JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DAVID

Applications de la dérivation d'Arbogast à la solution de la partition des nombres et à d'autres problèmes

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 8 (1882), p. 61-72.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8__61_0>

Applications de la dérivation d'Arbogast à la solution de la partition des nombres et à d'autres problèmes;

PAR M. DAVID,
Lieutenant-Colonel d'Artillerie en retraite.

Le problème de la partition des nombres consiste, comme on sait, dans la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots = n.$$

Je trouve sa solution dans la loi de dérivation d'Arbogast; et, comme celle-ci n'est guère connue, je crois, que par le grand Traité de Lacroix (n° **123**), je suis obligé d'entrer dans quelques détails à ce sujet.

I. Ce dernier auteur démontre que le terme général d'une fonction de série telle que

$$\varphi(a + a_1x + a_2x^2 + \ldots),$$

développée par rapport aux puissances croissantes de x, est

$$\begin{aligned}&\frac{d^n\varphi(a)}{da^n}\frac{a_1^n}{[n]} + \frac{d^{n-1}\varphi(a)}{da^{n-1}}\frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}\frac{a_2}{1}\\&\quad+\frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\left[\frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\frac{a_2^2}{[2]}+\frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}\frac{a_3}{1}\right]\\&\quad+\frac{d^{n-3}\varphi(a)}{da^{n-3}}\left[\frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\frac{a_2^3}{[3]}+\frac{a_1^{n-5}}{[n-5]}\frac{a_2}{1}\frac{a_3}{1}+\frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\frac{a_4}{1}\right]+\ldots,\end{aligned}$$

n étant l'exposant de x dans le terme général, et la notation $[n]$ désignant, pour abréger, le produit 1, 2, 3, ..., n.

Voici comment se forme cette expression :

1° La loi que suivent les premiers termes de chaque parenthèse, lesquels ne contiennent que a_1 et a_2, est évidente.

2° On obtient chacun des autres termes compris dans une parenthèse en différentiant ceux qui sont compris dans la parenthèse précédente, comme si a_2, a_3, ... étaient des fonctions de α, et si l'on avait $\frac{da_2}{d\alpha} = a_3$, $\frac{da_3}{d\alpha} = a_4$, ...; mais il ne faut faire varier au plus que deux lettres dans chaque terme : savoir celles de rang le plus avancé si elles sont consécutives, autrement ne faire varier que la dernière lettre. Chaque fois que l'une de ces lettres prend un exposant plus élevé, il faut diviser par cet exposant.

Cette opération a été représentée par la caractéristique D; une seconde opération par D^2; une troisième par D^3, et ainsi de suite. Le coefficient de x^n, dans le développement de la fonction de série, s'écrit ainsi :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^n\varphi(a)}{da^n}\frac{a_1^n}{[n]} + \frac{d^{n-1}\varphi(a)}{da^{n-1}}\frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}\frac{a_2}{1}\\ &\quad + \frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\left[\frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}\mathrm{D}\frac{a_2}{1}\right]\\ &\quad + \frac{d^{n-3}\varphi(a)}{da^{n-3}}\left[\frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\frac{a_2^3}{[3]} + \frac{a_1^{n-5}}{[n-5]}\mathrm{D}\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\mathrm{D}^2\frac{a_2}{1}\right] + \cdots, \end{aligned}\right.$$

expression qui met bien en évidence la propriété de tous les termes de se déduire les uns des autres.

De cette loi et de cette notation d'Arbogast on passe sans peine à l'expression suivante du terme général :

$$\frac{d^n\varphi(a)}{da^n}\frac{a_1^n}{[n]} + \frac{d^{n-1}\varphi(a)}{da^{n-1}}\mathrm{D}\frac{a_1^{n-1}}{[n-1]} + \frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\mathrm{D}^2\frac{a_1^{n-2}}{[n-2]} + \cdots.$$

Puis, étendant la règle de dérivation que représente la caractéristique D à la fonction $\varphi(a)$, c'est-à-dire admettant que $\mathrm{D}\varphi(a)$ s'obtient par la différentiation de $\varphi(a)$, remplaçant $\frac{da}{d\alpha}$ par a_1, et considérant

$\frac{d\varphi}{da}$ et a_1 comme deux lettres consécutives, on représente ce terme général par la notation $D^n\varphi(a)$, et l'on a la formule fondamentale

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} D^n\varphi(a) = {} & \frac{d^n\varphi(a)}{da^n}\,\frac{a_1^n}{[n]} \\ & + \frac{d^{n-1}\varphi(a)}{da^{n-1}}\,D\,\frac{a_1^{n-1}}{[n-1]} + \frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\,D\,\frac{a_1^{n-2}}{[n-2]} + \ldots . \end{aligned}\right.$$

D'où il résulte que le développement de la fonction de série est mis sous la forme excessivement simple

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(a + a_1x + a_2x^2 + \ldots) = {} & \varphi(a) + x\,D\varphi(a) \\ & + x^2\,D^2\varphi(a) + x^3\,D^3\varphi(a) + \ldots . \end{aligned}\right.$$

Au lieu d'ordonner le terme général $D^n\varphi(a)$ ainsi qu'on l'a fait dans l'expression (1), on peut l'ordonner comme il suit :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{d^n\varphi(a)}{da^n}\,\frac{a_1^n}{[n]} + \frac{d^{n-1}\varphi(a)}{da^{n-1}}\,\frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}\,\frac{a_2}{1} + \frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\,\frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\,\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{d^{n-3}\varphi(a)}{da^{n-3}}\,\frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\,\frac{a_2^3}{[3]} + \ldots, \\ & \quad + \frac{d^{n-2}\varphi(a)}{da^{n-2}}\,\frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}\,D\,\frac{a_2}{1} + \frac{d^{n-3}\varphi(a)}{da^{n-3}}\,\frac{a_1^{n-5}}{[n-5]}\,D\,\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{d^{n-4}\varphi(a)}{da^{n-4}}\,\frac{a_1^{n-7}}{[n-7]}\,D\,\frac{a_2^3}{[3]} + \ldots, \\ & \quad + \frac{d^{n-3}\varphi(a)}{da^{n-3}}\,\frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\,D^2\,\frac{a_2}{1} + \frac{d^{n-4}\varphi(a)}{da^{n-4}}\,\frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\,D^2\,\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{d^{n-5}\varphi(a)}{da^{n-5}}\,\frac{a_1^{n-8}}{[n-8]}\,D^2\,\frac{a_2^3}{[3]} + \ldots, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

et chaque ligne horizontale se déduit de la précédente par l'opération D.

Ce qu'il importe de remarquer, et c'est là tout l'avantage de la loi d'Arbogast, c'est que les termes que l'on en déduit s'obtiennent immédiatement et par de simples opérations mentales, sans réduction ni omission, de sorte qu'on peut en déduire le développement complet sans autre peine que celle d'en écrire les termes dans l'ordre qui en résulte. Ainsi, dans la formule (3), chaque terme se déduit du précédent par l'opération D appliquée à $\varphi(a)$; dans l'expression (4), chaque ligne horizontale se déduit de la ligne horizontale précédente, par cette même opération appliquée aux puissances de a_2 ; enfin, dans l'expression (1), sauf le premier terme compris dans chaque parenthèse, lequel s'écrit immédiatement, les autres se déduisent de la même manière des termes compris dans la parenthèse précédente. C'est trop simple pour qu'il soit nécessaire d'en donner des exemples, qui vont d'ailleurs se présenter naturellement.

II. Cela posé, développons $D^n e^\alpha$ par l'expression (1). En supposant $a = 0$, l'on a

$$\begin{aligned} D^n e^a = \frac{a_1^n}{[n]} &+ \frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}\frac{a_2}{1} + \frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}\frac{a_3}{1} \\ &+ \frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\frac{a_2^3}{[3]} + \frac{a_1^{n-5}}{[n-5]}\frac{a_2}{1}\frac{a_3}{1} + \frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\frac{a_4}{1} \\ &+ \frac{a_1^{n-8}}{[n-8]}\frac{a_2^4}{[4]} + \frac{a_1^{n-7}}{[n-7]}\frac{a_2^2}{[2]}\frac{a_3}{1} + \frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\left[\frac{a_3^2}{[2]} + \frac{a_2}{1}\frac{a_4}{1}\right] + \frac{a_1^{n-5}}{[n-5]}\frac{a_5}{1} + \dots, \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Or on connaît une autre formule pour exprimer une fonction de série, savoir

$$\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)\sum x^n \frac{d^{p_1+p_2+\dots}\varphi(a)}{da^{p_1+p_2+\dots}}\frac{a_1^{p_1}}{[p_1]}\frac{a_2^{p_2}}{[p_2]}\dots,$$

dans laquelle le signe Σ s'étend d'abord à toutes les valeurs entières et positives de n, puis à toutes les valeurs entières et positives de p_1, $p_2, \dots$ qui satisfont à l'équation

$$(5) \qquad p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots = n.$$

On déduit de là, puisqu'on suppose $a = 0$,

$$D^n e^a = \sum \frac{a_1^{p_1}}{[p_1]}\frac{a_2^{p_2}}{[p_2]}\dots,$$

le signe Σ ne s'étendant qu'aux valeurs $p_1, p_2, \dots$ qui satisfont à l'équation (5). En comparant à cette formule celle écrite au commencement du paragraphe, on voit que les exposants des termes de la première donnent précisément toutes les solutions de cette équation (5), qui est celle de la partition des nombres. Ces solutions, qui s'écrivent immédiatement, sans calcul et sans tâtonnement, comme les termes eux-mêmes déduits de la dérivation, sont comprises dans le tableau suivant ([1]) (on y a omis les valeurs nulles des p, pour abréger) :

$p_1 = n$						
$p_1 = n-2$ $p_3 = 1$						
$p_1 = n-4$ $p_2 = 2$	$p_1 = n-3$ $p_3 = 1$					
$p_1 = n-6$ $p_2 = 3$	$p_1 = n-5$ $p_2 = 1$ $p_3 = 1$	$p_1 = n-4$ $p_4 = 1$				
$p_1 = n-8$ $p_2 = 4$	$p_1 = n-7$ $p_2 = 2$ $p_3 = 1$	$p_1 = n-6$ $p_3 = 2$	$p_1 = n-6$ $p_2 = 1$ $p_4 = 1$	$p_1 = n-5$ $p_5 = 1$		
$p_1 = n-10$ $p_2 = 5$	$p_1 = n-9$ $p_2 = 5$ $p_3 = 1$	$p_1 = n-8$ $p_2 = 1$ $p_3 = 2$	$p_1 = n-8$ $p_2 = 2$ $p_4 = 1$	$p_1 = n-7$ $p_3 = 1$ $p_4 = 1$	$p_1 = n-7$ $p_2 = 1$ $p_5 = 1$	$p_1 = n-6$ $p_0 = 1$

. . . .

Sans égard pour la répétition, voici comment ce tableau est formé : 1° la loi suivie par les nombres compris dans les groupes de la première colonne verticale est évidente. 2° Chaque groupe d'une ligne horizontale, abstraction faite du premier, se forme, au moyen d'un des groupes de la ligne horizontale précédente, en prenant pour p_1 le même nombre diminué de l'unité, et en ne faisant varier dans les valeurs de $p_2, p_3, p_4, \ldots$ que les deux dernières, si elles sont consécutives, et la dernière, s'il en est autrement; si elles sont consécutives, diminuer l'avant-dernière de 1 et augmenter la dernière de 1, puis diminuer la dernière de 1 en introduisant une nouvelle quantité p égale à 1 et d'un indice supérieur de 1, ce qui produit deux solutions nouvelles ; si elles ne sont pas consécutives, diminuer la dernière seulement de 1 en introduisant encore une nouvelle quantité p égale à 1 et d'un indice supérieur de 1, ce qui ne produit qu'une solution nouvelle.

Il est clair que le tableau s'arrête de lui-même et que, lorsque la

([1]) *Comptes rendus*, 1880, 1er semestre, p. 1344.

valeur de p_1 est nulle, il n'y a pas lieu d'en tirer un groupe dans lequel la loi indiquée donnerait pour p_1 une valeur négative.

En suivant cette marche, pour obtenir toutes les solutions il n'y a pas d'autre peine que celle de les écrire; et ainsi l'on peut dire que la résolution complète de l'équation (5) est aussi simple que possible, puisqu'elle ne comporte pas même l'emploi d'une formule numérique.

Cela montre que, si l'on a à faire la somme de toutes les quantités que l'on obtient en remplaçant dans $\varphi(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ les nombres $p_1, p_2, p_3, \ldots$ par leurs valeurs déduites de l'équation (5), problème qu'on rencontre souvent, ce qu'il y a de plus rapide, c'est de les dériver les uns des autres par la loi précédente. On représente ainsi cette somme par la formule

$$\begin{aligned}\Sigma\varphi(p_1p_2p_3\ldots) &= \varphi(n) + \varphi(n-2, 1) + \varphi(n-4, 2)\\ &\quad + \varphi(n-3, 0, 1) + \varphi(n-6, 3) + \varphi(n-5, 1, 1) + \ldots.\end{aligned}$$

Mais si l'on développe $D^n e^a$ par l'expression (4), au lieu de le développer par l'expression (1), il vient

$$\begin{aligned}D^n e^a = {} & \frac{a_1^n}{[n]} + \frac{a_1^{n-2}}{[n-2]}\frac{a_2}{1} + \frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}\frac{a_2^2}{[2]} + \frac{a_1^{n-6}}{[n-6]}\frac{a_2^3}{[3]} + \cdots\\ & + \frac{a_1^{n-3}}{[n-3]}\frac{a_3}{1} + \frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\frac{a_2}{1}\frac{a_3}{1} + \frac{a_1^{n-7}}{[n-7]}\frac{a_2^2}{[2]}\frac{a_3}{1} + \cdots\\ & + \frac{a_1^{n-4}}{[n-4]}\frac{a_4}{1} + \frac{a_1^{n-5}}{[n-5]}\left[\frac{a_3^2}{[2]} + \frac{a_2}{1}\frac{a_4}{1}\right] + \frac{a_1^{n-8}}{[n-8]}\left[\frac{a_2}{1}\frac{a_3^2}{[2]} + \frac{a_2^2}{[2]}\frac{a_4}{1}\right] + \cdots,\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et l'on en conclut facilement, en considérant l'une des lignes verticales de la formule précédente, le tableau suivant, qui donne par une seconde manière toutes les solutions quand on y fait $r = 1, 2, 3, \ldots$ (¹).

$$\begin{array}{|l|l|l|l|l}
p_1 = n-2r & p_1 = n-2r-1 & p_1 = n-2r-2 & p_1 = n-2r-3 & \\
p_2 = r & p_2 = r-1 & p_2 = r-2 & p_2 = r-2 & \ldots \\
 & p_3 = 1 & p_3 = 2 & p_3 = 3 & \\
\hline
 & & p_1 = n-2r-1 & p_1 = n-2r-3 & \\
 & & p_2 = r-1 & p_2 = r-2 & \\
 & & p_4 = 1 & p_3 = 1 & \ldots \\
 & & & p_4 = 1 & \\
\hline
 & & & p_1 = n-r-2 & \\
 & & & p_2 = r-1 & \ldots\ldots \\
 & & & p_5 = 1 &
\end{array}$$

(¹) *Comptes rendus*, 1880, 2e semestre, p. 621.

La loi est à fort peu près la même que précédemment et peut s'énoncer ainsi. En partant de la solution particulière $p_1 = n - 2r$, $p_2 = r$ de l'équation (5), on obtient toutes les solutions correspondant à ce nombre r en formant chaque groupe d'une ligne verticale au moyen d'un des groupes de la ligne verticale précédente. Pour cela il faut diminuer p_1 de l'unité et ne faire varier dans les valeurs de $p_2, p_3, p_4, \ldots$ (le surplus de l'énoncé comme précédemment).

On obtiendrait de même le développement de $\Sigma\varphi(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ sous une seconde forme correspondant à l'expression (4); il paraît inutile de l'écrire.

D'ailleurs, il est clair que ces deux solutions du même problème ne diffèrent l'une de l'autre que par la façon dont elles sont ordonnées, de même que les deux expressions (1) et (4) ne diffèrent l'une de l'autre que par l'ordre dans lequel on a écrit leurs termes.

III. Je terminerai en donnant la solution de quelques problèmes que la loi d'Arbogast, étendue comme je viens de le faire, résout immédiatement :

1° C'est la manière la plus simple d'exprimer le théorème des fonctions de fonctions.

Soit z fonction de y, y fonction de x, en regardant les coefficients différentiels

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{1.2\,dx^2}, \quad \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3}, \quad \ldots$$

comme des quantités successives analogues aux constantes $a_1, a_2, a_3, \ldots$, considérées précédemment, on a

$$\frac{1}{[n]}\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{d^n z}{dy^n}\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^n}{[n]} + \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\mathrm{D}\frac{\left(\frac{dy}{dz}\right)^{n-1}}{[n-1]} + \frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}\mathrm{D}^2\frac{\left(\frac{dy}{dz}\right)^{n-2}}{[n-2]} + \ldots.$$

2° Étant donnée la série

$$u = az^{\frac{p}{q}} + a_1 z^{\frac{p+1}{q}} + a_2 z^{\frac{p+2}{q}} + \ldots,$$

la série inverse est déterminée par la formule

$$\frac{z^r}{-qr} = u^{\frac{qr}{p}} \frac{a^{-\frac{qr}{p}}}{-qr} + u^{\frac{qr+1}{p}} \mathrm{D} \frac{a^{-\frac{qr+1}{p}}}{-qr-1} + u^{\frac{qr+2}{p}} \mathrm{D}^2 \frac{a^{-\frac{qr+2}{p}}}{-qr-2} + \ldots$$

En différentiant cette série par rapport à a, elle prend une forme encore plus simple :

$$\frac{u}{pqr} \frac{dz^r}{du} = \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{qr}{p}} + \mathrm{D}\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{qr+1}{p}} + \mathrm{D}^2\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{qr+2}{p}} + \ldots$$

C'est la solution du problème qu'on appelait autrefois le *retour des suites*.

3° Soit l'équation algébrique

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0.$$

Si l'on désigne, comme à l'ordinaire, par s_n la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines, on a

$$\frac{s_n}{n} = -\mathrm{D}^n \log a,$$

en ayant soin de faire dans le développement $a = 1$.

Par l'expression (4) cette formule se développe comme il suit :

$$\begin{aligned}
(-1)^n \frac{s^n}{n} = \frac{a_1^n}{n} &- a_1^{n-2} \frac{a_2}{1} + (n-3) a_1^{n-4} \frac{a_2^2}{[2]} - (n-4)(n-5) a_1^{n-6} \frac{a_2^3}{[3]} + \ldots, \\
&+ a_1^{n-3} \mathrm{D} \frac{a_2}{1} - (n-4) a_1^{n-5} \mathrm{D} \frac{a_2^2}{[2]} + (n-5)(n-6) a_1^{n-7} \mathrm{D} \frac{a_2^3}{[3]} + \ldots, \\
&- a_1^{n-4} \mathrm{D}^2 \frac{a_2}{1} + (n-5) a_1^{n-6} \mathrm{D}^2 \frac{a_2^2}{[2]} - (n-6)(n-7) a_1^{n-8} \mathrm{D}^2 \frac{a_2^3}{[3]} + \ldots, \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et chaque ligne horizontale se déduit de la précédente par l'opération D; qui, ainsi que nous l'avons dit, fournit des termes que l'on écrit immédiatement sans calcul.

4° Pour le développement d'une puissance de série, on a

$$(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^m = a^m + x \mathrm{D} a^m + x^2 \mathrm{D}^2 a^m + \ldots$$

Dans le cas particulier de $m = -1$, il vient

$$D^n a^{-1} = \frac{(-1)^n}{a}\left(\frac{a_1^n}{a^n} - \frac{D a_1^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{D^2 a_1^{n-2}}{a^{n-2}} + \cdots\right),$$

et cette formule donne un moyen pour calculer les nombres de Bernoulli, car ceux-ci sont, comme on sait, les coefficients du développement de la fonction de série

$$\left(1 + \frac{x^1}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \cdots\right)^{-1}.$$

5° Les quantités que nous désignons par $D^n a^m$ s'expriment sous forme de déterminant. Par exemple, pour $n = 5$, on a

$$D^5 \frac{a_m}{m} = \frac{a^{m-5}}{1.2.3.4.5}\begin{vmatrix} a_1 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 2a_2 & (m-1)a_1 & -2a & 0 & 0 \\ 3a_3 & (2m-1)a_2 & (m-2)a_1 & -3a & 0 \\ 4a_4 & (3m-1)a_3 & (2m-2)a_2 & (m-3)a_1 & -4a \\ 5a_5 & (4m-1)a_4 & (3m-2)a_3 & (2m-3)a_2 & (m-4)a_1 \end{vmatrix},$$

et la loi est assez évidente pour qu'il ne soit pas nécessaire d'écrire ce déterminant dans le cas général.

Si l'on suppose $m = 0$, il faut remplacer $\frac{a_m}{m}$ par $\log a$; on a

$$-D^5 \log a = a^{-5}\begin{vmatrix} a_1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a & 0 & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a & 0 \\ 4a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a \\ 5a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

C'est la formule de Waring mise sous forme de déterminant.

6° Si l'on veut calculer les nombres de Bernoulli, on a, par ce qui précède, pour le troisième nombre,

$$B_3 = \frac{1}{1.2^6.3^5.4^4.5^3.6^2.7}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4.3 & 4.3.2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5.4 & 5.4.3 & 5.4.3.2 & 0 \\ 1 & 6 & 6.5 & 6.5.4 & 6.5.4.3 & 6.5.4.3.2 \\ 1 & 7 & 7.6 & 7.6.5 & 7.6.5.4 & 7.6.5.4.3 \end{vmatrix};$$

la loi est évidente. Ce déterminant se calcule avec la plus grande facilité, en retranchant d'abord la première ligne de toutes les autres, ce qui réduit l'ordre du déterminant de 1 ; en retranchant dans le nouveau déterminant le double de la première ligne de la seconde, le triple de cette même ligne de la troisième, et ainsi de suite, ce qui réduit encore l'ordre de 1, etc. En même temps que l'on fait cette opération, la plus grande partie du coefficient disparaît.

7° Étant données les deux équations algébriques

$$\begin{gathered} a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \ldots + a = 0, \\ b x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n = 0, \end{gathered}$$

l'expression littérale de leur résultante R est donnée par la formule

$$R = a^n b^m + Da^n Db^m + D^2 a^n D^2 b^m + \ldots + D^{mn} a^n D^{mn} b^m,$$

les coefficients numériques de chaque terme restant à déterminer. Un théorème connu donnait bien déjà cette forme littérale, mais il n'y a qu'à chercher à développer quelques termes par ce théorème pour reconnaître bien vite que son emploi est presque impossible, même pour des degrés peu élevés.

8° Je ferai, en dernier lieu, remarquer que l'on peut encore étendre la signification de la caractéristique D.

Soit le produit de deux fonctions de série

$$\begin{aligned}
&\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)\psi(b + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \\
&\quad = [\varphi(a) + x\mathrm{D}\varphi(a) + x^2\mathrm{D}^2\varphi(a) + \ldots] \\
&\qquad \times [\psi(b) + x\mathrm{D}\psi(b) + x^2\mathrm{D}^2\psi(b) + \ldots] \\
&\quad = \varphi(a)\psi(b) + x[\varphi(a)\mathrm{D}\psi(b) + \psi(b)\mathrm{D}\varphi(a)] \\
&\qquad + x[\varphi(a)\mathrm{D}^2\psi(b) + \mathrm{D}\varphi(a)\mathrm{D}\psi(b) + \psi(b)\mathrm{D}^2\varphi(a)] + \ldots.
\end{aligned}$$

Si l'on pose, en général,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^n\varphi(a)\psi(b) = {}& \varphi(a)\mathrm{D}^n\psi(b) \\
& + \mathrm{D}\varphi(a)\mathrm{D}^{n-1}\psi(b) + \mathrm{D}^2\varphi(a)\mathrm{D}^{n-2}\psi(b) + \ldots,
\end{aligned}$$

on pourra écrire plus simplement

$$\begin{aligned}
&\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)\psi(b + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) \\
&\quad = \varphi(a)\psi(b) + x\mathrm{D}\varphi(a)\psi(b) + x^2\mathrm{D}^2\varphi(a)\psi(b) + \ldots.
\end{aligned}$$

L'équation qui sert ici à définir la quantité $\mathrm{D}^n\varphi(a)\psi(b)$ rappelle l'équation connue du Calcul différentiel qui devient

$$\mathrm{D}^n\varphi(x)\psi(x) = \varphi(x)\mathrm{D}^n\psi(x) + \mathrm{D}\varphi(x)\mathrm{D}^{n-1}\psi(x) + \ldots,$$

lorsqu'on remplace le symbole $\frac{d^n}{1.2.3\ldots n\,dx^n}$ par D^n.

Ce rapprochement est d'ailleurs plus complet encore, car la formule (3) avec cette notation n'est pas autre que la formule

$$\begin{aligned}
&\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \\
&\quad = \varphi(a + a_1 x + \ldots) + x\mathrm{D}\varphi(a + a_1 x + \ldots) + x^2\mathrm{D}^2\varphi(a + a_1 x + \ldots) + \ldots
\end{aligned}$$

quand, dans les coefficients différentiels, on fait $x = 0$; ou, en d'autres termes, on a

$$D^n\varphi(a) = \frac{d^n}{1.2.3\ldots n\,dx^n}\varphi(a + a_1x + a_2x^2 + \ldots),$$

en faisant $x = 0$ dans le second membre.

Lacroix a dit dans la préface de son grand Ouvrage : « Le calcul d'Arbogast a peut-être été jugé trop défavorablement. » Je désire que les quelques problèmes que je viens de résoudre fassent partager cette opinion au lecteur.

Les solutions des problèmes indiqués sous les nos **2**, **5**, **6**, **7**, **8** me paraissent nouvelles; les autres se trouvent plus ou moins dans Lacroix