

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. POINCARÉ

**Sur les courbes définies par les équations différentielles
(quatrième partie)**

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 2 (1886), p. 151-217.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1886_4_2__151_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur les courbes définies par les équations différentielles[QUATRIÈME PARTIE ⁽¹⁾];**PAR M. H. POINCARÉ.****CHAPITRE XVI.****ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE; POINTS SINGULIERS.**

Nous allons aborder maintenant l'étude des équations différentielles d'ordre supérieur. Voici sous quelle forme nous les écrirons : soient x , y et z les coordonnées d'un point mobile dans l'espace, et t une variable auxiliaire que nous regarderons comme représentant le temps; nous écrirons

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y, \quad \frac{dz}{dt} = Z.$$

X , Y et Z seront des polynômes entiers en x , y et z . Il est clair, en effet, que toute équation du second ordre et du premier degré peut être ramenée facilement à cette forme.

De même, toute équation du $(n - 1)^{\text{ième}}$ ordre et du premier degré

⁽¹⁾ Voir les trois premières Parties dans ce Journal, 3^e série, t. VII et VIII, et 4^e série, t. I.

pourra être mise sous la forme

$$(2) \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ étant des polynômes entiers en $x_1, x_2, \dots, x_n$. Si l'on a affaire à une équation du $(n-1)^{\text{ème}}$ ordre et de degré supérieur, on pourra écrire

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ étant des polynômes entiers en $x_1, x_2, \dots, x_n$ et z ; et z étant une fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$ liée à ces variables par une relation algébrique

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme entier.

Introduisons une nouvelle variable τ , nous pourrions écrire

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= X_1 \frac{dF}{dz}, & \frac{dx_2}{d\tau} &= X_2 \frac{dF}{dz}, & \dots, & \frac{dx_n}{d\tau} &= X_n \frac{dF}{dz}, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -X_1 \frac{dF}{dx_1} - X_2 \frac{dF}{dx_2} - \dots - X_n \frac{dF}{dx_n}. \end{aligned}$$

Les seconds membres de ces nouvelles équations étant des polynômes entiers par rapport aux x et à z , les équations sont ramenées à la forme (2); seulement l'ordre en est élevé d'une unité.

Si l'on veut, dans le cas des équations (2), employer le mode de représentation géométrique dont nous avons fait usage jusqu'ici, il faut regarder $x_1, x_2, \dots, x_n$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions.

La Géométrie n'est plus alors qu'un langage qui peut être plus ou moins avantageux, ce n'est plus une représentation parlant aux sens. Nous pourrions néanmoins être conduits à employer quelquefois ce langage.

Au contraire, dans le cas des équations du second ordre de la forme (1), qui est celui que nous étudierons plus particulièrement, la représentation géométrique conserve tous ses avantages, et nous continuerons à l'employer constamment.

Il arrivera aussi quelquefois qu'au lieu de considérer les trajectoires du point mobile (x, y, z) dans l'espace tout entier, nous aurons à considérer seulement les portions de ces trajectoires qui sont comprises dans une certaine région de l'espace; nous n'aurons plus besoin alors de supposer que les fonctions X , Y et Z sont des polynômes entiers, mais seulement qu'elles se comportent comme des polynômes entiers à l'intérieur de la région considérée.

Il est aisé de voir que par tout point de l'espace passe une trajectoire et une seule. Il ne peut y avoir d'exception que pour les points où les trois fonctions X , Y et Z s'annulent et que l'on appelle *points singuliers*.

Les trois équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

représentent trois surfaces algébriques. Il peut se faire que ces trois surfaces aillent passer par une même courbe. Tous les points de cette courbe sont alors singuliers et l'on a alors une courbe singulière. Nous reviendrons plus loin sur ce cas important.

Ne considérons pour le moment que les points singuliers isolés. Deux cas peuvent se présenter :

1° Ou bien toutes les dérivées $\frac{dX}{dx}, \frac{dX}{dy}, \frac{dX}{dz}; \frac{dY}{dx}, \frac{dY}{dy}, \frac{dY}{dz}; \frac{dZ}{dx}, \frac{dZ}{dy}, \frac{dZ}{dz}$ ne sont pas nulles à la fois : c'est le cas que nous allons étudier en détail;

2° Ou bien ces neuf dérivées sont nulles à la fois. Ce cas se ramène au précédent par les procédés de Briot et Bouquet (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI^e Cahier).

Supposons donc que les neuf dérivées ne soient pas nulles à la fois et formons l'équation en S

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} - S & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} - S & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation n'aura pas de racine nulle, ni de racine multiple si les polynômes X , Y et Z sont les plus généraux de leurs degrés. Je ne dirai rien du cas particulier où l'équation en S aurait des racines nulles ou multiples; je me bornerai à renvoyer à ce que j'ai dit de cas analogues dans la première Partie de ce travail (3^e série, t. VII, p. 391).

Ce cas exceptionnel étant exclu, nous avons à examiner les cinq hypothèses suivantes :

Première hypothèse. — Les trois racines de l'équation en S sont réelles et de même signe.

Dans ce cas, les intégrales générales des équations (1) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(4) \quad \frac{H_1^{S_1}}{A_1} = \frac{H_2^{S_2}}{A_2} = \frac{H_3^{S_3}}{A_3}.$$

Dans ces relations, H_1 , H_2 et H_3 sont des fonctions de x , y et z , holomorphes dans le voisinage du point singulier et s'annulant en ce point singulier; S_1 , S_2 et S_3 sont les racines de l'équation (3); A_1 , A_2 et A_3 sont des constantes d'intégration. Ce théorème a été démontré dans ma thèse inaugurale (Paris, Gauthier-Villars, 1879), p. 70.

Il est aisé de voir que les équations (4) représentent une infinité de courbes qui vont toutes passer par le point singulier.

Donc, dans le cas qui nous occupe, toutes les trajectoires qui passent dans le voisinage du point singulier vont converger en ce point. On dit alors que le point singulier est un *nœud*.

Deuxième hypothèse. — Les trois racines de l'équation en S sont réelles, mais non de même signe.

Supposons, par exemple, que S_1 et S_2 soient positifs et S_3 négatif.

On ne pourra pas alors, en général, mettre les intégrales des équations (1) sous la forme (4).

Mais le théorème de Briot et Bouquet, dans le Mémoire cité plus haut, nous apprend qu'il existe trois intégrales particulières des équations (1), qui ont la forme suivante

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi_2(u), \quad z = \varphi_3(u),$$

φ_1 , φ_2 et φ_3 étant des fonctions holomorphes d'une même variable u , qui s'annulent avec cette variable si le point singulier est pris pour origine.

Le théorème n'est pas tout à fait présenté sous cette forme par Briot et Bouquet; mais il est aisé de passer de l'énoncé de ces deux géomètres à celui qui précède.

Dans le cas qui nous occupe, ces trois intégrales sont réelles; nous sommes donc certains déjà que trois trajectoires, que j'appellerai T_1 , T_2 et T_3 , vont passer par le point singulier.

Pour pousser plus loin cette analyse, faisons un changement linéaire de variables, ou un changement de coordonnées, en prenant pour origine le point singulier et pour axes les tangentes aux trois trajectoires T_1 , T_2 et T_3 . Après ce changement de coordonnées, les équations (1) conserveront la même forme, et les racines de l'équation en S ne changeront pas. Seulement les termes du premier degré de X , Y et Z se réduiront respectivement à

$$S_1x, \quad S_2y, \quad S_3z.$$

Cela posé, je dis que l'équation aux dérivées partielles

$$X \frac{dz}{dx} + Y \frac{dz}{dy} = Z$$

admettra une intégrale holomorphe s'annulant avec x et y .

Il existe en effet une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et de y et qui satisfait formellement à cette équation. Pour former les coefficients de cette série, posons

$$X = S_1x - X', \quad Y = S_2y - Y', \quad Z = S_3z + Z',$$

et nous chercherons s'il existe une série

$$z = \sum \alpha_{mn} x^m y^n,$$

qui satisfasse à l'équation proposée, que nous écrirons

$$(5) \quad S_1x \frac{dz}{dx} + S_2y \frac{dz}{dy} - S_3z = X' \frac{dz}{dx} + Y' \frac{dz}{dy} + Z'.$$

Le coefficient α_{mn} de $x^m y^n$, dans la série cherchée, nous sera donné par l'équation

$$(mS_1 + nS_2 - S_3)\alpha_{mn} = \beta,$$

β étant un ensemble de termes dépendant des coefficients de X', Y', Z' ainsi que des coefficients α_{pq} où p et q sont inférieurs à m et à n . (L'un des indices p ou q peut toutefois être égal à l'indice correspondant m ou n ; mais on ne peut pas avoir à la fois $p = m, q = n$.)

Il reste à démontrer que la série ainsi obtenue est convergente. Il n'y aurait pas de difficulté si S_3 était positif comme S_1 et S_2 . Dans ce cas en effet, on n'aurait qu'à renvoyer au théorème de ma thèse inaugurale, que j'ai déjà cité plus haut.

Mais ici S_3 est négatif, et il faut se servir d'une équation auxiliaire

$$(5 \text{ bis}) \quad S_1 x \frac{dz}{dx} + S_2 y \frac{dz}{dy} - \Sigma_3 z = X'' \frac{dz}{dx} + Y'' \frac{dz}{dy} + Z''.$$

Dans cette équation, Σ_3 est une quantité positive plus petite que S_1 et que S_2 ; X'', Y'', Z'' sont des polynômes que l'on obtient en remplaçant dans X', Y' et Z' chaque terme par sa valeur absolue.

Il existera alors une série

$$\Sigma \alpha'_{mn} x^m y^n,$$

qui satisfera formellement à l'équation (5 bis), et cette série sera convergente, puisque Σ_3 est positif.

Le coefficient α'_{mn} se déduira de l'équation

$$(mS_1 + nS_2 - \Sigma_3)\alpha'_{mn} = \beta',$$

β' étant formé avec les coefficients de X'', Y'', Z'' et avec les α'_{pq} comme β est formé avec les coefficients de X', Y', Z' et avec les α_{pq} . Tous les α'_{mn} sont positifs. En effet, si cela est vrai de tous les α'_{pq} , β' sera positif, puisque les coefficients de X'', Y'', Z'' sont positifs.

D'ailleurs $mS_1 + nS_2 - \Sigma_3$ est toujours positif.

Je dis maintenant que

$$|\alpha_{mn}| < \alpha'_{mn}.$$

En effet, si cela est vrai pour les indices inférieurs à m et à n , on aura

$$|\beta| < \beta'.$$

On a d'ailleurs

$$mS_1 + nS_2 - S_3 > mS_1 + nS_2 - \Sigma_3,$$

puisque Σ_3 est positif et S_3 négatif. Il vient donc

$$|\alpha_{mn}| < \alpha'_{mn},$$

ce qui prouve que la série

$$\Sigma \alpha_{mn} x^m y^n$$

est convergente.

Ainsi l'équation (5) admet bien une intégrale holomorphe comme je l'avais annoncé. Dans le langage géométrique, cela veut dire que par le point singulier passe une surface U sur laquelle sont situées une infinité de trajectoires. Les trajectoires T_1 et T_2 sont situées sur cette surface, mais il n'en est pas de même de T_3 .

Si l'on remplace, dans les équations (1), z par la série $\Sigma \alpha_{mn} x^m y^n$, ces équations prennent la forme

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

X et Y étant des fonctions holomorphes de x et de y s'annulant avec ces variables. Les termes du premier degré se réduisent respectivement à $S_1 x$ et à $S_1 y$.

On est donc ramené au cas des équations du premier ordre, où l'on n'avait que deux variables, x et y , représentant les coordonnées d'un point dans un plan. Les courbes définies par les équations (6) seront les projections des trajectoires situées sur la surface U ; il est aisé de vérifier que, pour ces courbes planes, le point singulier est un nœud, d'où la conclusion suivante :

Toutes les trajectoires situées sur la surface U vont se croiser au point singulier.

On peut d'ailleurs vérifier aisément que les autres trajectoires ne vont pas passer par le point singulier; mais qu'après s'être approchées plus ou moins de ce point, elles s'en éloignent et sortent de son domaine.

Ainsi une infinité de trajectoires dont l'ensemble forme une surface, ainsi qu'une autre trajectoire isolée, viennent passer par le point singulier; toutes les autres restent à une distance finie de ce point.

Le point singulier s'appellera alors un *col*.

Troisième hypothèse. — L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées dont la somme est de même signe que la racine réelle.

Soient

$$S_1 = \alpha + \beta i, \quad S_2 = \alpha - \beta i \quad \text{et} \quad S_3$$

ces trois racines. L'intégrale générale des équations (1) pourra s'écrire, comme dans la première hypothèse,

$$\frac{H_1^{S_1}}{A_1} = \frac{H_2^{S_2}}{A_2} = \frac{H_3^{S_3}}{A_3}.$$

Nous pourrions poser d'ailleurs

$$H_1 = K + iK', \quad H_2 = K - iK',$$

K et K' étant des fonctions holomorphes *réelles* de x, y et z .

Considérons l'équation générale

$$(7) \quad K^2 + K'^2 + H_3^2 = \text{const.}$$

Cette équation représente une infinité de surfaces s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point singulier.

Il est aisé de vérifier qu'aucune des trajectoires ne peut couper aucune de ces surfaces qu'en un seul point, si la constante du second membre est suffisamment petite. En effet, les équations d'une trajectoire quelconque peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} K + iK' &= (C + iD)H_3^{\gamma+i\delta}, \\ K - iK' &= (C - iD)H_3^{\gamma-i\delta}, \end{aligned}$$

C, D, γ et δ étant quatre constantes réelles. (Remarquons que, pour une même trajectoire, H, devra toujours conserver le même signe.) Les surfaces (7) sont donc des surfaces sans contact, analogues aux cycles sans contact étudiés dans les Parties précédentes.

Une trajectoire, une fois qu'elle aura pénétré à l'intérieur d'une des surfaces (7), ira toujours en se rapprochant du point singulier; mais elle ne pourra s'en rapprocher qu'asymptotiquement (comme dans le cas des *foyers* de la première Partie de ce travail); car il est aisé de voir qu'elle ne saurait aller passer par le point singulier avec une tangente déterminée.

Il y a toutefois une exception. Nous avons vu que, d'après Briot et Bouquet, il y a trois trajectoires, T₁, T₂ et T₃, dont les équations s'écrivent

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi^2(u), \quad z = \varphi_3(u),$$

φ_1 , φ_2 et φ_3 étant des fonctions holomorphes d'une même variable u .

Ici deux de ces trajectoires sont imaginaires; mais une autre est réelle et a pour équation

$$K = K' = 0.$$

Cette trajectoire va passer par le point singulier avec une tangente déterminée.

Maintenant, il y a une infinité de trajectoires situées sur la surface

$$H_3 = 0;$$

celles-là sont des spirales analogues à celles que nous avons rencontrées dans la première Partie. Les autres seront aussi des spirales tracées sur les surfaces dont l'équation générale est

$$\frac{K^2 + K'^2}{S_1 + S_2} = \text{const.}$$

$$H_3 S_2$$

Suivant la valeur de S_3 , ces surfaces seront des surfaces ordinaires à plan tangent unique, ou des surfaces comparables à celle qu'engendrerait la révolution d'une parabole autour de la tangente au sommet.

Dans le second cas, les trajectoires pourraient plutôt être comparées à des tire-bouchons qu'à des spirales.

Les points singuliers de cette sorte pourront s'appeler *foyers*.

Quatrième hypothèse. — L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées dont la somme est de signe contraire à la racine réelle.

Les intégrales des équations (1) ne peuvent plus alors se mettre sous la forme (4). Les trois trajectoires T_1 , T_2 , T_3 définies plus haut existent toujours, mais une seule d'entre elles, T_1 , est réelle.

Nous pourrions faire un changement de coordonnées, tel que l'origine soit transportée au point singulier, et que les termes du premier degré de X , Y et Z se réduisent respectivement à

$$\alpha x + \beta y, \quad \gamma x + \delta y \quad \text{et} \quad S_1 z.$$

Il arrivera alors (et on le démontrerait comme dans le deuxième cas) que l'équation

$$X \frac{dz}{dx} + Y \frac{dz}{dy} = Z$$

admettra une intégrale holomorphe en x et y et s'annulant avec ces variables.

Il y a donc une surface qui passe par l'origine et sur laquelle sont tracées une infinité de trajectoires. Soit

$$z = \varphi(x, y)$$

l'équation de cette surface. Si l'on remplace z par $\varphi(x, y)$ dans X et Y , les équations (1) sont ramenées au premier ordre et représentent des courbes planes, projection sur le plan des xy des trajectoires tracées sur la surface en question. Il est aisé de voir que pour ces courbes planes l'origine est un foyer.

Il existe donc une surface sur laquelle sont tracées une infinité de trajectoires qui, tournant comme des spirales autour du point singulier, s'en rapprochent asymptotiquement.

Il y a en outre une trajectoire T_1 qui va passer par ce point singulier. Toutes les autres en restent à une distance finie.

Un pareil point peut s'appeler *col-foyer*.

Cinquième hypothèse. — L'équation (3) a une racine réelle et deux imaginaires conjuguées, dont la somme est nulle.

Ce cinquième cas doit être regardé comme un cas limite et exceptionnel, car il ne se présentera pas si les polynômes X , Y et Z sont les plus généraux de leurs degrés.

Dans ce cinquième cas, il n'arrivera pas en général que les intégrales des équations (1) puissent se mettre sous la forme (4).

Si cependant cela arrivait, et que nous posions

$$\begin{aligned} H_1 &= K + iK', & H_2 &= K - iK', \\ S_1 &= i\alpha, & S_2 &= -i\alpha, \end{aligned}$$

on verrait aisément que toutes les trajectoires sont situées sur des surfaces, telles que

$$K^2 + K'^2 = \text{const.}$$

Nous aurions alors une trajectoire réelle T_1 passant par le point singulier et ayant pour équation

$$K = K' = 0.$$

Nous aurons également une surface $H_2 = 0$ passant par le point singulier, et sur laquelle seront tracées une infinité de trajectoires. Les trajectoires tracées sur cette surface seront des courbes fermées enveloppant le point singulier.

Les surfaces $K^2 + K'^2 = \text{const.}$ sont des espèces de gaines enveloppant la trajectoire T_1 , de sorte qu'on pourrait les comparer à des cylindres ayant pour axe T_1 , et qui auraient été ployés et déformés en même temps que cette trajectoire.

Les trajectoires tracées sur cette surface sont alors des espèces d'hélices dont le pas irait constamment en décroissant, de telle façon que la courbe, au lieu de s'étendre à l'infini, se rapproche asymptotiquement de la surface $H_2 = 0$.

Un pareil point singulier s'appellera un *centre*.

Si, au contraire, les intégrales ne peuvent pas se mettre sous la forme (4), le point singulier jouira des mêmes propriétés qu'un foyer ou qu'un col-foyer.

Je ne m'étendrai pas plus longtemps sur ce cas exceptionnel, en me réservant d'y revenir plus tard, si j'en avais besoin, pour quelque application. Je me bornerai, pour le moment, à renvoyer au Chapitre XI, où j'ai étudié en détail les points singuliers analogues des équations du premier ordre.

Si donc on laisse de côté le cas limite qui vient de nous occuper, les équations du second ordre ont quatre espèces de points singuliers : les cols, les nœuds, les foyers et les cols-foyers.

Il serait facile d'étendre cette théorie à des équations d'ordre n .

Remarquons seulement que, quand on fait croître n , le nombre des espèces de points singuliers croît très rapidement. Nous avons vu, en effet, qu'il était de 3 pour $n = 1$, de 4 pour $n = 2$; on verrait sans peine qu'il est de 8 pour $n = 3$ et de 10 pour $n = 4$.

Examinons maintenant le cas particulier où les trois surfaces

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

se coupent suivant une même courbe, qui est alors une courbe singulière.

Nous changerons de variables en posant

$$(7) \quad x = \varphi_1(x', y', z'), \quad y = \varphi_2(x', y', z'), \quad z = \varphi_3(x', y', z'),$$

φ_1 , φ_2 et φ_3 étant des fonctions holomorphes dans le domaine envisagé.

On pourra toujours choisir ces fonctions holomorphes de telle façon que la courbe singulière ait pour nouvelles équations

$$x' = y' = 0.$$

Soient, en effet,

$$f(x, y, z) = f_1(x, y, z) = 0$$

les équations de la courbe singulière, et soient

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma$$

un point de cette courbe; soit $f_2(x, y, z)$ une fonction holomorphe quelconque s'annulant au point M. Nous poserons

$$(8) \quad \begin{cases} x' = f(x, y, z), \\ y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Nous pourrions toujours choisir la fonction f_2 de telle sorte que le déterminant fonctionnel de f, f_1 et f_2 ne soit pas nul au point M, et par conséquent que les équations (8) puissent être résolues sous la forme (7).

Il n'y aurait d'exception que si la courbe singulière présentait un point double ou une autre singularité quelconque au point M, ce que nous ne supposerons pas.

Il résulte de là que nous pouvons toujours supposer que la courbe singulière est l'axe des z , et que le point de cette courbe qu'on envisage est l'origine.

Il faudra alors que X, Y et Z s'annulent quand x et y sont nuls à la fois.

Nous allons maintenant faire un nouveau changement de variables qui sera cette fois linéaire, et sera par conséquent un simple changement d'axes.

Il est clair, d'après ce qui précède, que les termes du premier degré de X, Y et Z doivent être de la forme

$$\alpha x + \alpha' y, \quad \beta x + \beta' y, \quad \gamma x + \gamma' y.$$

Je vais conserver pour axe des z la ligne singulière, mais je changerai le plan des xy , et je choisirai le nouveau plan des xy de telle façon que γ et γ' s'annulent.

Nous formerons alors l'équation suivante, analogue à l'équation (3), mais qui n'est plus ici que du second degré :

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \alpha - S & \alpha' \\ \beta & \beta' - S \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette équation a deux racines réelles et de même signe ou deux

racines imaginaires conjuguées dont la somme n'est pas nulle, l'équation aux dérivées partielles

$$X \frac{dz}{dx} + Y \frac{dz}{dy} = Z$$

admettra une intégrale holomorphe s'annulant avec x et y . On n'a pour s'en convaincre qu'à reprendre le raisonnement que nous avons fait dans la seconde hypothèse.

Il y a donc une surface passant par le point singulier, et sur laquelle sont tracées une infinité de trajectoires. L'étude des trajectoires situées sur cette surface se ramène au cas des équations du premier ordre; il suffit, pour cela, de remplacer dans les équations (1) z par sa valeur tirée de l'équation de la surface. On voit alors que, pour les trajectoires tracées sur cette surface, le point singulier est un nœud si les racines de l'équation (9) sont réelles et de même signe, et un foyer si ces racines sont imaginaires conjuguées.

En un nœud, ainsi qu'en tous les points de la ligne singulière qui en sont assez voisins, viennent donc se croiser une infinité de trajectoires.

Autour d'un foyer ainsi qu'autour de tous les points voisins de la ligne singulière, viennent s'enrouler une infinité de trajectoires qui s'en rapprochent asymptotiquement.

Il reste à examiner le cas où l'équation (9) a ses deux racines réelles et de signe contraire. Dans ce cas, le théorème de Briot et Bouquet, cité plus haut, nous apprend qu'il existe encore deux trajectoires qui vont passer par le point singulier avec une tangente déterminée. Ce sont les deux trajectoires que nous avons appelées T_1 et T_2 ; quant à la trajectoire T_3 , elle se réduit à la ligne singulière elle-même. Toutes les autres trajectoires restent à une distance finie du point singulier. Un pareil point singulier s'appellera un *col*.

Ainsi par un col et par tous les points assez voisins de la ligne singulière, passent deux trajectoires; toutes les autres trajectoires restent à une distance finie de la ligne singulière.

Il y aura donc sur une ligne singulière des arcs dont tous les points seront des nœuds, d'autres dont tous les points seront des foyers, d'autres dont tous les points seront des cols. Les points qui sépareront

ces arcs les uns des autres, ainsi que les points multiples de la ligne singulière, présenteront des singularités spéciales dont je ne parlerai pas ici.

Je terminerai ce Chapitre en donnant un exemple très simple de chacun des cas traités plus haut.

POINTS SINGULIERS ISOLÉS : 1° *Nœuds*. — Soit

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = dt.$$

Les trajectoires sont des droites passant par l'origine.

2° *Cols*. — Soit

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z} = dt.$$

Sur la surface $z = 0$ qui passe par l'origine sont tracées une infinité de trajectoires qui sont des droites passant par l'origine. En outre, l'axe des z est aussi une trajectoire qui passe par l'origine.

Les autres trajectoires qui ont pour équations

$$xz = \text{const.}, \quad yz = \text{const.}$$

sont des hyperboles qui restent à une distance finie de l'origine.

3° *Foyers*.

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{z} = dt.$$

L'axe des z est ici la trajectoire T_1 qui passe par l'origine.

La surface $H_3 = 0$ n'est autre chose que le plan des xy : les autres trajectoires sont tracées sur des cônes de révolution ; elles se projettent toutes sur le plan des xy suivant des spirales logarithmiques ; elles vont donc toutes en se rapprochant asymptotiquement de l'origine.

Remarquons qu'ici les surfaces dont nous avons écrit l'équation générale sous la forme

$$\frac{K^2 + K'^2}{H_3 \frac{s_1 + s_2}{s_1}} = \text{const.}$$

se réduisent à des cônes de révolution. Elles ne présentent donc aucune des deux formes que j'avais attribuées à ces surfaces. En effet, nous avons affaire à un cas d'exception.

Si nous avons eu pour équations différentielles

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{\alpha z},$$

ces surfaces auraient eu un plan tangent unique pour $\alpha < 1$, et, pour $\alpha > 1$, elles auraient présenté la forme de la surface engendrée par la révolution d'une parabole autour de la tangente au sommet. Il n'y a donc d'exception que pour le cas de $\alpha = 1$.

4° *Cols-foyers.* — Soit

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{-z} = dt.$$

Une trajectoire, l'axe des z , va passer par l'origine; une infinité d'autres sont tracées sur le plan des xy et sont des spirales logarithmiques se rapprochant asymptotiquement de l'origine.

Les autres trajectoires sont situées sur les surfaces

$$(x^2 + y^2)z^2 = \text{const.},$$

et restent par conséquent à une distance finie de l'origine.

5° *Centres.* — Soit

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{z} = dt.$$

Les trajectoires ont pour équation générale

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad \arctang \frac{y}{x} = \log z + A,$$

A et r^2 étant deux constantes d'intégration. Les trajectoires sont tracées sur des cylindres de révolution. Une seule d'entre elles, l'axe des z , va passer par l'origine. Une infinité se réduisent à des cercles

situés dans le plan des xy . Les autres sont des courbes qui tournent indéfiniment sur les cylindres en se rapprochant asymptotiquement du plan des xy .

POINTS D'UNE LIGNE SINGULIÈRE : 6° *Nœuds*.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

Les trajectoires sont les droites parallèles au plan des xy et rencontrant l'axe des z , qui est la ligne singulière.

7° *Cols*.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}.$$

Les droites $z = \text{const.}$, $x = 0$, et les droites $z = \text{const.}$, $y = 0$, sont des trajectoires qui rencontrent l'axe des z , c'est-à-dire la ligne singulière. Les autres sont situés sur les cylindres hyperboliques

$$xy = \text{const.},$$

et restent à une distance finie de l'origine.

8° *Foyers*.

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{0}.$$

Les trajectoires sont des spirales logarithmiques situées dans des plans parallèles au plan des xy ; elles enveloppent la ligne singulière en s'en rapprochant asymptotiquement.

CHAPITRE XVII.

INTÉGRATION PAR LES SÉRIES.

Nous avons vu qu'une équation différentielle quelconque peut toujours se mettre sous la forme

$$(1) \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

où les X sont des polynômes entiers.

Si l'on regarde t comme représentant le temps, ces équations définiront le mouvement d'un point mobile dans l'espace à n dimensions.

Il arrivera alors, quand le temps croîtra indéfiniment :

1° Ou bien que le point mobile restera toujours à distance finie et ne se rapprochera pas indéfiniment d'un point singulier ;

2° Ou bien que le point mobile s'éloignera à l'infini ;

3° Ou bien que le point mobile ira, au bout d'un temps fini, passer par un point singulier ;

4° Ou bien que le point mobile ira en se rapprochant indéfiniment d'un foyer ;

5° Ou bien que le point mobile viendra repasser, à des intervalles de temps finis et une infinité de fois dans le voisinage d'un point singulier, de telle sorte que sa distance à ce point singulier puisse devenir plus petite que toute quantité donnée, mais pour redevenir toujours finie dans les intervalles des différents passages.

En d'autres termes, la distance du point mobile à un point singulier quelconque peut, ou bien rester finie (premier cas et deuxième cas), ou bien tendre vers zéro (troisième et quatrième cas), ou bien osciller de façon à devenir plus petite que toute quantité donnée ϵ , mais sans *rester* plus petite que cette quantité ϵ et par conséquent sans tendre vers 0 (cinquième cas).

Il y a donc cinq espèces de trajectoires, et il est aisé de construire des exemples de ces cinq espèces.

Il y aurait évidemment un grand intérêt à exprimer $x_1, x_2, \dots, x_n$ à

l'aide de séries ordonnées suivant diverses fonctions du temps et convergentes pour toutes les valeurs *réelles* du temps depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = +\infty$.

Il est toujours possible de résoudre ce problème, et je vais en effet en donner une solution. Mais, d'après sa nature même, ce problème peut être résolu d'une infinité de manières. Rien ne prouve donc que la solution que je vais donner soit toujours la plus avantageuse; bien au contraire, il est extrêmement peu probable qu'une même solution convienne également bien à tous les cas particuliers possibles. Il faudra donc, pour chaque équation qu'on aura à intégrer, chercher une solution analogue, mais non identique à celle que je vais développer, et s'efforcer de la choisir convenablement en s'inspirant des conditions spéciales du problème.

Introduisons une nouvelle variable s en écrivant

$$(2) \quad \frac{dx_1}{ds} = Y_1, \quad \frac{dx_2}{ds} = Y_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{ds} = Y_n,$$

de telle sorte que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2} = \dots = \frac{X_n}{Y_n}.$$

Les Y seront des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$ satisfaisant aux conditions suivantes.

Pour toutes les valeurs réelles des x et pour toutes les valeurs des x dont la partie imaginaire est comprise entre $-\beta$ et $+\beta$, les fonctions Y sont holomorphes et leur module est plus petit que M .

Si donc on a la fois :

$$\begin{aligned} &| \text{Partie imaginaire de } x_1 | < \beta, \\ &| \text{Partie imaginaire de } x_2 | < \beta, \\ &\dots\dots\dots \\ &| \text{Partie imaginaire de } x_n | < \beta, \end{aligned}$$

on aura ainsi à la fois

$$| Y_1 | < M, \quad | Y_2 | < M, \quad \dots, \quad | Y_n | < M.$$

Soient alors

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \dots, \quad x_n^0$$

un système de valeurs réelles de

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n.$$

Toutes les fois que

$$|x_1 - x_1^0| < \beta, \quad |x_2 - x_2^0| < \beta, \quad \dots, \quad |x_n - x_n^0| < \beta,$$

les fonctions Y seront holomorphes, et leur module sera plus petit que M .

Si donc nous développons Y selon les puissances croissantes de

$$x_1 - x_1^0, \quad x_2 - x_2^0, \quad \dots, \quad x_n - x_n^0,$$

les coefficients seront plus petits que ceux de

$$\frac{M\beta}{\beta - x_1 - x_2 - \dots - x_n + x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_n^0} = Z.$$

Nous écrirons, en employant les notations du Chapitre XI,

$$Y \ll Z$$

les Y et Z étant supposés développés suivant les puissances des $x_i - x_i^0$.

Soit s_0 la valeur réelle de s qui correspond aux valeurs x_i^0 des x_i . En partant des équations (2), on pourra développer les x suivant les puissances de $s - s_0$,

$$x_1 = \varphi_1(s), \quad x_2 = \varphi_2(s), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(s).$$

Si l'on suppose maintenant un autre point mobile dont les coordonnées x satisfont aux équations

$$(2 \text{ bis}) \quad \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \dots = \frac{dx_n}{ds} = Z,$$

on pourra aussi développer les coordonnées de ce nouveau point mobile suivant les puissances de $s - s_0$,

$$x_1 = \psi_1(s), \quad x_2 = \psi_2(s), \quad \dots, \quad x_n = \psi_n(s).$$

Les coefficients des séries ψ seront tous positifs et respectivement plus grands que les coefficients correspondants des séries φ .

Cherchons les valeurs de ψ , c'est-à-dire intégrons les équations (2 bis). Il viendra d'abord

$$x_1 - x_1^0 = x_2 - x_2^0 = \dots = x_n - x_n^0.$$

Appelons u la valeur commune de ces quantités. Les équations (2 bis) se réduiront à

$$\frac{du}{ds} = \frac{M}{1 - \frac{u}{\beta}},$$

d'où

$$u - \frac{u^2}{2\beta} = M(s - s_0)$$

et enfin

$$u = \beta - \sqrt{\beta^2 - 2\beta M(s - s_0)}.$$

Le radical s'annule pour

$$s - s_0 = \frac{\beta}{2M}.$$

Donc les séries ψ sont convergentes toutes les fois que

$$|s - s_0| < \frac{\beta}{2M}.$$

Il en est donc de même des séries φ .

Ainsi les fonctions $\varphi(s)$ sont holomorphes à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{\beta}{2M}$ ayant son centre en un point quelconque s_0 de l'axe X des quantités réelles.

Si nous menons de part et d'autre de X deux parallèles à une dis-

tance de X égale à $\frac{\beta}{2M}$, ces deux parallèles, dont l'équation sera

$$\text{Partie imaginaire de } s = \pm \frac{\beta}{2M},$$

limiteront une bande B du plan à l'intérieur de laquelle les fonctions φ seront holomorphes.

Nous allons chercher la représentation conforme (*ähnliche Abbildung*) de cette bande sur un cercle. Soit

$$\nu = \frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}.$$

Cherchons la condition pour que

$$\text{mod. } \nu < 1,$$

soit

$$s = s_1 + i s_2.$$

Il vient

$$\nu = \frac{e^{\alpha s_1} (\cos \alpha s_2 + i \sin \alpha s_2) - 1}{e^{\alpha s_1} (\cos \alpha s_2 + i \sin \alpha s_2) + 1},$$

$$\text{mod}^2 \nu = \frac{(e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2 - 1)^2 + e^{2\alpha s_1} \sin^2 \alpha s_2}{(e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2 + 1)^2 + e^{2\alpha s_1} \sin^2 \alpha s_2}$$

ou

$$\text{mod}^2 \nu = \frac{e^{2\alpha s_1} + 1 - 2e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2}{e^{2\alpha s_1} + 1 + 2e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2}.$$

Pour que cette quantité soit plus petite que 1, il faut et il suffit que $\cos \alpha s_2$ soit positif, ou que

$$| \alpha s_2 | < \frac{\pi}{2}.$$

En d'autres termes, le point s devra être à l'intérieur d'une bande comprise entre les deux droites

$$s_2 = \pm \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Si nous prenons

$$\alpha = \frac{M\pi}{\beta},$$

cette bande sera la bande B, et la relation entre φ et s définira la représentation conforme de B sur le cercle de centre o et de rayon 1.

Si nous considérons maintenant $x_1, x_2, \dots, x_n$ comme fonctions, non plus de s , mais de φ , ce seront alors des fonctions holomorphes à l'intérieur de ce cercle; ces quantités pourront donc être développées en séries ordonnées, suivant les puissances croissantes de φ , et convergentes toutes les fois que le module de φ est plus petit que 1.

Les coefficients de ces séries peuvent se calculer par récurrence.

Il n'existe, en effet, qu'un système de séries développées suivant les puissances croissantes de

$$\frac{e^{as} - 1}{e^{as} + 1},$$

et qui satisfassent formellement aux équations (2).

Ces séries sont convergentes pour toutes les valeurs réelles de s ; car, quand s est réel, le module de φ est plus petit que 1.

Je vais maintenant montrer que l'on peut toujours choisir une variable s satisfaisant aux conditions précédentes. Il suffit pour cela de prendre

$$\frac{ds}{dt} = \frac{X_t}{Y_t} = 1 + X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2.$$

Je dis, en premier lieu, que

$$Y_t = \frac{X_t}{1 + \sum X^2}$$

sera holomorphe pour toutes les valeurs réelles des x . En effet, cette fonction ne pourrait cesser d'être holomorphe que si l'on avait

$$1 + \sum X^2 = 0,$$

ce qui n'est pas possible quand les x sont réels.

En second lieu, si les X sont réels, Y_t sera toujours plus petit que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

Soient $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ un système de valeurs réelles des x ; et soit Δ un domaine formé de tous les systèmes de valeurs des x , tels que

$$|x_1 - x_1^0| < \rho, \quad |x_2 - x_2^0| < \rho, \quad \dots, \quad |x_n - x_n^0| < \rho.$$

La quantité ρ pourra s'appeler le *rayon*, et le système de valeurs $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ pourra s'appeler le *centre du domaine* Δ .

On pourra toujours prendre le rayon de Δ assez petit pour qu'à l'intérieur de ce domaine les Y restent holomorphes et plus petites que 1 en valeur absolue; mais nous choisirons pour ρ la plus grande valeur qui satisfasse à cette condition.

Je dis maintenant que ρ restera toujours supérieur à une quantité constante ρ_0 , quel que soit le centre du domaine Δ . En effet, lorsque ce centre se déplacera d'une manière continue, ρ variera aussi d'une manière continue; ρ ne pourra jamais s'annuler pour un système de valeurs finies de $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, sans quoi les fonctions Y cesseraient d'être holomorphes en ce point.

Il reste à faire voir que, quand le centre du domaine Δ s'éloignera indéfiniment, ρ ne tendra pas vers 0.

Supposons, par exemple, que x_1^0 croisse indéfiniment pendant que les autres quantités x_i^0 pourront croître aussi indéfiniment ou rester finies.

Changeons de variables en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{y_1}, & x_2 &= \frac{y_2}{y_1}, & \dots, & & x_n &= \frac{y_n}{y_1}, \\ x_1^0 &= \frac{1}{y_1^0}, & x_2^0 &= \frac{y_2^0}{y_1^0}, & \dots \end{aligned}$$

Nous pouvons supposer qu'en même temps que x_1^0 croît indéfiniment, les quantités $y_2^0, \dots, y_n^0$ tendent vers des limites finies; en effet, si cela n'était pas, on n'aurait qu'à faire entre les x un changement linéaire de variables.

Nous pouvons toujours supposer : 1° que les polynômes $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont tous d'un même degré m ; 2° que les termes de degré m de ces n polynômes ne peuvent s'annuler à la fois sans que toutes les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ s'annulent aussi. Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on ferait un changement linéaire de variables (je veux parler ici d'une substitution linéaire fractionnaire).

Toutes ces hypothèses étant faites, nous poserons

$$X_i = \frac{1}{y_1^m} X'_i,$$

et il viendra

$$Y_i = \frac{y_1^m X'_i}{y_1^{2m} + X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2}.$$

Cette fonction ne pourrait cesser d'être holomorphe par rapport aux y (si les y sont réels) que si l'on a à la fois

$$y_1 = X_1' = X_2' = \dots = X_n' = 0.$$

Or cela est impossible, d'après les hypothèses faites plus haut.

Donc, si

$$y_1^0 = 0, \quad y_2^0, \quad \dots, \quad y_n^0$$

sont un système de valeurs réelles des y , on pourra trouver une quantité ρ' , telle que les fonctions Y soient holomorphes et de module plus petit que 1, toutes les fois que

$$|y_1| < \rho', \quad |y_2 - y_2^0| < \rho', \quad \dots, \quad |y_n - y_n^0| < \rho'.$$

Cela suffit pour montrer que ρ ne tend pas vers 0.

Il en résulte qu'il existe une quantité ρ_0 qui est toujours plus petite que ρ et qui est telle, par conséquent, que les Y soient holomorphes et de module inférieur à 1, toutes les fois que les parties imaginaires de tous les x seront plus petits que ρ_0 en valeur absolue.

C. Q. F. D.

Ainsi, la variable s étant définie comme nous l'avons fait plus haut, les x peuvent se développer suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1},$$

et le développement est valable pour toutes les valeurs réelles de s ou de t .

Nous avons vu, toutefois, qu'il y aurait une difficulté si les termes

de degré le plus élevé des polynômes X pouvaient s'annuler à la fois; il suffirait alors, comme nous l'avons dit, de faire un changement de variables. Mais il est plus simple d'opérer de la façon suivante : nous pouvons toujours trouver un polynôme Z de degré m , tel que les termes de degré m des $n + 1$ polynômes $X_1, X_2, \dots, X_n$ et Z ne puissent s'annuler à la fois sans que tous les x s'annulent. On poserait alors

$$Y_i = \frac{X_i}{1 + X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 + Z^2},$$

et l'on démontrerait, comme précédemment, que les Y restent holomorphes et de module plus petit que 1, toutes les fois que les parties imaginaires des x sont inférieures en valeur absolue à une quantité donnée ρ_0 .

Les séries que nous venons de définir, et qui sont ordonnées suivant les puissances de

$$\frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1}$$

représenteront toutes une trajectoire; il convient, toutefois, d'observer que si cette trajectoire va passer par un point singulier, elle devra être regardée comme coupée en ce point singulier qu'on considérera comme un point d'arrêt. En effet, le point mobile ne peut (d'après la forme même des équations) atteindre un point singulier que pour des valeurs infinies de s et de t .

Parmi les équations auxquelles on pourrait être tenté d'appliquer la méthode précédente, on peut citer les équations du problème des trois corps, auxquelles elle est effectivement applicable.

Les développements ordonnés suivant les puissances croissantes de

$$\frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1}$$

seront alors valables pour toutes les valeurs du temps.

Il y aurait exception seulement si les données initiales étaient telles que deux des trois corps vinssent à se choquer au bout d'un temps fini; il arriverait alors en effet que s deviendrait infini à l'époque du choc.

Les formules ne seraient donc valables que jusqu'à l'époque du choc; mais il est évident que, pour des époques postérieures au choc, le problème est illusoire.

Soit maintenant t le temps [il s'agit ici du temps véritable et non du temps auxiliaire que j'avais introduit un peu arbitrairement dans les équations (1)]. Si l'on était sûr à l'avance que la distance de deux quelconques des trois corps restera toujours supérieure à une limite donnée (elle peut d'ailleurs croître indéfiniment), on pourrait affirmer que les coordonnées des trois corps peuvent être développées suivant les puissances de

$$\frac{e^{at} - 1}{e^{at} + 1}$$

en séries toujours convergentes.

Je ne crois pas toutefois qu'on puisse tirer grand parti des applications de cette méthode à la Mécanique céleste. Je n'ai voulu, je le répète, que donner un exemple, et non exposer une méthode qu'il convient d'appliquer dans tous les cas. On peut choisir la variable s d'une infinité de manières; le choix que j'ai fait était tout à fait arbitraire, et rien n'empêche de multiplier à l'infini les méthodes analogues à celle que je viens d'exposer.

CHAPITRE XVIII.

DISTRIBUTION DES POINTS SINGULIERS.

Ce Chapitre sera tout entier une application d'un théorème de M. Kronecker. Ce théorème est l'objet de deux Mémoires intitulés : *Ueber Systeme von Functionem mehrer Variabeln*, et ont été insérés dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin (mars 1869, août 1869).

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

une surface quelconque que je supposerai fermée.

Soit $d\omega$ un élément quelconque de cette surface. Soient

$$S = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \Sigma = +\sqrt{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dz^2}},$$

$$R = \frac{1}{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \\ X & \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ Y & \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ Z & \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}.$$

L'intégrale

$$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{R d\omega}{S^3},$$

étendue à tous les éléments de la surface considérée ou d'une nappe fermée quelconque de cette surface, s'appellera l'indice de cette surface ou de cette nappe.

Soit, par exemple,

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z, \\ F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

Notre surface est alors une sphère qui enveloppe l'origine, laquelle est un nœud.

Il vient

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a, \quad \Sigma = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a,$$

$$R = \frac{1}{2a} \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} = -a.$$

L'indice est alors égal à

$$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{-a d\omega}{a^3} = \frac{1}{4\pi a^2} \int d\omega.$$

Mais $\int d\omega$ est la surface de notre sphère, $F = 0$; c'est-à-dire $4\pi a^2$. L'indice est donc égal à 1.

Si $X = x$, $Y = y$, $Z = -z$, l'origine est un col et l'indice est égal à -1.

Si $X = x$, $Y = -y$, $Z = -z$, l'origine est encore un col, mais l'indice est égal à +1.

Si $X = -x$, $Y = -y$, $Z = -z$, l'origine est un nœud et l'indice est égal à -1.

Voici maintenant le théorème général qu'on peut déduire aisément de celui de M. Kronecker.

Nous distinguerons deux sortes de points singuliers; les points singuliers positifs, pour lesquels le déterminant

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}$$

est positif, et les points singuliers négatifs pour lesquels ce déterminant est négatif.

Il est aisé de voir qu'il y a des nœuds, des foyers, des cols et des cols-foyers positifs, et d'autre part des nœuds, des foyers, des cols et des cols-foyers négatifs.

C'est le contraire de ce qui arriverait dans le cas des équations du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Dans ce cas, en effet, tous les nœuds et tous les foyers sont positifs et tous les cols sont négatifs.

D'après le théorème de M. Kronecker, l'indice d'une surface fermée quelconque est égal au nombre des points singuliers positifs situés à l'intérieur de cette surface, diminué du nombre des points singuliers négatifs.

Supposons maintenant que la surface considérée soit une *surface*

sans contact, c'est-à-dire qu'on n'ait eu aucun point réel de cette surface

$$\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z = 0.$$

Je distinguerai d'abord, parmi les surfaces sans contact, deux espèces différentes : l'espèce positive, pour laquelle

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z > 0,$$

et l'espèce négative, pour laquelle

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z < 0.$$

Pour distinguer ces espèces, il convient de choisir F de telle sorte que F soit plus grand à l'extérieur de la surface fermée qu'à l'intérieur de cette même surface.

Cela posé, je vais montrer que l'indice d'une surface sans contact ne dépend que de son espèce et de son genre (au point de vue de l'*Analysis Situs*, Cf. III^e Partie, Chap. XII).

Je vais faire voir que l'indice d'une surface d'espèce positive ne change pas quand on remplace X , Y et Z par $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ et $\frac{dF}{dz}$, et que celui d'une surface d'espèce négative ne change pas quand on remplace X , Y et Z par $-\frac{dF}{dx}$, $-\frac{dF}{dy}$, $-\frac{dF}{dz}$.

Représentons, en effet, la vitesse du point mobile par une flèche dont les projections sur les trois axes seront X , Y et Z . Par chacun des points de notre surface passera donc une flèche; toutes ces flèches seront dirigées vers l'extérieur, si la surface est positive, et toutes vers l'intérieur si la surface est négative.

Nous allons maintenant faire varier d'une manière continue X , Y , Z et F , de façon à déformer la surface et à faire varier les flèches. L'indice ne changera pas, pourvu qu'à aucun moment de la déformation la vitesse d'aucun point de la surface ne devienne nulle.

C'est ce qui arrivera si la surface reste constamment sans contact, et si elle conserve son genre et son espèce.

Ainsi l'indice d'une surface sans contact ne dépend que du genre et de l'espèce, et en particulier on peut remplacer X , Y et Z par $\pm \frac{dF}{dx}$, $\pm \frac{dF}{dy}$, $\pm \frac{dF}{dz}$ en prenant le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que la surface est positive ou négative.

En particulier, considérons une sphère sans contact; nous avons vu par l'exemple traité plus haut,

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z, \quad F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2,$$

qu'une pareille sphère a pour indice $+1$ si elle est positive; elle a d'ailleurs pour indice -1 si elle est négative, comme on le voit en faisant

$$X = -x, \quad Y = -y, \quad Z = -z, \quad F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

Ainsi une surface sans contact de genre 0 a pour indice ± 1 , selon qu'elle est positive ou négative. Dans le cas des équations du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

un cycle sans contact avait toujours pour indice $+1$, qu'il fût positif ou négatif.

Il résulte de là les conséquences suivantes :

A l'intérieur d'une surface sans contact de genre 0 et positive, le nombre des points singuliers positifs est supérieur d'une unité à celui des points singuliers négatifs; il lui est inférieur d'une unité si la surface est négative.

A l'intérieur d'une surface sans contact de genre 0, il y a toujours au moins un point singulier.

Ce sont des considérations analogues qui, dans le cas du premier ordre, nous avaient conduits à une relation entre le nombre des cols, des foyers et des nœuds. Nous n'avons ici rien à attendre de semblable. C'était en effet une relation entre le nombre des points singuliers positifs (à savoir les nœuds) et les foyers et le nombre des points singuliers négatifs (à savoir le col). Mais, dans le cas qui nous occupe

maintenant, un nœud, un col, un foyer ou un col-foyer peut aussi bien être positif que négatif. C'est ce qui empêche la relation dont je viens de parler de se généraliser.

Soit maintenant une surface sans contact de genre 0 et positive; et une seconde surface sans contact de genre 0 et négative, intérieure à la première. Soit E l'espace compris entre les deux surfaces. La différence des indices est égale à 2. Donc le nombre des points singuliers positifs situés dans l'espace E est supérieur de deux unités à celui des points singuliers négatifs. (Il lui serait inférieur de deux unités si la surface positive était intérieure à la surface négative.)

Donc, entre deux surfaces sans contact de genre 0 et d'espèce différente, il y a toujours au moins deux points singuliers.

Cherchons maintenant l'indice d'une surface sans contact de genre 1. Soit

$$F = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = c^4$$

l'équation générale d'une famille de surfaces, c^4 étant un paramètre arbitraire (surfaces engendrées par la révolution d'un système d'ovales de Cassini).

Les surfaces $F = c^4$ sont de genre 0 si $c > a$, et de genre 1 si $c < a$. Si $c = a$, la surface $F = a^4$ admet un point conique.

Les équations différentielles des trajectoires orthogonales de ces surfaces seront

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dy}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dz}.$$

Pour ces trajectoires, il n'y a qu'un point singulier qui est l'origine, et ce point singulier est positif, comme il est aisé de s'en assurer.

De plus, pour ces mêmes trajectoires, les surfaces $F = c^4$ seront des surfaces sans contact positives.

Soient donc deux surfaces $F = b^4$, $F = d^4$, ($b^4 < a^4 < d^4$) : la première sera de genre 1, la seconde de genre 0; l'indice de la seconde est +1; soit I l'indice de la seconde. La différence des indices devra être égale au nombre des points singuliers positifs compris entre les deux surfaces, moins le nombre des points singuliers négatifs. Or il y a entre les deux surfaces un point singulier positif et pas de point sin-

gulier négatif. On a donc

$$1 - 1 = +1,$$

d'où

$$I = 0.$$

Ainsi l'indice d'une surface sans contact de genre 1 et positive est nul, et il en serait de même de l'indice d'une surface sans contact de genre 1 et négative.

En raisonnant de la même manière, on verrait que l'indice d'une surface sans contact de genre p est $-(p-1)$ si elle est positive, et $+(p-1)$ si elle est négative.

La conséquence immédiate de ce résultat est qu'à l'intérieur d'une surface sans contact quelconque, il y a toujours des points singuliers, à moins que cette surface ne soit de genre 1, auquel cas on ne sait rien.

Soient deux surfaces sans contact, l'une extérieure à l'autre; et soit E l'espace compris entre ces deux surfaces.

Si ces surfaces sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, l'espace E contiendra toujours des points singuliers, à moins que les deux surfaces ne soient de même genre.

Si ces deux surfaces sont l'une positive et l'autre négative, l'espace E contiendra toujours des points singuliers, à moins que les deux surfaces ne soient l'une de genre 0 et l'autre de genre 2 ou toutes deux de genre 1.

Il est aisé d'étendre les résultats qui précèdent au cas général des équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = dt.$$

Soit, en effet,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

l'équation d'une multiplicité $(n-1)^{\text{ième}}$ (*Mannigfaltigkeit*) qui jouera dans l'espace à n dimensions le même rôle qu'une surface dans l'espace ordinaire.

Soit $d\omega$ un élément quelconque de cette multiplicité. Soient

$$S = +\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2},$$

$$\Sigma = +\sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dF}{dx_n}\right)^2}.$$

Soit Δ un déterminant où le premier élément de la première colonne est 0; où le $(i+1)^{\text{ième}}$ élément de la première colonne est X_i ; où le $(i+1)^{\text{ième}}$ élément de la première ligne est $\frac{dF}{dx_i}$; ou enfin le $k+1^{\text{ième}}$ élément de la $(i+1)^{\text{ième}}$ colonne est $\frac{dX_k}{dx_i}$.

Soit ω l'intégrale

$$\int d\omega$$

étendue à tous les éléments de la multiplicité

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

L'intégrale

$$- \frac{1}{\omega} \int \frac{\Delta d\omega}{\Sigma S^n},$$

étendue à tous les éléments de la multiplicité $F = 0$, sera l'indice de cette multiplicité.

La distinction des points singuliers positifs et négatifs se fera comme dans le cas particulier déjà étudié, et l'on verra que l'indice d'une multiplicité est égal au nombre des points singuliers positifs situés à l'intérieur de cette multiplicité, diminué du nombre des points singuliers négatifs.

Mais il y a lieu ici de faire une remarque importante. Pour classer les points singuliers, on forme l'équation en S ,

$$\begin{vmatrix} \frac{dX_1}{dx_1} - S & \frac{dX_1}{dx_2} & \dots & \frac{dX_1}{dx_n} \\ \frac{dX_2}{dx_1} & \frac{dX_2}{dx_2} - S & \dots & \frac{dX_2}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dX_n}{dx_1} & \frac{dX_n}{dx_2} & \dots & \frac{dX_n}{dx_n} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons que cette équation de degré n ait p racines réelles positives, q racines réelles négatives; $2r$ racines imaginaires à partie réelle positive; $2s$ racines imaginaires à partie réelle négative. On a

$$p + q + 2r + 2s = n.$$

Les quatre nombres p, q, r, s caractériseront le point singulier et feront connaître la forme des trajectoires dans le voisinage de ce point. Toutefois, les points (p, q, r, s) et les points (q, p, s, r) devront être regardés comme de même espèce, c'est-à-dire que la forme des trajectoires est la même dans les deux cas.

Ainsi, si nous faisons $n = 3$, on voit que pour les équations

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{dz}{dt} = z,$$

l'origine, qui est un point singulier caractérisé par les quatre nombres $(3, 0, 0, 0)$, est un nœud de même que pour les équations

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -y, \quad \frac{dz}{dt} = -z,$$

où elle est caractérisée par les quatre nombres $(0, 3, 0, 0)$.

Maintenant un point singulier est positif si q est pair, et négatif si q est impair.

Il est aisé de voir que si n est pair,

$$p \equiv q \pmod{2},$$

et que si n est impair,

$$p \equiv q + 1 \pmod{2}.$$

D'où il suit que, si n est pair, les deux points singuliers (p, q, r, s) et (q, p, r, s) sont tous deux positifs ou tous deux négatifs. Si, au contraire, n est impair, ces deux points singuliers sont de signe contraire.

Il résulte de là que, si n est pair, deux points singuliers de même espèce sont toujours de même signe, et qu'il n'en est plus de même si n est impair.

C'est ainsi que, pour $n = 2$, les foyers et les nœuds sont toujours positifs et les cols toujours négatifs, et que, pour $n = 3$, les nœuds (de même que les foyers, les cols et les cols-foyers) peuvent être positifs ou négatifs.

On définira, comme on l'a fait plus haut pour les surfaces, les multiplicités $(n - 1)^{\text{ième}}$ sans contact qui pourront se répartir en deux espèces, l'espèce positive et l'espèce négative.

Une multiplicité $(n - 1)^{\text{ième}}$ sera caractérisée au point de vue de l'*Analysis Situs* par ses $n - 2$ ordres de connexions tels qu'ils sont définis par Riemann (*Gesammelte Werke*; Leipzig, Teubner, 1876, p. 448), et par Brioschi (*Annali di Matematica*, t. V).

L'indice d'une multiplicité sans contact ne dépendra que de ses ordres de connexion et de son espèce.

Considérons maintenant deux multiplicités sans contact, ayant mêmes ordres de connexion et étant l'une positive, l'autre négative; leurs indices seront égaux et de même signe si n est pair, égaux et de signe contraire si n est impair.

Une multiplicité sans contact, simplement connexe et positive, aura pour indice $+1$. Le nombre des points singuliers positifs situés à l'intérieur surpassera d'une unité le nombre des points singuliers négatifs.

Si n est pair, les points singuliers de même espèce seront toujours de même signe, et nous aurons ainsi une relation entre le nombre des points singuliers des différentes espèces. Nous n'en aurons pas si n est impair. C'est ainsi que nous avons obtenu une pareille relation pour $n = 2$, et que nous n'en avons pas obtenu pour $n = 3$.

Soient M et M' deux multiplicités sans contact ayant mêmes ordres de connexion, la première positive, la seconde négative, la première extérieure à la seconde. Soit E l'espace compris entre M et M' .

Lorsque n sera impair, l'espace E contiendra toujours des points singuliers si l'indice de M n'est pas nul, et en particulier si M est simplement connexe. Nous ne pourrions, au contraire, rien affirmer si n est pair.

CHAPITRE XIX.

ÉTUDE DES COURBES FERMÉES.

Parmi les trajectoires d'un point mobile, définies par les équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt,$$

il peut y en avoir qui soient des courbes fermées. Nous allons voir qu'on peut faire, au sujet des trajectoires qui s'approchent assez près d'une

trajectoire fermée, une théorie tout à fait analogue à celle que nous avons faite au Chapitre XVI pour les trajectoires qui s'approchent assez près d'un point singulier; de sorte que ces courbes fermées jouent dans une certaine mesure le même rôle que les points singuliers.

Il faudrait d'abord savoir reconnaître s'il existe des trajectoires fermées; mais je ne puis, pour le moment, donner à ce sujet beaucoup de développements. Je me bornerai, en me réservant de revenir plus tard sur ce point, à donner ici un exemple simple.

Soit un tore sans contact à l'intérieur duquel il n'y ait aucun point singulier.

Coupons-le par des plans méridiens, et supposons que ces plans n'aient non plus aucun contact avec les trajectoires à l'intérieur du tore.

Prenons un système particulier de coordonnées. Supposons d'abord qu'on ait choisi pour axe des z l'axe du tore, et pour plan des x, y son plan de symétrie, de telle sorte que son équation s'écrive

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Posons ensuite

$$z = r_1, \quad x = (\xi + R) \cos \omega, \quad y = (\xi + R) \sin \omega,$$

de telle sorte que l'équation du tore devienne

$$\xi^2 + r_1^2 = r^2.$$

Les plans méridiens $\omega = \text{const.}$ étant sans contact, $\frac{d\omega}{dt}$ sera constamment de même signe, constamment positif, par exemple. Quant au tore, je supposerai, pour fixer les idées, que c'est une surface sans contact négative, de telle sorte que le point mobile, une fois entré à l'intérieur du tore, ne puisse plus en sortir. Par le point M_0 intérieur au tore et ayant pour coordonnées

$$\xi = \xi_0, \quad r_1 = r_{10}, \quad \omega = 0,$$

je fais passer une trajectoire; au bout d'un certain temps t , le point

mobile parti de sa position initiale M_0 se trouvera en un point M_1 intérieur au tore, et dont les coordonnées seront

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \omega = 2\pi.$$

Posons

$$\Xi = \xi_1 - \xi_0, \quad H = \eta_1 - \eta_0;$$

Ξ et H seront des fonctions holomorphes de ξ_0 et de η_0 . Si l'on a

$$\Xi = H = 0,$$

la trajectoire qui passe par le point M_0 sera fermée.

Dans le plan méridien $\omega = 0$, appelons *indice* d'une courbe quelconque,

$$F(\xi_0, \eta_0) = 0,$$

l'intégrale suivante

$$- \frac{1}{2\pi} \int \frac{R ds}{S^2},$$

étendue à tous les éléments ds de cette courbe. Dans cette expression on pose, comme dans l'intégrale de M. Kronecker,

$$S = \sqrt{\Xi^2 + H^2}, \quad \Sigma = \sqrt{\frac{dF^2}{d\xi_0^2} + \frac{dF^2}{d\eta_0^2}}$$

et

$$R = \frac{1}{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & \frac{dF}{d\xi_0} & \frac{dF}{d\eta_0} \\ \Xi & \frac{d\Xi}{d\xi_0} & \frac{d\Xi}{d\eta_0} \\ H & \frac{dH}{d\xi_0} & \frac{dH}{d\eta_0} \end{vmatrix}.$$

Considérons, en particulier, la courbe

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 = r^2,$$

c'est-à-dire le cercle méridien du tore. Si l'on observe que l'on a constamment, le long de cette courbe,

$$\xi_0 \Xi + \eta_0 H < 0,$$

et, par conséquent,

$$\Xi \frac{dF}{d\xi_0} + \Pi \frac{dF}{d\eta_0} < 0,$$

on verra sans peine que l'indice de notre cercle méridien est égal à $+1$.

Donc il y a à l'intérieur de ce cercle au moins un point ξ_0, η_0 pour lequel Ξ et Π s'annulent; donc il y a à l'intérieur du tore une trajectoire fermée.

C. Q. F. D.

Je rappellerai en outre que, dans une Note insérée au Tome I du *Bulletin astronomique*, et intitulée *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps*, j'ai montré que les équations de la Mécanique céleste admettent certaines intégrales particulières qui peuvent, à un certain point de vue, être regardées comme représentant des trajectoires fermées.

Supposons donc que, d'une façon ou d'une autre, on ait démontré l'existence d'une trajectoire fermée. Appelons s l'arc de cette trajectoire, compté à partir d'une certaine origine, et l la longueur totale de la courbe. Nous ferons usage d'un système particulier de coordonnées.

Soient O l'origine des arcs, M un point quelconque de la trajectoire fermée. Soit s l'arc OM . Au point M , je mène un plan normal à la trajectoire, dans ce plan, et par le point M deux axes rectangulaires. Soient x et y les coordonnées d'un point de ce plan normal, par rapport à ces deux axes.

Un point quelconque de l'espace sera alors déterminé par ces trois coordonnées x, y et s . Ce système de coordonnées convient pour représenter un point très voisin de la trajectoire fermée.

Soit P_0 un point du plan normal $s = 0$ de coordonnées x_0, y_0 et 0 . Si x_0 et y_0 sont suffisamment petits, la trajectoire qui passe par le point P_0 ira couper successivement tous les plans normaux, de telle façon que s ira constamment en croissant. Elle finira par couper en un point P_1 de coordonnées x_1, y_1 et l le plan normal $s = l$, qui n'est d'ailleurs autre chose que le plan $s = 0$ lui-même. Si x_0 et y_0 sont assez petits, x_1 et y_1 sont des fonctions holomorphes de x_0 et y_0 s'an-

nulant avec ces variables. Soient

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha x_0 + \beta y_0 + R, \\ y_1 &= \gamma x_0 + \delta y_0 + R',\end{aligned}$$

R et R' désignant un ensemble de termes de degré supérieur au premier en x_0 et y_0 .

Posons

$$s = \frac{it}{2\pi},$$

les équations différentielles pourront s'écrire

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Les fonctions X et Y seront des séries développées suivant les puissances croissantes de x et y , et convergentes si x et y sont assez petits. Les coefficients de ces séries seront eux-mêmes des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de t . Enfin X et Y s'annuleront avec x et y . Soient

$$hx + ky, \quad h'x + k'y$$

les termes du premier degré de X et de Y. Les coefficients h , k , h' et k' seront, comme nous l'avons dit, des séries trigonométriques. Considérons les équations

$$\frac{dx}{dt} = hx + ky, \quad \frac{dy}{dt} = k'x + h'y.$$

Leurs intégrales seront de la forme suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} x = A_1 e^{\lambda_1 t} \varphi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t} \varphi_2(t), \\ y = A_1 e^{\lambda_1 t} \psi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t} \psi_2(t). \end{cases}$$

Dans ces expressions A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration, φ_1 , φ_2 , ψ_1 et ψ_2 seront des séries trigonométriques. Quant à λ_1 et λ_2 ,

ce sont des constantes qui nous sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha - e^{2\lambda\pi} & \beta \\ \gamma & \delta - e^{2\lambda\pi} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(2) \quad S^2 - (\alpha + \delta)S + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0, \quad S = e^{2\lambda\pi}.$$

Étudions maintenant les divers cas qui peuvent se présenter.

Premier cas. — Il peut arriver que les deux racines de l'équation en S soient imaginaires conjuguées, et que leur module ne soit pas égal à 1.

On trouve alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda + i\lambda', & \lambda_2 &= \lambda - i\lambda', & A_1 &= Ae^{i\theta}, & A_2 &= Ae^{-i\theta}, \\ \varphi_1 &= \varphi + i\varphi', & \varphi_2 &= \varphi - i\varphi', & \psi_1 &= \psi + i\psi', & \psi_2 &= \psi - i\psi', \end{aligned}$$

$\lambda, \lambda', A, A', \varphi, \varphi', \psi$ et ψ' étant réels. De plus, λ n'est pas nul. Nous supposons, pour fixer les idées,

$$\lambda > 0.$$

Les équations (1) deviennent

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = Ae^{\lambda t} [\cos(\lambda' t + \theta) \varphi(t) - \sin(\lambda' t + \theta) \varphi'(t)], \\ y = Ae^{\lambda t} [\cos(\lambda' t + \theta) \psi(t) - \sin(\lambda' t + \theta) \psi'(t)]. \end{cases}$$

Posons

$$F(x, y, t) = \frac{(x\psi' - y\varphi')^2 + (x\psi - y\varphi)^2}{(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2}.$$

Les surfaces

$$F(x, y, t) = C$$

seront (si x, y , et par conséquent C , sont assez petits) des surfaces de genre 1 à l'intérieur desquelles la trajectoire fermée se trouvera contenue.

Si dans F on remplace x et y par leurs valeurs (1 bis), il vient

$$F = A^2 e^{2\lambda t},$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\lambda A^2 e^{2\lambda t} > 0.$$

Mais si l'on observe que les équations (1 bis) sont les intégrales des équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = hx + ky, \quad \frac{dy}{dt} = h'x + k'y,$$

on verra que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{dt} + \frac{dF}{dx}(hx + ky) + \frac{dF}{dy}(h'x + k'y).$$

On a donc

$$\frac{dF}{dt} + \frac{dF}{dx}(hx + ky) + \frac{dF}{dy}(h'x + k'y) > 0.$$

Mais, si x et y sont assez petits, $hx + ky$ et $h'x + k'y$ différeront assez peu de X et Y , de sorte qu'on aura

$$\frac{dF}{dt} + X \frac{dF}{dx} + Y \frac{dF}{dy} > 0.$$

Ainsi donc les surfaces $F = C$ sont des surfaces sans contact, si C est assez petit.

Si $\lambda > 0$, ces surfaces sont positives, et le point mobile va constamment en s'éloignant de la trajectoire fermée.

Si, au contraire, $\lambda < 0$, nos surfaces sont négatives, et le point mobile se rapproche asymptotiquement de la trajectoire fermée.

Second cas. — Il peut arriver ensuite que l'équation en S ait ses deux racines réelles positives, et toutes deux plus grandes que 1. Alors λ_1 et λ_2 sont réels et positifs.

Posons

$$\xi = \frac{x\psi_2 - y\varphi_2}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}, \quad \eta = \frac{x\psi_1 - y\varphi_1}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1},$$

$$F = \xi^2 + \eta^2.$$

On verrait, comme précédemment, que, si C est assez petit, les surfaces $F = C$ sont des surfaces de genre 1 contenant la trajectoire fermée, et que de plus on a

$$\frac{dF}{dt} + X \frac{dF}{dx} + Y \frac{dF}{dy} > 0,$$

ce qui montre que les surfaces $F = C$ sont sans contact et positives.

Cela prouve que le point mobile, infiniment voisin de la trajectoire fermée pour $t = -\infty$, va constamment en s'en éloignant.

Si, au contraire, les deux racines de l'équation en S étaient réelles, positives et toutes deux plus petites que 1, la même analyse montrerait que les surfaces $F = C$ sont sans contact et négatives. Par conséquent, le point mobile se rapprocherait asymptotiquement de la trajectoire fermée.

Troisième cas. — Les deux racines de l'équation en S sont toutes deux réelles positives, mais l'une plus grande et l'autre plus petite que 1. Alors les deux λ sont réels et de signe contraire.

Je dis que dans ce cas on peut, dans le plan normal $s = 0$, faire passer deux courbes K et K' qui rencontrent la trajectoire fermée aux points $x = 0$, $y = 0$, $s = 0$ et qui, de plus, jouissent des deux propriétés suivantes :

1° On peut mettre leur équation sous la forme

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u),$$

φ et ψ étant des fonctions holomorphes d'une même variable u , s'annulant avec cette variable.

2° Si le point x_0, y_0 est sur l'une des courbes K ou K' , il en sera de même du point x_1, y_1 .

En effet, nous pouvons toujours, par un changement linéaire de variables, amener les relations qui lient x_1, y_1 à x_0, y_0 à la forme suivante :

$$(3) \quad \begin{cases} y_1 = S_1 y_0 + \Phi_1(x_0, y_0), \\ x_1 = S_2 x_0 + \Phi_2(x_0, y_0), \end{cases}$$

Φ_1 et Φ_2 étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de x_0 et y_0 , et commençant par des termes du second degré.

Soit

$$y = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_n x^n + \dots = \psi(x)$$

l'équation de la courbe **K**. Nous devons avoir identiquement

$$S_1 \psi(x_0) + \Phi_1[x_0, \psi(x_0)] = \psi \{ S_2 x_0 + \Phi_2[x_0, \psi(x_0)] \}.$$

En identifiant les deux membres de cette égalité, on trouve une série de relations qui donneront successivement

$$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \dots, \quad \alpha_n$$

Nous supposons $S_1 > 1 > S_2$. Nous pourrions toujours trouver deux quantités positives M et β telles que l'on ait, en employant la notation du Chapitre XI,

$$-\Phi_1(x_0, y_0) \ll \frac{M \beta^2 (x_0 + y_0)^2}{1 - \beta(x_0 + y_0)}, \quad \Phi_2(x_0, y_0) \ll \frac{M \beta^2 (x_0 + y_0)^2}{1 - \beta(x_0 + y_0)}.$$

Cela posé, considérons, à côté des équations (3), les équations auxiliaires

$$(3 \text{ bis}) \quad \begin{cases} y_1 = S_2 y_0 - \frac{M \beta^2 (x_0 + y_0)^2}{1 - \beta(x_0 + y_0)}, \\ x_1 = S_2 x_0 + \frac{M \beta^2 (x_0 + y_0)^2}{1 - \beta(x_0 + y_0)}. \end{cases}$$

Si nous raisonnons sur ces équations (3 bis) comme nous l'avons fait sur les équations (3), nous verrons qu'il existe une série

$$y = \alpha'_2 x^2 + \alpha'_3 x^3 + \dots + \alpha'_n x^n + \dots = \psi'(x)$$

qui satisfait à la condition

$$S_2 \psi'(x_0) - \frac{M \beta^2 [x_0 + \psi'(x_0)]^2}{1 - \beta[x_0 + \psi'(x_0)]} = \psi' \left\{ S_2 x_0 + \frac{M \beta^2 [x_0 + \psi'(x_0)]^2}{1 - \beta[x_0 + \psi'(x_0)]} \right\}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\psi(x) \ll \psi'(x).$$

Or la série $\psi(x)$ est convergente; car on l'obtient en résolvant l'équation

$$\psi' = \frac{M\beta^2}{S_1 - S_2} (x + \psi')^2 + \frac{M\beta^3}{S_1 - S_2} (x + \psi')^3 + \dots + \frac{M\beta^n}{S_1 - S_2} (x + \psi') + \dots$$

La série ψ est donc également convergente. C. Q. F. D.

On démontrerait de même l'existence de la courbe K' , qui aurait pour équation

$$x = \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \dots + \beta_n y^n + \dots$$

L'existence des courbes K et K' étant établie, on reconnaîtrait sans peine que les trajectoires se répartissent en trois :

1° Celles qui rencontrent la courbe K ; les points qui décrivent ces trajectoires, infiniment voisins de la trajectoire fermée pour $t = -\infty$, vont constamment en s'en éloignant;

2° Celles qui rencontrent la courbe K' , et qui vont en se rapprochant asymptotiquement de la trajectoire fermée;

3° Enfin les autres trajectoires restent à une distance finie de la trajectoire fermée.

Il resterait à examiner le cas où une ou deux des racines de l'équation en S seraient négatives; mais il ne peut pas arriver qu'une seule des racines soit négative, et si elles le sont toutes deux, on retombe sur les formules du premier cas en y faisant

$$\lambda' = \frac{1}{2}.$$

Il est impossible de n'être pas frappé de l'analogie que présente l'analyse qui précède avec la théorie des points singuliers. Le premier cas (les deux λ imaginaires) correspond au cas des foyers; le second cas (les deux λ réels et de même signe) correspond au cas des nœuds, et le troisième (les deux λ réels et de signe contraire) correspond au cas des cols. Il nous restera à examiner un cas exceptionnel, celui où les deux S sont imaginaires conjugués, et ont pour module 1. Ce cas correspond à celui que nous avons étudié en détail au Chapitre XI. Nous allons voir l'analogie se poursuivre pendant un certain temps, et nous trouverons des résultats tout à fait semblables à ceux de ce

Chapitre. Mais, en approfondissant notre analyse, nous verrons surgir des différences essentielles, et nous rencontrerons des difficultés tout à fait nouvelles.

Mettons les équations différentielles sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X_1 + X_2 + \dots + X_n + \dots = X, \\ \frac{dy}{dt} &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + \dots = Y;\end{aligned}$$

X_i et Y_i seront des polynômes homogènes de degré i en x et en y , dont les coefficients seront des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et cosinus des multiples de t .

Posons maintenant

$$F = F_2 + F_3 + \dots + F_i + \dots + F_n,$$

F sera un polynôme entier en x et en y , dont les coefficients seront des séries trigonométriques de t ; et F_i représentera l'ensemble des termes de degré i en x et en y .

Le polynôme F ne contient donc ni terme de degré 0, ni terme de degré 1.

Nous allons chercher à déterminer $F_2, F_3, \dots, F_{p-1}$ de telle façon que, dans l'expression

$$\Phi = \frac{dF}{dx} X + \frac{dF}{dy} Y + \frac{dF}{dt},$$

tous les termes de degré inférieur à p en x et y soient nuls.

Si nous posons

$$\Phi_{ik} = \frac{dF_i}{dx} X_k + \frac{dF_i}{dy} Y_k,$$

il viendra

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dF_2}{dt} + \Phi_{2,1} &= 0, \\ \frac{dF_3}{dt} + \Phi_{3,1} &= -\Phi_{2,2}, \\ \frac{dF_4}{dt} + \Phi_{4,1} &= -\Phi_{3,2} - \Phi_{2,3}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{dF_{p-1}}{dt} + \Phi_{p-1,1} &= -\Phi_{p-2,2} - \Phi_{p-3,3} - \dots - \Phi_{2,p-2}. \end{aligned} \right.$$

La première de ces équations nous donnera F_2 , la seconde F_3 , ..., et la $p - 1^{\text{ème}}$ nous donnera F_{p-1} , pourvu toutefois qu'il soit possible d'y satisfaire.

D'après les hypothèses que nous avons faites au sujet des racines de l'équation en S , il est toujours possible de satisfaire à la première des équations (4). En effet, les intégrales des équations linéaires

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = X_1, \quad \frac{dy}{dt} = Y_1$$

pourront, comme dans le premier cas, se mettre sous la forme (1 bis), avec cette différence que λ sera nul; on aura donc, pour les intégrales de ces équations (5),

$$\begin{aligned} x &= A [\cos(\lambda' t + \theta) \varphi(t) - \sin(\lambda' t + \theta) \varphi'(t)], \\ y &= A [\cos(\lambda' t + \theta) \psi(t) - \sin(\lambda' t + \theta) \psi'(t)]. \end{aligned}$$

Si nous posons

$$\xi = \frac{x\psi' - y\varphi'}{\varphi\psi' - \psi\varphi'}, \quad \eta = \frac{x\psi - y\varphi}{\varphi\psi' - \psi\varphi'},$$

et que nous prenions ξ et η pour nouvelles variables à la place de x et de y (ce qui est un changement de variables linéaires en ce qui concerne x et y , mais non linéaire en ce qui concerne t), les équations (5) deviendront

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda' \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\lambda' \xi.$$

Nous pourrions toujours supposer que ce changement de variables ait été fait, et par conséquent que

$$X_1 = \lambda' y, \quad Y_1 = -\lambda' x.$$

Nous prendrons donc

$$F_2 = x^2 + y^2.$$

Les autres équations (1) s'écriront alors

$$(6) \quad \frac{dF_q}{dt} + \lambda' \left(y \frac{dF_q}{dx} - x \frac{dF_q}{dy} \right) = H_q,$$

où F_q est un polynôme homogène de degré q qu'il s'agit de déterminer, et où H_q est un polynôme de même degré que l'on peut regarder comme donné, car il ne dépend que de $F_2, F_3, \dots, F_{q-1}$, que l'on a dû calculer avant F_q . Les coefficients de H_q , comme ceux de F_q , sont d'ailleurs des séries trigonométriques en t .

Si l'on pose

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega,$$

il viendra

$$F_q = \rho^q \varphi(\omega, t), \quad H_q = \rho^q \psi(\omega, t),$$

$\varphi(\omega, t)$ et $\psi(\omega, t)$ étant des séries trigonométriques dépendant des deux arguments ω et t .

L'équation (6) devient alors

$$(6 \text{ bis}) \quad \frac{d\varphi}{dt} - \lambda' \frac{d\varphi}{d\omega} = \psi(\omega, t).$$

On peut toujours trouver une série trigonométrique φ en ω et en t satisfaisant à cette équation, pourvu que la série trigonométrique $\psi(\omega, t)$ ne contienne pas de terme C_0 indépendant de ω et de t (et que, d'ailleurs, λ' soit incommensurable, ce que nous supposons).

Si C_0 n'est pas nul, il est impossible de satisfaire à l'équation (6); mais on peut choisir F_q de telle façon que l'on ait toujours

$$\frac{dF_q}{dt} + \lambda' \left(y \frac{dF_q}{dx} - x \frac{dF_q}{dy} \right) < H_q$$

si C_0 est positif (l'inégalité changeant de sens, si C_0 est négatif).

Nous prendrons pour cela

$$F_q = \rho^q \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} - \lambda' \frac{d\varphi}{d\omega} = \psi - C_0.$$

Si nous envisageons alors le polynôme de degré q ,

$$F = F_2 + F_3 + \dots + F_q,$$

l'expression

$$\Phi = X \frac{dF}{dx} + Y \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dt}$$

sera une série ordonnée suivant les puissances de x et de y , et dont les coefficients seront des séries trigonométriques de t . Les termes du degré le moins élevé de Φ se réduiront d'ailleurs à

$$- C_0(x^2 + y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Si donc on envisage les surfaces $F = K$, où K est une constante, ce seront, si K est assez petit, des surfaces de genre 1 enveloppant la trajectoire fermée, et qui seront sans contact et positives si C_0 est négatif, sans contact et négatives si C_0 est positif.

Ainsi, si tous les C_0 ne sont pas nuls, on retombe sur le premier cas et il y a instabilité.

Le cas où tous les C_0 sont nuls semble d'abord très exceptionnel, puisque, pour le rencontrer, il faut remplir une infinité de conditions; il n'en est pas moins très important, non seulement à cause des difficultés spéciales qu'il présente, mais encore parce que c'est celui sur lequel on tombe en étudiant les équations générales de la Dynamique.

Nous avons à résoudre d'abord le problème suivant : comment pourra-t-on reconnaître *a priori* que tous les C_0 s'annulent à la fois, car on ne saurait se contenter de le vérifier, puisqu'il faudrait une infinité de vérifications. Voici, à cet égard, une règle simple.

S'il existe une fonction M qui soit holomorphe en x, y et t , et de plus réelle, positive et bien déterminée en tous les points de la trajectoire fermée; si, de plus, on a

$$(7) \quad \frac{d(MX)}{dx} + \frac{d(MY)}{dy} + \frac{dM}{dt} = 0,$$

on est certain d'avance que tous les C_0 seront nuls.

Je vais démontrer en effet que, s'il en est ainsi, il ne peut y avoir de surface

$$F = K$$

de genre 1, enveloppant la trajectoire fermée, et de plus sans contact.

Considérons en effet un instant x, y et t comme représentant les trois coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace. Les points

qui satisferont aux conditions

$$F < K, \quad 0 < t < 2\pi$$

rempliront un certain volume V , limité d'une part par une sorte de surface cylindrique $F = K$, et d'autre part par deux plans $t = 0$, $t = 2\pi$. Soit $d\omega$ un élément quelconque de la surface $F = K$.

Soit

$$\Sigma = \sqrt{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dt^2}}.$$

Le théorème de Green nous donnera

$$\begin{aligned} & \int \int \frac{M}{\Sigma} \left(\frac{dF}{dx} X + \frac{dF}{dy} Y + \frac{dF}{dt} \right) d\omega + \int \int M dx dy - \int \int M dx dy \\ &= \int \int \int \left[\frac{d(MX)}{dx} + \frac{d(MY)}{dy} + \frac{dM}{dt} \right] dx dy dt. \end{aligned}$$

Dans le premier membre, la première intégrale est étendue à tous les éléments de la surface $F = K$, la deuxième à tous les éléments du plan $t = 0$, la troisième à tous les éléments du plan $t = 2\pi$; enfin l'intégrale du second membre est étendue à tous les éléments du volume V .

L'intégrale du second membre est nulle en vertu de la relation (7); les deuxième et troisième intégrales du premier membre se détruisent, puisque la fonction M reprend la même valeur quand t augmente de 2π .

La première intégrale devrait donc être nulle. Mais cela est impossible, puisque $\frac{M}{\Sigma}$ est toujours positif, et que $\frac{dF}{dx} X + \frac{dF}{dy} Y + \frac{dF}{dt}$ est toujours de même signe.

Donc il ne peut pas y avoir de surface sans contact $F = K$.

Donc tous les C_0 sont nuls.

C. Q. F. D.

Envisageons, en particulier, l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \dots,$$

où les φ sont des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et

cosinus des multiples de t (nous ne supposons, pour le moment, qu'un seul argument), et qui a été étudiée par MM. Gylden, Lindstedt et Callandreau. Nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = \gamma = X, \quad \frac{dy}{dt} = \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \dots = Y,$$

qui est précisément la forme que nous étudions. On voit aisément que

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} = 0,$$

et par conséquent que tous les C_0 sont nuls.

Il résulte de là que, si l'on cherche à intégrer l'équation

$$X \frac{dF}{dx} + Y \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dt} = 0$$

par approximations successives, en négligeant d'abord les puissances troisièmes de x et de y , puis les puissances quatrièmes, et ainsi de suite, il ne s'introduira jamais de terme séculaire. C'est là l'explication du succès de la méthode de M. Lindstedt; nous sommes maintenant en mesure de démontrer que cette méthode doit toujours réussir; M. Lindstedt n'avait pu établir cette proposition qu'en s'imposant des restrictions inutiles dont nous pouvons désormais nous affranchir.

Si tous les C_0 sont nuls, il existe une série

$$F = F_2 + F_3 + \dots,$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de x et de y et suivant les sinus et cosinus des multiples de t , et satisfaisant formellement à l'équation

$$X \frac{dF}{dx} + Y \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dt} = 0.$$

Si donc cette série est convergente, il existera une série de surfaces $F = K$ qui seront des surfaces fermées de genre 1, et sur lesquelles seront tracées les trajectoires.

Jusqu'ici, l'analogie avait été parfaite avec l'analyse du Chapitre XI,

mais elle va maintenant cesser. Dans le Chapitre XI, la série F était toujours convergente; il n'en sera plus de même ici; cela tient à ce que l'intégrale de l'équation

$$(6 \text{ bis}) \quad \frac{d\varphi}{dt} - \lambda' \frac{d\varphi}{d\omega} = \psi = \sum A \cos(mt + n\omega + \theta)$$

s'écrit

$$\varphi = \sum \frac{A \sin(mt + n\omega + \theta)}{m - n\lambda'},$$

et que le diviseur $m - n\lambda'$ peut être très petit.

Il en résulte qu'il n'arrivera pas toujours que les trajectoires soient tracées sur une série de surfaces $F = K$. Pour mieux nous en rendre compte, nous allons prendre un exemple particulier.

Nous allons faire usage d'un système particulier de coordonnées. Posons, en effet,

$$x = r \cos \omega, \quad y = r \sin \omega.$$

Posons ensuite

$$\rho = \log \frac{(r-1)^2 + z}{r}, \quad \varphi = \arctan \frac{z}{r-1} - \arctan \frac{z}{r+1}.$$

A chaque système de valeurs de ρ , ω et φ correspondra un point M de l'espace, et un seul; ce point restera le même quand ω ou φ croîtra de 2π .

Les surfaces $\rho = \text{const.}$ sont des tores qui s'enveloppent mutuellement.

La surface $\rho = -\infty$ se réduit au cercle $r = 1$, $z = 0$; et si $\rho = -\infty$, la position du point M est indépendante de φ .

La surface $\rho = +\infty$ se réduit à l'axe des z , et si $\rho = +\infty$, la position du point M est indépendante de ω .

Les surfaces $\omega = \text{const.}$ sont des plans passant par l'axe des z . Les surfaces $\varphi = \text{const.}$ sont des sphères ayant leurs centres sur l'axe des z .

Cela posé, envisageons les équations différentielles

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \beta, \quad \frac{d\rho}{dt} = \sum A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi + \theta_{mn}) = \Theta.$$

Je supposerai que la série Θ est uniformément et absolument convergente pour toutes les valeurs de ω et de φ . D'ailleurs, m et n peuvent prendre toutes les valeurs entières positives et négatives.

L'intégrale générale de ces équations est

$$\omega = \alpha t + \omega_0, \quad \varphi = \beta t + \varphi_0,$$

$$\rho = \rho_0 + \sum \frac{A_{mn}}{m\alpha + n\beta} [\sin(m\omega + n\varphi + \theta_{mn}) - \sin(m\omega_0 + n\varphi_0 + \theta_{mn})],$$

ω_0 , φ_0 et ρ_0 étant des constantes d'intégration. Dans la dernière formule, nous supposerons implicitement compris le terme

$$A_{00}t.$$

Nous pourrions toujours supposer que l'origine du temps, celle des ω , et l'unité de longueur aient été choisies de telle sorte que

$$\omega_0 = \varphi_0 = \rho_0 = 0.$$

Pour simplifier les formules, je supposerai en outre que tous les θ_{mn} sont nuls, quitte à revenir plus tard sur le cas général. Il reste alors

$$\omega = \alpha t, \quad \varphi = \beta t,$$

$$\rho = A_{00}t + \sum \frac{A_{m,n}}{m\alpha + n\beta} \sin(m\omega + n\varphi).$$

Plusieurs cas peuvent se présenter.

Premier cas. — Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est incommensurable, et A_{00} n'est pas nul.

Je dis qu'alors on pourra trouver une fonction $F(\omega, \varphi)$ développable en série trigonométrique et telle que la surface

$$\rho = F(\omega, \varphi)$$

soit une surface sans contact, c'est-à-dire que l'on ait

$$(8) \quad \Theta \geq \alpha \frac{dF}{d\omega} + \beta \frac{dF}{d\varphi}$$

pour toutes les valeurs de ω et de φ .

Je pourrai écrire

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + A_{00},$$

Θ_1 ne comprenant qu'un nombre fini de termes de Θ , et Θ_2 étant aussi petit que l'on veut (cela est toujours possible, puisque la série Θ est absolument et uniformément convergente).

Je prendrai

$$|\Theta_2| < |A_{00}|.$$

Soit alors

$$\Theta_1 = \sum A_{pq} \cos(m\omega + n\varphi)$$

et

$$F = \sum \frac{A_{pq}}{p^\alpha + q^\beta} \sin(m\omega + n\varphi),$$

de sorte que

$$\alpha \frac{dF}{d\omega} + \beta \frac{dF}{d\varphi} = \Theta_1.$$

L'inégalité (8) devient alors

$$A_{00} + \Theta_2 + \Theta_1 \leq \Theta$$

ou

$$A_{00} \geq -\Theta_2,$$

et elle est évidente, puisque la valeur absolue du premier membre est supérieure à celle du second.

Nous nous trouvons donc dans le cas déjà étudié des surfaces sans contact enveloppant la trajectoire fermée, et il y a instabilité.

Deuxième cas. — Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est commensurable, et A_{00} est nul.

Supposons, pour fixer les idées, que $\beta = 1$ et que α soit un nombre entier positif.

Il n'est plus avantageux dans ce cas-ci de supposer que les valeurs initiales ω_0 , φ_0 et ρ_0 de ω , φ et ρ sont nulles.

Posons, pour abréger,

$$\mu = m\alpha + n\beta = m\alpha + n;$$

μ sera un nombre entier, et l'on retrouvera le même nombre μ pour une infinité de systèmes de valeurs de m et de n . On aura $\mu = 0$ si $n = -\alpha m$.

On trouve alors

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha t + \omega_0, & \varphi &= t + \varphi_0, \\ \rho &= \rho_0 + t \sum A'_m \cos m(\omega_0 - \alpha \varphi_0) \\ &+ \sum \frac{A_{mn}}{\mu} [\sin(\mu t + m\omega_0 + n\varphi_0) - \sin(m\omega_0 + n\varphi_0)],\end{aligned}$$

où

$$A'_m = A_{mn} \quad \text{pour} \quad n = -\alpha m, \quad \mu = 0.$$

Ici, comme le nombre μ est toujours entier, la série trigonométrique qui donne ρ est uniformément convergente.

Quant au coefficient de t ,

$$\sum A'_m \cos m(\omega_0 - \alpha \varphi_0),$$

il peut être positif ou négatif selon les valeurs de ω_0 et de φ_0 . Il en résulte que, selon la trajectoire choisie, ρ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ quand le temps t croît indéfiniment.

Il y a donc encore instabilité, puisque ρ ne reste pas fini, mais c'est une instabilité d'une nature toute différente de celle du premier cas; il est impossible, en effet, de construire une surface sans contact.

Le point mobile se rapproche asymptotiquement, soit de l'axe des z , soit du cercle $rz = 0$, $r = 1$, suivant la région où se trouve sa position initiale. Il y a même des trajectoires fermées qui correspondent au cas où

$$\sum A'_m \cos m(\omega_0 - \alpha \varphi_0) = 0.$$

Troisième cas. — Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est incommensurable, et A_{00} est nul. Nous supposons de nouveau

$$\omega_0 = \varphi_0 = \rho_0 = 0,$$

de sorte qu'on aura

$$\omega = \alpha t, \quad \varphi = \beta t, \quad \rho = \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t.$$

Il peut arriver alors que la série qui donne ρ soit uniformément convergente pour toutes les valeurs de t , c'est-à-dire que la série à termes positifs

$$(9) \quad \sum \left| \frac{A_{mn}}{\mu} \right|$$

soit convergente. Alors la trajectoire se trouvera tout entière sur la surface

$$\rho = \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin(m\omega + n\varphi),$$

qui est de genre 1 et analogue à un tore. La forme des trajectoires sur cette surface est alors tout à fait semblable à celle qui a été étudiée au Chapitre XV.

Quatrième cas. — Nous ferons les mêmes hypothèses que dans le cas précédent, avec cette différence que la série

$$\sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t$$

convergera, mais non uniformément, de telle sorte que la série (9) soit divergente.

Cette hypothèse peut se réaliser. Supposons, par exemple,

$$\beta = 1, \quad \alpha > 1, \quad A_{mn} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|m|+|n|}.$$

Nous serons certains alors que la série

$$\sum A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi)$$

converge absolument et uniformément.

Réduisons maintenant α en fraction continue

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$$

Soit $\frac{P_n}{Q_n}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de α ; nous supposons

$$\frac{P_n}{Q_n} > \alpha > \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Considérons la série

$$(10) \quad \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t$$

le coefficient de $\sin(P_n - Q_n \alpha)t$ dans cette série sera

$$\frac{1}{2^{P_n+Q_n}} \frac{1}{P_n - Q_n \alpha}.$$

On aura

$$P_n - Q_n \alpha < \frac{1}{Q_{n+1}}$$

et

$$Q_{n+1} = Q_{n-1} + a_{n+1} \quad Q_n > a_{n-1}.$$

Or je peux prendre arbitrairement les nombres a_n ; je supposerai donc, par exemple,

$$a_{n+1} = H^{Q_n},$$

H étant un entier.

Le coefficient de $\sin(P_n - Q_n \alpha)t$ sera alors plus grand que

$$\frac{H^{Q_n}}{2^{P_n+Q_n}} = \left(\frac{H}{2^{\alpha+1}} \right)^{Q_n} \frac{1}{2^{P_n-Q_n \alpha}}.$$

Il est aisé de voir que si H est plus grand que $2^{\alpha+1}$, cette expression croît indéfiniment avec n . Les coefficients de la série (10) peuvent donc croître au delà de toute limite, et par conséquent cette série ne peut être uniformément convergente.

Plaçons-nous donc dans l'hypothèse où la convergence de cette série n'est pas uniforme.

J'appellerai *surface de genre 1 régulière* une surface continue qui satisfera à des conditions analogues à celles dites de Dirichlet (dans l'étude de la série de Fourier) et dont, par conséquent, l'équation pourra s'écrire

$$\rho = \sum B_{mn}(\cos m\omega + n\varphi) + \sum C_{mn} \sin(m\omega + n\varphi).$$

Il est impossible qu'une surface régulière soit sans contact.

Si, en effet, elle était par exemple positive, on devrait avoir en tous ses points

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho}{d\omega} \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} > 0$$

ou

$$\begin{aligned} H = & \sum A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi) \\ & + \sum B_{mn}(\alpha m + \beta n) \sin(m\omega + n\varphi) \\ & + \sum C_{mn}(\alpha m + \beta n) \cos(m\omega + n\varphi) > 0 \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi H > 0.$$

Or cette intégrale est nulle, car A_{00} est supposé nul.

Il ne peut pas arriver non plus qu'une trajectoire soit tout entière sur une surface régulière.

Car sur cette surface on devrait avoir

$$H = 0$$

et, par conséquent,

$$B_{mn} = 0, \quad C_{mn} = \frac{A_{mn}}{\alpha m + \beta n}.$$

La série

$$\sum C_{mn} \sin(m\omega + n\varphi)$$

ne serait pas alors convergente.

Mais il y a plus, nous avons

$$\rho = \sum \frac{A_{mn}}{m\alpha + n\beta} \sin(m\alpha + n\beta)t.$$

La série du second membre, qui n'est pas uniformément convergente, peut devenir plus grande que toute quantité donnée, ainsi que je l'ai établi dans une Note insérée au *Bulletin astronomique*, t. I, p. 319.

Ainsi donc ρ peut croître indéfiniment, sans qu'il y ait de surface sans contact. Mais on peut se demander si ρ tend vers l'infini, c'est-

à-dire si l'on peut prendre t assez grand pour qu'à partir de l'époque t , ρ reste plus grand que toute quantité donnée, ou bien si la valeur de ρ va constamment en oscillant, de façon que l'amplitude des oscillations aille indéfiniment en croissant, et que les limites supérieure et inférieure atteintes dans ces oscillations tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. Dans ce dernier cas, ρ repassera une infinité de fois par une valeur quelconque.

Il est aisé de voir que les deux cas peuvent se présenter. Soit, en effet, D un entier positif non carré parfait; soient u et v deux entiers positifs tels que

$$u^2 - Dv^2 = 1.$$

Soit

$$(u - v\sqrt{D})^n = u_n - v_n\sqrt{D} = \lambda^n,$$

u_n et v_n étant entiers. Nous prendrons alors

$$\frac{d\rho}{dt} = \Theta = \sum (A\lambda)^n \cos(u_n\omega - v_n\varphi) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \text{ad inf.})$$

et

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = 1, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \beta = \sqrt{D},$$

de sorte que

$$\rho = \sum A^n \sin \lambda^n t.$$

Si $|A| > 1$, $|A\lambda| < 1$, cette série est convergente sans l'être uniformément.

Si A est positif et suffisamment grand, tout en restant inférieur à $\frac{1}{\lambda}$, la valeur de ρ tend vers l'infini; si, au contraire, A est négatif et compris entre -1 et $-\frac{1}{\lambda}$, la valeur de ρ subit des oscillations indéfiniment croissantes.

Pour la démonstration, il faut se reporter à une Note que j'ai communiquée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 7 décembre 1885).

Ainsi deux cas peuvent se présenter : ou bien ρ varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et tout se passe alors comme si A_{00} n'était pas nul; ou bien ρ prend une infinité de fois toutes les valeurs possibles.

Nous aurons évidemment

$$|\theta| < M,$$

M étant une quantité positive convenablement choisie. Nous aurons donc

$$\left| \frac{d\rho}{dt} \right| < M, \quad |\rho| < |Mt|.$$

Cela posé, nous ferons $\alpha = 1$, de sorte que, à des intervalles de temps périodiques et égaux à 2π , ω reprenne les valeurs de $0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi, \dots$, et que le point mobile se retrouve dans le plan $\omega = 0$; on aura d'ailleurs

$$\varphi = 2\beta n\pi.$$

Nous poserons

$$R(\varphi) = \varphi - 2m\pi,$$

m étant un entier choisi de telle sorte que $R(\varphi)$ soit compris entre 0 et 2π .

Si nous considérons le cercle C , qui a pour équations

$$\rho = 0, \quad \omega = 0,$$

la position d'un point sur ce cercle sera déterminée par la valeur de $R(\varphi)$, puisque

$$R(\varphi + 2\pi) = R(\varphi).$$

Les équations de notre trajectoire nous donneront

$$\rho = \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t = \Phi(t).$$

Pour $t = 2n\pi$, $\omega \equiv 0 \pmod{2\pi}$, $\varphi = 2\beta n\pi$,

$$\rho = \Phi(2n\pi).$$

A chaque point du cercle C , pour lequel

$$R(\varphi) = (2\beta n - 2m)\pi \quad (n \text{ et } m \text{ entiers}),$$

correspondra donc une valeur de ρ qui sera $\Phi(2n\pi)$. Considérons cette valeur de ρ comme une fonction du point considéré du cercle C , c'est-à-dire comme une fonction de $R(\varphi)$, et appelons-la

$$F[R(\varphi)].$$

Cette fonction sera discontinue et ne sera bien définie que pour les points

$$R(\varphi) = (2\beta n - 2m)\pi.$$

Je vais montrer d'abord que, sur un arc de cercle C , *si petit que soit cet arc*, il y a toujours des points pour lesquels notre fonction F est définie et a des valeurs aussi grandes qu'on le veut.

En effet, je vais envisager le point suivant, que j'appelle P ,

$$\rho = 0, \quad \omega = t, \quad \varphi = \beta t.$$

Les valeurs de ω et de φ sont les mêmes pour notre point mobile et pour le point P . D'ailleurs, ce point reste constamment sur le tore $\rho = 0$.

Soit AB l'arc du cercle C que je considère. On voit sans peine que, si petit que soit cet arc, on peut trouver une quantité h assez grande pour jouir de la propriété suivante.

Soit t_0 une valeur quelconque de t , choisie arbitrairement. Pour une valeur de t comprise entre t_0 et $t_0 + h$, le point P viendra sur l'arc AB . En d'autres termes, l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du point P à travers l'arc AB est toujours plus petit que h .

Soit donc une valeur de t , pour laquelle

$$\rho = \Phi(t)$$

soit positif et très grand; appelons t_0 cette valeur de t . Nous avons vu plus haut qu'il en existe de telles.

Il existera une quantité k plus petite que h telle que le point P ,

$$\rho = 0, \quad \omega = t_0 + k, \quad \varphi = \beta(t_0 + k),$$

soit situé sur l'arc AB. On aura alors

$$\Phi(t_0 + k) > \Phi(t_0) - Mk > \Phi(t_0) - Mh.$$

Comme $F(t_0)$ est positif et très grand, tandis que M et h sont finis, $F(t_0 + k)$ sera aussi positif et très grand. Au point du cercle C,

$$R(\varphi) = R(\beta t_0 + \beta k),$$

qui appartient à l'arc AB, la valeur de $F[R(\varphi)]$ est donc positive et très grande. C. Q. F. D.

On établirait de même que $F[R(\varphi)]$ peut devenir, sur l'arc AB, négatif et très grand; car $\Phi(t)$ peut devenir négatif et très grand, soit pour des valeurs positives, soit pour des valeurs négatives de t .

Soit maintenant

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

une suite indéfinie de valeurs de φ , telles que

$$\begin{aligned} \lim R(\varphi_n) &= A, \\ \lim F[R(\varphi_n)] &= F_1. \end{aligned}$$

Nous disons que F_1 est une des valeurs limites de la fonction F pour le point

$$R(\varphi) = A.$$

Supposons qu'aux deux points

$$R(\varphi) = A_0, \quad R(\varphi) = A'_0$$

la fonction F soit bien définie et ait respectivement pour valeurs F_1 et F'_0 . Je suppose, de plus, qu'au point $R(\varphi) = A_0$ elle admette la valeur limite F_1 . Je dis qu'elle admettra au point $R(\varphi) = A'_0$ une valeur limite F'_1 , et que cette valeur sera

$$F_1 - F_0 + F'_0.$$

En effet, d'après les hypothèses faites, il existera deux entiers, λ

et λ' , tels que

$$\begin{aligned} R(2\beta\lambda\pi) &= A_0, & R(2\beta\lambda'\pi) &= A'_0, \\ \Phi(2\lambda\pi) &= F_0, & \Phi(2\lambda'\pi) &= F'_0, \end{aligned}$$

et il existera en outre une série d'entiers

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$$

tels que

$$\lim R(2\beta\mu_n\pi) = A_0, \quad \lim \Phi(2\mu_n\pi) = F_1.$$

Considérons la suite infinie d'entiers

$$\mu_1 + \lambda' - \lambda, \quad \mu_2 + \lambda' - \lambda, \quad \dots, \quad \mu_n + \lambda' - \lambda, \quad \dots,$$

et l'on aura évidemment

$$\lim R[2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)\beta] = A'_0.$$

Je dis que

$$\lim \Phi[2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)] = F'_1 = F_1 + F'_0 - F_0.$$

En effet, il vient

$$(11) \quad \Phi[2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)] - \Phi(2\pi\mu_n) = \int_{2\pi\mu_n}^{2\pi(\mu_n + \lambda' - \lambda)} \frac{d\Phi}{dt} dt.$$

Or, si l'on tient compte de la double condition

$$\begin{aligned} \lim R(2\beta\mu_n\pi) &= R(2\beta\lambda\pi), \\ \lim R[2\beta(\mu_n + \lambda' - \lambda)\pi] &= R(2\beta\lambda'\pi), \end{aligned}$$

il viendra, pour la limite du second membre de (11),

$$\int_{2\pi\lambda}^{2\pi\lambda'} \frac{d\Phi}{dt} dt = F'_0 - F_0$$

et, pour celle du premier,

$$F'_1 - F_1.$$

Il reste donc

$$F'_1 = F_1 + F'_0 - F_0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

La fonction $F[R(\varphi)]$ était uniforme, mais n'était définie qu'en des points particuliers du cercle C . La fonction $F_1[R(\varphi)]$, qui représentera désormais une quelconque des valeurs limites de la fonction F dans le voisinage du point $R(\varphi)$, sera au contraire définie pour tous les points du cercle C , mais elle ne sera plus uniforme.

Soit maintenant

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

une suite indéfinie de points du cercle C , ayant pour limite le point B .

Soit

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$$

une suite de valeurs limites de la fonction F correspondant respectivement aux points $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$. Soit

$$\lim F_n = G.$$

Je dis que G sera une des valeurs limites de la fonction F au point B .

En effet, il résulte des hypothèses faites que l'on peut trouver une infinité de points A_n tels que leur distance au point B et la différence $G - F_n$ soient aussi petites qu'on le veut; et de plus que dans le voisinage de chacun de ces points A_n on peut trouver une infinité de points M , tels que leur distance au point A_n et la différence $F_n - F(M)$ soient aussi petites qu'on le veut. Il résulte de là que la limite du point M est le point B et que G est la limite de $F(M)$, si bien que G est une des valeurs de la fonction $F_1(B)$ définie plus haut. c. q. f. d.

Je dis maintenant que si en un point M la fonction $F[B(\varphi)]$ prend la valeur F_0 et si, en même temps, F_1 est une valeur limite de cette fonction F au même point M , $2F_1 - F_0$ sera également une valeur limite.

En effet, nous avons une suite infinie de points

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

où la fonction F a respectivement les valeurs

$$F(A_1), F(A_2), \dots, F(A_n), \dots,$$

et d'après les hypothèses faites, la distance $\Lambda_n M$ tend vers 0 et $F(\Lambda_n)$ vers F_1 , quand n croît indéfiniment. D'après un résultat démontré plus haut, une des valeurs limites de la fonction F au point Λ_n sera

$$F_1 + F(\Lambda_n) - F(M) = F_1 - F_0 + F(\Lambda_n);$$

quand n croîtra au delà de toute limite, le point Λ_n viendra en M et $F(\Lambda_n)$ se réduira à F_1 ; donc $2F_1 - F_0$ sera une valeur limite de la fonction F au point M .

Ainsi, si nous considérons la fonction $F_1[R(\varphi)]$ définie plus haut, il pourra se présenter les cas suivants :

- 1° Ou bien la fonction F_1 ne pourra prendre que les valeurs $\pm \infty$;
- 2° Ou bien la fonction F_1 prendra seulement au point M les valeurs $\pm \infty$ et $F(M)$;
- 3° Ou bien la fonction F_1 prendra en chaque point M toutes les valeurs possibles et sera non seulement non uniforme, mais complètement indéterminée;
- 4° Ou bien la fonction F_1 prendra au point M une infinité de valeurs différant les unes des autres par une période constante. Ce sera, en d'autres termes, une fonction périodique analogue à l'arc sinus.

La première de ces hypothèses peut certainement se réaliser [car nous avons vu plus haut qu'il peut arriver que la fonction $\Phi(t)$, tendant vers l'infini, ne reprenne une valeur donnée qu'un nombre fini de fois].

J'ai tout lieu de croire qu'il en est de même de la troisième; mais qu'au contraire la quatrième ne se réalisera jamais. Mais ce qui précède suffit pour donner une idée de la grande variété des cas qui peuvent se présenter.

1° Il peut arriver que ρ ne puisse prendre une valeur donnée qu'un nombre fini de fois et tende vers $\pm \infty$ quand le temps croît indéfiniment [si A_{00} n'est pas nul, ou bien encore si A_{00} est nul, mais que $\frac{\alpha}{\beta}$ soit commensurable; ou bien encore, quoique A_{00} soit nul et que $\frac{\alpha}{\beta}$ soit incommensurable, si la série $\Phi(t)$ n'est pas uniformément convergente et si elle tend vers l'infini].

2° Mais il peut arriver encore que ρ oscille constamment entre certaines limites, de façon à reprendre une infinité de fois toutes les va-

leurs comprises entre ces limites $\left[\text{si } \Lambda_{00} \text{ est nul, } \frac{\alpha}{\beta} \text{ incommensurable et la série } \Phi(t) \text{ uniformément convergente} \right]$.

3° Enfin il peut arriver que ρ reprenne une infinité de fois toutes les valeurs possibles $\left[\text{si } \Lambda_{00} \text{ est nul, } \frac{\alpha}{\beta} \text{ incommensurable et si la série } \Phi(t) \text{ ne converge pas uniformément et ne tend pas vers l'infini} \right]$.

Dans le premier cas, le point mobile, ou bien va constamment en s'éloignant de la trajectoire fermée $\rho = -\infty$ (si ρ tend vers $+\infty$), ou bien s'en rapproche asymptotiquement (si ρ tend vers $-\infty$). Il peut même arriver que certaines trajectoires s'éloignent constamment de la trajectoire fermée pendant que d'autres s'en rapprochent asymptotiquement (si Λ_{00} est nul, et $\frac{\alpha}{\beta}$ commensurable).

Dans tous les cas, il y a instabilité, c'est-à-dire que, si le point mobile à l'époque $t = 0$ se trouve très voisin de la trajectoire fermée, ou bien il n'en sera plus très voisin pour des valeurs très grandes et positives de t ; ou bien il n'en était pas très voisin pour des valeurs très grandes et négatives de t .

Dans le second cas, au contraire, il y a stabilité, c'est-à-dire que si le point mobile est à l'époque $t = 0$ très voisin de la trajectoire fermée, il en reste constamment très voisin pour toutes les valeurs positives ou négatives de t .

Enfin, dans le troisième cas, il y a instabilité en ce sens que si le point mobile est, à l'origine des temps, très voisin de la trajectoire fermée, il pourra, à certaines époques, s'en éloigner beaucoup. Mais il y a stabilité, au contraire, en ce sens que le point mobile, après s'être éloigné beaucoup de la trajectoire fermée, s'en rapprochera de nouveau beaucoup et en redeviendra, à certaines époques, extrêmement voisin.

L'exemple simple que nous venons de longuement étudier nous permet maintenant de revenir sur le cas général et de dire :

De ce que tous les C_0 sont nuls, il n'est pas permis de conclure que la série

$$F = F_2 + F_3 + \dots,$$

définie plus haut, soit convergente ni qu'un point très voisin de la

trajectoire, fermée en restera toujours très voisin ni, même qu'après s'être éloigné de cette trajectoire il s'en rapprochera de nouveau.

Il peut arriver, ou bien qu'un point très voisin de la trajectoire fermée en reste très voisin, ou bien qu'il s'en éloigne une infinité de fois pour en redevenir une infinité de fois très voisin, ou bien enfin qu'après s'en être éloigné il en demeure très éloigné. Ces trois cas, logiquement possibles, peuvent effectivement se rencontrer.

D'après ce qui précède, on comprendra sans peine à quel point les difficultés que l'on rencontre en Mécanique céleste, par suite des petits diviseurs et de la quasi-commensurabilité des moyens mouvements, tiennent à la nature même des choses et ne peuvent être tournées. Il est extrêmement probable qu'on les retrouvera, quelle que soit la méthode que l'on emploie.

Paris, 13 décembre 1885.

