

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULES FARKAS

Sur les fonctions itératives

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 10 (1884), p. 101-108.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__101_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les fonctions itératives;***PAR M. JULES FARKAS,**

Professeur à l'Université de Budapesth.

En supposant k un nombre entier et positif, l'itérative de $k^{\text{ième}}$ degré de la fonction $f(z)$, désignée par $f^k(z)$, ou z_k , est définie par la formule récurrente

$$z_k = f(z_{k-1}), \quad z_0 = z.$$

Sur la théorie générale des fonctions itératives, il n'y a que deux Mémoires, publiés par M. E. Schroeder dans les *Annales de Clebsch*. Les questions traitées par M. Schroeder sont celles de la convergence ⁽¹⁾ et celle de l'itération analytique ⁽²⁾. En supposant la fonction $f(z)$ holomorphe dans l'aire T, et que toutes ses itératives soient des points de l'aire T, si l'algorithme z_k tend vers une même limite quand le nombre k devient infini d'une manière quelconque, la limite $\lim z_k = \zeta$ est une racine de l'équation $f(z) = z$, parce qu'alors on a

$$\lim z_{k+1} = \lim z_k;$$

d'où, en vertu de la définition, $\lim f(z_k) = \lim z_k$, c'est-à-dire $f(\zeta) = \zeta$. C'est dans ce cas que les itératives sont dites convergentes dans l'aire T.

⁽¹⁾ *Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, t. II.

⁽²⁾ *Ueber iterirte Functionen*, t. III.

Si la fonction $f(z)$ satisfait à certaines conditions, ses itératives sont convergentes, et, dans ma première Note, j'établis une sorte de telles conditions. Le problème de l'itération analytique a pour but d'exprimer les itératives d'une fonction analytique par une fonction analytique de l'indice k considérée comme variable indépendante. En étendant la définition de z_k sur des valeurs fractionnaires et négatives de l'indice k ; dans ma seconde Note, j'établis et je traite la forme générale de la fonction analytique de deux variables $F(k, z)$ définie par l'expression

$$F(k, z) = f^k(z).$$

I. — SUR LA CONVERGENCE DES FONCTIONS ITÉRATIVES.

1. Désignons par $f(T)$ l'aire décrite par le point $z_1 = f(z)$ quand le point z décrit l'aire T .

Si l'aire $f(T)$ est située dans l'aire T et que l'aire T se puisse concentrer en un point ζ de manière que l'aire $f(T)$ reste toujours dans l'aire T , les itératives de $f(z)$ sont convergentes dans cette aire.

En effet, que le contour de l'aire en concentration T soit arrivé au point z , et à ce moment désignons par T_1 l'aire diminuée T . Le point $z_1 = f(z)$ est dans l'aire T_1 , parce que, en vertu de la supposition, l'aire $f(T_1)$ est dans l'aire T_1 . En continuant la concentration, le contour de l'aire T_1 est arrivé au point z_1 ; à ce moment, désignons par T_2 l'aire diminuée T . Le point $z_2 = f(z_1)$ est dans l'aire T_2 , parce que l'aire $f(T_2)$ est dans l'aire T_2 , et ainsi de suite; que le contour de l'aire en concentration soit arrivé au point $z_k = f(z_{k-1})$, et à ce moment désignons par T_k l'aire diminuée T . Le point $z_{k+1} = f(z_k)$ est dans l'aire T_k , parce que l'aire $f(T_k)$ est dans l'aire T_k . Or $\lim T_k = \zeta$, par conséquent $\lim z_k = \zeta$ et $\lim z_{k+1} = \lim z_k$.

Considérons, par exemple, la fonction

$$(1) \quad f(z) = a + \sqrt[n]{z},$$

où n est un nombre positif supérieur à l'unité. La fonction $\sqrt[n]{z}$ est holo-

morphe dans toute l'étendue du plan traversé par une droite R dont l'un des points extrêmes est dans l'origine, et l'autre dans l'infini. Désignons par α l'argument du point fixe a . Si l'argument commun des points de la droite R est $\alpha + \pi$ ou $\alpha - \pi$ ou dans le voisinage soit de $\alpha + \pi$, soit de $\alpha - \pi$, le plan traversé par la droite R satisfait à l'exigence attribuée à l'aire T dans notre théorème. Ainsi, en posant

$$z_k - a = z'_{k-1},$$

c'est-à-dire

$$z' = \sqrt[n]{z}, \quad z'_1 = \sqrt[n]{a + z'}, \quad z'_2 = \sqrt[n]{a + z'_1}, \quad z'_3 = \sqrt[n]{a + z'_2}, \quad \dots,$$

la limite $\lim z'_k$ est une racine de l'équation $z^n = z + a$, et l'on en obtient l'une ou l'autre des racines suivant que l'on sort de l'une ou de l'autre des valeurs de la racine $z' = \sqrt[n]{z}$.

2. Du théorème général on tire aisément le suivant : Si (1) la fonction $f(x)$ est d'une valeur réelle et croissante pour une valeur réelle et croissante de x comprise entre les limites p et q , et que l'on ait

$$(2) \quad p < q,$$

$$(3) \quad p < f(p), \quad q > f(q),$$

les itératives de $f(x)$ sont convergentes, théorème dont voici la preuve directe :

En vertu de (1) et (2),

$$f(p) < f(x) < f(q),$$

par conséquent (3)

$$p < f(x) < q,$$

c'est-à-dire $p < x_1 < q$. On en conclut (1)

$$f(p) < f(x_1) < f(q),$$

d'où (3)

$$p < f(x_1) < q,$$

c'est-à-dire $p < x_2 < q$, et ainsi de suite. On a, en général, $p < x_k < q$; toutes les itératives de $f(x)$ sont comprises entre les limites p et q . Cela étant, considérons les deux cas suivants : celui d'un x , tel que l'on ait $x_1 > x$, et celui d'un x , tel que l'on ait $x_1 < x$. Comme x et x_1 sont compris entre les limites p et q , on a (1)

$$(cas\ 1)\ f(x_1) > f(x), \quad (cas\ 2)\ f(x_1) < f(x),$$

c'est-à-dire (cas 1) $x_2 > x_1$, (cas 2) $x_2 < x_1$. Comme x_1 et x_2 sont compris de même entre les limites p et q , on a (1)

$$(cas\ 1)\ f(x_2) > f(x_1), \quad (cas\ 2)\ f(x_2) < f(x_1),$$

ou bien $x_3 > x_2$ (cas 1), $x_3 < x_2$ (cas 2), et ainsi de suite; en général,

$$(cas\ 1)\ p < x < x_1 < x_2 < \dots < x_k < q,$$

$$(cas\ 2)\ q > x > x_1 > x_2 > \dots > x_k > q.$$

On en conclut $\lim x_{k+1} = \lim x_k$ quelle que soit la valeur de x , pourvu qu'elle soit comprise entre les limites p et q .

EXEMPLES.

Exemple I :

$$f(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1})^{\frac{1}{n}},$$

où les constantes a sont des quantités positives. Si x est d'une valeur positive, et que l'on opère toujours par la valeur positive de la fonction, la limite $\lim x_k$ est une racine de l'équation

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = x^n.$$

Exemple II :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

où les constantes a sont des quantités positives inférieures à $\frac{1}{4}$. Les itératives sont convergentes pour des valeurs positives de x inférieures à $\frac{1}{2}$.

Exemple III :

$$f(x) = a + b(\sin x)^n,$$

où n est un nombre entier positif, a et b sont des quantités positives et $a + b < \frac{\pi}{2}$. La condition de la convergence est $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Exemple IV :

$$f(x) = a + b(\log x)^n,$$

où n est un nombre entier et positif supérieur à l'unité, a et b sont des quantités positives et

$$a > 1, \quad b < \left(\frac{n-1}{a-1}\right)^{n-1}.$$

La convergence subsiste si $1 < x^{n-1} < e^{a-1}$.

Exemple V :

$$f(x) = \cos(a - bx),$$

où a et b sont des quantités positives et $b < a < \frac{\pi}{2}$. Si $0 < bx < a$, les itératives sont convergentes.

Exemple VI :

$$f(x) = \log(a + bx),$$

où a et b sont des quantités positives, $a > 1$, $b < 1$. Dans ce cas, la condition de la convergence est $0 < (1 - b)x < a - 1$.

II. — SUR L'ITÉRATION ANALYTIQUE.

1. En supposant n et m des nombres entiers et positifs pour définition de l'itérative de degré $\frac{n}{m}$ de la fonction $f(z)$, désignée par $q_1 = z_{\frac{n}{m}}$, posons

$$q_n = z_n.$$

Ainsi l'itérative de degré $\frac{n}{m}$ de la fonction $f(z)$ n'est autre chose que

la fonction dont l'itérative de degré m est égale à l'itérative de degré n de la fonction $f(z)$. La définition de l'itérative de degré négatif de la fonction $f(z)$ est donnée par l'équation

$$f^k(z_{-k}) = z,$$

où k est un nombre positif ou négatif. Donc l'itérative de degré négatif de la fonction $f(z)$ désignée par p est la solution de l'équation $f^k(p) = z$, où k est un nombre positif, et le degré de l'itérative p est $-k$: $p = f^{-k}(z)$.

De ces définitions on déduit aisément

$$(1) \quad f^h(z_k) = f^k(z_h) = f^{h+k}(z),$$

où h et k sont des nombres réels. Ainsi, en écrivant $f^k(z) = F(k, z)$, on a

$$(2) \quad F(h+k, z) = F[k, F(h, z)].$$

Admettons que la fonction z_k ait une dérivée par rapport à k . Alors nous avons (2)

$$\frac{\partial z_{h+k}}{\partial h} = \frac{\partial z_{h+k}}{\partial z_h} \frac{\partial z_h}{\partial h}.$$

Ainsi, comme (2),

$$\frac{\partial z_{h+k}}{\partial z} = \frac{\partial z_{h+k}}{\partial z_h} \frac{\partial z_h}{\partial z},$$

on a

$$\frac{\partial z_{h+k}}{\partial h} : \frac{\partial z_{h+k}}{\partial z} = \frac{\partial z_h}{\partial h} : \frac{\partial z_h}{\partial z},$$

d'où, en posant $h+k = u$, $h = v$,

$$\frac{\partial z_u}{\partial u} : \frac{\partial z_u}{\partial z} = \frac{\partial z_v}{\partial v} : \frac{\partial z_v}{\partial z}.$$

Donc le rapport des dérivées $\frac{\partial z_k}{\partial k}$ et $\frac{\partial z_k}{\partial z}$ est indépendant de la variable k .

Posons

$$\frac{\partial z_k}{\partial k} : \frac{\partial z_k}{\partial z} = c \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

où c est une constante. La solution générale de cette équation étant

$$z_k = \psi \left[c^{\frac{k}{c}} \varphi(z) \right],$$

comme $z_0 = z$, et, par conséquent, $\psi[\varphi(z)] = z$, la forme générale de la fonction $F(k, z)$ est

$$(3) \quad F(k, z) = \varphi^{-1} [a^k \varphi(z)],$$

où a est une constante, et φ est une fonction définie par l'équation

$$(4) \quad \varphi[f(z)] = a \varphi(z).$$

De (4) on déduit, en effet, aisément

$$(5) \quad \varphi[f^k(z)] = a^k \varphi(z),$$

formule indiquée aussi par M. Schroeder dans un Mémoire sur les fonctions itératives, mais sans en reconnaître la généralité.

2. Ainsi l'étude de l'itération analytique est réduite à celle de la fonction φ .

Désignons par ζ l'une des racines de l'équation $f(z) = z$, et supposons la fonction $f(z)$ holomorphe dans un cercle C décrit du point ζ comme centre avec un rayon plus grand que l'unité. Posons

$$(6) \quad a(1 - a^n) \alpha_{n+1} = \alpha_1 D_{1, n+1} + \alpha_2 D_{2, n+1} + \dots + \alpha_n D_{n, n+1},$$

où

$$(7) \quad \alpha_1 = 1, \quad a = f'(\zeta),$$

et $D_{m, n+1}$ est le coefficient de $(z - \zeta)^{n+1}$ dans le développement de $[f(z) - \zeta]^m$:

$$(8) \quad (n+1)! D_{m, n+1} = \frac{d^{n+1} [f(z) - \zeta]^m}{dz^{n+1}}, \quad z = \zeta.$$

Dans le cercle de convergence de la série

$$\Phi(z) = \alpha_1 (z - \zeta) + \alpha_2 (z - \zeta)^2 + \dots,$$

on a évidemment $\varphi(z) = \Phi(z)$. Écrivons

$$f(z) = a_0 + a_1(z - \zeta) + a_2(z - \zeta)^2 + \dots, \quad \text{mod } a_m = a'_m,$$

où $a_0 = \zeta$, $a_1 = a$. Évidemment la série

$$F(z) = a'_1(z - \zeta) + a'_2(z - \zeta)^2 + \dots$$

est convergente dans le cercle C, et, en posant

$$\alpha'_{n+1} \text{ mod } a(1 - a^n) = \alpha'_1 F(\zeta + 1) + \alpha'_2 F(\zeta + 1)^2 + \dots + \alpha'_n F(\zeta + 1)^n,$$

$$\alpha'_1 = 1,$$

comme (8)

$$F(\zeta + 1)^m > \text{mod } D_{m, n+1},$$

on a (6)

$$\alpha'_{n+1} > \text{mod } \alpha_{n+1};$$

par conséquent, la série $\Phi(z)$ est convergente dans le cercle de convergence de la série

$$\alpha'_1(z - \zeta) + \alpha'_2(z - \zeta)^2 + \dots$$

Or

$$\frac{\alpha'_{n+1}}{\alpha'_n} = \text{mod } \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a^n} + \frac{F(\zeta + 1)^n}{\text{mod } a(1 - a^n)},$$

d'où, dans le cas de $\text{mod } a > 0$, $F(\zeta + 1) < 1$; $\lim \frac{\alpha'_{n+1}}{\alpha'_n} = 1$. Nous avons donc ce théorème : *Si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans un cercle décrit d'une des racines ζ de l'équation $f(z) = z$ comme centre avec un rayon plus grand que l'unité, et que l'on ait*

$$\text{mod } f'(\zeta) + \frac{1}{2} \text{mod } f''(\zeta) + \frac{1}{2.3} \text{mod } f'''(\zeta) + \dots < 1, \quad 1 < \text{mod } f'(\zeta) = 0,$$

la fonction φ est holomorphe dans le cercle décrit du même centre ζ avec un rayon égal à l'unité.

