

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PH. GILBERT

**Sur quelques conséquences de la formule de Green et
sur la théorie du potentiel**

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 10 (1884), p. 429-442.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10_429_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur quelques conséquences de la formule de Green
et sur la théorie du potentiel;*

PAR M. PH. GILBERT,

Professeur à l'Université de Louvain.

Ces Notes, écrites surtout dans un but didactique, forment une sorte de *Complément aux Leçons sur l'Électrostatique*, publiées par M. Resal dans le Tome VIII de ce Journal. Je rappellerai ici que les géomètres se partagent en deux camps, en ce qui concerne les propriétés des couches superficielles. Généralement, les savants français et anglais regardent ces couches comme ayant simplement une épaisseur très petite, et leur appliquent sans scrupule les théorèmes établis pour le cas où la matière agissante remplit un espace à trois dimensions; tandis que les Allemands et les Italiens traitent ces couches comme n'ayant *aucune* épaisseur, ce qui exige une nouvelle définition de la densité et une modification profonde des propriétés du potentiel.

Sans discuter ici lequel de ces deux modes d'exposition est le plus conforme à la nature des choses et le plus commode pour la théorie mathématique, je dirai seulement que, dans ce qui suit, je me suis placé au second point de vue.

I. Rappelons la formule de Green

$$(1) \quad \int_{\Omega} U \Delta_2 V \, d\omega = - \int_s U \frac{\partial V}{\partial n_i} \, d\sigma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\omega.$$

U et V sont des fonctions de x, y, z , continues, ainsi que leurs dérivées partielles premières, dans tout l'espace Ω ; $\Delta_2 V$ représente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

la première intégrale et la troisième s'étendent à tous les éléments $d\omega$ du volume Ω , la deuxième à tous les éléments $d\sigma$ de la surface fermée S qui enveloppe ce volume; $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est la dérivée partielle de V suivant la normale à la surface S dirigée vers l'intérieur du volume Ω . La surface S peut avoir une forme quelconque et se composer même de plusieurs surfaces fermées distinctes.

Considérons une seconde surface fermée Σ enveloppant la première, et soit Ω' l'espace compris entre S et Σ . Appliquons à Ω' l'équation (1), en observant que la normale à S, vers l'intérieur de Ω' , n'est autre que la normale *extérieure* n_e par rapport à Ω , et ajoutons cette équation à la relation (1). Nous aurons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega+\Omega'} U \Delta_2 V d\omega &= - \int_S U \left(\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_e} \right) d\sigma - \int_{\Sigma} U \frac{\partial V}{\partial n_i} d\sigma \\ &- \int_{\Omega+\Omega'} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\omega. \end{aligned} \right.$$

En faisant $U = 1$ et prenant pour V le potentiel ⁽¹⁾ d'une masse Q répartie sur une surface fermée, on trouverait que la relation de Gauss

$$(3) \quad \int_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial n_i} d\sigma = 0 \quad \text{ou} \quad 4\pi Q$$

(suivant que la masse Q est extérieure ou intérieure à la surface Σ) subsiste pour le potentiel V d'une couche superficielle. Sans nous arrêter à ces détails, développons les conséquences de l'équation (2).

II. Admettons que Σ désigne une surface sphérique dont le rayon R

⁽¹⁾ Nous appliquons ici le mot dans le sens de Gauss. D'autres géomètres disent la *fonction potentielle*.

pourra croître au delà de toute limite. Comme on a

$$\int_{\Sigma} U \frac{\partial V}{\partial n_i} d\sigma = 4\pi R^2 \mathfrak{M} \left(U \frac{\partial V}{\partial n_i} \right),$$

\mathfrak{M} désignant une moyenne entre les valeurs de la fonction sur toute l'étendue de la surface Σ , on sait que $R^2 \frac{\partial V}{\partial n_i}$ ne croîtra pas indéfiniment avec R , tandis que U convergera vers zéro, si U et V sont les potentiels de masses situées à distance finie. L'intégrale aura donc pour limite zéro; en même temps l'espace Ω' s'étendra à l'infini autour de S , et $\Omega + \Omega'$ représentera tout l'espace indéfini intérieur et extérieur à la surface S , ce que nous indiquerons par l'indice ∞ affectant les intégrales. L'équation (2) deviendra donc

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\infty} U \Delta_2 V d\omega &= - \int_S U \left(\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_e} \right) d\sigma \\ &- \int_{\infty} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\omega. \end{aligned} \right.$$

Si l'on permute U et V qui jouissent des mêmes propriétés et que l'on soustraye, il vient

$$(5) \quad \int_{\infty} (U \Delta_2 V - V \Delta_2 U) d\omega = - \int_S U \left(\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_e} \right) d\sigma + \int_S V \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} + \frac{\partial U}{\partial n_e} \right) d\sigma.$$

Comme première application de cette formule, supposons que l'on distribue *successivement* sur la surface S deux couches, dont les densités variables respectives soient h et h' , et soient V et $U = V'$ les potentiels de ces couches. On aura, dans tout l'espace indéfini,

$$\Delta_2 U = 0, \quad \Delta_2 V = 0,$$

et sur la surface S ,

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_e} = -4\pi h, \quad \frac{\partial U}{\partial n_i} + \frac{\partial U}{\partial n_e} = -4\pi h',$$

et l'équation (5) deviendra

$$(6) \quad \int_S V h' d\sigma = \int_S V' h d\sigma.$$

Dans ce théorème, comme dans les précédents, la surface fermée S a une forme arbitraire et peut même se composer d'un système de surfaces fermées indépendantes : le raisonnement est le même (1).

III. Supposons maintenant que V soit le potentiel d'une masse Q , répartie suivant une densité h sur la surface fermée S , et U le potentiel d'une masse M répartie, suivant une loi de densité ρ , dans un espace quelconque T à trois dimensions ; $\Delta_2 V$ sera nul en tout point de l'espace indéfini, $\Delta_2 U$ également, sauf dans l'espace T où l'on aura, par le théorème de Poisson,

$$\Delta_2 U = -4\pi\rho.$$

Le premier membre de (5) se réduira donc à $4\pi \int_T V\rho d\omega$; dans le second, on aura

$$\frac{\partial U}{\partial n_i} + \frac{\partial U}{\partial n_e} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_e} = -4\pi h,$$

et il se réduira ainsi à $4\pi \int_S U h d\sigma$. De là la relation importante

$$(7) \quad \int_T V\rho d\omega = \int_S U h d\sigma.$$

L'espace T peut se composer de plusieurs volumes détachés, la surface S de plusieurs surfaces fermées distinctes.

IV. Conservons à V et U ces dernières significations, et remplaçons dans l'équation (4) U et V par $V + U$, en posant, pour abrégé,

$$\Delta_1 F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2;$$

(1) Ce théorème a été donné, par M. Legebeke, comme une généralisation de celui de M. Clausius, dans le numéro de mars 1884 de ce *Journal*, et antérieurement dans les *Annales* de Wiedemann (t. X, 1880). Sans connaître cette première publication, j'avais communiqué le même théorème et la formule (4) dont il dérive à la Société scientifique de Bruxelles le 5 mai 1883 (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 7^e année, p. 67; 1883).

nous aurons

$$\begin{aligned} & \int_{\infty} (V + U) \Delta_2 (V + U) d\omega \\ &= - \int_S (V + U) \left[\frac{\partial(V + U)}{\partial n_i} + \frac{\partial(V + U)}{\partial n_e} \right] d\sigma - \int_{\infty} \Delta_1 (V + U) d\omega, \end{aligned}$$

ou, d'après les remarques faites au numéro précédent.

$$(8) \quad \int_T (V + U) \rho d\omega + \int_S (V + U) h d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \Delta_1 (V + U) d\omega.$$

Ce théorème comporte la même extension que le précédent. Si toute la matière agissante était répartie sur la surface S, on ferait $\rho = 0$, $U = 0$; on aurait

$$(9) \quad \int_S V h d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \Delta_1 V d\omega.$$

Si, au contraire, il n'y avait de masse agissante que celle distribuée avec la densité ρ dans le volume T, on aurait $h = 0$, $V = 0$, et par suite

$$(10) \quad \int_T U \rho d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \Delta_1 U d\omega.$$

V. La formule (6) permet de démontrer immédiatement un théorème de Riemann sur l'équilibre d'un système de conducteurs électrisés ⁽¹⁾, et même la généralisation qui en a été donnée par M. Clausius ⁽²⁾.

Soient

S la surface d'un quelconque des conducteurs isolés ou communiquant avec le sol;

h la densité,

Q la masse,

⁽¹⁾ KÖTTERITSCH, *Lehrbuch der Elektrostatik*, p. 129; — CROULLEBOIS, *Comptes rendus*, t. XCIII, p. 719.

⁽²⁾ *Annales de Wiedemann*, p. 493, 1877; — RESAL, *Phys. math.*, p. 183.

V le niveau potentiel de la couche électrique sur la surface S dans un premier état d'équilibre,

h' , Q' , V , les quantités correspondantes dans un second état d'équilibre.

On aura, d'après l'équation (6),

$$\Sigma \int_s V h' d\sigma = \Sigma \int_s V' h d\sigma,$$

Σ indiquant une somme qui s'étend à tous les conducteurs. Mais sur une surface S, V est constant et égal au niveau potentiel du conducteur, $\int_s h' d\sigma$ est égal à Q' . De même, V' est constant et $\int_s h d\sigma$ n'est autre chose que la quantité Q d'électricité libre; donc

$$\Sigma V Q' = \Sigma V' Q.$$

Le théorème de Riemann est un cas particulier, celui où tous les conducteurs, sauf un, communiquent avec le sol. Il serait très facile de généraliser encore le théorème en faisant intervenir des diélectriques dans le système électrisé.

VI. Mais l'usage principal des équations (6), (7) et (8) est dans la démonstration des célèbres théorèmes de Gauss sur la possibilité de couvrir une surface fermée de matière agissante, de façon que le potentiel de la couche satisfasse à certaines conditions ⁽¹⁾, théorèmes si utiles dans l'électrostatique. La démonstration de Gauss est pénible et indirecte: Dirichlet a tenté d'ouvrir une voie plus facile au moyen de son *Principe*, mais son raisonnement ⁽²⁾ comporte des objections sérieuses qu'il importe de signaler.

Dirichlet établit l'existence d'une certaine fonction u' de x, y, z , dont les dérivées partielles du premier ordre sont finies et continues en un point quelconque de l'espace, les dérivées secondes satisfaisant à l'équation $\Delta_2 u' = 0$. Lorsqu'un certain rayon R devient infini, cette

⁽¹⁾ *Allgemeine Lehrsätze*, etc. — *Œuvres de Gauss*, t. V, p. 197.

⁽²⁾ GRUBE, *Vorlesungen von Lejeune-Dirichlet*, p. 127 et suiv.

fonction u' tend, en chaque point (x, y, z) , vers une limite

$$u = \varphi(x, y, z),$$

et Dirichlet conclut que cette fonction vérifie également les deux conditions ci-dessus auxquelles satisfait u' . Cette conclusion n'est évidemment pas rigoureuse. De plus, pour identifier la fonction u avec le potentiel de couches superficielles, Dirichlet est obligé de se servir des *fonctions sphériques*, dont l'usage dans une question de cet ordre paraît assez étrange. Nous allons voir, au contraire, qu'en se servant des théorèmes ci-dessus, et suivant à peu près la marche de M. Betti, on arrive simplement et rigoureusement au principe de Gauss.

VII. Soient V le potentiel d'une masse Q , répartie sur une surface fermée S suivant une loi exprimée par la densité h , fonction de x, y, z ; U le potentiel d'un système de masses M , distribuées avec une densité variable ρ dans un espace T à trois dimensions, qui peut se composer de volumes détachés T', T'', \dots . Posons

$$(11) \quad P = \int_S (V + U) h d\sigma + \int_T (V + U) \rho d\omega.$$

Les masses M occupent des positions fixes, mais la masse donnée Q peut être répartie arbitrairement sur S , de sorte que h est seulement assujetti à vérifier la condition

$$\int_S h d\sigma = Q.$$

Il existe une distribution telle que l'expression P soit un minimum. En effet, d'après la relation (8), on a

$$P = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \Delta_1 (V + U) d\omega,$$

et cette intégrale ayant nécessairement une valeur *finie* et *positive*, quelle que soit la loi de densité h , il existe une densité h pour laquelle l'intégrale P a une valeur plus petite que pour toute autre.

Cherchons cette valeur de h . D'après l'équation (7), on a

$$P = \int_s (V + 2U) h d\sigma + \int_T U \rho d\omega,$$

et le dernier terme est invariable, par hypothèse. Il suffit donc de chercher le minimum de $\int_s (V + 2U) h d\sigma$. Soient δh une variation finie ou infiniment petite, de la fonction h , δV la variation correspondante de V . Nous aurons

$$\begin{aligned} \delta P &= \delta \int_s (V + 2U) h d\sigma \\ &= \int_s (V + \delta V + 2U)(h + \delta h) d\sigma - \int_s (V + 2U) h d\sigma \\ &= \int_s \delta V h d\sigma + \int_s (V + 2U) \delta h d\sigma + \int_s \delta V \delta h d\sigma, \end{aligned}$$

avec la condition résultant de la constance de Q , $\int_s \delta h d\sigma = 0$. Mais, si u désigne la distance d'un élément de la couche au point (x, y, z) , on a

$$\delta V = \int_s \frac{(h + \delta h) d\sigma}{u} - \int_s \frac{h d\sigma}{u} = \int_s \frac{\delta h d\sigma}{u},$$

en sorte que δV est égal au potentiel d'une masse *nulle*, distribuée sur la surface S avec une densité δh . Faisons donc, dans l'équation (6), $h' = \delta h$ et $V' = \delta V$; nous aurons

$$\int_s \delta V h d\sigma = \int_s V \delta h d\sigma.$$

De plus, appliquant à la couche de densité δh et à son potentiel δV la relation (9), nous trouverons

$$\int_s \delta V \delta h d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_\infty \Delta_1 (\delta V) d\omega.$$

Il suit de là que l'expression de la variation de P peut se mettre

sous ces deux formes :

$$(12) \quad \delta P = 2 \int_S (V + U) \delta h \, d\sigma + \int_S \delta V \delta h \, d\sigma,$$

$$(12') \quad \delta P = 2 \int_S (V + U) \delta h \, d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_S \Delta_1 (\delta V) \, d\omega.$$

VIII. La seconde de ces équations montre que, si la densité h est telle que l'on ait, sur toute la surface S , la relation

$$V + U = \text{const.},$$

P sera un minimum, car on a alors

$$\int_S (V + U) \delta h \, d\sigma = (V + U) \int_S \delta h \, d\sigma = 0,$$

et δP se réduit à son dernier terme, qui est positif, quel que soit δh .

Réciproquement, P ne peut devenir minimum que si $V + U$ affecte la même valeur pour tous les points de la surface S . En effet, si $V + U$ était variable et que A désigne une constante comprise entre les valeurs extrêmes de $V + U$, la fonction $V + U - A$ serait tantôt positive, tantôt négative sur la surface S . Or on peut écrire l'équation (12) sous la forme

$$\delta P = 2 \int_S (V + U - A) \delta h \, d\sigma + \int_S \delta V \delta h \, d\sigma.$$

Soient ε une constante très petite, h_1 une fonction de x, y, z qui n'est assujettie jusqu'ici qu'à la condition $\int_S h_1 \, d\sigma = 0$; posons

$$\delta h = \varepsilon h_1, \quad \text{d'où} \quad \delta V = \varepsilon \int_S \frac{h_1 \, d\sigma}{u} = \varepsilon V_1,$$

d'où enfin

$$\delta P = 2\varepsilon \int_S (V + U - A) h_1 \, d\sigma + \varepsilon^2 \int_S V_1 h_1 \, d\sigma.$$

On sait, par l'équation (12'), que ce dernier terme est toujours positif. Nous rendrons le précédent négatif en choisissant la fonction h_1

de façon qu'elle ait, en chaque point, le signe contraire à celui de $(V + U - A)$, ce qui peut évidemment se faire d'une infinité de manières en observant la condition $\int_S h_1 d\sigma = 0$. Et comme ε peut être aussi petit qu'on le veut, le premier terme finira toujours par surpasser le second en valeur absolue; δP sera donc négatif pour $\delta h = \varepsilon h_1$. P n'était donc pas un minimum.

Concluons de là, puisqu'il existe une loi de la densité h pour laquelle P est un minimum, qu'il en existe une pour laquelle $V + U$ est constant en tous les points de la surface S .

IX. *Cette distribution est unique d'ailleurs.* — Soient, en effet,

h une loi de densité pour laquelle $V + U$ est constant sur la surface S ;

$h + \eta$ une autre loi qui satisfait à la même condition;

$V + \nu$ le potentiel de la couche correspondante;

P' la valeur de P .

L'équation (12') s'appliquant même à une variation finie de P , on aura

$$\int_S \eta d\sigma = 0, \quad \delta P = P' - P = \frac{1}{4\pi} \int_S \Delta_1 \nu d\omega.$$

Désignons par α une constante voisine de l'unité, par $h + \alpha\eta$ une troisième répartition de la masse Q sur S . Cela est permis, puisque

$$\int_S (h + \alpha\eta) d\sigma = \int_S h d\sigma + \alpha \int_S \eta d\sigma = Q.$$

Le potentiel de la couche correspondante deviendra

$$V + \alpha \int_S \frac{\eta d\sigma}{u} = V + \alpha\nu, \quad \delta V = \alpha\nu,$$

et par suite on aura, dans l'équation (12'),

$$\Delta_1(\delta V) = \alpha^2 \Delta_1 \nu, \quad P'' - P = \frac{\alpha^2}{4\pi} \int_S \Delta_1 \nu d\omega,$$

P'' étant la valeur de P qui correspond à cette nouvelle distribution. De là, enfin,

$$P'' - P' = \frac{\alpha^2 - 1}{4\pi} \int_S \Delta_1 v \, d\omega.$$

P' étant, par hypothèse, une valeur minimum de P , il faut que, pour toutes les distributions très peu différentes de celle qui correspond à la valeur P' , c'est-à-dire pour toutes les valeurs de α voisines de l'unité, $P'' - P$ soit positif. Mais, l'intégrale ayant une valeur positive, cette condition ne sera pas remplie pour les valeurs de α inférieures à l'unité; donc l'hypothèse était fautive. De là cette loi : *Il est toujours possible, d'une seule manière, de répartir une quantité donnée Q de matière agissante sur une surface fermée S , de façon que l'intégrale P acquière une valeur minimum; la fonction $V + U$ a alors une valeur constante en tous les points de cette surface.*

C'est uniquement pour faciliter l'exposition que nous avons pris une seule surface fermée. Le théorème subsiste et la démonstration se fait de même si S désigne l'ensemble de plusieurs surfaces isolées S_1, S_2, \dots sur chacune desquelles on a à répartir une quantité donnée de matière agissante. Dans la distribution qui répond au minimum de P , $V + U$ sera constant sur une même surface, mais sa valeur pourra différer d'une surface à l'autre. Cela suffit pour établir l'existence d'un état d'équilibre unique dans un système électrisé.

Dans ce qui suit, ayant en vue surtout le principe de Gauss, nous réduirons S à une surface unique.

X. Si les masses M et leur potentiel U se réduisent à zéro, on aura

$$P = \int_S V h \, d\sigma,$$

et la condition $V + U = \text{const.}$ se réduira à $V = \text{const.}$ De plus, comme la surface S n'a dans son intérieur aucune matière agissante, V sera, d'après un théorème connu, constant dans tout l'espace enveloppé par S . *On peut donc toujours, d'une seule manière, répartir une quantité donnée Q de matière agissante sur une surface fermée, de façon*

que $\int_S V h d\sigma$ soit un minimum, et que le potentiel V de la couche formée soit constant sur toute la surface et dans son intérieur.

Cette valeur constante A de V ne saurait être nulle, sans quoi, d'après les propriétés connues du potentiel, V serait aussi nul dans l'intérieur et à l'extérieur de la surface S . On aurait ainsi, en chaque point de la surface,

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial n_e} = 0,$$

et par suite $h = 0$. Q serait donc nul, ce qui est contre l'hypothèse.

Il s'ensuit que, si l'on dispose de la masse Q , A pourra atteindre telle valeur qu'on voudra; car, si l'on multiplie la fonction h par un facteur α , la masse deviendra αQ , et le potentiel deviendra

$$\int_S \frac{\alpha h d\sigma}{u} = \alpha V.$$

La constante A sera donc remplacée par αA . On peut donc toujours répartir sur la surface S une quantité Q de matière agissante, telle que, sur toute la surface, le potentiel de la couche ait une valeur constante donnée d'avance.

XI. Les théorèmes de Gauss découlent facilement de là.

Considérons une surface fermée S , des masses agissantes M placées hors de la surface, ayant une densité ρ et un potentiel U . On pourra toujours, d'une seule manière, distribuer sur S une quantité donnée Q de matière, de façon que la différence $V - U$ du potentiel de la couche ainsi formée et du potentiel des masses M soit constante pour tous les points de la surface; car, imaginons que l'on remplace chaque élément de la masse M par un élément de masse égal et de signe contraire $-\rho d\omega$; le potentiel de cette masse $-M$ sur un point quelconque de l'espace sera $-U$, et, d'après le théorème du n° IX, la masse Q peut être répartie sur la surface S , de telle manière que la somme des potentiels de la couche ainsi formée et de cette masse $-M$ soit constante sur S . On aura donc

$$V - U = \text{const.}$$

On sait, de plus, que cette distribution ne peut se faire que d'une seule manière, et qu'elle rend minimum l'intégrale $\int_S (V - 2U)h d\sigma$.

Mais le potentiel $V - U$ étant constant sur la surface S , dans l'intérieur de laquelle il n'existe pas de matière agissante, il est constant dans tout l'espace enveloppé par S . On a donc, en chaque point de cet espace,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

d'où le premier théorème de Gauss : *Étant donné un système M de masses agissantes en dehors d'une surface fermée S , il est toujours possible, d'une seule manière, de répartir sur cette surface une quantité donnée Q de matière agissante, de façon que cette couche exerce, sur un point quelconque de l'espace enveloppé par S , une action identique à celle des masses M .*

XII. Supposons maintenant que les masses M soient toutes comprises dans l'espace enveloppé par S . Imaginons encore que l'on substitue à chaque élément des masses M un élément égal et de signe contraire $-\rho d\omega$; le potentiel des masses M deviendra $-U$ et, d'après le n° IX, on pourra encore répartir une masse Q donnée sur la surface S de façon que l'on ait, sur toute cette surface,

$$V - U = \text{const.} = A,$$

V étant le potentiel de la couche superficielle. De plus, par un choix convenable de la masse Q , on réduira la constante A à zéro. En effet, d'après ce qui a été dit au n° X, on peut répartir sur S une masse convenablement choisie Q' , de façon que le potentiel de la couche ainsi formée ait, sur toute la surface S , une valeur constante $-A$. Superposons, en chaque point, la densité h' de cette couche à la densité h de la précédente; nous formerons une nouvelle distribution dont le potentiel V' aura pour valeur, en un point quelconque de la surface,

$$\int_S \frac{h+h'}{u} d\sigma = V - A,$$

ce qui donnera, d'après la relation ci-dessus,

$$V' - U = 0.$$

Ainsi, par une distribution convenable de la quantité de matière $Q + Q'$, on réduit à zéro, en chaque point de la surface, le potentiel de la couche formée et de la masse $-M$. Mais toute la matière agissante étant ainsi comprise sous la surface S , ce potentiel, d'après un théorème connu, sera aussi nul en tout point de l'espace extérieur, et l'on y aura par suite

$$V = U, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Donc : *Étant donné un système M de masses agissantes compris sous une surface fermée S , il est toujours possible, d'une seule manière, de distribuer sur la surface S une quantité de matière convenablement choisie, de façon que la couche ainsi formée et le système M aient le même potentiel, et par conséquent la même action, sur un point quelconque de l'espace extérieur à S .*

C'est le second *principe de Gauss*. De plus, en appliquant la formule (3), on verra facilement, à cause de $V' - U = 0$ en dehors de la surface, que l'on a

$$Q + Q' = M,$$

de sorte que la masse de la couche superficielle sera ici égale à la somme des masses primitives M .