JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. CLAUSIUS

Sur une formule générale relative à l'électrisation par influence

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 73-77.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__73_0>

Sur une formule générale relative à l'électrisation par influence [1];

PAR M. R. CLAUSIUS.

(Extrait et annoté par la Rédaction.)

Divers auteurs ont établi différentes formules réciproques se rapportant à l'influence mutuelle de deux corps conducteurs de l'électricité. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de donner une formule très générale qui comprend, comme cas particuliers, plusieurs des formules précédentes.

Soient

$(C_1), (C_2), \ldots, (C_n)$ *m* corps conducteurs qui agissent les uns sur les autres par influence;

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ les quantités d'électricité qui se trouvent sur ces corps à la suite d'une première charge;

$V_1, V_2, \ldots, V_n$ les niveaux potentiels correspondants;

$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_n$ et $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_n$ les équivalents des Q et V pour une seconde charge.

La formule qu'il s'agit de démontrer est la suivante :

$$(\mathrm{I}) \quad V_1\mathfrak{Q}_1 + V_2\mathfrak{Q}_2 + \ldots + V_n\mathfrak{Q}_n = \mathfrak{V}_1 Q_1 + \mathfrak{V}_2 Q_2 + \ldots + \mathfrak{V}_n Q_n,$$

---

(1) WIEDEMANN, *Annales de Chimie et de Physique;* 1877, p. 493 et suiv.

ou plus simplement, en employant une notation connue,

$$(\mathrm{I}_a) \qquad \Sigma \mathrm{V}\mathfrak{Q} = \Sigma \mathfrak{V} \mathrm{Q}.$$

Concevons un espace limité par les surfaces des conducteurs et par celle d'une sphère d'un rayon aussi grand que l'on voudra, et qui enveloppe tous les corps.

Soient

$d\tau$ un élément de volume de cet espace ;
$d\omega$ un élément de l'une ou de l'autre des surfaces qui le déterminent ;
du un élément de la normale intérieure au point correspondant à $d\omega$.

La formule de Green devient

$$(1) \qquad \int \mathrm{V}\frac{d\mathfrak{V}}{du}\,d\omega + \int \mathrm{V}\,\Delta\mathfrak{V}\,d\tau = \int \mathfrak{V}\frac{d\mathrm{V}}{du}\,d\omega + \int \mathfrak{V}\,\Delta\mathrm{V}\,d\tau \quad (^1).$$

La première et la troisième intégrale de cette formule se rapportent à la surface totale qui détermine l'espace considéré, et les deux autres au volume de cet espace.

Mais, comme il n'y a pas d'électricité dans le même espace, de la façon dont les charges électriques sont effectuées, nous avons

$$\Delta\mathrm{V} = 0, \quad \Delta\mathfrak{V} = 0,$$

et l'équation ci-dessus se réduit à la suivante :

$$(2) \qquad \int \mathrm{V}\frac{d\mathfrak{V}}{du}\,d\omega = \int \mathfrak{V}\frac{d\mathrm{V}}{du}\,d\omega.$$

Si le rayon R de la sphère est extrêmement grand, les portions de V

---

(1) Nous rappellerons la notation suivante :

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}. \qquad \text{H. R.}$$

et de $\mathfrak{V}$ relatives à sa surface sont de l'ordre de $\frac{1}{R}$, et les dérivées $\frac{d\mathfrak{V}}{du}$, $\frac{dV}{du}$ de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$ [1].

D'où il suit que les intégrales de l'équation (2) peuvent être considérées comme se rapportant uniquement à la surface totale des conducteurs.

Soit $d\omega_i$ un élément $d\omega$ de la surface du conducteur (C_i).

En remarquant que V_i et $\mathfrak{V}_i$ sont constants à la surface de ce corps comme dans son intérieur, l'équation (2) devient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &V_1\int\frac{d\mathfrak{V}}{du}d\omega_1+V_2\int\frac{d\mathfrak{V}}{du}d\omega_2+V_3\int\frac{d\mathfrak{V}}{du}d\omega_3+\ldots \\ &\quad=\mathfrak{V}_1\int\frac{dV}{du}d\omega_1+\mathfrak{V}_2\int\frac{dV}{du}d\omega_2+\mathfrak{V}_3\int\frac{dV}{du}d\omega_3+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Si h_i et $\mathfrak{h}_i$ désignent les densités électriques superficielles du conducteur (C_i) qui se rapportent respectivement à la première et à la seconde charge, on sait que

$$\frac{dV_i}{du}=-4\pi h_i,\quad \frac{d\mathfrak{V}_i}{du}=-4\pi\mathfrak{h}_i,$$

et, au lieu de l'équation (3), on a la suivante :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &V_1\int\mathfrak{h}_1\,d\omega_1+V_2\int\mathfrak{h}_2\,d\omega_2+V_3\int\mathfrak{h}_3\,d\omega_3+\ldots \\ &\quad=\mathfrak{V}_1\int h_1\,d\omega_1+\mathfrak{V}_2\int h_2\,d\omega_2+\mathfrak{V}_3\int h_3\,d\omega_3+\ldots.\end{aligned}\right.$$

---

[1] En effet, lors de la première charge, par exemple, on a, pour R extrêmement grand avant de le supposer infini,

$$V=-\frac{1}{R}\Sigma Q_i,$$

$$\frac{dV}{du}=\frac{1}{R^2}\Sigma Q_i. \qquad \text{H. R.}$$

Or, on a

$$\mathfrak{Q}_i = \int \mathfrak{h}_i \, d\omega_i, \quad Q_i = \int h_i \, d\omega_i,$$

et la formule (I) se trouve ainsi démontrée.

Applications. — 1° Supposons que (C_i) se trouve en communication avec la Terre, nous aurons

$$V_i = 0, \quad \mathfrak{V}_i = 0.$$

Maintenant admettons qu'en chargeant ce corps il ne reçoive pas d'électricité du dehors, mais seulement un partage inégal d'électricité par influence: sa surface sera couverte en partie d'électricité positive et en partie d'électricité négative, de telle sorte que la masse totale des deux électricités sera nulle. Nous aurons ainsi

$$Q_i = 0, \quad \mathfrak{V}_i = 0.$$

Donc, *les corps qui, lors des deux charges, sont en communication avec la terre ou qui sont isolés sans charge initiale ne donnent aucun terme dans l'équation* (I).

2° Admettons maintenant, et dans tout ce qui suit, à l'exception de (C_1) et (C_2), que les autres corps remplissent l'une ou l'autre des conditions ci-dessus, l'équation (I) se réduit à la suivante :

$$(5) \qquad V_1 \mathfrak{Q}_1 + V_2 \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{V}_1 Q_1 + \mathfrak{V}_2 Q_2.$$

Supposons : 1° que (C_1) et (C_2) soient d'abord isolés sans électricité initiale; 2° que, à la première charge, (C_1) reçoive la quantité d'électricité E, par l'influence de laquelle (C_2) atteindra le niveau potentiel V_2; 3° que, à la seconde charge, (C_2) reçoive la quantité d'électricité E développée dans (C_1), et par suite le niveau potentiel $\mathfrak{V}_1$; nous aurons

$$Q_2 = 0, \quad \mathfrak{Q}_1 = 0, \quad Q_1 = \mathfrak{Q}_2 = E;$$

l'équation (5) donne alors

$$(6) \qquad V_2 = \mathfrak{V}_1.$$

Ainsi, *le niveau potentiel qui naît dans* (C_2) *quand* (C_1) *seul a été chargé est égal à celui qui naît dans* (C_1) *quand on effectue l'opération inverse et que les deux charges sont égales.*

3° Supposons que, à la première charge, (C_1) se trouve au niveau potentiel K, tandis que (C_2) est en communication avec la terre, et reçoive par influence la quantité d'électricité Q_2; que la seconde charge (C_2) se trouve au niveau potentiel K, tandis que (C_1), restant en communication avec la terre, reçoive par influence la quantité d'électricité $\mathfrak{Q}_1$; nous aurons

$$V_2 = 0, \quad \mathfrak{V}_1 = 0, \quad V_1 = \mathfrak{V}_2 = K,$$

et la formule (5) donne

$$\mathfrak{Q}_1 = Q_2. \tag{7}$$

Ainsi, *la quantité d'électricité qui, sous l'influence de la charge de* (C_1), *s'est accumulée sur* (C_2) *et celle qui s'est accumulée sur* (C_1) *par l'influence de la charge* (C_2) *sont égales entre elles lorsque les niveaux potentiels des corps chargés sont égaux.*

On peut tirer encore bien d'autres conséquences de l'équation (I).