

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE WEST

Exposé des méthodes générales en Mathématiques ; résolution et intégration des équations, applications diverses, d'après Hoené Wronski

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 7 (1881), p. 5-32.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__5_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>



JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

*Exposé des méthodes générales en Mathématiques ; résolution
et intégration des équations, applications diverses, d'après
Hoené Wronski;*

PAR M. ÉMILE WEST.

INTRODUCTION.

Énumération des diverses méthodes. — Dans ces dernières années, les travaux mathématiques de Hoené Wronski ont été cités plusieurs fois sans que personne se soit arrêté aux méthodes générales proposées par

(¹) Wronski (Hoené), né à Posen en 1778, est mort à Neuilly le 9 août 1853. A l'âge de seize ans, il était officier d'artillerie sous les ordres de Kosciusko. Fait prisonnier par les Russes à la bataille de Maciéiowicz, le 10 octobre 1794, il accepta dans leur armée le grade de lieutenant-colonel, dont il se démit en 1797, pour s'adonner exclusivement à l'étude de la Philosophie et des Sciences mathématiques, d'abord pendant deux années en Allemagne, puis en France jusqu'à la fin de ses jours.

(Note de la Rédaction.)

ce géomètre. Elles nous ont cependant paru éminemment pratiques et très simples dans leurs principes chaque fois que nous avons eu occasion de les examiner ou d'en faire des applications.

Les Ouvrages de Wronski sont très rares et la lecture en est difficile au premier abord ; aussi nous espérons que l'on nous saura gré de présenter les méthodes dont nous parlons avec les notations ordinairement usitées et accompagnées d'exemples suffisants pour les rendre facilement intelligibles. Nous nous adressons surtout aux personnes qui font un fréquent usage des Mathématiques et que leurs travaux conduisent à des calculs élevés.

Il nous semble utile de signaler d'abord les différentes méthodes de Wronski ⁽¹⁾.

Nous désignons par le mot *méthode* l'application systématique d'une loi fondamentale déterminée.

En premier lieu, nous citerons pour mémoire une méthode générale concernant la théorie des nombres. Le principe fondamental a été démontré par M. Hanegraeff, *Note sur l'équation de congruence*

$$x^n \equiv r \pmod{p} \quad (2),$$

et par A. Bukaty, *Déduction et démonstration de trois lois primordiales de la congruence des nombres* ⁽³⁾.

Cette méthode a été développée au commencement du Tome I de la *Réforme du savoir humain* (1847).

Les autres méthodes ont exclusivement rapport à l'expression des fonctions proprement dites. Ce sont : la *méthode secondaire*, méthode pratique et universelle (c'est-à-dire *technique*, pour employer le langage de Wronski) ; elle permet de résoudre toute espèce d'équations et d'intégrer les équations aux différences ou aux différentielles totales ou partielles. Le nom de *méthode secondaire* indique que cette méthode doit prêter son concours à une seconde, dite *méthode suprême*. Celle-ci est fondamentale ; elle est à la fois théorique et technique.

(1) Aucune de ces méthodes n'a rapport à la Géométrie.

(2) Gauthier-Villars, 1860.

(3) Amiot, 1873.

D'après Wronski, on peut en déduire toutes les lois des Mathématiques.

Ces deux méthodes se subdivisent en *méthodes élémentaires* et *méthodes systématiques*, suivant que l'on ne distingue spécialement aucune des diverses parties qui composent les équations ou que l'on distingue systématiquement ces parties.

Il existe encore deux méthodes générales : l'une est basée sur l'*interpolation* ; elle a pour but de résoudre ou d'intégrer une équation d'un genre quelconque quand les dérivées ou les différences successives des fonctions proposées sont trop pénibles à calculer. On remplace ces éléments des fonctions par un nombre suffisant de valeurs des fonctions proposées correspondant à des valeurs déterminées des variables indépendantes.

L'autre, la *méthode d'exhaustion*, est, comme son nom l'indique, une méthode générale d'approximation. Son caractère consiste en ce que les accroissements successifs des différents termes qui déterminent la fonction problématique ne sont liés par aucune loi, et qu'ils doivent être calculés directement et non par des tâtonnements. Cette méthode peut s'appliquer encore à tous les problèmes, et l'on n'a besoin que de connaître les différentielles de la fonction proposée ; c'est surtout dans l'évaluation des intégrales qu'elle peut être employée avec succès.

Avant d'entreprendre l'examen des différentes méthodes, ou tout au moins des premières, nous devrions commencer par démontrer les deux lois fondamentales desquelles dérivent la méthode suprême et la méthode secondaire ; mais, pour ne pas entrer dans des considérations préliminaires qui nous entraîneraient trop loin, nous commencerons par la méthode secondaire élémentaire. Nous aurons ainsi l'avantage de donner une première idée de la méthode secondaire et de faciliter ensuite l'exposition de la méthode systématique.

Nous devons prévenir que cette méthode élémentaire, quoique permettant de résoudre ou d'intégrer tout genre d'équations, entraîne généralement à des complications que ne donne pas la méthode systématique ; parfois même elle peut devenir insuffisante, comme nous aurons occasion de le voir. Cependant la méthode élémentaire doit être préférée dans certains cas, ce qui arrive particulièrement quand il faut déterminer principalement les valeurs numériques de certaines quantités.

Fonctions employées et notations. — Wronski a fait, dès le commencement du siècle, un usage très étendu des déterminants, qu'il désignait sous le nom de *sommes combinatoires* ou de *fonctions schin* (voir la *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, 1812; *Philosophie de la Technie*, 1815, etc.).

Nous emploierons indifféremment les notations usitées

$$(\alpha) \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

ou

$$\odot (a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \cdot \dots \cdot a_n^n).$$

La seconde notation est celle dont Wronski faisait usage, avec cette différence que la caractéristique $\odot$ du déterminant était remplacée par la lettre hébraïque schin, caractéristique de la somme combinatoire. Ces fonctions ne sont d'ailleurs que des expressions tabulaires de termes distincts et achevés, car elles n'indiquent pas certaines opérations particulières; elles ne sont pas l'expression de quelques fonctions indépendantes, telles que les logarithmes ou les sinus.

Indépendamment de ces sommes combinatoires, Wronski considérait d'autres sommes de même espèce, qu'il désignait sous le nom d'*agrégats*; nous en ferons également usage. On trouvera dans la *Philosophie de la Technie*, vers la formule (451), la relation qui existe entre les agrégats et les fonctions schin.

Les agrégats sont formés de termes de même signe qui dérivent les uns des autres d'après une loi déterminée, et cette loi porte ordinairement sur certains indices des éléments de ces sommes. On dénote ces fonctions par le terme général placé entre accolades et précédé de la caractéristique Agr, et par la loi des indices. Ainsi la fonction symétrique

$$(\beta) \quad a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_1 a_2^2 + a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1 + a_1 a_2 a_3$$

peut être représentée par l'agréat suivant

$$(\gamma) \quad \text{Agr} \{ a_1^{p_1} . a_2^{p_2} . a_3^{p_3} \}.$$

Les indices p_1, p_2, p_3 doivent être donnés par la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation indéterminée

$$(\gamma)' \quad p_1 + p_2 + p_3 = 3.$$

Wronski faisait encore un fréquent usage de certaines fonctions symétriques qu'il nommait *fonctions aleph*. Bien que ces fonctions puissent être exprimées par des fonctions symétriques plus simples, il convient de leur donner une notation spéciale, car elles entrent directement dans beaucoup d'expressions. On peut définir les fonctions aleph en disant qu'elles proviennent du développement de la puissance μ d'un polynôme de m termes ou éléments, dans lequel on remplacerait par l'unité les divers coefficients. Wronski les désigne par la lettre hébraïque aleph $\aleph$; il met entre crochets les éléments qui composent cette fonction et en exposant, avec parenthèses, le degré qui lui correspond.

Ainsi l'expression précédente (β) est une fonction aleph que l'on notera ainsi :

$$(\delta) \quad \aleph [a_1 . a_2 . a_3]^{(3)}.$$

Quand on considère plusieurs fonctions aleph formées des mêmes éléments, on peut ne pas écrire ces éléments et n'indiquer que l'exposant ; de cette façon, la fonction précédente s'écrira

$$(\delta)' \quad \aleph (3).$$

Ces fonctions se présentent souvent ; on les a autrefois rencontrées dans les séries récurrentes.

Les fonctions aleph jouissent de propriétés que nous ferons connaître dans la suite ; nous indiquerons seulement ici leur propriété fondamentale, qui est la suivante :

$$(\varepsilon) \quad \aleph [N_\omega - n_p]^{(m)} - \aleph [N_\omega - n_q]^{(m)} = (n_q - n_p) \aleph [N_\omega]^{(m-1)}.$$

N_ω représente un nombre quelconque ω d'éléments dont n_p et n_q font partie, et $[N_\omega - n_p]$ représente tous ces éléments, sauf n_p ; de même $[N_\omega - n_q]$ les représente tous, sauf n_q (voir *Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, 1811).

De l'expression précédente on déduit celle-ci :

$$(\zeta) \quad \left\{ \begin{aligned} N(m) &= \Sigma_1(\mu) N(m-1) - \Sigma_2(\mu) N(m-2) + \dots \\ &+ (-1)^{\mu-1} \Sigma_\mu(\mu) N(m-\mu). \end{aligned} \right.$$

m est le degré de la fonction considérée, et μ le nombre des éléments qui entrent dans toutes ces fonctions aleph; $\Sigma_p(\mu)$ représente de plus la somme de tous les produits différents des μ éléments p à p . Le nombre m doit être ici plus grand que μ , ou tout au moins égal; autrement la fonction aleph qui aurait un exposant négatif devrait être considérée comme nulle, ainsi que nous allons le voir.

Si les éléments sont les racines de l'équation

$$(\eta) \quad A_\mu x^\mu + A_{\mu-1} x^{\mu-1} + A_{\mu-2} x^{\mu-2} + \dots + A_1 x + A_0 = 0,$$

l'expression précédente s'écrit

$$(\theta) A_\mu N(m) + A_{\mu-1} N(m-1) + A_{\mu-2} N(m-2) + \dots + A_0 N(m-\mu) = 0.$$

Supposons $A_\mu = 0$, nous aurons pour les premières valeurs des fonctions aleph

$$(\theta') \quad \left\{ \begin{aligned} N(0) &= 1, \\ -N(1) &= A_{\mu-1}, \\ -N(2) &= A_{\mu-1} N(1) + A_{\mu-2}, \\ -N(3) &= A_{\mu-1} N(2) + A_{\mu-2} N(1) + A_{\mu-3}, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Nous démontrerons le théorème suivant :

$$(\iota) \quad N(m) = \frac{\mathfrak{D}(n_1^0 n_2^1 n_3^2 \dots n_{\mu-1}^{\mu-2} n_\mu^{m+\mu-1})}{\mathfrak{D}(n_1^0 n_2^1 n_3^2 \dots n_{\mu-1}^{\mu-2} n_\mu^{\mu-1})}$$

On voit immédiatement que, pour $m = 0$, la fonction se réduit à

l'unité; si m a une valeur négative comprise entre -1 et $-(\mu-1)$, la fonction est nulle; au delà les valeurs négatives de m n'annulent généralement pas la fonction. Ainsi nous dirons que les fonctions aleph *négatives* sont nulles pour un exposant pris entre -1 et $-(\mu-1)$, en y comprenant ces limites.

M. Hanegraeff (*Méthode pour la résolution générale des équations par leur décomposition en facteurs*, Bruxelles, 1854) a indiqué la propriété suivante.

Soit l'équation

$$(\mathbf{x}) \quad \mathbf{F}(x) = x^\mu - A_1 x^{\mu-1} + A_2 x^{\mu-2} - \dots \mp A_{\mu-1} x \pm 1 = 0.$$

L'équation dont les racines ont des valeurs inverses de celles de la précédente est

$$(\mathbf{x})' \quad f(x) = x^\mu - A_{\mu-1} x^{\mu-1} + A_{\mu-2} x^{\mu-2} - \dots \mp A_1 x \pm 1 = 0.$$

Si l'on développe par la formule de Maclaurin l'inverse des premiers membres de ces équations, on aura

$$(\lambda) \quad \frac{1}{f(x)} = \mathbf{N}(0) + x\mathbf{N}(1) + x^2\mathbf{N}(2) + x^3\mathbf{N}(3) + \dots$$

et

$$(\lambda)' \quad \frac{1}{\mathbf{F}(x)} = \mathbf{N}'(0) + x\mathbf{N}'(1) + x^2\mathbf{N}'(2) + x^3\mathbf{N}'(3) + \dots;$$

l'accent placé sur les fonctions aleph de la seconde égalité indique que les éléments qui les composent sont différents de ceux qui composent les fonctions aleph de la première égalité.

Le théorème en question revient aux expressions des coefficients généraux :

$$(\mu) \quad \mathbf{N}(m) = \frac{1}{1.2.3\dots m} \left[\frac{d^m \frac{1}{f(x)}}{dx^m} \right]_{(x=0)},$$

$$(\mu)' \quad \mathbf{N}'(m) = \frac{1}{1.2.3\dots m} \left[\frac{d^m \frac{1}{\mathbf{F}(x)}}{dx^m} \right]_{(x=0)}.$$

Or $\aleph'(m)$ est une fonction aleph négative de $\aleph(m)$, ce qui donne la relation

$$(\nu) \quad \aleph'(\mu) = \aleph[-(m + \mu)];$$

pour la première valeur, on a

$$(\nu)' \quad \aleph'(0) = \aleph(-\mu) = (-1)^{\mu-1}.$$

Il est encore une autre espèce de fonctions dont nous devons parler; elles sont connues sous le nom de *facultés*. Ces fonctions s'introduisent nécessairement dans les calculs, car elles interviennent quand on considère les différences des quantités variables, de la même manière que les puissances ou les exponentielles quand on considère les différentielles.

Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable x ; la faculté $\varphi(x)^{m|_{\xi}}$ n'est autre que le produit

$$(\xi) \quad \varphi(x)\varphi(x+\xi)\varphi(x+2\xi)\varphi(x+3\xi)\dots\varphi[x+(m-1)\xi].$$

m est l'exposant de la faculté et ξ l'accroissement de la variable; ces quantités m et ξ peuvent être constantes ou variables.

Les produits d'un nombre infini de facteurs ne doivent pas être confondus avec les facultés; ces dernières fonctions sont plus générales.

Vandermonde a le premier reconnu ces fonctions dans son *Mémoire sur les irrationnelles de différents ordres* (*Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1772, I^{re} Partie, p. 489). Plus tard, Kramp, dans son *Analyse des réfractions astronomiques*, a fait une étude complète des facultés particulières nommées *factorielles*. Enfin Wronski a complété l'étude des facultés et a montré qu'elles pouvaient servir à représenter toute espèce de fonctions.

Les facultés, malgré leur importance, paraissent tombées dans l'oubli, quoique plusieurs géomètres aient reconnu leur utilité. Nous citerons à ce sujet un passage d'une Lettre d'Abel à Holmboe, qui fait connaître l'opinion de ces mathématiciens :

« *Theorie der analytischen Facultäten* (cet Ouvrage se trouve à la bibliothèque de Christiania; si tu ne l'as pas lu, il faut absolument que tu le

fasses ; c'est un Ouvrage supérieur à différents égards et surtout par rapport à la méthode....) ». (Lettre du 24 octobre 1826 ; *Œuvres complètes de N.-H. Abel*, t. II, p. 270.)

Il conviendra, pour les factorielles que l'on rencontre constamment, d'adopter la notation des facultés ; la notation usitée aujourd'hui est d'ailleurs insuffisante. Le produit des m premiers nombres pourra donc s'écrire de la manière suivante :

$$(\xi)' \quad 1.2.3\dots m = 1^{m|1}.$$

L'avantage de cette notation s'appréciera facilement. Par exemple, si l'on avait à exprimer la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un polynôme de n termes, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, on aurait, en faisant usage des agrégats,

$$(\sigma)' \quad (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^m = 1^{m|1} \cdot \text{Agr} \left\{ \frac{a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} \dots a_n^{p_n}}{1^{p_1|1} 1^{p_2|1} 1^{p_3|1} \dots 1^{p_n|1}} \right\},$$

avec la condition

$$(\sigma)' \quad m = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n,$$

équation indéterminée qui doit être résolue en nombres entiers et positifs par rapport aux quantités $p_1, p_2, p_3, \dots$, m étant supposé un nombre entier.

En prenant encore un exemple, on aurait, pour le développement de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$(\varpi) \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \dots,$$

le terme général étant

$$(\varpi)' \quad (-1)^{n-1} \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} x^{2n}.$$

Nous reviendrons plus loin sur l'usage que l'on peut faire des facultés et sur leurs propriétés.

Nous ne faisons également que mentionner les sinus d'ordres supé-

rieurs, dont nous verrons l'utilité dans la méthode secondaire. Pour les principales propriétés des sinus et leur introduction dans les calculs, nous renvoyons aux deux Mémoires de M. Yvon Villarceau insérés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (t. LXXXVI, séances des 13, 20 et 27 mai 1878, et t. XC, séances des 29 mars et 5 avril 1880).

Nous devons dire encore que nous noterons les dérivées partielles, comme on le fait souvent, en mettant entre parenthèses la dérivée que l'on considère. Par exemple, si $\varphi(y)$ représente une fonction de y et d'autres quantités, toutes fonctions de x ainsi que de y , nous écrirons la dérivée de la fonction proposée par rapport à y

$$(\rho) \qquad \frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Mais, si l'on prenait la dérivée de $\varphi(y)$ par rapport à x , sur la variable y seulement, nous écririons

$$(\rho)' \qquad \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right) \frac{dx}{dy}.$$

Autant que possible, nous citerons les passages des Ouvrages de Wronski se rapportant aux sujets que nous traiterons ; autrement, nous donnerons les indications nécessaires pour que l'on puisse recourir à ces Ouvrages.

PREMIÈRE MÉTHODE.

MÉTHODE SECONDAIRE ÉLÉMENTAIRE.

Conditions générales de la méthode.

Expression fondamentale. — En nous plaçant à un point de vue particulier, nous dirons que le principe de cette méthode consiste dans l'usage général d'une formule dont celle de Taylor n'est qu'un cas particulier.

Euler en a donné une qui remplit cette condition pour la méthode élémentaire.

Soit

$$(1) \quad \varphi(y) = 0$$

l'équation proposée qu'il s'agit de résoudre; y est l'inconnue, celle-ci pouvant être fonction d'une variable indépendante x (nous ne considérerons d'abord que les fonctions d'une seule variable indépendante). Soit de plus une quantité *quelconque* ω ; l'équation proposée est toujours satisfaite par une valeur de y donnée par l'expression

$$(2) \quad y = \omega - \varphi(\omega) \frac{d\varphi}{d\varphi(\omega)} - [\varphi(\omega)]^2 \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi(\omega)}{[d\varphi(\omega)]^2} - \dots,$$

le terme général étant

$$(2)' \quad - [\varphi(\omega)]^\mu \frac{\mathcal{O} \{ d^2\varphi(\omega) d^3[\varphi(\omega)]^1 d^4[\varphi(\omega)]^2 \dots d^\mu[\varphi(\omega)]^{\mu-1} \} d\varphi(\omega)}{1^{1!} 1^{2!} 1^{3!} \dots 1^{\mu!} [d\varphi(\omega)]^{1+2+3+\dots+\mu}}.$$

Or, comme nous l'avons dit, puisque nous ne distinguons pas dans cette méthode élémentaire les diverses parties qui composent l'équation proposée, la forme de la fonction $\varphi(y)$ suffira pour désigner généralement le premier membre d'une équation d'un genre quelconque, algébrique ou transcendante, primitive ou différentielle.

Si, au lieu de l'inconnue y , nous voulons obtenir une fonction déterminée $F(y)$ de cette inconnue, nous substituerons à la formule d'Euler la formule suivante :

$$(3) \quad F(x) = F(\omega) - \varphi(\omega) \frac{dF(\omega)}{d\varphi(\omega)} + [\varphi(\omega)]^2 \frac{\mathcal{O} [d\varphi(\omega) d^2F(\omega)]}{1^{1!} 1^{2!} [d\varphi(\omega)]^2} - \dots,$$

le terme général étant

$$(3)' \quad (-1)^\mu \frac{\mathcal{O} \{ d\varphi(\omega) d^2[\varphi(\omega)]^2 d^3[\varphi(\omega)]^3 \dots d^{\mu-1}[\varphi(\omega)]^{\mu-1} d^\mu F(\omega) \}}{1^{1!} 1^{2!} 1^{3!} \dots 1^{\mu!} [d\varphi(\omega)]^{1+2+\dots+\mu}}.$$

Démonstration. — Il existe plusieurs démonstrations des expressions (2) et (3); nous n'avons pas à les exposer; nous indiquerons seulement ici, afin de ne pas nous répéter, la démonstration de Wronski (*Philosophie de la Technie*, 1^{re} Section), parce qu'elle contient le prin-

cipe de toutes les autres et qu'elle fait connaître en même temps la signification de la quantité ω .

Soit $F(y)$ une fonction donnée de la quantité y ; considérons son développement par rapport aux puissances d'une autre fonction $\varphi(y)$ également donnée; nous aurons la série

$$(4) \quad F(y) = A_0 + A_1 [\varphi(y)] + A_2 [\varphi(y)]^2 + A_3 [\varphi(y)]^3 + \dots$$

Les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots$ sont supposés indépendants de y et sont donnés par l'expression suivante, déterminée par une valeur particulière ω , mais quelconque, de y :

$$(4)' \quad A_\mu = \Xi_\mu - \frac{\mu+1}{1} \Xi_{\mu+1} \varphi(\omega) + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1 \cdot 2} \Xi_{\mu+2} [\varphi(\omega)]^2 - \dots,$$

en faisant, pour un indice quelconque ν ,

$$(4)'' \quad \Xi_\nu = \frac{\mathfrak{D} \{ d^1 \varphi(\omega) d^2 [\varphi(\omega)]^2 \dots d^{\nu-1} [\varphi(\omega)]^{\nu-1} d^\nu F(\omega) \}}{1!1! 1^2!1! \dots 1^\nu!1! [d\varphi(\omega)]^{1+2+\dots+\nu}}.$$

Nous aurons occasion de démontrer ces formules plus loin; c'est pourquoi nous ne nous y arrêtons pas.

Ainsi, quelle que soit la valeur de ω , le développement (4) subsiste toujours; par suite, les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots$ doivent rester les mêmes. Si donc ω prend une valeur particulière u telle que l'on ait

$$(5) \quad \varphi(u) = 0,$$

on aura aussi

$$A_\mu = \Xi'_\mu,$$

en désignant par un accent la valeur particulière que prend Ξ_μ pour $\omega = u$.

Faisons $\mu = 0$,

$$(5)' \quad A_0 = \Xi'_0 = F(u);$$

d'après (5) et d'après (4') on aura également

$$(6) \quad A_0 = \Xi_0 - \Xi_1 \varphi(\omega) + \Xi_2 [\varphi(\omega)]^2 - \Xi_3 [\varphi(\omega)]^3 + \dots$$

Or, si φ est la fonction qui forme le premier membre de l'équation (1), u sera précisément l'inconnue y , et nous aurons

$$(6)' \quad F(y) = \Xi_0 - \Xi_1 \varphi(\omega) + \Xi_2 [\varphi(\omega)]^2 - \Xi_3 [\varphi(\omega)]^3 + \dots;$$

les coefficients $\Xi_0, \Xi_1, \Xi_2, \dots$ sont identiques aux coefficients de l'expression (3).

On conçoit maintenant comment, en principe, l'expression (3), pour toute valeur de ω , donne une solution de l'équation (1) d'un genre quelconque. Cependant cette expression (3) peut être convergente ou divergente, ce qui fait que l'on ne doit pas prendre ω d'une manière tout à fait arbitraire; cette quantité doit, au contraire, être choisie la plus rapprochée possible de la quantité cherchée y , puisqu'il semble évident que l'expression (3) doit être d'autant plus convergente que la quantité ω est plus près de zéro.

Remarque sur les quantités idéales et absurdes. — Avant d'étudier les conditions de convergence de l'expression (3), nous ferons une observation relative aux quantités qui indiquent des cas d'impossibilité.

Wronski distingue deux espèces de quantités *idéales*, les quantités infinies et les quantités imaginaires (¹). Les premières impliquent expressément l'idée de l'infini dans la considération de la *quantité* même; les quantités imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$ impliquent l'idée de l'infini dans la considération de la *qualité* même de la quantité, qualité qui constitue l'état positif ou négatif. Ces quantités sont possibles idéalement et non réellement.

De plus, il existe des quantités *absurdes* qui ne sont possibles ni réellement ni idéalement. Ainsi l'expression (4) sera impossible dans deux cas : 1^o lorsque les coefficients donnés par (4)' seront des quantités idéales, c'est-à-dire imaginaires ou infinies; 2^o lorsque les expressions (4)', (4)'' conduiront à de véritables absurdités.

(¹) Pour plus de détails sur ce sujet, nous sommes obligé de renvoyer à l'*Introduction à la Philosophie des Mathématiques et à la Philosophie de la Technie*.

Dans le premier cas, le développement ne peut être exprimé que par des quantités infinies, et l'impossibilité n'existe que par rapport à des quantités réelles; ce développement n'est en défaut que si l'on envisage spécialement les quantités réelles.

Dans le deuxième cas, l'impossibilité est absolue. Si l'on trouve, par exemple, pour les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots$, des quantités différentes à mesure que l'on change la valeur arbitraire ω attribuée à y , le développement est *absurde*. Pour fixer les idées, si l'on avait pour la fonction $\varphi(y)$ la valeur

$$(7) \quad \varphi(y) = M_0 + M_1 y + M_2 y^2 + \dots + M_n y^n,$$

$M_0, M_1, M_2, \dots$ étant des constantes, on obtiendrait n valeurs différentes pour chaque coefficient A de (4). Si l'on prend pour ω une valeur qui annule le polynôme (7), on a

$$(7)' \quad A_\mu = \frac{\mathfrak{D}\{d\varphi(\omega) d^2[\varphi(\omega)]^2 \dots d^\mu F(\omega)\}}{1^{111} 1^{211} \dots 1^{\mu 11} [d\varphi(\omega)]^{1+2+\dots+\mu}},$$

et, comme il y a n valeurs de ω qui annulent le polynôme, on aurait n valeurs analogues $A_\mu, A'_\mu, A''_\mu, \dots$, lesquelles, en vertu de l'identité nécessaire de chacun de ces coefficients avec le premier, donneraient

$$(7)'' \quad A_\mu = A'_\mu = A''_\mu = \dots,$$

ce qui est absurde.

Nous ne parlons pas de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, parce qu'elle est seulement indéterminée et non impossible.

De ce qui précède il résulte que dans tous les cas il suffit de s'en tenir aux expressions (4)', (4)'' des coefficients, sans faire attention aux conditions fondamentales du développement (4), car, lorsqu'un tel développement sera impossible d'une façon relative ou absolue, l'expression en question le fera toujours connaître en donnant pour les coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots$ des quantités idéales ou absurdes.

Fonctions arbitraires. — C'est dans le sens que nous venons d'indiquer que l'on peut dire que la fonction $F(\gamma)$ est développée en série suivant les puissances d'une fonction *arbitraire* $\varphi(\gamma)$. Wronski entend toujours par fonction arbitraire une fonction quelconque généralement, tout en écartant celles qui donneraient lieu à des impossibilités.

Dans le cas présent où la série (4) est destinée à conduire à une valeur déterminée γ ou $F(\gamma)$ satisfaisant à l'équation (1), on peut appliquer ce développement en toute sécurité pour une fonction $\varphi(\gamma)$ quelconque, puisque, pour arriver au résultat, autrement dit aux expressions (2) ou (3), la transformation n'a précisément lieu qu'en vue de la valeur déterminée γ .

Il en serait de même dans le cas d'une fonction de plusieurs variables, car, bien que l'on ait ainsi un ordre plus ou moins élevé d'indétermination, la quantité γ n'en serait pas moins déterminée par les conditions du problème, lesquelles doivent seules être prises ici en considération.

C'est à la circonstance que nous signalons qu'est due la possibilité d'exprimer toutes les solutions de l'équation $\varphi(\gamma) = 0$, au moyen des expressions (2) ou (3).

Principe de convergence de l'expression fondamentale. — En conséquence, pour obtenir une solution déterminée quand l'équation proposée en admet plusieurs, il faut disposer convenablement de la quantité ω , en tenant compte de sa nature, qui est essentiellement la même que celle de la quantité γ : tel est le point important de la méthode. Il sera facile de voir que cette quantité ω doit se rapprocher autant que possible de la solution cherchée en examinant les conditions générales de convergence de l'expression (3).

Pour cela, en reprenant la déduction que nous avons donnée de cette expression, concevons deux quantités ν et ω telles que $\varphi(\nu)$ et $\varphi(\omega)$ soient différents de zéro; nous aurons, en vertu de l'identité des coefficients de la série (4) portant mêmes indices, et en faisant $\mu = 0$,

$$(8) \quad \begin{cases} A_0 = \Xi_0 - \Xi_1 \varphi(\omega) + \Xi_2 [\varphi(\omega)]^2 - \dots \\ \quad = \Xi'_0 - \Xi'_1 \varphi(\nu) + \Xi'_2 [\varphi(\nu)]^2 - \dots, \end{cases}$$

$\Xi'_0, \Xi'_1, \Xi'_2, \dots$ étant ce que deviennent les coefficients $\Xi_0, \Xi_1, \Xi_2, \dots$ quand on substitue ν à ω . Si la quantité ω se rapproche de ν , les coefficients $\Xi_0, \Xi_1, \Xi_2, \dots$ tendront respectivement vers les valeurs des coefficients $\Xi'_0, \Xi'_1, \Xi'_2, \dots$, et $\varphi(\omega)$ tendra vers $\varphi(\nu)$, de sorte qu'à la limite l'égalité (8) aura lieu terme à terme.

Admettons maintenant que nous prenions pour ν la quantité u définie par (5), c'est-à-dire $\varphi(u) = 0$; ce que nous venons de dire subsiste encore : le coefficient Ξ'_μ prend la valeur déterminée

$$(9) \Xi_\mu = \frac{\begin{vmatrix} d\varphi(u) & 0 & 0 & \dots & dF(u) \\ d^2\varphi(u) & d^2[\varphi(u)]^2 & 0 & \dots & d^2F(u) \\ d^3\varphi(u) & d^3[\varphi(u)]^2 & d^3[\varphi(u)]^3 & \dots & d^3F(u) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & d^{\mu-1}F(u) \\ d^\mu\varphi(u) & d^\mu[\varphi(u)]^2 & d^\mu[\varphi(u)]^3 & \dots & d^\mu[\varphi(u)]^{\mu-1} & d^\mu F(u) \end{vmatrix}}{1^{1|1} 1^{2|1} 1^{3|1} \dots 1^{\mu|1} [d\varphi(u)]^{1+2+3+\dots+\mu}},$$

la dérivée $\frac{d\varphi(u)}{du}$ étant généralement différente de zéro; le coefficient Ξ_μ tend vers Ξ'_μ , quand ω se rapproche de u , et $\varphi(\omega)$ tend vers zéro. Or le second membre de (8) se réduit à $F(u)$; cette égalité tendant à avoir lieu terme à terme, il en résulte que $F(\omega)$ tend vers $F(u)$ et que la somme des autres termes du premier membre tend vers zéro; par suite, la série est convergente.

Ainsi la condition principale de convergence de l'expression (3) est que la quantité ω se rapproche suffisamment de u , autrement dit de la quantité γ donnée par l'équation (1), $\varphi(\gamma) = 0$. Quand cette condition sera remplie convenablement, la série sera convergente même dans le cas de $\varphi(\omega) > 1$; dans ce cas, la convergence sera opérée par les coefficients de la série, et, si $\varphi(\omega) < 1$, la convergence sera opérée de plus par la fonction $\varphi(\omega)$ elle-même. Donc $\varphi(\omega) < 1$ sera un critérium de la convergence de la série, puisque les coefficients Ξ tendent, en général, vers des quantités finies et déterminées.

Ce que nous disons de l'expression (3) s'applique aussi à l'expression (2), qui n'en est qu'un cas particulier.

Maintenant, nous pouvons reconnaître que, pour obtenir une solution déterminée γ , de l'équation $\varphi(\gamma) = 0$, la quantité ω doit être

prise aussi rapprochée que possible de l'inconnue y_1 , car pour $\omega = y_1$, l'expression (2) ou (3) se réduit à une identité, et, à mesure que ω s'éloigne de cette valeur, la série devient moins convergente et peut devenir divergente. Pour la valeur particulière ω qui annule la dérivée $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$, valeur qui diffère généralement de y_1 , tous les termes à partir du second étant infinis, l'expression de l'inconnue est *idéale*. La quantité ω variant toujours dans le même sens et dépassant la valeur qui donne $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0$, la série redevient simplement divergente et peut même devenir de nouveau convergente, auquel cas une nouvelle valeur y_2 de l'inconnue se trouve déterminée.

On conçoit donc bien, dès maintenant, que les expressions fondamentales (2) et (3) de la méthode secondaire élémentaire soient susceptibles de donner toutes les solutions d'une équation $\varphi(y) = 0$ d'un genre quelconque ; pour cela il importe de faire un choix convenable de la quantité arbitraire ω .

Procédés secondaires pour obtenir la convergence. — D'après ce qui précède, la condition principale à remplir pour obtenir la convergence consiste dans le choix convenable de la quantité ω , mais cette condition n'est pas toujours facile à remplir, ni même possible ; il faut donc, pour obtenir la convergence, ce qui est de toute nécessité, recourir dans certains cas à des moyens secondaires. Ces moyens consistent : 1° dans la transformation des séries divergentes en séries convergentes ; 2° dans l'emploi de la méthode d'exhaustion, laquelle peut être fréquemment utilisée dans les calculs. On peut aussi faire un emploi simultané de ces deux moyens.

Génération neutre. — Pour la transformation des séries divergentes, le moyen le meilleur, au point de vue des calculs, consiste à transformer la série en fraction continue, puis à obtenir les réduites successives (voir la *Philosophie de la Technie*, II^e Section). On obtiendra de la sorte, avec un nombre suffisant de termes, la solution cherchée avec autant d'approximation que l'on voudra. En comparant l'expression (3) à la série (4), on obtiendrait les formules suivantes.

Faisons

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 &= F(\omega), \\ A_1 &= -\frac{dF(\omega)}{d\varphi(\omega)}, \\ A_2 &= \frac{D[d\varphi(\omega)d^2F(\omega)]}{1^{11}1^{21}1[d\varphi(\omega)]^3}, \\ A_3 &= -\frac{D[d\varphi(\omega)d^2[\varphi(\omega)]^2d^3F(\omega)]}{1^{11}1^{21}1^{31}1[d\varphi(\omega)]^6}, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned} \right.$$

nous aurons pour expressions donnant des valeurs de l'inconnue de plus en plus approchées,

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= F(\omega) + A_1\varphi(\omega), \\ y &= F(\omega) + \frac{A_1^2\varphi(\omega)}{A_1 - A_2\varphi(\omega)}, \\ y &= F(\omega) + \frac{A_1A_2\varphi(\omega) + (A_2^2 - A_1A_3)[\varphi(\omega)]^2}{A_1 - A_2\varphi(\omega)}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

Ces expressions sont celles que Wronski nomme les *progrès* de la *génération neutre* des quantités.

On obtiendrait des formules analogues, correspondant à l'expression (2), en faisant dans celles-ci $F(\omega) = \omega$.

Nous indiquerons plus loin en quoi consiste la méthode d'approximation dont nous avons parlé.

Par l'emploi des divers moyens que nous venons d'énumérer, nous arrivons à ce résultat remarquable que la méthode secondaire peut être appliquée dans tous les cas, puisque la convergence des expressions fondamentales est toujours assurée.

Sur la nature de la valeur fondamentale. — Comme nous l'avons vu, cette convergence dépend surtout du choix de la quantité ω . Il faut alors considérer deux cas : 1° celui où ω est une quantité purement numérique ; 2° celui où ω est une véritable fonction.

Quand ω est une quantité numérique et quand l'équation (1 ,

$\varphi(y) = 0$, est une équation primitive algébrique ou transcendante, le mode d'application des formules fondamentales (2) et (3) est bien connu; nous ne nous y arrêterons pas.

Si $\varphi(y) = 0$ est une équation différentielle, y est fonction au moins d'une variable indépendante x , et la quantité approchée w ne suffit plus pour déterminer y , car les différentielles de l'inconnue, qui ne sont plus nulles, entrent dans les expressions fondamentales. Il faut donc admettre que l'on connaisse des valeurs approchées de l'inconnue et de ses dérivées de différents ordres, correspondant à des valeurs données de la variable indépendante; de cette façon les expressions fondamentales s'appliquent comme dans le cas des équations primitives. Les équations différentielles comprenant des ordres différents d'indétermination par rapport à l'inconnue, la quantité w ne saurait être en général une quantité purement numérique. On doit donc considérer w comme une fonction; c'est en cela que consiste principalement la méthode secondaire.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS PRIMITIVES.

Considérons une équation primitive $\varphi(y) = 0$, algébrique ou transcendante; w , n'étant pas une quantité dépendant d'une autre variable x , ne peut être une fonction proprement dite; w n'est ici qu'une simple quantité algébrique ou transcendante, et les conditions qui la déterminent se réduisent en définitive à une équation.

Équation réduite. — Cette équation devra se rapprocher autant que possible de l'équation proposée et être nécessairement résoluble par des procédés connus; elle devra être de même nature que cette dernière et donner le même nombre de solutions. Si ces conditions sont convenablement remplies, cette nouvelle équation donnera une valeur w qui rendra la fonction $\varphi(w)$ aussi petite que possible, et par suite le développement aussi convergent qu'il se pourra.

Wronski nomme cette équation *équation réduite*. Il faut donc, pour obtenir cette équation, réduire l'équation proposée à ce qu'elle a d'essentiel, afin d'en tirer la valeur *fondamentale* w au moyen d'une solu-

tion finie. Pour cela introduisons dans le premier membre de l'équation $\varphi(y) = 0$ une quantité arbitraire ω , de telle façon que la nouvelle fonction $\varphi(y, \omega) = 0$, qui ne sera autre que la fonction proposée pour $\omega = 1$, puisse donner une équation résoluble par les procédés ordinaires pour $\omega = 0$; la quantité ω que l'on tirera de cette équation réduite, qui est alors $\varphi(\omega, 0) = 0$, sera celle que l'on devra porter ensuite dans l'expression (2) ou (3) pour obtenir la valeur de l'inconnue.

Cette quantité auxiliaire ω peut être introduite soit en coefficient, soit en exposant, et cela de bien des manières différentes. Cette quantité peut également être prise parmi les quantités qui existent déjà dans la fonction $\varphi(y)$, comme nous le verrons dans divers exemples.

D'après ce qui précède, la manière la plus convenable d'introduire la quantité auxiliaire ω doit conduire à des équations réduites, résolubles immédiatement, et dans tous les cas d'une manière théorique et finie, en ayant soin de s'écarter le moins possible de la nature générale de l'équation proposée. Nous pourrions donc choisir pour les équations algébriques, parmi les équations résolubles, les équations réciproques, ou plus généralement les équations binômes du même degré que celui de l'équation proposée. Pour les équations transcendantes, dont la forme est variable à l'infini, nous pourrions les ramener à la forme d'équations algébriques, résolubles comme il vient d'être dit.

Sur les solutions théoriques. — Il résulte de cette méthode que l'on distingue toujours deux parties dans la résolution d'une équation : l'une *finie*, ω ou $F(\omega)$, donnée par l'équation réduite, constituant la partie finie de la solution et la partie essentiellement théorique, et l'autre *indéfinie*, existant généralement, formée par l'ensemble des autres termes. Si $\varphi(y) = 0$ n'admet pas de solution finie, ce qui est le cas le plus fréquent, et si l'équation réduite est déterminée de telle façon que l'on ne puisse pas en trouver une autre plus rapprochée de l'équation proposée, la valeur fondamentale que l'on en déduira rendra la fonction $\varphi(\omega)$ aussi petite qu'il se pourra, et le développement atteindra le maximum de convergence. Par suite, la partie indéfinie de la solution sera réduite à la moindre importance, et celle-ci donnera, au contraire, à la partie finie, qui forme la partie théorique, la plus grande importance qu'elle puisse avoir. Dans ces conditions, il n'y aura plus rien

d'arbitraire dans la solution obtenue, et cette solution sera *théorique*.

Si au contraire on obtient un développement dont on pourrait encore augmenter la convergence, il y aurait dans la formation de l'équation réduite, et par suite dans la valeur fondamentale ω , quelque chose d'arbitraire ; la solution serait alors *technique*.

Tel est le sens que Wronski attribue à ces deux expressions de *solutions théoriques et techniques*. Il est évident que l'on peut obtenir une infinité de solutions techniques se rapprochant plus ou moins de la solution théorique ; on ne peut donc pas admettre *a priori* qu'une solution puisse être obtenue sous forme finie : il faut chercher dans quelles conditions la partie indéfinie de la solution peut se réduire à la moindre importance, et l'on verra, par suite, si elle peut s'annuler complètement. Ces conditions dépendent évidemment de la nature des fonctions que l'on admet à figurer dans la solution ; nous reviendrons sur ce sujet (1).

Méthode d'exhaustion. — Maintenant disons un mot de la méthode d'exhaustion dont nous avons parlé, méthode qui doit suppléer à l'insuffisance de la convergence de l'expression fondamentale, quand cela se présente. Nous admettons que nous ne puissions former convenablement une équation réduite $\varphi(\omega, 0) = 0$ de telle sorte que l'expression fondamentale (2) ou (3) soit divergente ou trop lentement convergente pour exprimer la solution de l'équation proposée $\varphi(y, 1) = 0$, ou, ce qui revient au même, $\varphi(\omega, \omega) = 0$, quand on donne à la quantité ω la valeur 1.

D'après ce que nous avons vu, nous aurons ordinairement, dans ce cas, $\varphi(\omega, 1) > 1$. Donnons à ω une valeur ω_0 comprise entre zéro et l'unité, telle que $\varphi(\omega_0, \omega_0) < 1$, ω_0 désignant maintenant la valeur fondamentale ; cette condition assurera la convergence du développement et donnera une solution ω_1 , qui, sans être la solution cherchée, s'en rapprochera davantage que la valeur ω_0 donnée par l'équation réduite. Prenons à son tour ω_1 comme valeur fondamentale, si $\varphi(\omega_1, 1) < 1$, on pourra obtenir avec une convergence suffisante la solution cherchée. Autrement nous prendrons une valeur ω_1 de la quantité auxiliaire ω ,

(1) La recherche de ces conditions fait l'objet de la méthode suprême.

comprise entre ω_0 et l'unité, de telle sorte que $\varphi(\omega_1, \omega_1) < 1$. La valeur ω_1 portée dans l'équation fondamentale donnera une seconde valeur ω_2 , laquelle, étant considérée à son tour comme valeur fondamentale, donnera la solution cherchée si $\varphi(\omega_2, 1) < 1$.

On pourra ainsi faire plusieurs substitutions des quantités $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$, données au moyen des quantités auxiliaires $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$; mais le nombre en sera toujours restreint, par la raison que les déterminations successives des quantités ω contenues entre zéro et l'unité ne sauraient être nombreuses (*voir*, pour la méthode secondaire élémentaire et pour la méthode d'exhaustion applicable dans ce cas, *la Réforme*, t. I, p. lxxviii à lxxxiv).

Premier exemple. — Pour éclaircir les développements que nous venons de donner sur la méthode secondaire, nous pouvons appliquer cette méthode à un exemple. Devant traiter spécialement des équations algébriques dans la méthode secondaire systématique, nous laisserons provisoirement ces équations. Pour l'instant, nous allons résoudre une équation transcendante dont Wronski a donné la solution (*voir la Réforme*, t. I, p. cccxxij et cccxxij).

Soit le système d'équations

$$(a) \quad \begin{cases} \sin \xi = \frac{r \mu \nu}{\theta e H g} \frac{\varphi \cos \alpha + \sin(\alpha - \omega)}{\cos \alpha}, \\ \tan \omega = \frac{\theta e}{r} \frac{1 - \cos \xi}{\xi}; \end{cases}$$

les quantités ξ et ω sont les inconnues, et les autres des constantes. Posons, pour abréger,

$$(a)' \quad n = \frac{\theta e}{r}, \quad m = \frac{\mu \nu}{H g}, \quad \text{et} \quad p = \frac{1 - \cos \xi}{\xi}.$$

D'après les conditions du problème, les constantes m et n sont sensiblement égales, la première à $\frac{1}{3}$ et la seconde à l'unité, ou du moins s'écartent peu de ces valeurs; quant aux angles α et φ , ce sont de très faibles quantités.

Nous pourrions écrire ainsi les équations proposées :

$$(\beta) \quad \begin{cases} \sin \xi = \frac{n}{n} \frac{\varphi \cos \alpha + \sin(\alpha - \omega)}{\cos \alpha}, \\ \operatorname{tang} \omega = np. \end{cases}$$

Or la première équation donne

$$\frac{n}{m} \sin \xi = \operatorname{tang} \alpha \cos \omega - \sin \omega + \varphi,$$

et, substituant ici la valeur de $\sin \omega$ tirée de la deuxième équation (β) , nous avons

$$1 = (1 + n^2 p^2) \cos^2 \omega.$$

Enfin, éliminant $\cos \omega$ entre les deux dernières équations, il vient

$$(\gamma) \quad \left(\frac{n}{m} \sin \xi - \varphi \right) \sqrt{1 + n^2 p^2} = \operatorname{tang} \alpha - np.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre; en effet, connaissant l'angle ξ , la deuxième équation (α) donnera l'inconnue ω .

Remarquons que la quantité $p = \frac{1 - \cos \xi}{\xi}$ est toujours plus petite que l'unité; de plus, n étant sensiblement égal à l'unité, la quantité $\sqrt{1 + n^2 p^2}$ différera généralement peu de l'unité; nous pouvons donc former l'équation réduite de la manière suivante :

$$(\delta) \quad \left(\frac{n}{m} \sin \xi - \varphi \right) (\sqrt{1 + n^2 p^2})^a = \operatorname{tang} \alpha - np,$$

Nous désignons ici par a la quantité auxiliaire que nous avons jusqu'ici exprimée par ω , pour ne pas la confondre avec l'angle ω qui est une des inconnues des équations (α) . L'équation (δ) pour $a = 1$ reproduit l'équation (γ) et pour $a = 0$ donne l'équation réduite

$$(\delta)' \quad \frac{n}{m} \sin \xi - \varphi = \operatorname{tang} \alpha - np.$$

Afin de distinguer la valeur fondamentale tirée de cette équation de la valeur ξ de l'inconnue, nous mettrons ψ à la place de ξ dans l'équation réduite, comme nous avons mis ϖ à la place de γ pour l'exposition de la méthode. Nous aurons ainsi pour équation réduite

$$(\varepsilon) \quad \frac{n}{m} \sin \psi - \varphi = \operatorname{tang} \alpha - nq,$$

en faisant

$$(\varepsilon)' \quad q = \frac{1 - \cos \psi}{\psi}.$$

La solution donnée par Wronski indique que l'équation réduite a été formée en introduisant d'une manière différente la quantité auxiliaire a ; l'équation (δ) devrait être alors

$$(\zeta) \left(\frac{n}{m} \sin \xi - \varphi \right) \left(\sqrt{1 + n^2 p^2} + \frac{\sqrt{1 + n^2 p^2 (a-1)^2}}{a-1} - \frac{1}{a-1} \right) = \operatorname{tang} \alpha - np.$$

Pour $a = 1$ on a aussi l'équation proposée (γ) , et pour $a = 0$ on a l'équation réduite $(\delta)'$.

Nous pouvons nous en tenir à l'équation (ε) , que nous allons d'abord résoudre.

Substituons aux quantités $\sin \psi$ et $\cos \psi$ les valeurs données par les égalités

$$\begin{aligned} \sin \psi &= 2 \sin \frac{1}{2} \psi \cos \frac{1}{2} \psi, \\ 1 - \cos \psi &= 2 \sin^2 \frac{1}{2} \psi. \end{aligned}$$

L'équation réduite devient

$$(\eta) \quad \sin \psi = \frac{m}{n} \frac{\varphi + \operatorname{tang} \alpha}{1 + \frac{m}{\psi} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \psi}.$$

Désignons par X le rapport suivant, très peu variable pour de faibles

valeurs de ψ :

$$(\theta) \quad X = \frac{1}{\psi} \tan \frac{1}{2} \psi.$$

L'équation (η) s'écrira

$$(\eta)' \quad \sin \psi = \frac{m}{n} \frac{\varphi + \tan \alpha}{1 + mX}.$$

L'angle cherché ξ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et, comme X est une quantité très peu variable, on pourra, pour avoir une première valeur suffisante de X , prendre pour ψ une valeur moyenne de 30° , ce qui donnera environ $X = \frac{4}{7}$. L'équation $(\eta)'$ donnera ainsi la valeur fondamentale ψ .

La quantité q donnée par $(\varepsilon)'$ peut s'écrire

$$(\varepsilon) \quad q = \frac{1 - \cos \psi}{\psi} = X \sin \psi,$$

et sa dérivée est

$$(\varepsilon)' \quad \frac{dq}{d\psi} = \frac{1}{\psi} \sin \psi (1 - X).$$

Enfin, si l'on change ψ en ξ , q en p et X en Y , l'équation proposée (γ) devient

$$(\kappa) \quad \left(\frac{n}{m} \sin \xi - \varphi \right) \sqrt{1 + n^2 Y^2 \sin^2 \xi} = \tan \alpha - n Y \sin \xi.$$

Telle est la forme la plus convenable pour appliquer la méthode secondaire.

La quantité inconnue est ξ , mais la quantité cherchée est $\sin \xi$; nous aurons donc recours à l'expression (3), que nous écrirons

$$(\lambda) \quad F(\gamma) = F(\omega) - \varphi(\omega) \frac{dF(\omega)}{d\omega} \frac{1}{\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}} + \dots$$

Puisque $F(\gamma)$ est ici $\sin \xi$, nous mettrons pour $F(\omega)$

$$(\mu) \quad \sin \psi \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n} \frac{\varphi + \tan \alpha}{1 + mX},$$

et pour $\frac{dF(\omega)}{d\omega}$

$$(\mu)' \quad \cos \psi;$$

$\varphi(\omega)$ est

$$(\nu) \quad \left(\frac{n}{m} \sin \psi - \varphi \right) \sqrt{1 + n^2 X^2 \sin^2 \psi} - \tan \alpha + nX \sin \psi,$$

et, puisque ψ satisfait à l'équation réduite (ε) , on peut écrire cette quantité

$$(\nu)' \quad (\tan \alpha - nX \sin \psi) (\sqrt{1 + n^2 X^2 \sin^2 \psi} - 1).$$

La dérivée de $\varphi(\omega)$ prise sur l'expression (ν) , en ayant égard à (ι) et $(\iota)'$, peut s'écrire

$$\frac{n}{m} \cos \psi \left[\sqrt{1 + n^2 X^2 \sin^2 \psi} + m \frac{\tan \psi}{\psi} (1 - X) \left(1 - \tan \alpha \frac{nX \sin \psi}{\sqrt{1 + n^2 X^2 \sin^2 \psi}} + \frac{n^2 X^2 \sin^2 \psi}{\sqrt{1 + n^2 X^2 \sin^2 \psi}} \right) \right],$$

En développant les radicaux $\sqrt{1 + n^2 q^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{1 + n^2 q^2}}$, et faisant

$$(\nu)'' \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} n^2 q^2 + \frac{1^{2|2}}{2^{3|2}} n^4 q^4 - \frac{1^{3|2}}{2^{5|2}} n^6 q^6 + \dots, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 q^2}} = 1 - \frac{1}{2} n^2 q^2 + \frac{1^{2|2}}{2^{3|2}} n^4 q^4 - \frac{1^{3|2}}{2^{5|2}} n^6 q^6 + \dots, \\ \Phi = \frac{\tan \alpha + n}{\sqrt{1 + n^2 q^2}}, \end{array} \right.$$

on a définitivement, pour $\varphi(w)$ et $\frac{d\varphi(w)}{dw}$,

$$(\xi) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\tan \alpha - nX \sin \psi) \Omega, \\ \frac{n}{m} \cos \psi \left[1 + m \frac{\tan \psi}{\psi} (1 - \Phi nq) + \Omega n^2 q^2 \right]. \end{array} \right.$$

Faisons dans (λ) les substitutions de $F(w)$, $\varphi(w)$ et de leurs dérivées, nous obtenons

$$(\circ) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \xi = \frac{n}{m} \frac{\varphi + \tan \alpha}{1 + mX} \\ - mn \tan \alpha \frac{\Omega (X \sin \psi)^2}{1 + \frac{m}{\psi} \tan \psi (1 - X)(1 - \Phi nq) + \Omega n^2 q^2} \\ + mn^2 \frac{\Omega (X \sin \psi)^3}{1 + \frac{m}{\psi} \tan \psi (1 - X)(1 - \Phi nq) + \Omega n^2 q^2} + \dots \end{array} \right.$$

Telle est la solution de l'équation proposée (γ) ou (x) . L'équation réduite différant très peu de l'équation proposée, cette expression est très convergente et les termes calculés sont suffisants.

Cette solution diffère de celle donnée par Wronski en ce que nous avons de plus les quantités Φnq et $\Omega n^2 q^2$. D'après les données de la question, ces quantités sont complètement négligeables; mais nous les avons trouvées parce que cette solution est obtenue par la méthode élémentaire, tandis que Wronski obtient la sienne par la méthode systématique. On peut voir par cet exemple l'avantage de cette dernière méthode sur celle que nous traitons, puisqu'elle élimine des fonctions qui sont négligeables par elles-mêmes.

Remarquons encore que la fonction Ω doit se réduire à la valeur $\frac{1}{2}$, puisque les quantités $n^2 q^2$, $n^4 q^4$, ... sont négligeables. Cette fonction Ω , donnée par la première équation $(\nu)''$, diffère un peu de celle que donne Wronski, savoir

$$\Omega = \frac{1}{2} - \frac{1.3}{2.4} n^2 q^2 + \frac{1.3^2}{2.3.2} n^4 q^4 - \dots$$

Cette différence tient encore à la méthode que nous avons employée, mais elle tient aussi à la forme que nous avons donnée à l'équation transformée (δ) ou (ζ), ainsi que nous le verrons plus loin en reprenant l'équation proposée à l'occasion de la méthode secondaire systématique.

