d'un cas particulier du mouvement des fluides, celui où le mouvement s'opère par tranches parallèles, de manière que, dans chaque tranche, la vitesse de tous les points soit la même à chaque instant, et normale au plan de la tranche.

2. Je prendrai pour point de départ, dans cette première Partie, les équations bien connues de l'Hydrodynamique, telles qu'elles ont été établies par Euler. Dans la seconde Partie, je reprendrai la question en partant des équations de Lagrange, qui permettent d'étendre la théorie à des cas où les équations d'Euler deviennent inapplicables.

Rapportant le fluide à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et Oz, soient, à l'instant t, x, y, z les coordonnées d'un point du fluide u, v, w les composantes de sa vitesse; soient enfin, pour le même point,

ρ la densité;
p la pression;
X, Y, Z les composantes de la force extérieure rapportée à l'unité de masse.

Les composantes X, Y et Z peuvent être des fonctions données de x, y, z et t, mais elles peuvent aussi dépendre de l'état du fluide à l'instant considéré. C'est ce qui arrive, par exemple, quand on tient compte des attractions mutuelles exercées par les diverses molécules. Dans ce qui va suivre, on supposera uniquement que les composantes X, Y et Z sont indépendantes des accélérations; les résultats resteraient encore les mêmes si ces composantes étaient des fonctions des vitesses.

Cela posé, les équations d'Euler sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z},\\ &\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z},\\ &\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z},\\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.\end{aligned}\right.$$

3. Les quatre équations précédentes sont les mêmes pour tous les fluides, c'est-à-dire pour les corps dans lesquels la pression sur un élément est normale à sa surface. Elles renferment cinq fonctions inconnues de x, y, z et t et ne peuvent, par suite, suffire à les déterminer. On doit donc y joindre une cinquième équation, mais celle-ci dépend de la nature du fluide.

Je ne m'occuperai ici que du cas où la conductibilité du corps pour la chaleur peut être négligée. Alors la relation entre la pression et la densité d'un élément de masse donné est toujours la même, et ne dépend que de l'état initial, pourvu toutefois qu'il ne se produise pas de discontinuités, c'est-à-dire que la vitesse ne subisse jamais une variation finie dans un temps infiniment petit. La relation en question n'est autre que celle qui correspond à ce qu'on appelle, en Thermodynamique, la *détente adiabatique*. On supposera, dans ce qui va suivre, que cette relation est la même en tous les points du fluide, ce qui a lieu, par exemple, quand il est homogène et à la même température en tous les points, à l'état initial, et on la représentera par l'équation

$$\rho = \mathrm{F}(p), \tag{2}$$

qui devient, quand le fluide est un gaz parfait,

$$\rho = \mathrm{K}p^{\frac{1}{m}}, \tag{3}$$

K désignant une constante, et m le rapport des deux chaleurs spécifiques.

Le nombre des équations est alors égal à celui des fonctions inconnues.

4. Lorsqu'on a voulu appliquer les équations précédentes à l'étude de la propagation du mouvement dans les gaz parfaits, on a supposé nulles les forces extérieures, et l'on a admis que l'expression

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

était la différentielle exacte d'une fonction φ des coordonnées. D'après un théorème bien connu de Lagrange, si cette condition est satisfaite à un instant quelconque, elle l'est encore à tous les instants ultérieurs.

Désignant alors par ρ_0 la densité initiale, et par p_0 la pression initiale, on a

$$p = p_0(1+\gamma)^{-m}, \qquad \rho = \rho_0(1+\gamma)^{-1},$$

γ représentant la dilatation cubique. On déduit alors des équations d'Euler les deux suivantes :

$$\frac{m}{m-1}\frac{p_0}{\rho_0}[(1+\gamma)^{-m+1}-1] + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = 0,$$

$$(1+\gamma)^{-1}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Considérant uniquement de petits mouvements qui n'altèrent que très faiblement la densité du fluide, on néglige, dans la première équation, les carrés des vitesses et les puissances de γ supérieures à l'unité; elle devient ainsi

$$\gamma = \frac{\rho_0}{mp_0}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

en posant

$$a^2 = \frac{mp_0}{\rho_0}.$$

Dans la deuxième équation, on néglige γ à côté de l'unité, et les produits tels que $\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\gamma}{\partial x}$ à côté de $\frac{\partial\gamma}{\partial x}$; elle se réduit alors à

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

ou, à cause de la valeur précédemment obtenue pour γ,

$$(4) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right).$$

C'est l'équation dont Poisson a fait usage dans ses recherches [1]. On voit, par ce qui précède, qu'elle n'est établie qu'au moyen d'approximations qui doivent singulièrement dénaturer le phénomène réel,

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, t. VII.

et dont quelques-unes seraient bien difficiles à justifier. Elles reviennent toutes, d'ailleurs, à changer les hypothèses faites primitivement sur les propriétés des gaz.

C'est en intégrant l'équation précédente au moyen des intégrales définies que Poisson a étudié la propagation du mouvement dans les gaz. Je montrerai plus loin que, si l'on se borne à rechercher la vitesse de propagation du mouvement, il est bien inutile de déterminer les intégrales de l'équation (4); mais, auparavant, il importe de définir avec précision la *vitesse de propagation*.

5. Lorsqu'un mouvement est régi par un système d'équations aux dérivées partielles, tout système d'intégrales de ces équations représente un mouvement possible. Il faut entendre par là que, si une masse indéfinie du fluide se trouvait, à un moment donné, animée du mouvement représenté, il en serait encore de même à tous les instants ultérieurs. Si l'on considère de même une portion finie de fluide limitée par une surface et animée, à un moment donné, d'un mouvement défini par un système d'intégrales, le mouvement continue toujours à être représenté par les mêmes intégrales, si les conditions imposées à la surface sont compatibles avec ces dernières. C'est ce qui arrive, par exemple, quand la pression extérieure appliquée sur la surface a précisément, en chaque point et à chaque instant, la valeur que fournissent ces intégrales.

Mais, si l'on vient à modifier les conditions imposées à une certaine partie de la surface limite, il faut nécessairement qu'il naisse, dans le voisinage de cette portion de surface, un mouvement différent du premier, qui se développe dans le fluide et s'étend de plus en plus, se substituant en partie au mouvement primitif. Il existe dès lors, à chaque instant, dans la masse fluide, une certaine surface qui sépare les parties de ce fluide animées chacune d'un mouvement différent, et qui se déplace en se déformant avec le temps. On donnera à cette surface le nom de *surface de l'onde*, et l'on dira que le deuxième mouvement *se propage* dans le premier.

Soient S la surface de l'onde à l'instant t; S' la position qu'elle occupe à l'instant $t + dt$. Menant la normale en un point x, y, z de la première surface, et désignant par dn la portion de cette normale comprise entre S et S′, le rapport $\frac{dn}{dt}$ représente la *vitesse de propagation* du deuxième mouvement dans le premier.

Les définitions qui précèdent généralisent celles que j'ai données dans mon Mémoire déjà cité *Sur la propagation du mouvement dans les corps*. J'ai montré dans ce travail que, pour un gaz renfermé dans un tuyau, par exemple, il ne suffisait pas de juxtaposer deux quelconques des mouvements possibles pour que le phénomène de la propagation se produisît. Il fallait encore que les surfaces représentatives se raccordassent suivant une *caractéristique* commune.

Il en est évidemment de même quand, au lieu du mouvement par tranches parallèles, on considère le mouvement le plus général d'un corps. Si, à un moment donné, deux portions contiguës d'un même corps sont animées chacune d'un mouvement différent, le phénomène qui se passe à la surface de séparation est généralement complexe et a pour conséquence la naissance de nouveaux mouvements représentés par des systèmes d'intégrales différents des premiers.

Il y a propagation quand, à l'instant $t + dt$, le mouvement du corps est encore représenté par les deux systèmes d'intégrales primitifs, la surface de séparation s'étant toutefois déplacée et déformée infiniment peu.

Quand un mouvement peut se propager dans un autre, on dira que les deux mouvements sont *compatibles* entre eux.

6. Dans l'étude qui va suivre, on supposera essentiellement que la continuité n'est pas troublée. Or, lorsqu'un mouvement A se propage dans un mouvement B, un point animé d'abord du mouvement A se trouve instantanément animé du mouvement B au moment où la surface de l'onde vient rencontrer ce point. Aux deux mouvements A et B doivent correspondre les mêmes valeurs des vitesses pour les points qui, à l'instant t, se trouvent sur la surface de l'onde.

7. Avant d'aborder les équations générales de l'Hydrodynamique, on considérera d'abord, pour plus de simplicité, l'équation unique dont Poisson a fait usage,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right). \tag{4}$$

La dilatation cubique est proportionnelle à $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, et les composantes de la vitesse sont respectivement égales à $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Soient φ_1 et φ_2 deux intégrales représentant des mouvements compatibles; posant

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Phi,$$

la fonction Φ satisfait évidemment à l'équation (4), de sorte que l'on a

$$(5) \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right).$$

La continuité dans les vitesses exige que l'on ait, pour tous les points de la surface de l'onde,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0.$$

De plus, il est facile de voir que, si les vitesses n'éprouvent pas de variation brusque, la dilatation ne peut varier brusquement; ainsi, le long de la surface de l'onde, les deux valeurs de la dilatation doivent être les mêmes, de sorte que

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0.$$

Les quatre dérivées partielles de la fonction Φ sont ainsi nulles le long de la surface de l'onde. Si donc λ, μ et ν désignent les cosinus directeurs de la normale en un point de cette surface, on a les trois systèmes d'équations

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}} &= \frac{\mu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}},\\
\frac{\lambda}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}} &= \frac{\mu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}},\\
\frac{\lambda}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}} &= \frac{\mu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}.
\end{aligned}\right.$$

L'une quelconque des dérivées partielles de Φ est nulle au point x, y, z de la surface de l'onde qui correspond au point t; elle doit encore être nulle, pour l'instant $t + dt$, au point dont les coordonnées sont

$$x + \lambda\, dn, \quad y + \mu\, dn, \quad z + \nu\, dn,$$

puisque ce point appartient à la surface de l'onde qui correspond au temps $t + dt$. On a les quatre équations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t} + \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t} + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right) &= 0,\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}\right) &= 0,\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}\right) &= 0,\\
\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z} + \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z} + \nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

L'élimination des quantités $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}$ donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\Bigg[&\lambda^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\nu}{\lambda}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}\right)\\
&+ \mu^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\nu}{\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z}\right)\\
&+ \nu^2\left(\frac{\lambda}{\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z} + \frac{\mu}{\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)\Bigg],
\end{aligned}$$

ou, en tenant compte des équations (6),

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right).$$

La comparaison de cette équation avec l'équation (5) exige que l'on ait

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = a^2.$$

La formule qui donne la vitesse du son ou, plus généralement, la vitesse de propagation d'un mouvement dans un autre, se trouve ainsi établie sans qu'il y ait eu lieu de se préoccuper de la forme des intégrales.

8. Je vais maintenant appliquer une méthode analogue aux équations générales de l'Hydrodynamique,

$$(1')\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z},\\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z},\\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z},\\
&\frac{F'(p)}{F(p)}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right.$$

La dernière des équations $(1')$ est l'équation de continuité où l'on a remplacé ρ par sa valeur $F(p)$.

Soient $u_1, v_1, w_1, \rho_1, p_1$; $u_2, v_2, w_2, \rho_2, p_2$ deux systèmes d'intégrales représentant des mouvements compatibles. Posant

$$u_1 - u_2 = U,\qquad v_1 - v_2 = V,\qquad w_1 - w_2 = W,\qquad p_1 - p_2 = P,$$

la continuité exige que l'on ait, le long de la surface de l'onde,

$$(7)\qquad U = 0,\qquad V = 0,\qquad W = 0.$$

De plus, la vitesse variant d'une manière continue, il faut qu'il en soit de même de la densité; ainsi, le long de la surface de l'onde, on a

$$\rho_1 = \rho_2;$$

et, puisque $\rho = F(p)$, il en résulte

$$(8)\qquad p_1 - p_2 = 0 \qquad\text{ou}\qquad P = 0,$$

le long de cette surface.

Si donc on substitue, dans l'une quelconque des équations (1'), successivement les deux systèmes d'intégrales, et si l'on attribue aux variables x, y, z et t les valeurs qui correspondent à un point de la surface de l'onde, puis que l'on fasse la différence, les quantités X, Y et Z disparaissent; les fonctions u, v, w, ρ et p prennent des valeurs égales, de sorte qu'on peut se dispenser de les affecter d'indices; on obtient donc les quatre équations

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - u\frac{\partial U}{\partial x} - v\frac{\partial U}{\partial y} - w\frac{\partial U}{\partial z},\\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial t} - u\frac{\partial V}{\partial x} - v\frac{\partial V}{\partial y} - w\frac{\partial V}{\partial z},\\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial W}{\partial t} - u\frac{\partial W}{\partial x} - v\frac{\partial W}{\partial y} - w\frac{\partial W}{\partial z},\\
&\frac{F'(p)}{F(p)}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + w\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right.$$

qui ont lieu pour chaque point de la surface de l'onde.

9. Désignant, comme précédemment, par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface de l'onde, les équations (7) et (8) exigent que l'on ait

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\mu}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial U}{\partial z}},\\
&\frac{\lambda}{\frac{\partial V}{\partial x}} = \frac{\mu}{\frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial V}{\partial z}},\\
&\frac{\lambda}{\frac{\partial W}{\partial x}} = \frac{\mu}{\frac{\partial W}{\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial W}{\partial z}},\\
&\frac{\lambda}{\frac{\partial P}{\partial x}} = \frac{\mu}{\frac{\partial P}{\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial P}{\partial z}}.
\end{aligned}\right.$$

D'autre part, en différentiant, le long de la normale à la surface de l'onde, chacune des équations (7) et (8), on obtient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t}\left(\lambda\frac{\partial U}{\partial x} + \mu\frac{\partial U}{\partial y} + \nu\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0,\\
&\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t}\left(\lambda\frac{\partial V}{\partial x} + \mu\frac{\partial V}{\partial y} + \nu\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0,\\
&\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t}\left(\lambda\frac{\partial W}{\partial x} + \mu\frac{\partial W}{\partial y} + \nu\frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0,\\
&\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t}\left(\lambda\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (9), (10) et (11) sont au nombre de seize; elles sont d'ailleurs homogènes par rapport aux seize dérivées $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, ... Si donc toutes ces dérivées ne sont pas nulles à la fois, le déterminant doit s'annuler.

En d'autres termes, l'élimination des seize dérivées fournira une équation de condition entre les valeurs des fonctions u, v, w, ρ et p et la vitesse de propagation $\frac{dn}{dt}$, d'où l'on déduira la valeur de cette vitesse de propagation.

10. L'élimination se fait très simplement, en exprimant d'abord toutes les dérivées d'une même fonction au moyen d'une seule d'entre elles, et transportant les valeurs obtenues dans les équations (9).

Les équations (10) donnent d'abord

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\nu}{\lambda}\frac{\partial U}{\partial x};$$

la première des équations (11) donne ensuite

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\lambda}\frac{dn}{dt}\frac{\partial U}{\partial x} = 0;$$

de même pour V, W et P, dont les dérivées partielles s'expriment linéairement en fonction de $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial x}$. Substituant dans les équations (9), on obtient

$$\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]\frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]\frac{\partial W}{\partial x},$$

$$\frac{F'(p)}{F(p)}\left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w\right]\frac{\partial P}{\partial x} = \lambda\frac{\partial U}{\partial x} + \mu\frac{\partial V}{\partial x} + \nu\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Multipliant les trois premières équations respectivement par λ, μ, ν et ajoutant, puis divisant la somme par la quatrième équation, on trouve, en remarquant que $\rho = F(p)$,

$$F'(p)\left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu x)\right]^2 = 1.$$

On en déduit, pour la vitesse de propagation $\frac{dn}{dt}$, les deux valeurs suivantes :

$$\frac{dn}{dt} = \lambda u + \mu v + \nu w \pm \sqrt{\frac{1}{F'(p)}}.$$

La quantité $\lambda u + \mu v + \nu w$ n'est autre que la projection de la vitesse au point considéré sur la normale à la surface de l'onde. Représentant par N cette projection et remarquant que

$$\frac{1}{F'(p)} = \frac{dp}{d\rho},$$

la formule précédente peut s'écrire

$$(12) \qquad \frac{dn}{dt} = N \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Il est à remarquer que le second membre de cette équation est déterminé aussitôt que l'un des mouvements est donné, d'où ce théorème d'une remarquable généralité :

La vitesse de propagation d'un mouvement dans un fluide dépend de l'état du fluide, mais elle est indépendante de la nature du mouvement qui se propage, pourvu qu'il ne se produise pas de discontinuité.

11. La formule précédente donne la valeur *absolue* de la vitesse de propagation; elle se trouve rapportée aux axes de coordonnées fixes; les deux valeurs sont différentes suivant que la propagation s'effectue dans le sens de la vitesse normale N ou en sens contraire.

Mais il est plus naturel de rapporter cette vitesse au fluide lui-même, qui doit être regardé comme se déplaçant dans la direction de la normale avec une vitesse N. La vitesse de propagation doit alors être prise égale à

$$\pm\sqrt{\frac{1}{F'(p)}} = \pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}};$$

ses deux valeurs sont alors égales et de signes contraires. L'expression analytique est d'ailleurs la même que celle qui a été obtenue en considérant le mouvement des fluides dans les tuyaux.

La formule générale (12) rend compte d'un fait bien connu des physiciens. Lorsque l'atmosphère est agitée, la vitesse normale du son est augmentée ou diminuée d'une quantité égale à la projection de la vitesse du vent sur la direction de la propagation.

Dans le cas particulier où les forces extérieures sont nulles, le fluide peut évidemment demeurer en repos, de sorte que $u=0$, $v=0$, $w=0$, $\rho=\rho_0$, $p=p_0$ constituent un système d'intégrales. Si, dans la formule (12), on attribue à p la valeur p_0, et si l'on fait en outre $N=0$, on obtient

$$\frac{dn}{dt} = \pm\frac{1}{\sqrt{F'(p_0)}},$$

vitesse de propagation du mouvement dans un fluide en repos. Cette vitesse est indépendante de la nature du mouvement qui se propage, pourvu qu'il ne se produise pas de discontinuités.

12. Les seconds membres des trois premières équations (9) représentent les composantes de l'accélération relative au point considéré de la surface de l'onde. Or on a, d'après (10),

$$\frac{\lambda}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}} = \frac{\mu}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}},$$

ce qui montre que *l'accélération relative est dirigée suivant la normale à la surface de l'onde.*

Il est bien connu que, si l'on considère un élément de volume du fluide, les quantités

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

représentent les composantes de la vitesse angulaire de rotation de cet élément autour de son axe instantané.

On démontre aisément que, pour un point de la surface de l'onde, la rotation relative est nulle. Il suffit pour cela de faire voir que chacune des quantités

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial U} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}$$

s'annule pour tout point de la surface de l'onde.

Or, en multipliant la deuxième des équations (9) par V, la troisième par $-\mu$ et ajoutant, le premier membre s'annule en vertu des équations (10). Quant au second membre il devient, en tenant compte des équations (10) et (11),

$$\left[\frac{dn}{dt} - (\lambda u + \mu v + \nu w)\right]\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right).$$

La vitesse de propagation $\frac{dn}{dt}$ étant différente de $\lambda u + \mu v + \nu w$, il en résulte que l'on doit avoir

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

13. Lorsque le fluide considéré est un gaz parfait, on a

$$\rho = F(p) = Kp^{\frac{1}{m}},$$
$$F'(p) = \frac{K}{m} p^{\frac{1}{m}-1} = \frac{\rho}{mp};$$

la vitesse de propagation rapportée au fluide est ainsi représentée par

$$\sqrt{\frac{mp}{\rho}}$$

et par $\sqrt{\frac{mp_0}{\rho_0}}$ lorsque la propagation a lieu dans le repos. La formule ordinaire de la vitesse de propagation se trouve ainsi établie d'une manière entièrement rigoureuse; son expression analytique reste d'ailleurs la même quand on considère la propagation d'un mouvement dans un autre; mais la valeur numérique dépend de la pression et de la densité qui correspondent au mouvement primitif.

14. Quand le fluide considéré est un liquide, la relation entre la pression et la densité se réduit sensiblement à

$$\rho = Ap + B,$$

A et B désignant des constantes. La vitesse de propagation rapportée au fluide est alors égale à

$$\sqrt{\frac{1}{A}};$$

c'est une constante absolue, indépendante non seulement du mouvement qui se propage, mais aussi du mouvement primitif.

15. Malgré son caractère de généralité, la théorie précédente est encore incomplète, car il a fallu supposer que la relation $\rho = F(p)$ était la même pour tous les points du fluide. Il est nécessaire de la reprendre en regardant la fonction $F(p)$ comme dépendant des coordonnées initiales des molécules. Je montrerai, dans la seconde Partie du Mémoire, comment on parvient à ce résultat, en prenant les équations de l'Hydrodynamique sous la forme qui leur a été donnée par Lagrange.