JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉON AUTONNE

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. - Deuxième mémoire : Groupes cubiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 2 (1886), p. 49-103.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1886_4_2__49_0>

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. — Deuxième Mémoire : *Groupes cubiques ;*

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans un premier Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 4e fascicule, 1885), nous avons exposé d'une façon complète la théorie des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique Cremona. La généralisation immédiate de ces recherches amène à étudier les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe cubique, c'est-à-dire dans le groupe formé exclusivement de substitutions linéaires, quadratiques et cubiques (2° du premier Mémoire).

Soit une substitution cubique

$$S = | \; z_i \quad \varphi_i(z_1, z_2, z_3) \; | \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La cubique générale

$$\varphi = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 = 0 \qquad (u_i = \text{const. arbit.}),$$

du réseau de S a un point double fixe (indépendant des u_i), que j'appelle ω, et quatre points également fixes (*Clebsch-Lindemann*, traduction Benoît, t. II, p. 197, tableau). Le point ω et les quatre points fixes sont les *points fondamentaux* ou simplement les *fondamentaux* de S.

Dans le présent travail, je m'occuperai seulement des groupes cubiques qui satisfont aux deux conditions suivantes :

1° Aucune substitution du groupe n'a de points fondamentaux infiniment voisins.

2° Le point ω, qui vient d'être défini, est le même pour *toutes* les substitutions cubiques du groupe.

Ces restrictions une fois faites, nous rencontrons une proposition capitale, qui domine toute la théorie :

Théorème. — *Un groupe cubique* G *d'ordre fini est isomorphe à un groupe* Σ *linéaire, à deux variables homogènes, d'ordre fini.*

J'appelle Σ groupe *directeur* de G; le groupe Γ, contenu dans G et correspondant à la substitution unité de Σ, sera appelé *normal*.

La nature même du sujet amène à diviser le présent travail en cinq Parties.

La première Partie traite de la multiplication des substitutions cubiques et établit le théorème capital dont il vient d'être question.

La deuxième Partie contient la théorie complète des groupes normaux.

Je trouve que tout groupe normal Γ peut, par un choix approprié de coordonnées, être ramené à l'un des sept types suivants :

Type I. — Γ se réduit à la substitution unité.

Type II (deux substitutions). — Γ dérive de

$$A = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_1 z_3 \quad z_2 z_3 \quad z_1 z_2 \; |.$$

Type III (deux substitutions). — Γ dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(pz_3 + z_1 z_2) \\ z_2 & z_2(pz_3 + z_1 z_2) \\ z_3 & -z_1 z_2(z_3 + P) \end{vmatrix},$$

où p et P désignent des formes linéaires binaires en z_1, z_2, dont les coefficients dépendent de la nature de Σ.

Type IV (quatre substitutions). — Γ dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 z_3 \\ z_2 & z_2 z_3 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_3 - z_2) \\ z_2 & z_2(z_3 - z_2) \\ z_3 & z_2(z_3 - z_1) \end{vmatrix}.$$

Type V (quatre substitutions). — Γ dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 z_3 \\ z_2 & z_2 z_3 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_3 + p) \\ z_2 & z_2(z_3 + p) \\ z_3 & -(p z_3 + z_1 z_2) \end{vmatrix};$$

p désigne une forme linéaire binaire en z_1, z_2, dont les coefficients dépendent de la nature du groupe directeur Σ.

Type VI (quatre substitutions). — Γ dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 z_3 \\ z_2 & z_2 z_3 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(p z_3 + P z_1) \\ z_2 & z_2(p z_3 + P z_1) \\ z_3 & -z_1(P z_3 + p z_2) \end{vmatrix};$$

p et P sont deux formes linéaires binaires en z_1, z_2, dont les coefficients dépendent de la nature du groupe directeur Σ.

Type VII (quatre substitutions). — Γ dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(p z_3 + cc') \\ z_2 & z_2(p z_3 + cc') \\ z_3 & -cc'(z_3 + P) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(q z_3 + cc') \\ z_2 & z_2(q z_3 + cc') \\ z_3 & -cc'(z_3 + Q) \end{vmatrix};$$

p, q, P, Q, c, c' sont des formes linéaires binaires en z_1, z_2, dont les coefficients dépendent de la nature de Σ et entre lesquelles existe l'identité

$$pQ + qP = 2cc'.$$

Dans la troisième Partie, j'examine quelle peut être la nature du groupe directeur Σ, lorsque Γ appartient successivement aux sept types précédents.

Si Γ est du type I, Σ est l'un quelconque des cinq types de groupes linéaires d'ordre fini à deux variables, énumérés par M. Jordan (*Journal de Crelle*, t. 84, p. 111).

Si Γ est des types II, VI ou VII, Σ appartient au second des types de M. Jordan et dérive des deux substitutions

$$\begin{vmatrix} z_1 & l_1 z_1 \\ z_2 & l_2 z_2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix},$$

où

$$l_1^m = l_2^m = 1, \qquad m = \text{entier}.$$

D'ailleurs $m = 3$, si Γ est des types VI ou VII.

Si Γ est du type III ou V, Σ est contenu dans le groupe octaédrique. Enfin G ne peut être cubique si Γ est du type IV.

Dans la quatrième Partie, je traite un cas particulier remarquable : ce sont les groupes *normo-linéaires*. Un pareil groupe G résulte de la combinaison d'un groupe normal Γ avec un groupe linéaire à trois variables homogènes L, lequel ne peut évidemment, d'ailleurs, être que d'ordre fini.

Omettant les groupes linéaires ou quadratiques déjà construits ailleurs, je trouve que tout groupe normo-linéaire G peut se ramener, par un choix approprié de coordonnées, à l'un des sept types suivants, numérotés de VIII à XIV.

Si Γ est du type III, G est de l'un des trois types suivants :

Type VIII (quatre substitutions). — G dérive de

$$l = \begin{vmatrix} z_1 & -z_1 \\ z_2 & z_2 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 z_3 + p) \\ z_2 & z_2(z_2 z_3 + p) \\ z_3 & -(z_3 p + z_2 P) \end{vmatrix},$$

où p et P sont deux formes binaires quadratiques en z_1, z_2, où manque le rectangle $z_1 z_2$ des variables, et d'ailleurs quelconques.

Type IX (six substitutions). — G dérive de

$$l = \left|\begin{array}{ll} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \\ z_3 & z_3 \end{array}\right|, \qquad A = \left|\begin{array}{ll} z_1 & z_1(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_2 & z_2(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_3 & -z_1(z_1 z_3 + z_2^2) \end{array}\right|$$

$$(\theta^2 + \theta + 1 = 0).$$

Type X (huit substitutions). — G dérive de

$$l = \left|\begin{array}{ll} z_1 & i z_1 \\ z_2 & -z_2 \\ z_3 & z_3 \end{array}\right| \quad \text{et} \quad A = \left|\begin{array}{ll} z_1 & z_1(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_2 & z_2(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_3 & -(z_1^2 z_3 + z_2^3) \end{array}\right|$$

$$(i^2 + 1 = 0).$$

Si Γ est du type V, G appartient à l'un de deux types suivants :

Type XI (huit substitutions). — G dérive de

$$l = \left|\begin{array}{ll} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & z_3 \end{array}\right|, \qquad A = \left|\begin{array}{ll} z_1 & z_1 z_3 \\ z_2 & z_2 z_3 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{array}\right|$$

et

$$C = \left|\begin{array}{ll} z_1 & z_1[z_3 + k(z_1 + z_2)] \\ z_2 & z_2[z_3 + k(z_1 + z_2)] \\ z_3 & -[k(z_1 + z_2)z_3 + z_1 z_2] \end{array}\right| \qquad (k = \text{const. arbitraire}).$$

Type XII (seize substitutions). — G dérive de

$$A = \left|\begin{array}{ll} z_1 & z_1(z_3 + z_2) \\ z_2 & z_2(z_3 + z_2) \\ z_3 & -(z_2 z_3 + 2 z_1^2 - z_2^2) \end{array}\right|, \qquad B = \left|\begin{array}{ll} z_1 & z_1(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_2 & z_2(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_3 & -(z_1^2 z_3 + z_2^3) \end{array}\right|,$$

$$l = \left|\begin{array}{ll} z_1 & i z_1 \\ z_2 & -z_2 \\ z_3 & z_3 \end{array}\right|,$$

où l'on a

$$i^2 + 1 = 0.$$

Si Γ est du type VI, G est du type unique suivant :

Type XIII (vingt-quatre substitutions). — G dérive de

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad t = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 z_3 \\ z_2 & z_2 z_3 \\ z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_2 & z_2(z_2 z_3 + z_1^2) \\ z_3 & -z_1(z_1 z_3 + z_2^2) \end{vmatrix} \qquad (\theta^2 + \theta + 1 = 0).$$

Si Γ est du type VII, G appartient au type unique suivant :

Type XIV (vingt-quatre substitutions). — G dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1[z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2] \\ z_2 & z_2[z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2] \\ z_3 & -(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2)(z_3 - 2z_1 - 2z_2) \end{vmatrix},$$

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad t = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (\theta^2 + \theta + 1 = 0).$$

Les groupes cubiques d'ordre fini sont passablement nombreux (une cinquantaine) et leur énumération complète serait fastidieuse. Je me borne, dans la cinquième Partie, à faire sur un exemple particulier la construction d'un groupe cubique G, dont on se donne le groupe normal Γ, choisi dans les types ci-dessus de I à VII, et le groupe directeur Σ, choisi parmi les divers types de l'énumération précitée de M. Jordan (*Journal de Crelle*, t. 84, p. 111).

L'exemple choisi consiste à construire tous les groupes cubiques G qui ont pour groupe directeur Σ, le groupe formé par les trois puissances de la substitution unique

$$\sigma = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \end{vmatrix} \qquad (\theta^2 + \theta + 1 = 0).$$

J'appellerai $\sigma(u)$ ce que devient la forme binaire u en z_1 et z_2, quand on y remplace z_1 par θz_1 et z_2 par $\theta^2 z_2$.

Cela posé, on trouve les groupes suivants, abstraction faite des groupes linéaires, quadratiques ou normo-linéaires, déjà construits ailleurs.

Du type I dérivent les deux groupes :

Type XV (trois substitutions). — G dérive de

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 [p z_3 + (z_1 - z_2) b] \\ z_2 & \theta^2 z_2 [p z_3 + (z_1 - z_2) b] \\ z_3 & (\theta z_1 - \theta^2 z_2) a z_3 \end{vmatrix},$$

où p et b sont deux formes linéaires binaires quelconques en z_1, z_2 et $a = \sigma(b)$.

Type XVI (trois substitutions). — G dérive de

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 [p_0 z_1 z_3 + (z_1 - z_2) b] \\ z_2 & \theta^2 z_2 [p_0 z_1 z_3 + (z_1 - z_2) b] \\ z_3 & \theta a (\theta z_1 - \theta^2 z_2) z_3 \end{vmatrix},$$

où p_0 est une constante arbitraire; a, b sont définies comme au groupe précédent.

Du type II dérive le *type XVII* (six substitutions). G s'obtient en combinant au type II la substitution quadratique

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 [z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2 [z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_3 & \mu z_3 (\theta^2 z_1 - \theta z_2) + z_1 z_2 \end{vmatrix},$$

$$\mu(\theta^2 - \theta) + 1 = 0.$$

Du type III dérivent les trois types suivants :

Type XVIII (six substitutions). — G dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1[(2z_1+z_2)z_3 - z_1(z_1-z_2)] \\ z_2 & z_2[(2z_1+z_2)z_3 - z_1(z_1-z_2)] \\ z_3 & z_1(z_1-z_2)(z_3+z_2) \end{vmatrix}$$

et de

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1\,[(1-\theta^2)z_3+\theta^2(z_1-z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2[(1-\theta^2)z_3+\theta^2(z_1-z_2)] \\ z_3 & z_3(\theta z_1-\theta^2 z_2) \end{vmatrix}.$$

Type XIX (six substitutions). — G dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1[qz_3+z_1(z_1-z_2)] \\ z_2 & z_2[qz_3+z_1(z_1-z_2)] \\ z_3 & -z_1[(z_1-z_2)z_3+z_2 b] \end{vmatrix},$$

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1\,[z_2z_3(\theta-1)+b(z_1-z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2[z_2z_3(\theta-1)+b(z_1-z_2)] \\ z_3 & \theta^2 a z_3(\theta z_1-\theta^2 z_2) \end{vmatrix}.$$

q et b sont deux formes linéaires binaires en z_1, z_2, entre lesquelles existe l'identité

$$bq = z_1(z_1-z_2)+R(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)$$
$$(R = \text{const. arbitraire}),$$

et d'ailleurs quelconques; enfin

$$a = \sigma(b).$$

Type XX (six substitutions). — G dérive de

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1[qz_3+r(z_1-z_2)] \\ z_2 & z_2[qz_3+r(z_1-z_2)] \\ z_3 & -(z_1-z_2)(rz_1+z_2) \end{vmatrix}$$

et de

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 [p z_3 + b(z_1 - z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2 [p z_3 + b(z_1 - z_2)] \\ z_3 & z_3 a(\theta z_1 - \theta^2 z_2) \end{vmatrix};$$

p, q, r, b désignent des formes linéaires binaires en z_1, z_2 assujetties uniquement à satisfaire aux deux identités

$$p z_2 = r\,(z_1 - z_2) - (\theta z_1 - \theta^2 z_2)\sigma(r),$$
$$q b z_2 = r^2(z_1 - z_2) + R z_1(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2)$$
$$(R = \text{const. arbitraire});$$

enfin

$$a = \sigma(b).$$

Du type VI dérive le *type XXI* (douze substitutions). — G s'obtient en combinant au type XVII la substitution

$$B = \begin{vmatrix} z_1 & z_1[z_3(2z_1 + z_2) - z_1(z_1 + 2z_2)] \\ z_2 & z_2[z_3(2z_1 + z_2) - z_1(z_1 + 2z_2)] \\ z_3 & -z_1[-z_3(z_1 + 2z_2) + z_2(2z_1 + z_2)] \end{vmatrix}.$$

Du type VII dérive le *type XXII* (douze substitutions). — G s'obtient en combinant au type VII la substitution quadratique

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(\lambda z_3 + \mu c) \\ z_2 & \theta^2 z_2(\lambda z_3 + \mu c) \\ z_3 & b(\lambda' z_3 + \mu' c) \end{vmatrix};$$

où $b = \sigma(c)$, et entre les constantes λ, μ, λ', μ' existe l'équation

$$\lambda'^2 + \lambda\mu' + \mu\lambda' + \mu^2 = 0.$$

Quant aux valeurs des coefficients des six formes linéaires binaires p, q, P, Q, c, c', qui entrent dans l'expression des substitutions du type VII, ces valeurs sont fort compliquées et n'offrent rien de remarquable. Nous ne les donnerons pas.

Pour achever complètement l'étude des groupes cubiques d'ordre fini, il resterait :

1° A examiner comment se modifient les considérations précédentes quand les points fondamentaux se rapprochent infiniment les uns des autres suivant tous les groupements possibles;

2° A étudier les groupes cubiques pour lesquels le point fondamental double ω, défini comme plus haut, n'est plus le même pour les diverses substitutions cubiques du groupe.

Je n'entreprendrai pas pour le moment l'étude de ces deux questions.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALITÉS ET DÉFINITIONS.

1. On sait que le système des *points fondamentaux* d'une substitution cubique S se compose d'un point fondamental double ω et de quatre points fondamentaux simples a, b, c, d. Le système des *courbes fondamentales* se compose de la *conique fondamentale* qui passe par les cinq points ω, a, b, c, d et des quatre *rayons fondamentaux* $\overline{\omega a}$, $\overline{\omega b}$, $\overline{\omega c}$, $\overline{\omega d}$. Soient de même ω, a', b', c', d' les points fondamentaux de S^{-1}. Je désignerai S par le symbole

$$S\begin{cases}\omega abcd\\ \omega a'b'c'd'\end{cases}\qquad\text{ou bien}\qquad S\begin{cases}abcd\\ a'b'c'd'\end{cases},$$

1° si S fait correspondre au point a tous les points du rayon fondamental $\overline{\omega a'}$, ...; 2° si à tous les points du rayon $\overline{\omega a}$ S fait correspondre le point unique a', ...; 3° si S fait correspondre à ω tous les points de la conique $\omega a'b'c'd'$, et si S^{-1} fait correspondre à ω tous les points de la conique $\omega abcd$. Les points a et a', b et b', ... seront dits *correspondants* (*voir*, pour toutes les définitions précédentes, le Tome II des *Leçons de Géométrie de Clebsch*, traduction Benoist).

J'appellerai, dans tout ce qui suit, *facteur fondamental* une expression qui, égalée à zéro, donne l'équation d'une ligne fondamentale.

L'application d'un théorème déjà connu (3°, premier Mémoire) fournit comme corollaires les deux lemmes suivants que j'énoncerai sans démonstration :

Lemme I. — *Le produit* S′S *de deux substitutions cubiques est :*

Cubique si S′ *et* S^{-1} *ont deux points fondamentaux communs ;*
Quadratique si S′ *et* S^{-1} *ont trois points fondamentaux communs ;*
Linéaire si S′ *et* S^{-1} *ont quatre points fondamentaux communs,*

sans compter, bien entendu, le point fondamental double commun ω.

Lemme II. — *Le produit* sS *d'une substitution quadratique par une substitution cubique est :*

Cubique, si 1° s *a* ω *pour point fondamental et encore un autre point fondamental commun avec* S^{-1}, *ou bien si* 2° s *a ses trois points fondamentaux communs avec* S^{-1} ;
Quadratique, si s *a* ω *pour point fondamental et ses deux autres points fondamentaux communs avec* S^{-1}.

D'ailleurs, on ne peut avoir $s\mathrm{S} = l$, l étant linéaire ; car il viendrait $s = l\mathrm{S}^{-1}$; une substitution quadratique serait identique à une cubique, ce qui est absurde.

2. J'appelle substitution de la forme r la substitution d'ordre n

$$r = \begin{vmatrix} z_1 & (a_{11}z_1 + a_{12}z_2)(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_2 & (a_{21}z_1 + a_{22}z_2)(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_3 & \mathrm{P}_{n-1}z_3 + \mathrm{P}_n \end{vmatrix},$$

les a désignant des constantes, et les p et P des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice.

On peut écrire aussi

$$r = \begin{vmatrix} z_1 & \rho(z_1)(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_2 & \rho(z_2)(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_3 & \mathrm{P}_{n-1}z_3 + \mathrm{P}_n \end{vmatrix},$$

en désignant par ρ la substitution linéaire binaire

$$\rho = \begin{vmatrix} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \end{vmatrix}.$$

La substitution ρ est dite la substitution *directrice* de r. Cela posé, un calcul simple démontre les lemmes suivants :

LEMME I. — *Le produit $r'r$ de deux substitutions de la forme r est aussi de la forme r, et la substitution directrice du produit $r'r$ est le produit $\rho'\rho$ des substitutions directrices ρ et ρ' de r et r'.*

De là découlent les corollaires :

COROLLAIRE I. — *Les substitutions de la forme r forment un groupe* R.

COROLLAIRE II. — *Le groupe* R *est isomorphe à un groupe Σ entre deux variables, dérivé des substitutions linéaires ρ.*

LEMME II. — *Le groupe linéaire Σ, défini comme il vient d'être dit, est d'ordre fini.*

Prenons dans G une substitution $r(r^k = 1)$ de directrice ρ. Appelons ω le point $z_1 = z_2 = 0$; soient

x un point *quelconque* du plan;
$x^{(k)}$ le point $r^k(x)$;
ξ et $\xi^{(k)}$ les directions $\overline{\omega x}$ et $\overline{\omega x^{(k)}}$.

On a

$$x = x^{(k)}, \qquad \xi = \xi^{(k)};$$

mais $\xi^{(k)} = \rho^k(\xi)$: donc $\rho^k = 1$; ρ est *quelconque* dans Σ, et le lemme est démontré.

Passons maintenant à l'étude des groupes cubiques G.

3. Prenons $z_1 = z_2 = 0$ pour coordonnées du point ω. Je dis que toute substitution de G sera de la forme r. Nous allons démontrer successivement la proposition pour une substitution cubique S, linéaire L, quadratique s.

1° *Une substitution cubique* S *de* G *est de la forme* r. En effet, la cubique générale φ du réseau de S a en $\omega(z_1 = z_2 = 0)$ un point double et $\varphi = \varphi_2 z_3 + \varphi_3$, φ_2 et φ_3 étant des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice. De plus, à toute droite issue de ω, S^{-1} fait correspondre une cubique $ap = 0$, $a = 0$ étant une droite passant par ω (et, par suite, $a = a_1 z_1 + a_2 z_2$), et $p = 0$ étant la conique fondamentale de S ($p = p_1 z_3 + p_2$, où p_1 et p_2 désignent des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice). Remarquons que les droites $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ passent par ω : il vient pour S l'expression

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & (a_{11} z_1 + a_{12} z_2)(p_1 z_3 + p_2) \\ z_2 & (a_{21} z_1 + a_{22} z_2)(p_1 z_3 + p_2) \\ z_3 & P_2 z_3 + P_3 \end{vmatrix},$$

qui est bien de la forme r. C. Q. F. D.

2° *Une substitution linéaire* L *est de la forme* r. En effet, prenons une substitution cubique S de G; S aura ω pour point fondamental double. SL sera cubique; elle aura aussi, par hypothèse, ω pour point fondamental double : L laisse donc ω immobile, et l'on a

$$L = \begin{vmatrix} z_1 & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ z_2 & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \\ z_3 & p_0 z_3 + p_1 \end{vmatrix},$$

p_1 étant linéaire en z_1, z_2,

L est donc bien de la forme r.

3° *Une substitution quadratique* s *est de la forme* r.

Remarquons d'abord qu'une substitution quadratique de la forme r est du symbole

$$\left\{ \begin{matrix} \omega \dots \\ \omega \dots \end{matrix} \right. .$$

Cela posé, soit T une substitution de G quadratique et non de la forme r; considérons le produit $u = \mathrm{TS}$ de T par une substitution cubique S de G; u ne peut être linéaire (1°, lemme II), ni cubique, car alors u serait de la forme r, ainsi que S, et $\mathrm{T} = u\mathrm{S}^{-1}$ serait aussi de la forme r, ce qui est contre l'hypothèse; u ne peut donc être que quadratique; T a ω pour point fondamental et ses deux autres points fondamentaux communs avec S^{-1} (1°, lemme II). On peut donc écrire

$$\mathrm{T}\left\{\begin{matrix}\omega a b\\ a'\omega b'\end{matrix}\right.,\qquad \mathrm{S}^{-1}\left\{\begin{matrix}abcd\\ \ldots\ldots\end{matrix}\right..$$

T est bien de la forme écrite, puisqu'on ne peut avoir $\mathrm{T}\left\{\begin{matrix}\omega\ldots\\ \omega\ldots\end{matrix}\right.$ et que T^{-1} a aussi ω pour point fondamental, car on peut raisonner sur T^{-1} comme on vient de le faire sur T. La substitution $v = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$ ne peut être, en vertu de ce qui précède, que quadratique : donc ω est aussi point fondamental pour v. Effectuons le produit $v = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$; après séparation des facteurs fondamentaux $(z\omega b')^2$, $(za'b')$, $(z\omega a')$, il reste pour v la substitution quadratique (*voir*, pour la manière de faire le produit de deux substitutions, le premier Mémoire, 2°, 3°, 4°)

$$v\left\{\begin{matrix}a'\,\mathrm{T}(c)\,\mathrm{T}(d)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{matrix}\right.;$$

v doit avoir, comme T, ω pour point fondamental; il faut, par suite, que $\mathrm{T}(c) = \omega$ ou $\mathrm{T}(d) = \omega$; dans le premier cas, ω, b, c sont en ligne droite; dans le second cas, ce sont les points ω, b, d, puisque $\overline{\omega b}$ est la droite fondamentale de T qui correspond au point fondamental ω de T^{-1} (premier Mémoire, *passim*). La substitution S aurait donc deux points fondamentaux b, c en ligne droite avec ω; cela est absurde, car alors la droite $\overline{\omega b}$ couperait quatre fois la cubique générale φ du réseau de S, savoir : en b, en c et deux fois en ω. Il se détacherait de φ la droite $\overline{\omega bc}$, et S ne serait plus cubique, ce qui est contre l'hypothèse.

Une substitution quadratique de G est, par suite, forcément de la forme r.

Le groupe G étant exclusivement composé, comme on vient de le voir, de substitutions de la forme r, on a, par application des lemmes du 2°, le théorème capital suivant :

THÉORÈME. — *Un groupe cubique* G *d'ordre fini est isomorphe à un groupe linéaire binaire* Σ *d'ordre fini, appelé groupe* directeur *de* G.

Le groupe Γ, contenu dans G et correspondant à la substitution unité de Σ, est dit groupe *normal;* les substitutions de Γ auront l'unité pour directrice et seront aussi dites *normales.*

4. Avant de passer à la construction des groupes normaux, je démontrerai trois propositions importantes d'un continuel usage dans la suite.

LEMME. — *Soient* $a, a', a'', \ldots$ *les points qui sont fondamentaux pour l'une au moins des substitutions de* G; *on ne pourra trouver sur une droite quelconque issue de* ω *plus d'un point fondamental* $a, a', \ldots$.

Remarquons d'abord qu'une substitution de G d'ordre $n(n = 2$ ou $3)$

$$\mathrm{S}\left\{\begin{matrix} ab\ldots \\ \ldots\ldots \end{matrix}\right.$$

ne peut avoir ses deux points fondamentaux a et b en ligne droite avec ω; en effet, la droite $\overline{\omega ab}$ couperait $n+1$ fois la courbe générale φ du réseau de S, savoir : $n-1$ fois en ω, en b et en a; φ est d'ordre n et se décomposerait en une courbe d'ordre $n-1$, après séparation de la droite $\overline{\omega ab}$; S serait, par suite, d'ordre $n-1$, ce qui est absurde.

Soient maintenant S et S' deux substitutions de G

$$\mathrm{S}\left\{\begin{matrix} a\ldots \\ \alpha\ldots \end{matrix}\right., \qquad \mathrm{S}'\left\{\begin{matrix} a'\ldots \\ \alpha'\ldots \end{matrix}\right.,$$

et supposons ω, α, a' en ligne droite. Aux divers points de la droite $\overline{\omega\alpha}$, S^{-1} fait correspondre les diverses directions issues de a (*Clebsch*,

t. II, p. 197). La substitution S′S a pour courbe générale de son réseau Sφ' (φ' étant la courbe générale du réseau de S′); φ' coupe $\omega\alpha$ en un point fixe a', et Sφ' touche, par suite, en a une direction fixe; en d'autres termes, S′S a en a deux points fondamentaux infiniment rapprochés, ce qui est contraire à nos hypothèses initiales. Les points ω, a', α ne peuvent être en ligne droite.

On pourrait objecter que la droite $\overline{\omega a}$ se sépare de Sφ', mais cela est absurde, car alors α figure parmi les points fondamentaux de S′ (3° et 4° du premier Mémoire); S′ aurait ses trois points fondamentaux ω, a', α en ligne droite, ce qui est impossible.

Le lemme permet de définir sans ambiguïté un point fondamental par la direction qui le joint à ω.

Théorème II. — *Si l'on transforme par la directrice la direction d'un point fondamental, on obtient la direction du point fondamental correspondant.*

Soit une substitution de la forme r et d'ordre $n = 2$ ou 3

$$r = \begin{vmatrix} z_1 & \rho(z_1)(p_{n-2}z_3+p_{n-1}) \\ z_2 & \rho(z_2)(p_{n-2}z_3+p_{n-1}) \\ z_3 & P_{n-1}z_3+P_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & \rho(z_1)p \\ z_2 & \rho(z_2)p \\ z_3 & P \end{vmatrix}.$$

Les points fondamentaux se trouvent à l'intersection des courbes $p = 0$ et $P = 0$; la forme binaire d'ordre $2n-2$ en z_1, z_2

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ P_{n-1} & P_n \end{vmatrix},$$

donne, égalée à zéro, le produit des $2n-2$ directions fondamentales. Soit x un point fondamental; désignons par p'_{n-2}, ... ce que devient p_{n-2}, ... quand on remplace les coordonnées courantes par celles de x, et prenons les coordonnées

$$\lambda x'_1 = x_1, \qquad \lambda x'_2 = x_2, \qquad \lambda x'_3 = x_3+\zeta, \qquad \lambda = \text{const. quelconque},$$

d'un point x' quelconque de la droite $\overline{\omega x}$. Les valeurs x_1, x_2 vérifient l'équation $\Delta = 0$, et les coordonnées du point y transformé de x' par r sont

$$\rho(x_1)\zeta p'_{n-2}, \qquad \rho(x_2)\zeta p'_{n-2}, \qquad P'_{n-1}\zeta,$$

c'est-à-dire que y est indépendant de la position de x' sur $\overline{\omega x}$, position définie par la valeur du paramètre ζ; y est donc le point fondamental de r^{-1} correspondant à x, la direction $\overline{\omega y}$ est définie par

$$z_2\rho(x_1) - z_1\rho(x_2) = 0,$$

la direction $\overline{\omega x}$ par

$$z_2 x_1 - z_1 x_2 = 0,$$

et le théorème est démontré.

Théorème III. — *Le groupe directeur* Σ *d'un groupe cubique* G *permute entre elles les directions fondamentales.*

Soient

a un point fondamental;
S une substitution de G;
σ la substitution de Σ directrice de S.

Si a est fondamental pour S, le théorème précédent montre que $\sigma(a)$ est une direction fondamentale de S^{-1}. Si a n'est pas fondamental de S, soit S′ la substitution de G dont a est un fondamental, le point $S(a)$ sera un fondamental de $S'S^{-1}$ (4°, premier Mémoire), la direction $\sigma(a)$ est fondamentale pour $S'S^{-1}$. Le théorème se trouve complètement démontré.

Le corollaire des deux propositions précédentes est le suivant :

Théorème IV. — *Le groupe directeur* Σ *est isomorphe à un groupe entre* N *lettres,* N *étant le nombre total des points fondamentaux.*

Cela est évident, puisque Σ permute entre elles les directions fondamentales (théorème III) et qu'il n'y a qu'un point fondamental (lemme) sur chacune de ces directions.

DEUXIÈME PARTIE.

GROUPES NORMAUX.

5. Lemme. — *Une substitution normale ne peut être linéaire, sans se réduire à l'unité.*

Soit L une pareille substitution; S, substitution cubique de G, sera

$$S\left\{\begin{array}{l} abcd \\ \ldots\ldots \end{array}\right. .$$

Les points fondamentaux de SL seront a', b', c', d' en posant $a' = L^{-1}(a)$, ...; mais a et a', b et b' sont sur une même droite issue de ω, donc (4°, lemme) a' se confond avec a, b' avec b, etc., et L laisse immobile les quatre points a, b, c, d; ces quatre points ne sont pas en ligne droite, car la cubique φ du réseau de S se décomposerait et S ne serait plus cubique. L laissant immobile les quatre points a, b, c, d se réduit à l'unité d'après les propriétés connues des substitutions linéaires.

Théorème. — *Une substitution normale a pour carré l'unité.*

Soit A une substitution normale, a un de ses points fondamentaux. Le fondamental de A^{-1} correspondant à a est sur $\overline{\omega a}$, puisque la directrice se réduit à l'unité : a se confond ainsi avec son correspondant (4°, lemme et théorème II); A et A^{-1} ont quatre fondamentaux communs, A^2 est linéaire (1°, lemme I) et, comme A^2 est normale, $A^2 = 1$. Nous venons de supposer A cubique : la démonstration serait la même si A était quadratique; A et A^{-1} auraient seulement deux fondamentaux communs au lieu de quatre et encore $A^2 = 1$.

Il résulte de là que A et A^{-1} sont identiques; si l'on pose

$$A = \left| \begin{array}{ll} z_1 & z_1(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_2 & z_2(p_{n-2}z_3 + p_{n-1}) \\ z_3 & P_{n-1}z_3 + P_n \end{array} \right| . \qquad (n = 2 \text{ ou } 3),$$

un calcul simple montre que

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(p_{n-2}z_3 - P_{n-1}) \\ z_2 & z_2(p_{n-2}z_3 - P_{n-1}) \\ z_3 & -p_{n-1}z_3 + P_n \end{vmatrix};$$

d'où identiquement $P_{n-1} = -p_{n-1}$. Je prendrai dorénavant, par suite, une substitution normale sous la forme

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(a_{n-2}z_3 + a_{n-1}) \\ z_2 & z_2(a_{n-2}z_3 + a_{n-1}) \\ z_3 & -(a_{n-1}z_3 + a_n) \end{vmatrix},$$

les a étant des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice.

Le lieu des points z, tels que $A(z) = z$, est donné par les équations

$$\frac{z_1(a_{n-2}z_3 + a_{n-1})}{z_1} = \frac{z_2(a_{n-2}z_3 + a_{n-1})}{z_2} = \frac{-(a_{n-1}z_3 + a_n)}{z_3};$$

ce lieu est donc la courbe d'ordre n

$$\mathfrak{A} = a_{n-2}z_3^2 + 2a_{n-1}z_3 + a_n = 0,$$

que j'appelle courbe *invariante* de A.

La courbe fondamentale de A,

$$a_{n-2}z_3 + a_{n-1} = 0 = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z_3},$$

se trouve être la polaire de $\mathfrak{A}$ par rapport à ω et les $2n-2$ points fondamentaux sont les points de ramification de $\mathfrak{A}$ par rapport à ω (points de contact des tangentes issues de ω).

Posons $x' = A(x)$, x étant un point quelconque du plan; un calcul simple montre que x et x' sont harmoniquement placés par rapport aux deux points où $\overline{\omega x}$ coupe $\mathfrak{A}$.

D'ailleurs de la forme de A on déduit les égalités

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2, \qquad -x'_3 = \frac{a_{n-2}x_3 + a_{n-1}}{a_{n-1}x_3 + a_n},$$

en remplaçant dans les a les coordonnées courantes par celles de x. Posons $x_3 = \frac{t_1}{t_2}$, on voit que la substitution A équivaut pour les divers points de $\overline{\omega x}$, définis par les valeurs du rapport $x_3 = t_1 : t_2$, à la substitution linéaire

$$\alpha = \begin{vmatrix} t_1 & a_{n-2}t_1 + a_{n-1}t_2 \\ -t_2 & a_{n-1}t_1 + a_n t_2 \end{vmatrix};$$

un calcul simple fait voir que le groupe α' dérivé des substitutions α, qui correspondent aux diverses substitutions du groupe normal Γ, est isomorphe à Γ; l'isomorphisme est holoédrique parce qu'à la substitution unité de α' correspond la substitution unité de Γ.

La forme quadratique binaire en t_1, t_2

$$T_a = a_{n-2}t_1^2 + 2a_{n-1}t_1 t_2 + a_n t_2^2$$

est dite *forme caractéristique* de A.

Un calcul aisé conduit au lemme suivant :

Lemme. — *La forme caractéristique du produit* AA′ *de deux substitutions normales est proportionnelle* (*égale à un facteur constant près*) *au déterminant fonctionnel des formes caractéristiques de* A *et* A′, *multiplié par les facteurs fondamentaux communs à* A *et* A′.

6. Toutes les substitutions du groupe normal Γ ayant pour carré l'unité, le groupe linéaire α' se compose exclusivement de substitutions d'ordre deux. Cela n'est possible (Jordan, *Journal de Crelle*, t. 84, p. 111) que si α' est contenu dans le groupe tétraédrique et se compose de trois substitutions échangeables A, B, C dont chacune est identique au produit des deux autres. Les formes caractéristiques des trois substitutions A, B, C qui composent le groupe Γ sont donc chacune proportionnelles au déterminant fonctionnel des deux autres.

Le groupe Γ se compose de la sorte ou bien :

1° De deux substitutions 1 et A, ou

2° De quatre substitutions 1, A, B, C échangeables entre elles; chacune des substitutions A, B, C est égale au produit des deux autres.

Lemme. — *Chacune des courbes invariantes* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *passe par tous les points fondamentaux de* Γ.

Soit a un de ces points; s'il est fondamental pour A, il est situé évidemment sur $\mathfrak{A}$. Si a est fondamental pour B, je dis que a n'en est pas moins situé sur $\mathfrak{A}$; d'après la définition même de la courbe invariante, il suffira de prouver que $A(a) = a$. Cela est aisé : $A(a)$ est fondamental pour BA (premier Mémoire, 4°) et se trouve sur la direction $\overline{\omega a}$: donc $A(a)$ se confond avec a (4°, lemme). C. Q. F. D.

Il n'est nullement nécessaire pour la démonstration que B soit normale. Le lemme précédent n'est donc qu'un cas particulier d'un théorème important dont l'énoncé se trouve plus loin (13°).

Au sujet de l'ordre des substitutions de Γ, on peut faire les hypothèses suivantes, quant au *type* auquel appartient Γ :

Types.	
I..........	Substitution unité seule.
II..........	Substitution quadratique A.
III..........	Substitution cubique A.
IV..........	Substitutions quadratiques A, B, C.
V..........	Substitutions quadratiques A, C et cubique B.
VI..........	Substitutions cubiques B, C et quadratique A.
VII..........	Substitutions cubiques A, B, C.

En ayant égard à ce que : 1° les substitutions de Γ sont échangeables; 2° à ce que chacune d'elles (sauf l'unité) est égale au produit des deux autres, et en appliquant les lemmes du 1°, on voit que les diverses substitutions qui composent les différents types de Γ peuvent se représenter par les symboles suivants, quant à leurs points fondamentaux :

Type I (pour mémoire).

Type II (deux points fondamentaux)

$$A\left\{\begin{matrix} a & b \\ a & b \end{matrix}\right..$$

Type III (quatre points fondamentaux)

$$A\left\{\begin{matrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{matrix}\right..$$

Type IV (trois points fondamentaux)

$$A\left\{\begin{matrix} b & c \\ b & c \end{matrix}\right., \qquad B\left\{\begin{matrix} c & a \\ c & a \end{matrix}\right. \qquad \text{et} \qquad C\left\{\begin{matrix} a & b \\ a & b \end{matrix}\right..$$

Type V (quatre points fondamentaux)

$$A\left\{\begin{matrix} b & a \\ b & a \end{matrix}\right., \qquad C\left\{\begin{matrix} c & d \\ c & d \end{matrix}\right., \qquad B\left\{\begin{matrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{matrix}\right..$$

Type VI (cinq points fondamentaux)

$$A\left\{\begin{matrix} b & c \\ b & c \end{matrix}\right., \qquad B\left\{\begin{matrix} a & d & e & c \\ a & d & e & c \end{matrix}\right., \qquad C\left\{\begin{matrix} a & d & e & b \\ a & d & e & b \end{matrix}\right..$$

Type VII (six points fondamentaux)

$$A\left\{\begin{matrix} b & c & b' & c' \\ b & c & b' & c' \end{matrix}\right., \qquad B\left\{\begin{matrix} a & c & a' & c' \\ a & c & a' & c' \end{matrix}\right., \qquad C\left\{\begin{matrix} a & b & a' & b' \\ a & b & a' & b' \end{matrix}\right..$$

Nous allons construire successivement les six types normaux différents de l'unité. Je conviendrai d'appeler par la même lettre un fondamental et la forme linéaire binaire en z_1, z_2 qui, égalée à zéro, donne la direction de ce fondamental. Ainsi $a = a_2 z_1 - a_1 z_2, \ldots$. Je me bornerai pour chaque substitution à donner sa *forme caractéristique* en t_1, t_2. Soit en effet $T(t_1, t_2)$ la forme caractéristique d'une substitution normale A : on a

$$T = a_{n-2}t_1^2 + 2a_{n-1}t_1t_2 + a_nt_2^2,$$

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1(a_{n-2}z_3 + a_{n-1}) \\ z_2 & z_2(a_{n-2}z_3 + a_{n-1}) \\ z_3 & -(a_{n-1}z_3 + a_n) \end{vmatrix};$$

on peut écrire par conséquent

$$A = \begin{vmatrix} z_1 & z_1\dfrac{\partial T}{\partial t_1} \\ z_2 & z_2\dfrac{\partial T}{\partial t_1} \\ z_3 & -\dfrac{\partial T}{\partial t_2} \end{vmatrix}, \qquad \text{où} \qquad t_1 = z_3, \qquad t_2 = 1.$$

La substitution A se trouve déterminée. La forme caractéristique est d'ailleurs l'équation de la courbe invariante rendue entière après qu'on a posé $z_3 = t_1 : t_2$.

7. Γ *est du type II.* — Prenons le système des coordonnées suivant

$$(zab) = z_3 = 0,$$

pour équation de $\overline{ab}$;

$$a = z_1 = 0, \qquad b = z_2 = 0$$

pour les directions $\overline{\omega a}$ et $\overline{\omega b}$.

Il vient par suite, puisque la conique $\mathfrak{A}$ touche $\overline{\omega a}$ en a et $\overline{\omega b}$ en b,

$$\mathfrak{A} = z_3^2 - z_1z_2.$$

A a l'expression indiquée dans l'Introduction (groupe II).

8. Γ *est du type III.* — Prenons les coordonnées de façon que l'on ait

$$(zab) = z_3 = 0,$$

pour équation de $\overline{ab}$,

$$a = z_1 = 0, \qquad b = z_2 = 0$$

pour équations de $\overline{\omega a}$ et $\overline{\omega b}$.

La cubique $\mathfrak{A}$ a deux points de ramification en

$$z_1 = z_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad z_2 = z_3 = 0,$$

par suite

$$\mathfrak{A} = p z_3^2 + 2 z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 \mathrm{P},$$

p et P étant linéaires en z_1, z_2; d'ailleurs

$$z_1 z_2 - p\mathrm{P} = cd,$$

à un facteur constant près.

Γ a la forme indiquée dans l'Introduction (groupe III).

9. Γ *est du type IV.* — Donnons pour coordonnées aux points

$$\begin{array}{lll} a\ldots\ldots & z_1 = z_3 = 0, & z_2 = 1, \\ b\ldots\ldots & z_2 = z_3 = 0, & z_1 = 1, \\ c\ldots\ldots & z_1 = z_2 = z_3 & = 1. \end{array}$$

On trouve facilement, par la Géométrie ordinaire,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= z_3^2 \qquad\qquad - z_1 z_2, \\ \mathfrak{B} &= z_3^2 - 2 z_2 z_3 + z_1 z_2, \\ \mathfrak{C} &= z_3^2 - 2 z_1 z_3 + z_1 z_2, \end{aligned}$$

et l'on vérifie que le déterminant fonctionnel de deux formes caractéristiques est proportionnel à la troisième.

On trouve donc le groupe IV de l'Introduction.

10. Γ *est du type V.* — Donnons pour coordonnées aux points

$$\begin{array}{ll} a\ldots\ldots\ldots & z_1 = z_3 = 0, \\ b\ldots\ldots\ldots & z_2 = z_3 = 0. \end{array}$$

Il viendra, comme plus haut, pour $\mathfrak{A}$ (7)

$$\mathfrak{A} = z_3^2 - z_1 z_2,$$

et pour $\mathfrak{B}$ (8)

$$\mathfrak{B} = p z_3^2 + 2 z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 \mathrm{P}.$$

Enfin $\mathfrak{C}$ est proportionnel au déterminant fonctionnel des formes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$; donc

$$\mathfrak{C} = z_3^2 + (\mathrm{P} + p) z_3 + z_1 z_2.$$

Écrivons maintenant que le déterminant fonctionnel de $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ est proportionnel à $\mathfrak{A}$; on trouve la condition $p = \mathrm{P}$, qui est d'ailleurs suffisante. En résumé, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= z_3^2 && - z_1 z_2, \\ \mathfrak{B} &= p z_3^2 + 2 z_1 z_2 z_3 && + z_1 z_2 p, \\ \mathfrak{C} &= z_3^2 + 2 p z_3 && + z_1 z_2 \end{aligned}$$

($p =$ forme linéaire binaire en z_1, z_2).

On retrouve le groupe V de l'Introduction.

11. Γ *est du type VI.* — Donnons encore pour coordonnées aux points

$$b \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z_1 = z_3 = 0,$$
$$c \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z_2 = z_3 = 0.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= z_3^2 && - z_1 z_2, \\ \mathfrak{B} &= p z_3^2 + 2 m z_2 z_3 && + z_1 z_2 \mathrm{P}, \\ \mathfrak{C} &= q z_3^2 + 2 n z_1 z_3 && + z_1 z_2 \mathrm{Q} \end{aligned}$$

(m, n, p, q, P, Q $=$ formes linéaires binaires en z_1, z_2); et, en écrivant que le déterminant fonctionnel de deux formes quelconques est proportionnel à la troisième, on trouve

$$p = \mathrm{P} = n, \qquad q = \mathrm{Q} = m;$$

et

$$\mathfrak{A} = z_3^2 \qquad\qquad - z_1 z_2,$$
$$\mathfrak{B} = p z_3^2 + 2q z_1 z_3 + z_1 z_2 p,$$
$$\mathfrak{C} = q z_3^2 + 2p z_2 z_3 + z_1 z_2 q.$$

On trouve le groupe VI de l'Introduction en écrivant P pour q.

12. Γ *est du type VII.* — Prenons pour $z_3 = 0$ la droite $\overline{cc'}$. Il vient alors

$$\mathfrak{A} = p z_3^2 + 2cc' z_3 + cc' \mathrm{P},$$
$$\mathfrak{B} = q z_3^2 + 2cc' z_3 + cc' \mathrm{Q}$$

(p, P, q, Q, c, c' = formes linéaires binaires en z_1, z_2).

Le déterminant fonctionnel, après suppression de cc', donne

$$\mathfrak{C} = (p - q) z_3^2 + (p\mathrm{Q} - q\mathrm{P}) z_3^2 + cc'(\mathrm{Q} - \mathrm{P}).$$

Enfin la condition

$$p\mathrm{Q} + q\mathrm{P} = 2cc'$$

est nécessaire et suffisante pour que chaque forme soit proportionnelle au déterminant fonctionnel des deux autres.

On trouve ainsi le groupe VII de l'Introduction.

TROISIÈME PARTIE.

ÉTUDE DU GROUPE DIRECTEUR.

13. Nous nous proposons actuellement de formuler les relations qui existent entre la nature d'un groupe normal Γ et d'un groupe directeur Σ, qui appartiennent tous deux à un même groupe cubique G.

Lemme I. — *Un point fondamental du groupe* G *est situé sur* chacune *des courbes invariantes, qui appartiennent aux substitutions de* Γ.

Soient a un point fondamental quelconque de G et S une des substitutions de G pour lesquelles a est fondamental; soit A une substitution de Γ. Si a est fondamental pour A, a est sur $\mathfrak{A}$, sinon formons SA; $A(a)$ est fondamental pour SA et sur la droite $\overline{\omega a}$; par suite, $A(a) = a$ (**4**), a est situé sur $\mathfrak{A}$.

Corollaires. — *Si* Γ *se compose d'une substitution unique* A, *tous les points fondamentaux de* G *sont situés sur* $\mathfrak{A}$.

Si Γ *se compose de plus d'une substitution,* G *ne peut avoir pour points fondamentaux que les points communs à toutes les courbes invariantes.* Ainsi G ne peut avoir pour points fondamentaux :

1° Que les trois points a, b, c si Γ est du type IV (**6**);
2° Que les quatre points a, b, c, d si Γ est du type V (**6**);
3° Que les cinq points a, b, c, d, e si Γ est du type VI (**6**);
4° Que les six points a, b, c, a', b', c' si Γ est du type VII (**6**).

Enfin G ne peut être cubique si Γ est du type IV, puisqu'il faut quatre fondamentaux pour une substitution cubique.

Lemme II. — *Le groupe directeur* Σ *permute entre eux les* discriminants *des substitutions de* Γ.

J'appelle *discriminant* d'une substitution normale le discriminant de sa forme binaire caractéristique (**5**) ou, si l'on veut, le produit des directions fondamentales.

Pour démontrer le lemme, je remarque que les substitutions de G transforment les unes dans les autres les diverses courbes invariantes qui appartiennent aux substitutions de Γ. En effet, Γ est permutable aux substitutions de G par définition de (**3**), et, si A est normale, on a

$$S^{-1}AS = A',$$

S étant une substitution de G et A' normale.

De l'égalité

$$S^{-1}AS = A',$$

on tire

$$S^{-1}A(z) = A'S^{-1}(z),$$

z étant un point *quelconque* du plan; si l'on place z sur $\mathfrak{A}$,

$$A(z) = z, \qquad S^{-1}(z) = A'S^{-1}(z),$$

et, tandis que z parcourt $\mathfrak{A}$, $S^{-1}(z)$ parcourt $\mathfrak{A}'$; la transformée $S\mathfrak{A}$ est donc $\mathfrak{A}'$, après suppression de facteurs fondamentaux.

Soit, par conséquent, la courbe invariante d'ordre $m(= 2$ ou $3)$

$$\mathfrak{A} = a_{m-2}z_3^2 + 2a_{m-1}z_3 + a_m = 0;$$

appelons δ le discriminant

$$\delta = a_{m-1}^2 - a_{m-2}a_m.$$

Prenons dans G la substitution S d'ordre n et de directrice σ

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \sigma(z_1)p \\ z_2 & \sigma(z_2)p \\ z_3 & P \end{vmatrix}, \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} p = p_{n-2}z_3 + p_{n-1}, \\ P = P_{n-1}z_3 + P_n, \end{cases}$$

et les p et P désignent des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice; appelons Δ le déterminant d'ordre $2(n-1)$ en z_1, z_2

$$\begin{vmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ P_{n-1} & P_n \end{vmatrix} = \Delta;$$

$\Delta = 0$ représente le produit des $2(n-1)$ directions fondamentales de S.

La courbe $\mathfrak{A}$ passe $m-2$ fois par ω et *une* fois par *chacun* des points fondamentaux de S^{-1} (lemme I); par suite [premier Mémoire (**2**), théorème auxiliaire],

$$S\mathfrak{A} = p^{m-2}\Delta\mathfrak{A}',$$

$\mathfrak{A}'$ étant aussi une courbe invariante dont δ' soit le discriminant. D'ailleurs

$$\begin{aligned} S\mathfrak{A} &= p^{m-2}F \\ &= p^{m-2}[P^2\sigma(a_{m-2}) + 2Pp\sigma(a_{m-1}) + p^2\sigma(a_m)] = p^{m-2}\Delta\mathfrak{A}', \end{aligned}$$

et enfin identiquement

$$F = \Delta \mathfrak{A}'. \tag{1}$$

Le discriminant du premier membre de l'identité (1) est $\Delta^2 \sigma(\delta)$. En effet, en posant $z_3 = t_1 : t_2$, on voit que F est la transformée de la forme binaire

$$t = t_1^2 \sigma(a_{m-2}) + 2 t_1 t_2 \sigma(a_{m-1}) + t_2^2 \sigma(a_m)$$

par la substitution linéaire

$$\varpi = \begin{vmatrix} t_1 & p_{n-2} t_1 + p_{n-1} t_2 \\ t_2 & P_{n-1} t_1 + P_n t_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 & p \\ t_2 & P \end{vmatrix},$$

dont Δ est le déterminant; le discriminant de F est donc le produit du discriminant $\sigma(\delta)$ de t par le carré du déterminant Δ.

Le second membre de l'identité (1) a pour discriminant $\Delta^2 \delta'$; il vient, par suite,

$$\delta' = \sigma(\delta),$$

et le lemme est démontré, puisque δ' est le discriminant de A'. Les déplacements effectués par les substitutions S de G sur les substitutions de Γ ou, ce qui revient au même, sur leurs discriminants, forment un groupe T isomorphe à Σ.

Lemme III. — *Le groupe* T, *qui vient d'être défini, ne peut permuter entre elles que les substitutions normales de même ordre.*

Cela est évident; reprenons nos notations précédentes : δ' a pour ordre $2(m'-1)$, m' = ordre A', mais $\delta' = \sigma(\delta)$ est d'ordre

$$2(m-1), \qquad \text{d'où} \qquad m' = m. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

14. Appliquons les trois lemmes précédents aux divers types de Γ, en laissant de côté les groupes I et IV (**6**). Si, en effet, Γ se réduit à l'unité, Σ est *a priori* un quelconque des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à deux variables; si Γ est du type IV, G, comme on l'a vu, ne saurait être cubique.

Nous désignons, pour abréger, par la même lettre un point fondamental et la forme linéaire qui, égalée à zéro, donne l'équation de la direction fondamentale : ainsi $a = 0$ représentera la droite $\overline{\omega a}$, etc.

Passons maintenant à l'énumération des types.

15. Γ *est du type II* (**6**). — Une substitution quelconque σ de Σ laisse fixe [(**13**), lemme II] le discriminant ab de la substitution quadratique normale unique. Si l'on prend a pour z_1, b pour z_2, Σ dérive des deux substitutions

$$\sigma = (a)(b) = \begin{vmatrix} z_1 & k_1 z_1 \\ z_2 & k_2 z_2 \end{vmatrix}, \quad k_i = \text{racine de l'unité}$$

et

$$\tau = (ab) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix}.$$

16. Γ *est du type III* (**6**). — Σ laisse fixe le discriminant $abcd$ de la substitution cubique normale unique. Σ est contenu dans le groupe octaédrique (JORDAN, *Journal de Crelle,* t. 84, p. 111).

17. Γ *est du type V* (**6**). — Il y a dans Γ deux substitutions quadratiques A et C et une cubique B. Le groupe T [(**13**), lemmes II et III] dérive de la substitution

$$(B)(AC),$$

et Σ dérive des substitutions

$$(ab)(cd) \quad \text{et} \quad (ac)(bd), \quad (a)(b)(cd),$$

puisqu'il doit laisser fixe le discriminant de B et permuter entre eux les discriminants de A et C. Σ est encore contenu dans le groupe octaédrique.

18. Γ *est du type VI* (**6**). — Alors T [(**13**), lemmes II et III] se réduit à la substitution

$$(A)(BC),$$

et Σ dérive des substitutions

$$\sigma = (bc)(d)(ac), \qquad \tau = (c)(b)(ade),$$

puisque Σ doit laisser fixe le discriminant bc de A et permuter entre eux les discriminants *bade* et *cade* de C et B.

Si l'on prend b pour z_1, c pour z_2; si $d = z_1 - z_2 = 0$, il vient

$$\sigma = \begin{vmatrix} z_1 & \theta\, z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \end{vmatrix}, \qquad \theta^3 = 1, \qquad \tau = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{vmatrix}.$$

19. Γ *est du type VII* (**6**). — T [(**13**), lemmes II et III] dérive de

$$(ABC) \quad \text{et} \quad (A)(BC),$$

et est le groupe général entre trois lettres. Σ doit permuter entre eux les discriminants

$$bcb'c', \quad aca'c', \quad aba'b'$$

de A, B, C; Σ permute entre eux les trois *couples*

$$aa', \quad bb', \quad cc'.$$

Σ est isomorphe, sans mériédrie, à un groupe U non primitif entre six lettres; par rapport à U, les trois systèmes de non-primitivité sont les trois couples précédents; Σ est le même qu'au n° **18**.

Après avoir exposé les propriétés générales des groupes Σ et Γ, qui appartiennent à un même groupe cubique G, nous allons faire une application de ces principes pour la construction effective d'une classe nombreuse de groupes cubiques, c'est-à-dire aux groupes normo-linéaires.

QUATRIÈME PARTIE.

GROUPES NORMO-LINÉAIRES.

20. J'appelle groupe *normo-linéaire* un groupe cubique formé par la combinaison du groupe normal Γ avec un groupe linéaire L, évidemment isomorphe à Σ.

Les substitutions l de L transforment évidemment les unes dans les autres les courbes invariantes de Γ et de la façon indiquée par la nature du groupe T (**13**, lemme II).

Si Γ se réduit à l'unité, G se réduit à L et devient l'un quelconque des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire homogène à trois variables (*voir* Camille Jordan, *Journal de Crelle*, t. 84).

Si Γ est du type II ou IV, G est quadratique : il est contenu dans le type I du premier Mémoire.

Il suffira donc de supposer Γ du type III, V, VI ou VII (**6**).

21. Γ *est du type III* (**6**). — Les substitutions l de L doivent laisser fixe la courbe $\mathfrak{A}$; elles laissent fixe ω, puisqu'elles sont linéaires (**3**), et aussi la tangente en ω à $\mathfrak{A}$; L dérive, par conséquent, d'une substitution unique l de directrice σ :

$$l=(ab)(cd),\qquad l=(d)(abc),\qquad l=(abcd),\qquad l=(a)(b)(cd).$$

Prenons l sous la forme canonique; comme l est d'ordre fini, cette forme canonique sera toujours

$$l=|\; z_1 \quad z_2 \quad z_2 \quad l_1 z_1 \quad l_2 z_2 \quad z_3 \;| \qquad (l_1^m = l_2^m = 1),$$

où

$$m=2,3,4 \qquad \text{et} \qquad l_1 \gtrless l_2,$$

puisque σ n'est pas l'unité.

La tangente en ω à $\mathfrak{A}$ reste invariable par l : on peut donc écrire

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2p_2 z_3 + P_3 = 0;$$

p_2, P_3 sont des formes binaires en z_1, z_2, d'ordre égal à l'indice.

Lemme I. — *La conique fondamentale* $\mathfrak{A}' = \dfrac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z_3}$ *de* A *est indécomposable.*

En effet, $\mathfrak{A}'$ est la conique des cinq points ω, a, b, c, d et touche $\mathfrak{A}$ en ω; supposons $\mathfrak{A}' = z_2 D$, car si $\mathfrak{A}'$ se décompose en deux droites, l'une est la tangente $z_2 = 0$ en ω à $\mathfrak{A}$. Aucun des points a, b, c, d ne peut être sur $z_2 = 0$, car alors il se confondrait avec ω; la droite $D = 0$

coupe la cubique générale φ du réseau de A en quatre points a, b, c, d, $\varphi = D\varphi'$, $\varphi' = 0$ étant une conique; A est quadratique, ce qui est absurde.

Lemme II. — *On ne peut avoir dans l'expression de l, $l_1 = 1$.*

Supposons, en effet,

$$l = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_1 \quad \lambda z_2 \quad z_3 \; |;$$

appelons r le point $z_1 = z_3 = 0$; l laisse fixe toute droite D issue de r et aussi la conique $\mathfrak{A}'$; l laisse fixes ou permute entre eux les deux points u et u', où D coupe $\mathfrak{A}'$, et σ laisse fixes ou permute entre elles les directions $\overline{\omega u}$ et $\overline{\omega u'}$; σ ne peut les laisser fixes, car on aurait *constamment* ($u = 0$ étant l'équation de $\overline{\omega u}$, etc.),

$$uu' = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 = 2),$$

tandis que D tournerait autour de r. On a nécessairement ainsi

$$\sigma = (uu'), \qquad \sigma^2 = 1, \qquad l^2 = 1, \qquad \lambda = -1.$$

Cela posé, appelons w, w', w'' les trois points où D coupe $\mathfrak{A}$; puisque $\sigma^2 = 1$, on a *constamment*, tandis que D tourne autour de r,

$$\sigma = (w)(w'w'').$$

Le point w étant fixe se confond avec r, qui est, par suite, sur $\mathfrak{A}$. Appelons $v_i (i = 1, 2, 3, 4)$ les points de contact des tangentes menées de r à $\mathfrak{A}$; l laisse fixe *chacun* des points v et σ chacune des directions $\overline{\omega v_i}$; par suite, à un facteur constant près,

$$v_1 v_2 v_3 v_4 = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 = 4).$$

Aucune des directions v ne peut être $z_1 = 0$, car la droite $z_1 = 0$ couperait $\mathfrak{A}$ en quatre points, savoir : en ω, en r et deux fois en v. La droite $z_2 = 0$ couperait, par suite, $\mathfrak{A}$ en quatrep oints v_1, v_2, v_3, v_4, ce qui est absurde, et le lemme est démontré.

Puisque, dans l'expression de l, $l_1 \gtrless 1$, le point $z_2 = z_3 = 0$ est le *seul* point de la droite $z_2 = 0$, que l laisse fixe; l laisse fixe le point tangentiel t de ω, les coordonnées de t sont, par suite, $z_2 = z_3 = 0$, et il vient, pour $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2p_2 z_3 + z_2 \mathrm{P}_2 = 0.$$

Remarquons qu'on ne peut avoir $\sigma = (a)(b)(cd)$, car alors l'une des directions a ou b se confondrait avec $z_2 = 0$, et un point fondamental viendrait en ω, ce qui est absurde.

Il suffira donc de faire successivement, pour examiner tous les cas possibles,

$$l = (ab)(cd), \qquad l = (d)(abc), \qquad l = (abcd).$$

22. Prenons d'abord

$$l = (ab)(cd).$$

On ne pourra avoir, pour la substitution l (**21**, lemme II), d'autre expression que

$$l = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad -z_1 \quad z_2 \quad z_3 \; |.$$

Considérons maintenant

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2p_2 z_3 + z_2 \mathrm{P}_2 = 0;$$

l laisse fixe la conique $\mathfrak{A}'$, et σ transforme en elle-même p_2, à un facteur constant près; p_2 ne peut être divisible par z_2 (**21**, lemme I) : p_2 ne contient donc que des puissances paires de z_1, z_2 et

$$p_2 = p_{21} z_1^2 + p_{22} z_2^2.$$

Considérons le discriminant

$$\delta = abcd = p_2^2 - z_2^2 \mathrm{P}_2;$$

σ laisse δ fixe (invariable à un facteur constant près), δ n'est pas divisible par z_1 ou z_2, puisque ni $z_1 = 0$ ni $z_2 = 0$ ne sont des directions fondamentales; δ ne contient, par suite, que des puissances paires de

z_1, z_2; p_2 est dans le même cas. Il en est donc pareillement de P_2 et

$$P_2 = P_{21} z_1^2 + P_{22} z_2^2.$$

Les conditions sont d'ailleurs suffisantes, et l'on retrouve le groupe du type VIII de l'Introduction, en supprimant les indices de P et p devenus inutiles.

23. Prenons maintenant

$$l = (d)(abc).$$

La direction d ne peut être que $z_1 = 0$. Je prends pour $z_3 = 0$ la droite $\overline{td}$ (t = point tangentiel $z_2 = z_3 = 0$ de ω); d est le point de ramification de $\mathfrak{A}$, et il vient

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2p z_1 z_3 + z_1 z_2 P = 0;$$

p, P = forme linéaire binaire en z_1, z_2. l laisse fixe $\mathfrak{A}'$, et σ laisse fixe $z_1 p$; comme $z_1 p$ n'est pas divisible par z_2 (**21**, lemme I), $p = k z_1$, k = const. Le discriminant

$$\delta = abc = k^2 z_1^4 - z_1 z_2^2 P$$

est égal à $z_1(z_1^3 - z_2^3)$, puisqu'on peut prendre $a = z_1 - z_2$. Il est nécessaire donc d'avoir

$$P = k^2 z_2$$

et

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2k z_1^2 z_3 + k^2 z_1 z_2^2 = 0.$$

Écrivons que l transforme la courbe $\mathfrak{A}$ en elle-même, il viendra

$$l_2 = l_1^2 = l_1 l_2^2;$$

d'où

$$l_1 = \theta, \qquad l_2 = \theta^2, \qquad \theta^2 + \theta + 1 = 0.$$

On trouve ainsi le type IX de l'Introduction, en écrivant $k z_3$ au lieu de z_3.

24. Prenons enfin

$$l = (abcd), \qquad \mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2p_2 z_3 + z_2 P_2 = 0.$$

Comme précédemment, on démontre que $p_2 = kz_1^2$; on peut supposer $a = z_1 - z_2$, et alors le discriminant $\delta = abcd = z_1^4 - z_2^4$ à un facteur constant près, mais

$$\delta = k^2 z_1^4 - z_2^2 P_2;$$

par conséquent,

$$P_2 = k^2 z_2^2$$

et

$$\mathfrak{A} = z_2 z_3^2 + 2k z_1^2 z_3 + k^2 z_2^3 = 0;$$

écrivons que l laisse fixe la courbe $\mathfrak{A}$, il viendra

$$l_2 = l_1^2 = l_2^3.$$

On ne peut supposer $l_2 = 1$, $l_1 = \pm 1$, car alors σ et l seraient d'ordre un ou deux, mais non quatre; par conséquent,

$$l_2 = -1, \qquad l_1 = i = \sqrt{-1},$$

On retrouve le type X de l'Introduction, en écrivant kz_3 au lieu de z_3.

25. Γ *est du type* $V(6)$. — Les substitutions de L laissent fixe la cubique $\mathfrak{D}$; par suite, on démontrera, comme plus haut (**21**), que L dérive d'une seule substitution l d'ordre $m = 2, 3, 4$. D'ailleurs L laisse fixes ou permute entre eux les discriminants ab et cd de A et de C; par suite, m ne peut être trois; si $m = 2$, $l = (ab)(cd)$ et laisse fixes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$, ou $l = (ac)(bd)$ et permute entre eux $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$. Si $m = 4$, $l = (acbd)$; on doit retrouver, par conséquent, pour $\mathfrak{B}$, les propriétés démontrées pour $\mathfrak{A}$ (**22** et **24**).

Lemme. — *On ne peut avoir* $l = (ac)(bd)$.

Prenons les coordonnées suivantes

$$a(z_1 = z_3 = 0), \qquad b(z_2 = z_3 = 0)$$

et, pour l, l'expression

$$l = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_2 \quad z_1 \quad z_3 \; |.$$

La conique $\mathfrak{A}$ passe par b et possède en a un point de ramification ; par suite,

$$\mathfrak{A} = z_3^2 + 2kz_1z_3 + \mathrm{K}z_1z_2 = 0 \qquad (k, \mathrm{K} = \text{const.}).$$

Pour $\mathfrak{C}$, en effectuant sur $\mathfrak{A}$ la substitution l, puisque l permute A et C, il vient

$$\mathfrak{C} = z_3^2 + 2kz_2z_3 + \mathrm{K}z_1z_2 = 0.$$

Le déterminant fonctionnel des formes caractéristiques de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ est

$$(1) \qquad k(z_1 - z_2)(z_3^2 - \mathrm{K}z_1z_2),$$

mais ce déterminant doit être $\mathfrak{B}$ à un facteur constant près, ce qui est impossible, puisque la courbe (1) est décomposable.

Le lemme est ainsi démontré.

Il nous suffira, par conséquent, de faire $l = (ab)(cd)$ et $l = (acbd)$.

26. Faisons $l = (ab)(cd)$, et prenons les mêmes coordonnées qu'au n° **10**, c'est-à-dire $a(z_1 = z_3 = 0)$, $b(z_2 = z_3 = 0)$. Il viendra, pour l, l'expression

$$l = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_2 \quad z_1 \quad z_3 \; |.$$

La tangente en ω à $\mathfrak{B}$ est $p = 0$, elle doit rester fixe, et, par suite, p est, à un facteur constant près, $z_1 + z_2$ ou $z_1 - z_2$.

$\mathfrak{B}$ a les mêmes propriétés que $\mathfrak{A}$ (**22**) ; on vérifie aisément que l laisse fixe toute droite issue du point tangentiel de ω par rapport à $\mathfrak{A}$; il doit en être de même du point tangentiel de ω par rapport à $\mathfrak{B}$: ce point doit donc être

$$z_1 + z_2 = z_3 = 0$$

et enfin

$$p = k(z_1 + z_2) \qquad (k = \text{const.})$$

On a ainsi

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= z_3^2 - z_1z_2 = 0 \\ \mathfrak{B} &= k(z_1+z_2)z_3^2 + 2z_1z_2z_3 + kz_1z_2(z_1+z_2) = 0 \\ \mathfrak{C} &= z_3^2 + 2k(z_1+z_2)z_3 + z_1z_2 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Nous avons construit le groupe XI de l'Introduction.

27. Faisons $l=(acbd)$, et prenons l sous sa forme canonique (**24**); il viendra

$$l = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad iz_1 \quad -z_2 \quad z_3 \; |$$

et

$$\mathfrak{B} = z_2 z_3^2 + 2z_1^2 z_3 + z_2^3 = 0.$$

Les coordonnées des points fondamentaux sont :

$$\begin{array}{llll}
\text{Pour } a, & z_1 = 1, & z_2 = 1, & z_3 = -1; \\
\text{»} \quad c, & z_1 = i, & z_2 = -1, & z_3 = -1; \\
\text{»} \quad b, & z_1 = -1, & z_2 = 1, & z_3 = -1; \\
\text{»} \quad d, & z_1 = -i, & z_2 = -1, & z_3 = -1.
\end{array}$$

Remarquons que l'on a

$$\mathfrak{A} = (zab)^2 - \mathrm{K}ab, \qquad \mathfrak{C} = (zcd)^2 - \mathrm{K}'cd,$$

K et K′ étant des constantes, que $\mathfrak{A}$ passe par c et d, $\mathfrak{C}$ par c et d. On construit aisément les coniques $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$, grâce aux valeurs ci-dessus des coordonnées de a, b, c, d. On trouve ainsi, pour les équations des trois courbes invariantes,

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{A} = z_3^2 + 2z_2 z_3 + 2z_1^2 - z_2^2 = 0 \\
\mathfrak{B} = z_2 z_3^2 + 2z_1^2 z_3 + z_2^3 = 0 \\
\mathfrak{C} = z_3^2 - 2z_2 z_3 - 2z_1^2 - z_2^2 = 0
\end{array}\right\}.$$

Nous avons construit le groupe XII de l'Introduction.

28. Γ *est du type VI* (**6**). — Prenons les mêmes coordonnées qu'au n° **11**. Faisant usage des propriétés démontrées au n° **18**, on voit que L dérive des deux substitutions

$$s = (bc)(d)(ae), \qquad t = (b)(c)(ade).$$

Nous avons pris, pour les coordonnées de

$$\begin{array}{ll}
b \ldots\ldots\ldots\ldots & z_1 = z_3 = 0, \\
c \ldots\ldots\ldots\ldots & z_2 = z_3 = 0;
\end{array}$$

achevons de déterminer les coordonnées en prenant

$$d \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z_1 = z_2 = z_3.$$

Il viendra

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad t = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (\theta^2 + \theta + 1 = 0).$$

Il reste à déterminer les fonctions linéaires p et P qui entrent dans l'expression de $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{B}$ (**11**). La substitution linéaire s laisse fixes les courbes $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ et, par suite, les tangentes $p = 0$ et $P = 0$ en ω à ces courbes; p ne peut être z_1, P ne peut être z_2, parce que $\mathfrak{B}' = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z_3}$ ou $\mathfrak{C}' = \frac{\partial \mathfrak{C}'}{\partial z_3}$ se décomposeraient (**21**, lemme I); ainsi

$$p = k z_2, \qquad P = K z_1 \qquad (k, K = \text{const.}).$$

Le discriminant δ, qui doit être $(z_1^3 - z_2^3) z_1$ pour $\mathfrak{B}$ à un facteur constant près, est

$$z_1(K^2 z_1^3 - k^2 z_2^3),$$

d'où

$$K^2 = k^2;$$

on peut toujours supposer $K = k$, puisqu'il est licite de changer z_3 en $-z_3$. Il vient, en définitive,

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= z_3^2 - z_1 z_2 = 0 \\ \mathfrak{B} &= z_2 z_3^2 + 2 z_1^2 z_3 + z_1 z_2^2 = 0 \\ \mathfrak{C} &= z_1 z_3^2 + 2 z_2^2 z_3 + z_1^2 z_2 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Nous obtenons le groupe XIII de l'Introduction.

29. Γ *est du type VII* (**6**). — Le groupe T, formé par les déplacements des trois courbes invariantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, est isomorphe (**13**, lemmes II et III, et **19**) à L; je dis que l'isomorphisme est holoédrique, et qu'à la substitution unité

$$(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})(\mathfrak{C})$$

de T correspond dans L la substitution unité. Supposons qu'il en soit autrement, et soit l une substitution de L, ayant σ pour directrice et laissant fixes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; σ laisse fixes les trois directions de tangentes menées de ω à $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$: donc $\sigma = 1$ et $l = 1$, si ces trois directions sont distinctes. S'il y avait deux tangentes confondues, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, par exemple, se toucheraient en ω; or $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ se touchent déjà en c et c', se coupent en a, a', b, b'; le nombre total des intersections serait de dix, savoir : deux en chacun des points ω, c, c' et une en chacun des points a, b, a', b'; deux cubiques indécomposables ne peuvent se couper en plus de neuf points sans coïncider, ce qui n'est pas. Il est donc nécessaire que l'isomorphisme de T et L soit holoédrique.

Le groupe T dérive des deux substitutions

$$s' = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \qquad \text{et} \qquad t' = (\mathfrak{A})(\mathfrak{B}\mathfrak{C});$$

soient s et t les substitutions correspondantes de L; prenons s sous forme canonique : il viendra

$$s = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad \theta z_1 \quad \theta^2 z_2 \quad z_3 \; |,$$
$$t = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_2 \quad z_1 \quad z_3 \; |.$$

Considérons $\mathfrak{A}$; le point tangentiel de ω est (**26**)

$$z_3 = z_1 + z_2 = 0.$$

Posons

$$\mathfrak{A} = a_1 z_3^2 + 2 a_2 z_3 + a_3 = 0,$$
$$\mathfrak{B} = b_1 z_3^2 + 2 b_2 z_3 + b_3 = 0,$$
$$\mathfrak{C} = c_2 z_3^2 + 2 c_2 z_3 + c_3 = 0,$$

où les a, b, c sont des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice. Il viendra

$$a_1 = z_1 + z_2, \qquad a_3 = (z_1 + z_2) q_2,$$

$q_2 =$ forme quadratique en z_1, z_2. Écrivons que t laisse fixe $\mathfrak{A}$, il viendra, en désignant par p, p', q, q' des constantes,

$$a_2 = p(z_1^2 + z_2^2) + p' z_1 z_2,$$
$$q_2 = q(z_1^2 + z_2^2) + q' z_1 z_2.$$

On a, par suite,

$$\begin{aligned}
a_1 &= z_1 + z_2,\\
a_2 &= p(z_1^2 + z_2^2) + p' z_1 z_2,\\
a_3 &= [q(z_1^2 + z_2^2) + q' z_1 z_2](z_1 + z_2);\\
b_1 &= \theta z_1 + \theta^2 z_2,\\
b_2 &= \ldots\ldots\ldots,\\
b_3 &= \ldots\ldots\ldots;\\
c_1 &= \theta^2 z_1 + \theta z_2,\\
c_2 &= p(\theta z_1^2 + \theta^2 z_2^2) + p' z_1 z_2,\\
c_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Le déterminant fonctionnel de $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ doit être égal à $aa'\mathfrak{A}$, à un facteur constant près. Ce déterminant est

$$z_3^2 \begin{vmatrix} \theta\ z_1 + \theta^2 z_2 & p(\theta^2 z_1^2 + \theta\ z_2^2) + p' z_1 z_2 \\ \theta^2 z_1 + \theta\ z_2 & p(\theta\ z_1^2 + \theta^2 z_2^2) + p' z_1 z_2 \end{vmatrix} + \ldots;$$

identifions avec $\mathrm{K}aa'\mathfrak{A}$, $\mathrm{K} = \text{const.}$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}aa'(z_1 + z_2) &= \begin{vmatrix} \theta z_1 + \theta^2 z_2 & p(\theta^2 z_1^2 + \theta z_2^2) + p' z_1 z_2 \\ \theta^2 z_1 + \theta z_2 & p(\theta z_1^2 + \theta^2 z_2^2) + p' z_1 z_2 \end{vmatrix}\\
&= (\theta - \theta^2)(z_1 - z_2)\\
&\quad \times [p(\theta z_1^2 + \theta^2 z_2^2) + p' z_1 z_2 + p(z_1 + z_2)(\theta^2 z_1 + \theta z_2)].
\end{aligned}$$

Le second membre de l'identité est divisible par $z_1 + z_2$: cela exige $p' = -p$, et l'identité devient

$$\mathrm{K}aa'(z_1 + z) = -p(\theta - \theta^2)(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)^2;$$

de là résulte

$$aa' = z_1^2 - z_2^2,$$
$$bb' = \theta^2 z_1^2 - \theta\, z_2^2,$$
$$cc' = \theta\, z_1^2 - \theta^2 z_2^2,$$

à des facteurs constants près.

Le discriminant $bb'cc'$ de $\mathfrak{A}$ est donc, à un facteur constant près,

$$z_1^4 + z_1^2 z_2^2 + z_2^4;$$

identifions avec $a_2^2 - a_1 a_3$, c'est-à-dire avec

$$p^2(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2)^2 - (z_1 + z_2)^2[q(z_1^2 + z_2^2) + q' z_1 z_2],$$

il vient

$$q' = -q, \qquad q = -2p^2.$$

L'expression de $\mathfrak{A}$ est par conséquent, en écrivant pz_3 au lieu de p, ce qui est licite,

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} = (z_1 + z_2) z_3^2 + 2(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2) z_3 \\ - 2(z_1 + z_2)(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2) = 0.\end{aligned}$$

D'ailleurs $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ s'obtiennent en transformant $\mathfrak{A}$ par s.

Nous avons construit le groupe XIV de l'Introduction.

CINQUIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

30. Nous ne construirons pas le tableau complet des groupes cubiques d'ordre fini, qui sont fort nombreux (une cinquantaine). Nous nous bornerons à montrer, sur un exemple simple, comment on peut donner l'expression effective des substitutions d'un groupe cubique G d'ordre fini, après qu'on a choisi le groupe normal Γ et le groupe directeur Σ.

L'exemple consistera dans la construction de tous les groupes G, dont le groupe directeur Σ est formé par les trois puissances de la substitution

$$\sigma = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 \\ z_2 & \theta^2 z_2 \end{vmatrix}, \qquad \theta^2 + \theta + 1 = 0.$$

En vertu des applications précédentes, Γ ne peut être ni du type IV (**6**), car alors G ne peut être cubique [(**13**), corollaires du lemme I], ni du type V (**6**), car alors Σ ne contient pas de substitution d'ordre trois (**16**). Nous allons supposer successivement Γ des types I, II, III, VI et VII (**6**).

31. Γ *est du type I.* — G n'a d'autre substitution normale que l'unité; appelons S la substitution de G qui correspond à σ; $S^3 = 1$, $S^2 = S^{-1}$: le carré de S doit être, par suite, cubique comme S, S et S^{-1} doivent avoir deux et seulement deux points fondamentaux communs (**1**), lemme I).

Remarquons d'abord qu'on ne peut avoir

$$S \begin{cases} a \ldots \\ a \ldots \end{cases},$$

car a ne serait plus fondamental pour $S^2 = S^{-1}$, ce qui est contradictoire dans les termes; σ déplace, par suite, toutes les directions fondamentales. Prenons

$$S \begin{cases} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{cases},$$

on aura

$$\sigma = (aa'a'') \ldots (dd'd''),$$

et, comme S et S^{-1} ont deux fondamentaux communs, les cycles de σ se réduisent à deux $\sigma = (aa'a'')(cc'c'')$, et il vient pour S

$$S \begin{cases} a & a' & c & c' \\ a' & a'' & c' & c'' \end{cases}.$$

En un mot, nous pouvons écrire

$$S \begin{cases} a & b & a' & b' \\ b & c & b' & c' \end{cases}.$$

Désignons toujours par a le facteur linéaire qui, annulé, donne l'équation de la droite $\overline{\omega a}$, etc., on a

$$(1) \qquad \sigma(a) = c, \qquad \sigma(b) = a, \qquad \sigma(c) = b,$$

$$(1') \qquad \sigma(a') = c', \qquad \ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

et, de plus,

$$(2) \qquad S(z\,bb') = aa'(z\,bb').$$

Prenons pour $z_3 = 0$ l'équation de la droite $\overline{bb'}$, il viendra (2)

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(pz_3 + bb') \\ z_2 & \theta^2 z_2(pz_3 + bb) \\ z_3 & kaa'z_3 \end{vmatrix},$$

où p est linéaire en z_1, z_2, $k = \text{const.}$ Si nous formons les puissances de S en tenant compte des égalités (1) et (1'), il viendra, après suppression du facteur cc',

$$S^2 = \begin{vmatrix} z_1 & \theta^2 z_1 \{ z_3[p + k\,\sigma(p)] + bb' \} \\ z_2 & \theta z_2 \{ z_3[p + k\,\sigma(p)] + bb' \} \\ z_3 & k^2 cc' z_3 \end{vmatrix},$$

et, pareillement pour S^3,

$$S^3 = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \{ z_3[p + k\,\sigma(p) + k^2\sigma^2(p)] + bb' \} \\ z_2 & z_2 \{ z_3[p + k\,\sigma(p) + k^2\sigma^2(p)] + bb' \} \\ z_3 & k^3 bb' z_3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 = | z_i \quad bb'z_i | \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Cela exige

$$k^3 = 1, \qquad p + k\,\sigma(p) + k^2\sigma^2(p) = 0;$$

posons $p = p_1 z_1 + p_2 z_2$: il viendra, pour la seconde condition, l'identité

$$(3) \qquad p_1 z_1(1 + k\theta + k^2\theta^2) + p_2 z_2(1 + k\theta^2 + k^2\theta) = 0.$$

Si $p_1 p_2 \gtrless 0$, $k = 1$; si $p_j = 0$ $(j = 1, 2)$, $k = 1$ ou $k = \theta^{-j}$. Il vient par suite, pour S, les deux formes suivantes, que nous appellerons *première et deuxième espèce* (types XV et XVI de l'Introduction).

Première espèce :

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1[(p_1 z_1 + p_2 z_2) z_3 + bb'] \\ z_2 & \theta^2 z_2[(p_1 z_1 + p_2 z_2) z_3 + bb'] \\ z_3 & aa' z_3 \end{vmatrix}.$$

Seconde espèce :

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(p_0 z_1 z_2 + bb') \\ z_2 & \theta^2 z_2(p_0 z_1 z_3 + bb') \\ z_3 & \theta aa' z_3 \end{vmatrix},$$

où

$$bb' = b_{11} z_1^2 + 2 b_{12} z_1 z_2 + b_{22} z_2^2 \quad (^1),$$
$$aa' = b_{11}\theta^2 z_1^2 + 2 b_{12} z_1 z_2 + b_{22}\theta z_2^2.$$

32. Γ *est du type II* (**6**). — La substitution S est échangeable à A (**13**) et laisse invariable la conique invariante $\mathfrak{A}$. Je dis que l'on peut supposer que $S^3 = 1$. Si, en effet, on avait $S^3 = A$, il suffirait de considérer SA au lieu de S, car $(SA)^3 = S^3 A = 1$.

Lemme. — *La substitution* S, *telle que* $S^3 = 1$, *ne peut être cubique.*

Appelons d et d' les fondamentaux de A; on aura, pour S (**31**),

$$S \begin{cases} ab \; a'b' \\ bc \; b'c' \end{cases} \qquad \sigma = (d)(d')(abc)(a'b'c');$$

---

(1) Nous pouvons d'ailleurs prendre les coordonnées de façon à avoir $b = z_1 - z_2$ et supprimer les accents devenus inutiles.

il est donc impossible que A et S aient un fondamental au moins commun, comme l'exigerait le lemme I du n° **1**.

Pour construire G, il suffira de combiner à A la substitution quadratique s; on démontrera d'ailleurs, comme au n° **31**, que

$$s \begin{cases} a & b \\ b & c \end{cases}.$$

Prenons, comme au n° **7**, $d(z_1 = z_3 = 0)$ et $d'(z_2 = z_3 = 0)$; σ restera sous forme canonique, puisqu'elle laisse fixe dd'. Il viendra

$$\mathfrak{A} = z_3^2 - z_1 z_2;$$

remarquons que $s(d) = d$, $s(d') = d'$; on aura, en désignant par p, q, des formes binaires en z_1, z_2 d'ordre égal à l'indice

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(p_0 z_3 + p_1) \\ z_2 & \theta^2 z_2(p_0 z_3 + p_1) \\ z_3 & q_1 z_3 + z_1 z_2 \end{vmatrix} \quad (p_0 z_1 z_2 - p_1 q_1 = \lambda ab).$$

Si nous écrivons que s^2 est quadratique après séparation du facteur a, nous avons, entre autres, la condition

$$(1) \qquad \sigma(p_1) + q_1 = a,$$

à un facteur constant près.

D'ailleurs (**13**), puisque b et c sont sur $\mathfrak{A}$, on a identiquement

$$s\mathfrak{A} = \mathrm{K}ab\mathfrak{A} \qquad (\mathrm{K} = \text{const.});$$

d'où, identifiant les coefficients de z_3 dans les deux membres,

$$(2) \begin{cases} q_1^2 - p_0 z_1 z_2 = \mathrm{K}ab, & p_1^2 - z_1 z_2 = \mathrm{K}ab, \\ q_1 = p_0 p_1, & \text{avec} \quad p_0 z_1 z_2 - p_1 q_1 = \lambda ab, \\ & (\lambda = \text{const.}). \end{cases}$$

De ces identités on tire $p_0 = 1$, $q_1 = p_1$. Achevons de déterminer le système des coordonnées en prenant $b(z_1 = z_2 = z_3 = 1)$, $b = z_1 - z_2$, $a = \theta z_1 - \theta^2 z_2$, $c = \theta^2 z_1 - \theta z_2$.

Pour satisfaire aux identités (2), il est nécessaire que p_1 soit proportionnel à l'une des fonctions $\theta^2 z_1 + \theta z_2$ ou $\theta^2 z_1 - \theta z_2$; en ayant égard à l'identité (1), on voit que

$$p_1 = \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2) \qquad (\mu = \text{const.}).$$

L'expression de s devient

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1[z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2[z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_3 & \mu z_3(\theta^2 z_1 - \theta z_2) + z_1 z_2 \end{vmatrix};$$

écrivons que le point $b(z_1 = z_2 = z_3 = 1)$ est fondamental; il vient

$$1 + \mu(\theta^2 - \theta) = 0;$$

on a enfin construit ainsi le type XVII de l'Introduction.

33. Γ *est du type III* (**6**). — On démontrera, comme plus haut (**32**), qu'il est permis de supposer, dans tous les cas, $S^3 = 1$. Nous adjoindrons successivement à A pour construire G une substitution quadratique s ou cubique S, ayant toutes deux pour cube l'unité.

Soit $abcd$ le discriminant de A; on aura (**13**)

$$\sigma = (d)(abc)$$

et (**32**)

$$s\begin{cases} a' & b' \\ b' & c' \end{cases};$$

d'où

$$\sigma = (d)(abc)(a'b'c');$$

mais A et s ont au moins un fondamental commun; cela n'est possible que si

$$a = a', \qquad b = b', \qquad c = c'$$

et

$$s \begin{cases} a & b \\ b & c \end{cases}.$$

La direction $d = 0$ reste invariable par σ, d'où $d = z_1$; d'ailleurs,

$$s(z\,bd) = a(z\,bd);$$

si nous prenons, par conséquent, $z_3 = 0$ pour équation de la droite $\overline{bd}$, on aura

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(zab) \\ z_2 & \theta^2 z_2(zab) \\ z_3 & a(zbd) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(\lambda z_3 + \mu b) \\ z_2 & \theta^2 z_2(\lambda z_3 + \mu b) \\ z_3 & a z_3 \end{vmatrix},$$

avec la condition $\mu^2 + \mu + 1 = 0$.

Appelons u le troisième point où $\overline{bd}$ rencontre $\mathfrak{A}$; puisque $\overline{bd}$ reste fixe pour s, u reste aussi un point fixe; la direction $\overline{\omega u}$ a pour équation $z_2 = 0$ ou $z_1 = 0$; cette seconde supposition est impossible, car $\overline{bd}$ toucherait $\mathfrak{A}$ en d ($z_1 = 0$) et passerait par ω, puisque d est un point de ramification; il y aurait deux points fondamentaux b et d en ligne droite avec ω, ce qui est absurde (**4**, lemme). En résumé, si l'on désigne par q une forme linéaire en z_1, z_2 et par k une constante, il vient

$$\mathfrak{A} = q z_3^2 + 2 b z_1 z_3 + k z_1 z_2 b = 0$$

et, puisque le discriminant est $abcd$,

$$(1) \qquad b z_1 - k q z_2 = -k' ac \qquad (k' = \text{const.}).$$

La substitution s doit laisser fixe $\mathfrak{A}$, qui passe par ω, b, c; il vient ainsi

$$s\mathfrak{A} = (zab)ab \times \mathrm{K}\mathfrak{A} \qquad (\mathrm{K} = \text{const.}).$$

Développons et identifions les coefficients de z_3 dans les deux membres; il viendra

$$\mathrm{K} = \mu^2$$

et, après quelques transformations faciles,

$$(2)\qquad \begin{cases} \lambda z_1(\mu b+\theta a)+a\sigma(q)-\mu^2 bq=0,\\ \theta a+k\lambda z_2=\mu b.\end{cases}$$

Des identités (1) et (2), on tire

$$\mu=\theta^2,\qquad k'=-1,\qquad k\lambda=1-\theta^2,\qquad -kq=2z_1+z_2,$$

après qu'on a achevé de fixer les coordonnées des directions issues de ω en prenant

$$b=z_1-z_2;$$

d'où

$$a=\theta z_1-\theta^2 z_2,\qquad c=\theta^2 z_1-\theta z_2.$$

Prenant maintenant pour variable kz_3 au lieu de z_3, ce qui est licite, il viendra

$$\mathfrak{A}=(2z_1+z_2)z_3-2z_1(z_1-z_2)z_3-z_1z_2(z_1-z_2)=0$$

et

$$s=\begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1[(1-\theta^2)z_3+\theta^2(z_1-z_2)]\\ z_2 & \theta^2 z_2[(1-\theta^2)z_3+\theta^2(z_1-z_2)]\\ z_3 & z_3(\theta z_1-\theta^2 z_2)\end{vmatrix}.$$

On a construit ainsi le groupe XVIII de l'Introduction.

34. Combinons maintenant avec A une substitution cubique S qui est, comme plus haut (**31**), de la forme

$$S\begin{cases} a\ b\ \ a'\ b'\\ b\ c\ \ b'\ c'\end{cases}\qquad \sigma=(abc)(a'b'c'),$$

A étant (**1**, lemme I),

$$A\begin{cases} d\ a\ b\ c\\ d\ a\ b\ c\end{cases}\qquad \sigma=(d)(abc)(a'b'c').$$

Remarquons que l'on a $S(zbb')=aa'(zbb')$; prenons la droite

$\overline{bb'}$ pour $z_3 = 0$; soit u le troisième point où $\overline{bb'}$ rencontre $\mathfrak{A}$, S laisse $\overline{bb'}$ fixe et, par suite, aussi u; la direction $\overline{\omega u}$ ne peut être que $z_1 = 0 (u = d)$ ou $z_2 = 0$.

Prenons d'abord $u = d$; il viendra

$$\mathfrak{A} = q z_3^2 + 2 b z_1 z_3 + z_1 bb' = 0,$$

$$(1) \qquad bz_1 - b'q = -k'ac \qquad (k' = \text{const.}),$$

q = forme linéaire en z_1, z_2, et (**31**)

$$S = \left| \begin{matrix} z_1 & \theta z_1 (p z_3 + bb') \\ z_2 & \theta^2 z_2 (p z_3 + bb') \\ z_3 & k a a' z_3 \end{matrix} \right| \qquad (k^3 = 1);$$

p = forme linéaire en z_1, z_2 : la forme donnée pour S comprend, en effet, les deux espèces (**31**). On doit avoir, puisque S laisse la courbe $\mathfrak{A}$ immobile,

$$S\mathfrak{A} = (p z_3 + bb') a a' bb' \times K\mathfrak{A} \qquad (K = \text{const.}).$$

Identifions les coefficients des puissances de z_3 dans les deux membres, il vient, après quelques transformations faciles, en tenant compte de (1),

$$(2) \qquad \begin{cases} k^2 a a' \sigma(q) - \theta bb' q + \theta p z_1 (2k' + p) a = 0, \\ ka + p = b, \qquad K = \theta. \end{cases}$$

On tire des identités (2)

$$k = \theta^2, \qquad p = b - \theta^2 a,$$

si l'on prend

$$b = z_1 - z_2,$$

d'où

$$a = \theta z_1 - \theta^2 z_2, \qquad c = \theta^2 z_1 - \theta z_2, \qquad p = (\theta - 1) z_2.$$

Quant aux formes linéaires b' et q, les seules conditions auxquelles

elles soient assujetties sont l'identité (1), qui devient

$$(1') \qquad b'q = z_1(z_1 - z_2) + k'(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2).$$

En résumé, S est de la deuxième espèce (**31**) et l'on a

$$\mathfrak{A} = qz_3^2 + 2z_1(z_1 - z_2)z_3 + z_1 z_2 b' = 0,$$

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1[z_2 z_3(\theta - 1) + b'(z_1 - z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2[z_2 z_3(\theta - 1) + b'(z_1 - z_2)] \\ z_3 & \theta^2 a' z_3(\theta z_1 - \theta^2 z_2) \end{vmatrix}.$$

Nous avons ainsi construit le groupe XIX de l'Introduction, après suppression des accents devenus inutiles.

Supposons maintenant que la droite $\overline{bb'}$ ou $z_3 = 0$ coupe $\mathfrak{A}$ en un troisième point u, tel que $\overline{\omega u}$ soit $z_2 = 0$. Il viendra

$$\mathfrak{A} = qz_3^2 + 2brz_3 + z_2 bb' = 0 \ (^1);$$

$$(1') \qquad br^2 - z_2 qb' = -k' z_1 ac,$$

puisque $abcd$ est le descriminant de $\mathfrak{A}$; q, r = formes linéaires en z_1, z_2. On a encore

$$S = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(pz_3 + bb') \\ z_2 & \theta^2 z_2(pz_3 + bb') \\ z_3 & kaa' z_3 \end{vmatrix} \qquad (k^3 = 1).$$

On a encore aussi

$$S\mathfrak{A} = (pz_3 + bb')aa'bb' \times K\mathfrak{A} \qquad (K = \text{const.});$$

l'identification des deux membres conduit, après quelques transformations faciles, au système

$$(2') \qquad \begin{cases} aa'\sigma(q) - bb'\theta^2 q + p[a\sigma(r) + \theta^2 br] = 0, \\ a\sigma(r) + \theta^2 pz_2 = \theta^2 br, \\ K = \theta^2. \end{cases}$$

(1) On peut d'ailleurs choisir les coordonnées de façon à avoir $b = z_1 - z_2$.

La première des identités (2′) est une conséquence de la deuxième et de (1″), après qu'on a fait $k=1$, comme l'exige cette deuxième identité (2′). Les seules relations distinctes que l'on trouve sont donc

$$(3') \qquad \begin{cases} pz_2 = br - a\sigma(r) \\ qb'z_2 = br^2 + k'z_1 ac \end{cases} \qquad (b = z_1 - z_2).$$

On a construit ainsi le groupe XX de l'Introduction.

35. *Le groupe* Γ *est du type VI* (**6**). — Dans ce cas la substitution S, qui a σ pour directrice, laisse fixes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ (**18**); S laisse fixe la conique

$$\mathfrak{A} = z_3^2 - z_1 z_2,$$

et, en raisonnant comme plus haut (**32**), on démontre que S est une substitution quadratique

$$s \begin{Bmatrix} a & d \\ d & e \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1 [z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_2 & \theta^2 z_2 [z_3 + \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2)] \\ z_3 & \mu(\theta^2 z_1 - \theta z_2) z_3 + z_1 z_2 \end{vmatrix},$$

où

$$\mu = (\theta - \theta^2)^{-1}, \qquad d = z_1 - z_2,$$
$$a = \theta z_1 - \theta^2 z_2, \qquad e = \theta^2 z_1 - \theta z_2.$$

Cela posé, on voit sur S que les coordonnées

du point a sont $\theta^2 \quad \theta \quad -1$,
du point d sont $1 \quad 1 \quad 1$,
du point e sont $\theta \quad \theta^2 \quad -1$;

et pour construire $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nous déterminerons les deux formes linéaires p et P (**11**).

Considérons les coniques

$$\mathfrak{B}' = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z_3} = p z_3 + P z_1, \qquad \mathfrak{C}' = \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z_3} = P z_3 + p z_2,$$

$\mathfrak{B}'$ est la conique des cinq points ω, a, d, e, c;

$\mathfrak{C}'$ est la conique des cinq points ω, a, d, e, b, et par suite (λ, $\lambda' =$ const.)

$$\mathfrak{B}' = \lambda \mathfrak{A} + (zae)(zdc), \qquad \mathfrak{C}' = \lambda' \mathfrak{A} + (zae)(zdb).$$

Comme $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{C}'$ passent par ω, il vient

$$\lambda + (ae)_3 (dc)_3 = \lambda' + (ae)_3 (db)_3 = 0.$$

On tire de ces relations

$$\begin{aligned} p &= 2z_1 + z_2, \\ -\mathrm{P} &= z_1 + 2z_2, \end{aligned} \qquad p^2 z_2 - \mathrm{P}^2 z_1 = z_2^3 - z_1^3.$$

On a construit ainsi le groupe XXI de l'Introduction.

Nous avons écarté d'ailleurs la supposition

$$s \left\{ \begin{matrix} b & c \\ b & c \end{matrix} \right.,$$

car sA aurait été linéaire et le groupe G un groupe normo-linéaire déjà construit (**28**).

36. Γ *est du type VII* (**6**). — On aura évidemment, puisque $\sigma^3 = 1$,

$$\sigma = (abc)(a'b'c'),$$

et l'on voit qu'au point de vue de σ et des discriminants de A, B, C les six fondamentaux se partagent en deux cycles

$$abc \quad \text{et} \quad a'b'c',$$

ou en trois couples

$$aa', \quad bb', \quad cc'.$$

Je dis que pour construire G il suffira dans tous les cas de combiner à Γ une substitution quadratique s. Prenons en effet dans G une substitution cubique S; nous pouvons emprunter les quatre fondamentaux de S, soit à deux, soit aux trois couples, et le discriminant sera, par exemple,

$$aa'bb' \quad \text{ou} \quad aa'bc$$

Dans le premier cas, SC est linéaire et G normo-linéaire; dans le second cas, SB est quadratique, ce qu'il fallait démontrer.

Considérons maintenant la substitution s; nous pouvons emprunter les deux fondamentaux de la quadratique s, par exemple, à un même couple, et le discriminant sera aa'; à un même cycle, et le discriminant sera bc; à des couples et cycles différents, et le discriminant sera bc'.

Si l'on avait

$$s\begin{cases} a\ a' \\ b\ b' \end{cases}, \qquad s^2\begin{cases} a\ a' & c\ c' \\ c\ c' & b\ b' \end{cases},$$

s^2 B serait linéaire et G normo-linéaire, groupe déjà construit.

Si l'on avait

$$s\begin{cases} b\ c' \\ c\ a' \end{cases}, \qquad s^2\begin{cases} b\ a & c'\ b' \\ a\ c & b'\ a' \end{cases},$$

s^3 serait biquadratique, ce qui est impossible.

Nous ne pouvons supposer par suite que

$$s\begin{cases} b\ c \\ c\ a \end{cases}.$$

Prenons $\overline{cc'}$ pour $z_3 = 0$; il viendra

$$s = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(zbc) \\ z_2 & \theta^2 z_2(zbc) \\ z_3 & b(zb'c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & \theta z_1(\lambda z_3 + \mu c) \\ z_2 & \theta^2 z_2(\lambda z_3 + \mu c) \\ z_3 & b(\lambda' z_3 + \mu' c) \end{vmatrix}.$$

Écrivons que $s^3 = 1$, on aura entre les constantes λ et μ

$$\lambda'^2 + \lambda\mu' + \lambda'\mu + \mu^2 = 0. \tag{1}$$

D'ailleurs s permute entre elles les trois courbes invariantes et il vient

$$(2) \qquad s\mathfrak{A} = \mathfrak{C}, \qquad s\mathfrak{B} = \mathfrak{A}, \qquad s\mathfrak{C} = \mathfrak{B},$$

à des facteurs fondamentaux près. Les conditions (2) nous donnent un certain nombre d'équations entre les trois [à cause de (1)] constantes indépendantes λ et μ et les dix coefficients des cinq formes linéaires en z_1, z_2, p, p, P, Q, c'; je ne compte pas c, puisqu'on peut, par un choix convenable de coordonnées, prendre $c = z_1 - z_2$ par exemple. On obtiendrait la valeur des divers coefficients par des calculs passablement pénibles, que nous omettrons afin de ne pas pousser plus loin la construction du groupe XXII de l'Introduction.