

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL GORDAN

Sur les équations du cinquième degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 1 (1885), p. 455-458.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__455_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les équations du cinquième degré;***PAR M. PAUL GORDAN.**

Soit

$$(1) \quad f = a$$

une équation du cinquième degré, ayant pour racines

$$x_0, x_1, \dots, x_4;$$

le discriminant Δ est le carré du produit D des différences $x_\mu - x_\nu$,

$$(II) \quad D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{vmatrix}, \quad \Delta = D^2.$$

Les fonctions rationnelles d'une racine x_ν peuvent être réduites, au moyen de l'équation (1), à la forme

$$(III) \quad \varphi_{p,\nu} = a_p + a_{p^1}x_\nu + a_{p^2}x_\nu^2 + a_{p^3}x_\nu^3 + a_{p^4}x_\nu^4.$$

Cinq de ces fonctions,

$$\varphi_{0,\nu}, \varphi_{1,\nu}, \varphi_{2,\nu}, \varphi_{3,\nu}, \varphi_{4,\nu}$$

linéairement indépendantes l'une de l'autre, forment un système par lequel on peut exprimer les autres. Elles donnent lieu à trois déter-

minants, c'est-à-dire celui des a_{ik} , celui des φ_{ik} et celui des $\sum_{\nu=0}^{\nu=4} \varphi_{i\nu} \varphi_{k\nu}$;

je les appelle A, U, V; ils sont liés l'un à l'autre par les relations

$$(IV) \quad U = DA, \quad V = U^2 = \Delta A^2.$$

Choisissons six fonctions spéciales de nos φ , c'est-à-dire

$$(V) \quad \begin{cases} 1, & p_v = x_v - \frac{1}{5} \Sigma x_v, & y_v = x_v^2 - \frac{1}{5} \Sigma x_v^2 + \rho_1 p_v, \\ q_v = x_v^3 - \frac{1}{5} \Sigma x_v^3 + \rho_2 p_v, & r_v = x_v^4 - \frac{1}{5} \Sigma x_v^4 + \rho_3 p_v, & z_v = q_v + \rho_4 r_v, \end{cases}$$

satisfaisant aux relations

$$(VI) \quad \Sigma p_v = 0, \quad \Sigma y_v = 0, \quad \Sigma q_v = 0, \quad \Sigma r_v = 0, \quad \Sigma z_v = 0,$$

et qui soient soumises à celles-ci :

$$(VII) \quad \Sigma y_v^2 = 0, \quad \Sigma q_v y_v = 0, \quad \Sigma r_v y_v = 0, \quad \Sigma z_v^2 = 0.$$

La première signifie une relation quadratique pour ρ_1 , la deuxième et la troisième sont linéaires pour ρ_2 et ρ_3 , et la dernière est quadratique pour ρ_4 . Son discriminant $H = \Sigma q_v r_v \Sigma q_v r_v - \Sigma q_v^2 \Sigma r_v^2$ ayant évidemment la même valeur que le déterminant V des cinq premières des fonctions V, et le déterminant A de ces mêmes fonctions équivalant à l'unité, nous avons, d'après (IV),

$$H = \Delta.$$

Les formules (VII) se réunissent ainsi :

$$(VII^a) \quad \Sigma (y_v + \lambda z_v)^2 = 0,$$

formule qui existe pour chaque valeur de λ , et qui signifie que les quantités $y_v + \lambda z_v$ sont les racines d'une équation principale (d'après Klein).

En laissant figurer λ dans l'équation cubique de Bring,

$$\Sigma (y_v + \lambda z_v)^2 = 0,$$

nous avons en $y_v + \lambda z_v$ la racine d'une équation

$$(y_v + \lambda z_v)^5 + a(y_v + \lambda z_v) + b = 0,$$

dont M. Hermite a fait usage pour résoudre l'équation générale du cinquième degré.

Comme M. Kronecker (voir le LIX^e vol. du *Journal de Borchardt*) l'a

montré, on peut transformer l'équation générale du cinquième degré au moyen de racines carrées dans une équation avec un seul paramètre.

Pour trouver une telle équation, introduisons les fonctions

$$v_v = y_v + \lambda_1 z_v, \quad \bar{v}_v = y_v + \lambda_2 z_v,$$

pour lesquelles

$$(VIII^a) \quad \Sigma y_v v_v \bar{v}_v = 0, \quad \Sigma z_v v_v \bar{v}_v = 0;$$

donc aussi

$$(VIII^b) \quad \Sigma v_v^2 \bar{v}_v = 0, \quad \Sigma \bar{v}_v^2 v_v = 0.$$

Les formules (VIII^a) donnent, pour λ_1, λ_2 , les équations

$$\Sigma y_v^3 + (\lambda_1 + \lambda_2) \Sigma y_v^2 z_v + \lambda_1 \lambda_2 \Sigma y_v z_v^2 = 0,$$

$$\Sigma y_v^2 z_v + (\lambda_1 + \lambda_2) \Sigma y_v z_v^2 + \lambda_1 \lambda_2 \Sigma z_v^3 = 0,$$

ce qui nous montre que λ_1, λ_2 sont les racines de l'équation quadratique

$$\begin{vmatrix} \Sigma y^3 & \Sigma y^2 z & \Sigma y z^2 \\ \Sigma y^2 z & \Sigma y z^2 & \Sigma z^3 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et voilà donc le déterminant de Hesse pour l'équation de Bring.

Nous pouvons donner aux formules (VI), (VII^a) et (VIII^a) la forme

$$(IX) \quad \Sigma v_v = \Sigma \bar{v}_v = \Sigma v_v \bar{v}_v = \Sigma v_v^2 \bar{v}_v = \Sigma \bar{v}_v^2 v_v = \Sigma v_v^3 \bar{v}_v = \Sigma v_v \bar{v}_v^3 = 0;$$

les deux premières formules nous donnent v_v , racine de l'équation principale

$$(X) \quad v^5 + 5av^2 + 5bv + c = 0.$$

Ses coefficients ont, d'après les formules de Newton, les valeurs

$$-3a = \Sigma v_v^3, \quad -4b = \Sigma v_v^4, \quad -5c = \Sigma v_v^5.$$

Chaque fonction rationnelle de x_v est aussi rationnelle en v_v , et, pour cette raison, linéaire dans les cinq quantités

$$g_{\rho, v} = \frac{-v_v^\rho}{v_v^5 + 2av_v + b} = \frac{-v_v^{\rho+1}}{3av_v^3 + 4bv_v + c} \quad (\text{pour } \rho : 0, 1, 2, 3, 4).$$

Celles de ces φ_v pour lesquelles $\Sigma \varphi_v = 0$ sont linéaires en g_0, g_1, g_2, g_3 . D'après la formule (IX), $\bar{v}_v, v_v \bar{v}_v, v_v^2 \bar{v}_v, \bar{v}_v^2, v_v \bar{v}_v^2$ y sont compris ainsi : $\bar{v}_v$ est linéaire en g_0, g_1 , et $\bar{v}_v^2$ est linéaire en g_0, g_1, g_2 . Il en résulte la relation

$$(g_0 + \alpha g_1)^2 = c_0 g_0 + c_1 g_1 + c_2 g_2$$

ou

$$(XI) \quad v_v(v_v + \alpha)^2 = (c_0 + c_1 v_v + c_2 v_v^2)(3\alpha v_v^2 + 4b v_v + c).$$

Vu l'irréductibilité de la formule (X), équation du cinquième degré, et en conséquence de celle-ci du quatrième degré, la dernière est identique pour tout v . En égalant les coefficients des puissances de v , on trouve

$$c_0 = 0, \quad 3\alpha c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad b = \frac{3\alpha}{2}, \quad c = 3\alpha\alpha^2.$$

Nous substituons ces valeurs de b et c dans la formule (X), et remplaçons v par la quantité

$$w_v = -\frac{2x}{v_v},$$

ce qui nous donne l'équation

$$w_v^5 - 5w_v^4 + \frac{20}{3}w_v^3 = \frac{32x^3}{3\alpha},$$

qui n'a qu'un seul paramètre, et qui, par la substitution

$$w_v = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}u_v,$$

se transforme dans celle de Brioschi

$$u^5 - 10u^3 + 45u = \frac{24}{\alpha}\sqrt{3}(4\alpha^3 - 1).$$