

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

COLLET

Des enveloppes des courbes dans l'espace

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 9 (1883), p. 257-268.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9_257_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Des enveloppes des courbes dans l'espace;

PAR M. COLLET.

Dans la théorie des courbes planes, la notion d'enveloppe, pour les courbes d'une même famille, résulte de la considération des intersections successives de ces courbes; aussi la définition donnée alors ne peut-elle s'appliquer aux courbes dans l'espace, attendu que *deux courbes d'une même famille, dans l'espace, ne se rencontrent généralement pas*; car, une famille de courbe étant définie par les équations

$$(1) \quad \varphi(x, y, z, t) = 0, \quad \psi(x, y, z, t) = 0,$$

qui renferment un paramètre arbitraire t dont les valeurs caractérisent les différentes courbes, les coordonnées des points communs à deux de ces courbes devraient satisfaire simultanément à quatre équations.

A la vérité, on semblerait conduit à une conclusion inverse si l'on remplaçait l'une des surfaces variables définissant les courbes par la surface fixe lieu de ces courbes; car les coordonnées des points communs à deux courbes ne devraient plus satisfaire qu'à trois équations.

Mais si l'on élimine t entre les équations (1) et que le résultat soit

$$F(x, y, z) = 0,$$

le système

$$(2) \quad F(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z, t) = 0$$

ne sera pas, en général, équivalent au système (1), et ne pourra le remplacer.

Si, par exemple, on considère les droites données par

$$(3) \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos t - \sin t, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \sin t + \cos t,$$

leur lieu est l'hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Or le système

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos t - \sin t, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

qui est équivalent au suivant :

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos t - \sin t, \quad \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{z}{c} \sin t + \cos t \right)^2,$$

outre le système proposé (3), comprend encore le suivant :

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos t - \sin t, \quad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c} \sin t - \cos t,$$

qui définit une seconde famille de droites situées aussi sur l'hyperboloïde lieu des premières; et alors que deux droites d'une même famille ne se rencontrent jamais, une droite d'une famille rencontre toutes celles de l'autre.

On peut d'ailleurs voir *a priori* que le système (1) ne comprend pas toutes les courbes définies par le système (2), en cherchant les courbes de chacun de ces systèmes qui passent par un même point de la surface $F(x, y, z) = 0$. En général, il y en a plusieurs du second système, et elles sont caractérisées par les valeurs de t qui sont racines de l'équation

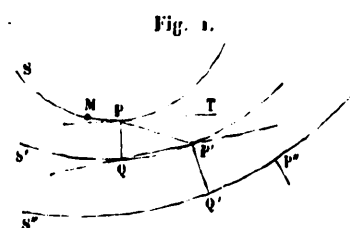
$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$

où x, y, z sont les coordonnées du point considéré, tandis que le premier système n'en donne qu'une. La valeur de t qui lui correspond doit être une racine commune des équations (1) quand x, y, z y représentent les coordonnées du point considéré, racine commune qui existe par hypothèse, mais qui est simple en général.

On conservera donc sous la forme (1) les équations générales d'une famille de courbes dans l'espace.

I.

Parmi les courbes définies par les équations (1), considérons-en deux S et S' , qui répondent à deux valeurs infiniment voisines, t et $t + \Delta t$, du paramètre. Toute plus courte distance PQ entre ces deux courbes est mesurée sur une normale commune et, en général, est du même ordre infinitésimal que Δt ; quand Δt tend vers zéro, le point P tend sur



la courbe S vers une position limite déterminée M que nous désignerons sous le nom de *point limite* ou de *point de striction*. Le lieu de ces points pour toutes les courbes considérées sera leur *ligne de striction*; et, comme il peut exister plusieurs points de striction sur chaque courbe, la ligne de striction peut se composer de plusieurs branches.

Les courbes considérées sont rencontrées sous un angle fini par leur ligne de striction.

Soient en effet $S, S', S'', \dots$ les courbes obtenues en donnant au paramètre variable des accroissements successifs de même ordre, PQ une plus courte distance entre les courbes S et S' , $P'Q'$ une plus courte distance, voisine de la première, entre S' et S'' , et ainsi de suite. Le lieu des points $P, P', P'', \dots$ sera à la limite une ligne de striction qui se confondra d'ailleurs, à la limite, avec le lieu des points $Q, Q', \dots$. L'angle sous lequel cette ligne rencontrera la courbe S est la limite de l'angle TPP' formé par PP' avec la tangente PT à la courbe S , et l'on a, par le triangle QPP' rectangle à la limite,

$$\lim \sin TPP' = \lim \frac{PQ}{PP'},$$

quantité finie, puisque PQ et PP' sont en général de l'ordre de Δt . Mais il n'en est plus ainsi quand la plus courte distance des deux courbes est d'ordre supérieur, et l'on voit qu'alors la ligne de striction devient tangente aux courbes considérées : nous l'appellerons l'*enveloppe* de ces courbes.

La *condition* d'existence d'une enveloppe pour les courbes d'une même famille dans l'espace est donc que deux de ces courbes infiniment voisines admettent constamment *une plus courte distance d'ordre supérieur*. Par suite, en négligeant des quantités d'ordre supérieur au premier, deux courbes infiniment voisines peuvent être considérées comme se coupant en leurs points limites; et alors, *l'enveloppe est le lieu des intersections successives de ces courbes*, les quantités d'ordre supérieur au premier étant négligées.

La *réciproque* est vraie, c'est-à-dire que, *si les courbes d'une même famille sont tangentes à une même courbe, cette dernière est leur enveloppe*; ou, en d'autres termes, deux courbes infiniment voisines admettent une plus courte distance d'ordre supérieur; car, si M et M' sont les

Fig. 2.



points où ces deux courbes S et S' touchent la courbe fixe Σ , l'arc MM' étant du premier ordre, la distance de M' à la courbe S est du second ordre, et, par suite, les courbes S et S' ont, dans le voisinage des points M et M', une plus courte distance qui est du second ordre au moins.

Analytiquement, si deux courbes infiniment voisines sont définies par les équations (1) et (4),

$$(4) \quad \varphi(x, y, z, t + \Delta t) = 0, \quad \psi(x, y, z, t + \Delta t) = 0,$$

en négligeant les quantités d'ordre supérieur au premier, ces dernières pourront s'écrire

$$\varphi(x, y, z, t) + \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \psi(x, y, z, t) + \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

et la condition pour qu'il y ait une enveloppe sera que les quatre équations

$$(5) \quad \varphi(x, y, z, t) = 0, \quad \psi(x, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

admettent un système de solutions communes, pour x, y, z , quel que soit t ; c'est-à-dire que, si l'on élimine x, y, z entre ces quatre équations, l'équation résultante devra être une identité. Telle est la *condition analytique* que doivent remplir les équations (1) pour que les courbes qu'elles définissent admettent une enveloppe. Quant aux équations de cette dernière, elles résulteront de l'élimination de t entre trois quelconques des équations (5).

Plus simplement, si la famille des courbes est définie par

$$x = \varphi(z, t), \quad y = \psi(z, t),$$

les équations $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ qu'il faut adjoindre aux précédentes devront admettre, pour chaque valeur de t , une même valeur de z ; et, en exprimant que ces deux équations ont toujours, quel que soit t , une racine commune, on exprimera aussi la condition pour que les courbes considérées admettent une enveloppe.

Ainsi les droites définies par les équations

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

où a, b, p, q sont des fonctions de t , admettront une enveloppe si les équations

$$z da + dp = 0, \quad z db + dq = 0$$

sont compatibles, quel que soit t , c'est-à-dire si l'on a

$$da dq - db dp = 0,$$

ce qui est la condition connue pour que la surface réglée, lieu des droites considérées, soit développable.

On peut donner maintenant une interprétation géométrique des résultats obtenus.

Les équations $\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ définissent la caractéristique de la

première surface variable (1), de même que $\psi = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ déterminent celle de la seconde; donc, pour qu'il y ait une enveloppe, il faut que, pour chaque valeur de t , les caractéristiques des deux surfaces variables qui définissent les courbes considérées se rencontrent; et comme les points communs à ces deux caractéristiques variables appartiennent à l'enveloppe, cette enveloppe est aussi l'intersection des enveloppes des surfaces variables qui définissent les courbes considérées.

Enfin il est facile de montrer que chaque courbe n'a qu'un contact du premier ordre avec l'enveloppe; car ce théorème est vrai pour les courbes planes, et par suite pour les projections des courbes sur des plans quelconques, d'où il est facile de remonter aux courbes dans l'espace, puisque l'ordre du contact de deux courbes ne saurait être supérieur à celui de leurs projections sur un plan quelconque.

Ces propriétés générales étant établies, nous allons passer à l'étude d'un cas remarquable qui conduit à des propriétés importantes: c'est celui où les courbes de la famille considérée sont les caractéristiques successives d'une surface variable.

II.

Les caractéristiques d'une famille de surfaces admettent toujours une enveloppe qui est l'arête de rebroussement de l'enveloppe de ces surfaces.

Cela résulte très simplement de ce qui précède.

Si, en effet,

$$f(x, y, z, t) = 0$$

est l'équation d'une famille de surfaces caractérisées par les valeurs données au paramètre t , pour chaque valeur de t la caractéristique de la surface correspondante est définie par le système

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

et les équations (5) qui doivent admettre des solutions communes en x , y , z , quel que soit t , pour qu'il y ait une enveloppe, se réduisent ici à trois

$$(6) \quad f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0;$$

donc l'enveloppe existe en général; ses équations s'obtiennent en éliminant t entre les équations précédentes, et l'on voit que cette enveloppe est bien l'arête de rebroussement de l'enveloppe des surfaces considérées.

Ici chaque courbe a un *contact du second ordre* avec l'enveloppe; ou, en d'autres termes, *les caractéristiques d'une famille de surfaces ont un contact du second ordre avec l'arête de rebroussement de l'enveloppe de ces surfaces.*

Une caractéristique particulière répondant à la valeur t_1 du paramètre t sera donnée par les équations

$$(7) \quad f(x, y, z, t_1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t_1} = 0.$$

et les coordonnées d'un point où elle touche l'enveloppe satisferont en outre à l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} = 0.$$

Pour former les conditions d'un contact du second ordre entre cette courbe (7) et l'enveloppe (6), on tirera de ces dernières équations (6) les valeurs des coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'enveloppe en fonction de t , on les portera dans les équations (7), qui deviendront

$$\varphi(t, t_1) = 0, \quad \psi(t, t_1) = 0,$$

et l'on écrira que, pour $t = t_1$, on doit avoir

$$\begin{aligned} \varphi(t, t_1) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \\ \psi(t, t_1) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \end{aligned}$$

ce qui exprime d'ailleurs que les deux courbes ont au point correspondant trois points communs confondus.

Nous allons vérifier que ces conditions sont en effet satisfaites dans le cas qui nous occupe.

Et d'abord cela est évident pour les équations $\varphi(t, t_1) = 0, \psi(t, t_1) = 0$, puisque, pour $t = t_1$, les valeurs de x, y, z déduites des équations

(6) se rapportent à un point commun à la courbe (6) et à la caractéristique (7). Pour les autres équations, nous les développerons en différentiant les équations (7), par rapport à t , les substitutions indiquées étant supposées effectuées, et, en posant

$$f' = \frac{\partial f(x, y, z, t_1)}{\partial t_1},$$

nous aurons

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0, \\ \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{df}{dz} \frac{dz}{dt} = 0, \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt^2} + \dots \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots \right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} + \dots \right) = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 f'}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt^2} + \dots \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 f'}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots \right) + \left(\frac{\partial^2 f'}{\partial x \partial z} \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} + \dots \right) = 0. \end{cases}$$

Il faut supposer que dans ces équations on fasse $t = t_1$, c'est-à-dire que x, y, z se rapportent au point commun considéré des courbes (6) et (7).

Si, d'autre part, on suppose que dans les équations (6) on remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction de t déduites de ces mêmes équations, on aura des identités qui en pourront fournir d'autres par des différentiations.

Différentions ainsi une première fois, par rapport à t , les deux premières équations (6), en simplifiant les résultats au moyen de la seconde et de la troisième de ces équations on obtient des identités qui se réduisent, pour $t = t_1$, aux conditions (8), qui sont ainsi satisfaites, et cela montre que les deux courbes sont tangentes.

Si l'on différencie maintenant les identités précédemment obtenues, et qu'on réduise les résultats au moyen de ces mêmes identités, on en obtient deux nouvelles qui, pour $t = t_1$, deviennent conformes aux conditions (9) qui sont ainsi satisfaites; d'où il suit que le contact est bien du second ordre.

On verrait facilement qu'il n'est pas, en général, d'un ordre plus élevé.

Nous remarquerons que le théorème qui précède établit une différence essentielle entre le cas qui nous occupe et celui d'une famille

quelconque de courbes admettant une enveloppe, de sorte que les courbes d'une telle famille ne peuvent pas être considérées, en général, comme les caractéristiques des surfaces d'une même famille.

Nous établirons encore une propriété générale de l'arête de rebroussement qui conduit à une réciproque digne de remarque.

Chaque surface d'une même famille a un contact du second ordre avec l'arête de rebroussement de la surface-enveloppe.

Si $f(x, y, z, t) = 0$ est l'équation de la famille de surfaces, les coordonnées d'un point quelconque de l'arête de rebroussement de leur enveloppe sont données, en fonction de t , par les équations

$$(10) \quad f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

et, pour $t = t_1$, ces valeurs définissent un point commun à cette arête de rebroussement et à la surface particulière $f(x, y, z, t_1) = 0$. Si l'on suppose que dans cette dernière équation x, y, z soient remplacés par leurs valeurs en fonction de t déduites des équations (10), et que le résultat prenne la forme $F(t, t_1) = 0$, les conditions d'un contact du second ordre entre l'arête de rebroussement et la surface considérée seront que l'on ait, pour $t = t_1$,

$$F(t, t_1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0,$$

c'est-à-dire, en supposant que x, y, z désignent les fonctions de t tirées des équations (10),

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, z, t_1) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt^2} + \dots \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots \right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots \right) = 0. \end{array} \right.$$

Ces conditions sont en effet satisfaites pour $t = t_1$. Cela est évident pour la première; et, quant aux deux autres, si l'on différentie deux fois, par rapport à t , la première des identités qu'on obtient en remplaçant, dans les équations (10), x, y, z par les valeurs tirées de ces mêmes équations, en simplifiant les résultats au moyen de la seconde et de la troisième identité, on en obtient deux nouvelles qui, pour $t = t_1$,

deviennent, comme il est facile de le vérifier, conformes aux deux dernières conditions (11), qui ainsi sont bien satisfaites.

Réciproquement, si les surfaces d'une même famille ont un contact du second ordre avec une courbe donnée, cette courbe est l'arête du rebroussement de leur surface-enveloppe.

Les coordonnées du point où chaque surface $f(x, y, z, t) = 0$ touche la courbe donnée sont des fonctions du paramètre t , soit

$$(12) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \theta(t).$$

et ces équations peuvent être considérées comme celles de la courbe donnée. Expriment que la surface répondant à la valeur t , du paramètre a un contact du second ordre avec cette courbe, on retombe sur les conditions (11) qui précèdent, et qui ici sont supposées satisfaites, x, y, z étant remplacés par leurs valeurs (12), dans lesquelles on suppose $t = t_1$.

Mais, d'autre part, si l'on remplace, dans l'équation générale $f(x, y, z, t) = 0$, x, y, z par leurs valeurs (12) en fonctions de t , elle deviendra identique, ainsi que les suivantes qu'on en déduit par différentiation :

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt^2} + \dots \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots \right) \\ \quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots \right) + 2 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x} \frac{dx}{dt} + \dots \right) + \frac{\partial^3 f}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

Si l'on fait $t = t_1$ dans ces identités, x, y, z prennent alors les valeurs qui répondent au point de contact de la courbe et de la surface particulière considérée; et de la comparaison de la première de ces identités avec la seconde condition (11), il résulte d'abord que l'on doit avoir, pour $t = t_1$, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire que la caractéristique de la surface variable considérée passe constamment par le point de contact en question. Mais les coordonnées de ce point de contact satisfaisant, pour chaque valeur de t , à l'équation $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, cette dernière devient à son tour une identité si l'on y remplace x, y, z par leurs valeurs (12),

et l'on en déduit alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

ce qui permet de réduire la seconde identité (13) à la suivante

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt^2} + \dots \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

En faisant $t = t_1$ dans ce résultat, il résulte de la comparaison avec la dernière condition (11) que les coordonnées du point de contact satisfont encore à l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$, où $t = t_1$. Ce point est donc sur l'arête de rebroussement de la surface-enveloppe des surfaces considérées, et la courbe donnée coïncide avec cette arête de rebroussement.

Appliquons cela au cas particulier où les surfaces considérées sont des sphères.

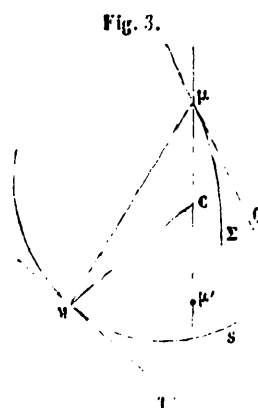
On sait que toute sphère qui passe par le cercle osculateur d'une courbe, pour l'un de ses points, a avec la courbe, au même point, un contact du second ordre. Si l'on suppose que le rayon de cette sphère soit une fonction des coordonnées du point de contact, la courbe donnée devient l'enveloppe de la caractéristique de cette sphère variable, ou l'arête de rebroussement de sa surface-enveloppe. Si le rayon de la sphère est constant, on a une surface-canal. Il existe une seconde surface-canal engendrée par une sphère égale à la première, et qui admet la même arête de rebroussement.

Tout cela peut d'ailleurs s'établir très simplement par la Géométrie seule; et, pour plus de simplicité, ne considérons que le cas d'une surface-canal.

Si une sphère de rayon donné R a en M un contact du second ordre avec une courbe donnée S , son centre est en μ , sur la droite $C\mu$ polaire de M , de façon que $M\mu = R$. Il y a un second point μ' symétrique de μ par rapport au plan osculateur en M qui répond à la question.

Comme la longueur $M\mu$ reste constante pendant que la sphère se meut, et qu'elle est normale à la courbe S , elle est aussi constamment normale à la courbe Σ lieu du centre de la sphère. Enfin, puisque cette courbe Σ est sur la surface polaire de la courbe S , sa tangente $\mu\theta$ en μ est dans le plan normal en M à la courbe S , et, par suite, les tangentes MT et $\mu\theta$ à ces deux courbes S et Σ sont l'une à l'autre perpendi-

culaires dans l'espace. Par conséquent, puisque la caractéristique d'une sphère mobile de rayon constant est un grand cercle normal à la courbe lieu de son centre, cette caractéristique sera donc un cercle de centre



μ , de rayon μM , situé dans le plan $\mu M T$, et, par suite, tangente à la courbe S qui est ainsi l'arête de rebroussement de la surface-canal enveloppe de la sphère.

Les courbes S et Σ jouissent de certaines propriétés réciproques faciles à établir, par exemple la suivante : *Si le centre d'une sphère de rayon constant $R = M\mu$ décrit la courbe S , la courbe Σ est l'arête de rebroussement de la surface-enveloppe.*

Mais nous ne nous arrêterons pas à la démonstration, facile d'ailleurs, de ce théorème, non plus qu'à quelques autres propriétés des surfaces-canaux et des surfaces-enveloppes des sphères variables qui nous entraîneraient un peu loin en nous éloignant trop de l'objet principal de cette simple Note. Et, pour terminer, nous donnerons un dernier théorème général dont la démonstration résulte facilement de ce qui précède, et de cette propriété que possède toute courbe qui a un contact d'un ordre quelconque avec une autre courbe, d'avoir aussi un contact au moins du même ordre avec toute surface qui passe par cette courbe.

Ce théorème général est le suivant :

Si les courbes d'une famille ont un contact du second ordre avec une courbe donnée, cette dernière, qui est leur enveloppe, est l'arête de rebroussement commune des enveloppes des surfaces qui, par leurs intersections successives, définissent les courbes considérées. Les caractéristiques de ces surfaces variables sont constamment tangentes l'une à l'autre.