JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LÉAUTÉ

Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 185-200.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__185_0>

Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle;

PAR M. H. LÉAUTÉ.

La solution des problèmes ordinaires de Mathématiques consiste habituellement dans le calcul d'une inconnue au moyen de quantités données, et peut, en général, se ramener à la détermination d'une fonction assujettie à certaines conditions.

En Analyse, on regarde la question comme résolue lorsqu'on connaît complètement cette fonction, c'est-à-dire lorsqu'on est à même d'obtenir toutes les valeurs qu'elle peut prendre pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable.

Il n'en est pas ainsi en Mécanique appliquée. Les seules valeurs de la variable à considérer sont alors les valeurs réelles, et, dans la plupart des cas, il suffit de déterminer la fonction cherchée dans un certain intervalle que fixent les conditions mêmes du mécanisme étudié.

C'est là une propriété caractéristique des problèmes de Mécanique appliquée.

Mais, au point de vue pratique, il en est une autre non moins importante. La valeur numérique de la fonction inconnue est seule utile et l'on doit regarder comme équivalentes, dans les applications, toutes les solutions donnant le même degré d'approximation.

En d'autres termes, la forme analytique de la fonction cherchée est presque sans intérêt, et l'on doit se préoccuper surtout de l'approximation obtenue.

Les considérations suivantes justifient cette manière de voir.

Tout d'abord la solution rigoureuse de la question, si l'on pouvait l'avoir, ne saurait être réalisée en pratique avec une exactitude parfaite et ne vaudrait pas mieux, par suite, que toute solution approchée donnant précisément le degré d'approximation auquel l'état actuel de l'industrie permet d'atteindre.

En second lieu, les équations d'un problème quelconque de Mécanique appliquée sont toujours approximatives, car on est obligé de faire certaines hypothèses sur la constitution et la manière d'être des corps qui composent le mécanisme. La solution analytique de ces équations n'est donc pas, en fait, d'une exactitude absolue.

Enfin, la condition à laquelle est assujettie la solution trouvée d'être réalisée ensuite pratiquement exige que les résultats auxquels on arrive soient suffisamment simples. Cette condition seule serait de nature à faire abandonner la solution exacte du problème, si l'on pouvait l'obtenir, pour une solution approchée d'une application plus facile qui, en raison même de cette facilité d'exécution, se trouverait donner finalement une précision plus grande.

Si l'on considère, en outre, qu'en raison des difficultés de calcul il est souvent impossible d'arriver à la solution analytique rigoureuse, on comprendra l'intérêt que présente, en Mécanique appliquée, l'étude des solutions approchées, et de quelle utilité est leur emploi.

Mais cet emploi exige certaines précautions.

On sait, en effet, que les équations approchées ne peuvent pas, en général, être différentiées sans qu'il en résulte des erreurs dépassant les limites admissibles. On peut presque toujours, au contraire, les intégrer sans s'écarter de l'ordre d'approximation qu'elles comportent.

Il suit de là que les formules approchées dont on dispose en Mécanique appliquée sont surtout propres à fournir les valeurs moyennes [1] des quantités qui y figurent.

---

[1] Nous appelons *valeur moyenne* de $f(x)$ dans l'intervalle de a à b la quantité $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Il faut donc éviter les différentiations dans le calcul des inconnues du problème, et il y a toujours avantage à exprimer ces inconnues à l'aide des valeurs moyennes des quantités dont elles dépendent.

En particulier, dans le cas le plus simple où l'inconnue ne dépend que d'une seule variable, il y a intérêt à substituer au développement de Maclaurin, où entrent les valeurs de la fonction et de ses dérivées successives en un point déterminé, un autre développement procédant suivant les valeurs moyennes de la fonction et de ses dérivées dans l'intervalle que l'on considère.

C'est ce développement que nous allons indiquer, et les considérations qui précèdent montrent de quelles applications il est susceptible.

I. — *Détermination du polynôme en x de degré n tel que sa valeur moyenne et celles de ses n premières dérivées successives, dans un intervalle donné, soient égales à $n+1$ quantités données.*

Désignons par y le polynôme cherché, par $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ les valeurs fixées pour les valeurs moyennes, dans l'intervalle considéré, de ce polynôme et de ses n premières dérivées; par a et b les valeurs de la variable x, qui limitent cet intervalle, b étant la plus grande.

On doit avoir, par définition,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx = Y_0,\\ &\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{dy}{dx}\,dx = Y_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{d^ny}{dx^n}\,dx = Y_n;\end{aligned}\right.$$

mais, le polynôme y étant pris sous la forme

$$y = A_0\frac{x^n}{n!} + A_1\frac{x^{n-1}}{n-1!} + \cdots + A_n,$$

les équations de condition (1) deviennent

$$\begin{aligned}
&A_0 \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1!} + A_1 \frac{b^n - a^n}{n!} + \dots + A_n \frac{b-a}{1} = (b-a)Y_0,\\
&A_0 \frac{b^n - a^n}{n!} + A_1 \frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{n-1!} + \dots + A_{n-1} \frac{b-a}{1} = (b-a)Y_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&A_0 \frac{b-a}{1} = (b-a)Y_n,
\end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&A_0 = K_{1,1} Y_n,\\
&A_1 = K_{2,1} Y_n + K_{2,2} Y_{n-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&A_n = K_{n+1,1} Y_n + K_{n+1,2} Y_{n-1} + \dots + K_{n+1,n+1} Y_0,
\end{aligned}\right.$$

les quantités $K_{1,1}$, $K_{2,1}$ ..., $K_{n+1,n+1}$ étant des coefficients numériques.

Multiplions la première équation (2) par $\frac{x^n}{n!}$, la seconde par $\frac{x^{n-1}}{n-1!}$, ..., la dernière par l'unité, et ajoutons, nous aurons

$$\begin{aligned}
y = {} & K_{n+1,n+1} Y_0\\
& + \left(K_{n+1,n} + K_{n,n}\frac{x}{1}\right) Y_1 + \dots + \left(K_{n+1,1} + K_{n,1}\frac{x}{1} + \dots + K_{1,1}\frac{x^n}{n!}\right) Y_n
\end{aligned}$$

ou

$$y = P_0 Y_0 + P_1 Y_1 + \dots + P_n Y_n,$$

les quantités P_0, P_1, ..., P_n étant des polynômes en x de degré égal à leur indice, et que nous désignerons sous le nom de *polynômes auxiliaires*.

Il est clair, d'après le raisonnement même qui vient d'être fait, que les polynômes auxiliaires sont indépendants des valeurs de Y_0, Y_1, ..., Y_n que l'on s'est donné, et ne dépendent que des limites a et b considérées.

Le polynôme y cherché est ainsi déterminé par l'équation qui précède, et le problème posé se ramène à la recherche des polynômes P.

Nous allons chercher la loi de formation de ces polynômes.

II. — *Détermination des polynômes auxiliaires.*

Afin de simplifier les calculs, nous supposerons que les limites de l'intervalle dans lequel varie x sont $-h$ et $+h$, c'est-à-dire que nous changerons x en $x+\frac{a+b}{2}$, après avoir posé $b-a=2h$.

Les équations de condition (1) deviennent alors

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} y\,dx = Y_0, \\ \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} \frac{dy}{dx}\,dx = Y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} \frac{d^n y}{dx^n}\,dx = Y_n, \end{cases}$$

où il faut supposer

$$y = P_0 Y_0 + P_1 Y_1 + \ldots + P_n Y_n.$$

On en déduit, en tenant compte des degrés respectifs des polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dP_1}{dx}Y_1 + \frac{dP_2}{dx}Y_2 + \ldots + \frac{dP_n}{dx}Y_n, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \qquad\qquad \frac{d^2P_2}{dx^2}Y_2 + \ldots + \frac{d^2P_n}{dx^2}Y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{d^ny}{dx^n} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{d^nP_n}{dx^n}Y_n, \end{aligned}$$

et, par suite, les équations (3) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} Y_0\int_{-h}^{+h} P_0\,dx + Y_1\int_{-h}^{+h} P_1\,dx + Y_2\int_{-h}^{+h} P_2\,dx + \ldots + Y_n\int_{-h}^{+h} P_n\,dx &= 2hY_0, \\ Y_1\int_{-h}^{+h}\frac{dP_1}{dx}\,dx + Y_2\int_{-h}^{+h}\frac{dP_2}{dx}\,dx + \ldots + Y_n\int_{-h}^{+h}\frac{dP_n}{dx}\,dx &= 2hY_1, \\ Y_2\int_{-h}^{+h}\frac{d^2P_2}{dx^2}\,dx + \ldots + Y_n\int_{-h}^{+h}\frac{d^2P_n}{dx^2}\,dx &= 2hY_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&, \\ Y_n\int_{-h}^{+h}\frac{d^nP^n}{dx^n}\,dx &= 2hY_n. \end{aligned}$$

Ces relations doivent être satisfaites, quelles que soient les valeurs données pour $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$; elles entraînent, en conséquence, les équations suivantes :

$$
(4)\quad \left\{
\begin{array}{lllll}
\int_{-h}^{+h} P_0\,dx = 2h, & \int_{-h}^{+h} P_1\,dx = 0, & \int_{-h}^{+h} P_2\,dx = 0, & \ldots, & \int_{-h}^{+h} P_n\,dx = 0,\\
 & \int_{-h}^{+h} \frac{dP_1}{dx}\,dx = 2h, & \int_{-h}^{+h} \frac{dP_2}{dx}\,dx = 0, & \ldots, & \int_{-h}^{+h} \frac{dP_n}{dx}\,dx = 0,\\
 & & \int_{-h}^{+h} \frac{d^2P_2}{dx^2}\,dx = 2h, & \ldots, & \int_{-h}^{+h} \frac{d^2P_n}{dx^2}\,dx = 0,\\
 & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots,\\
 & & & & \int_{-h}^{+h} \frac{d^nP_n}{dx^n}\,dx = 2h.
\end{array}
\right.
$$

Ces équations suffisent pour déterminer les polynômes auxiliaires, car pour chacun d'eux on a un nombre d'équations égal à son degré augmenté d'une unité, c'est-à-dire égal au nombre de ses coefficients.

Elles montrent que chaque polynôme P est indépendant du degré n du polynôme y que l'on veut former, et ne dépend que de son degré à lui-même. Les polynômes auxiliaires forment donc une suite indéfinie parfaitement déterminée.

Ceci posé, remarquons que, si nous considérons les n équations

$$\int_{-h}^{+h} \frac{dP_n}{dx}\,dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{d^2P_n}{dx^2}\,dx = 0, \quad \ldots, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{d^nP_n}{dx^n}\,dx = 2h,$$

qui déterminent $\frac{dP_n}{dx}$, elles sont identiques aux n équations

$$\int_{-h}^{+h} P_{n-1}\,dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{dP_{n-1}}{dx}\,dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{d^{n-1}P_{n-1}}{dx^{n-1}}\,dx = 2h,$$

qui déterminent P_{n-1}; on a, par suite,

$$P_{n-1} = \frac{dP_n}{dx};$$

chaque polynôme P est donc la dérivée de celui qui le suit

C'est là une propriété fondamentale des polynômes auxiliaires, propriété qui les fait rentrer dans la classe des polynômes étudiés par M. Appell [1] et définis par la relation

$$\frac{dA_n}{dx} = nA_{n-1}.$$

Nous reviendrons plus loin sur ce point.

Pour le moment, nous chercherons à calculer les polynômes en question, et, dans ce but, nous les prendrons sous la forme

$$P_n = B_0 \frac{x^n}{n!} + B_1 h \frac{x^{n-1}}{n-1!} + \ldots + B_n h^n.$$

On voit tout d'abord que, par suite de la forme particulière choisie pour P_n, les coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_n$ forment une suite indépendante de l'indice du polynôme P que l'on considère, c'est-à-dire qu'ils sont les mêmes dans tous les polynômes P où ils entrent.

En effet, puisque P_{n-1} est égal à $\frac{dP_n}{dx}$, on a

$$P_{n-1} = B_0 \frac{x^{n-1}}{n-1!} + B_1 h \frac{x^{n-2}}{n-2!} + \ldots + B_{n-1} h_{n-1},$$

et les coefficients sont bien les mêmes que ceux de P_n.

Le problème revient donc à déterminer la suite des coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_n$.

III. — *Loi de formation des coefficients des polynômes auxiliaires. Fonction génératrice de ces coefficients.*

Les $n+1$ équations qui déterminent P_n sont, comme nous l'avons vu,

$$\int_{-h}^{+h} P_n\, dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{dP_n}{dx}\, dx = 0, \quad \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{-k}^{+h} \frac{d^{n-1}P_n}{dx^{n-1}}\, dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h} \frac{d^n P_n}{dx^n}\, dx = 2h;$$

(1) APPELL, *Sur une certaine classe de polynômes* (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. IX; 1880).

elles peuvent s'écrire, en raison de la forme choisie pour P_n,

$$h^{n+1}\left(\frac{B_0}{n+1\,!}+\frac{B_1}{n\,!}+\ldots+\frac{B_n}{1}\right)=(-h)^{n+1}\left(\frac{B_0}{n+1\,!}-\frac{B_1}{n\,!}+\ldots\pm\frac{B_n}{1}\right),$$
$$h^n\left(\frac{B_0}{n\,!}+\frac{B_1}{n-1\,!}+\ldots+\frac{B_{n-1}}{1}\right)=(-h)^n\left(\frac{B_0}{n\,!}-\frac{B_1}{n-1\,!}+\ldots\mp\frac{B_{n-1}}{1}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$h^2\left(\frac{B_0}{2\,!}+\frac{B_1}{1}\right)=(-h)^2\left(\frac{B_0}{2\,!}-\frac{B_1}{1}\right),$$
$$h\left(\frac{B_0}{1}\right)=(-h)\left(\frac{B_0}{1}\right)+2h.$$

On déduit de ces équations, en partant de la dernière et opérant de proche en proche,

$$B_0=1,\quad B_1=0,\quad \frac{B_0}{3\,!}+\frac{B_2}{1}=0,\quad \frac{B_1}{3\,!}+\frac{B_3}{1}=0,\quad \ldots,$$

et, en général, si p est pair,

$$(5)\qquad \frac{B_1}{p-1\,!}+\frac{B_2}{p-3\,!}+\ldots+\frac{B_{p-1}}{1}=0,$$

et si p est impair,

$$(6)\qquad \frac{B_0}{p\,!}+\frac{B_2}{p-2\,!}+\ldots+\frac{B_{p-1}}{1}=0.$$

Ces relations montrent que les coefficients B_0, B_1, ..., B_n sont indépendants des limites h et $-h$ considérées, et que ce sont, par suite, des nombres. De plus, B_1 étant nul, tous les coefficients d'indice impair le seront aussi, c'est-à-dire que, dans chaque polynôme P, les puissances successives de x iront en décroissant de deux unités.

Cherchons la fonction génératrice des coefficients B_0, B_2, ...; cette fonction est définie par l'équation

$$\varphi(x)=B_0+B_2x^2+\ldots+B_{2q}x^{2q}+\ldots;$$

multiplions respectivement les deux membres par les deux membres de l'identité

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2q+1}}{2q+1!} + \cdots,$$

nous aurons

$$\varphi(x)\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \begin{array}{l|l|l|l}
B_0 x + B_2 & x^3 + B_4 & x^5 + \ldots + B_{2q} & x^{2q+1} + \ldots . \\
\quad + \dfrac{B_0}{3!} & \quad + \dfrac{B_2}{3!} & \quad + \dfrac{B_{2q-2}}{3!} & \\
 & \quad + \dfrac{B_0}{5!} & \quad + \dfrac{B_{2q-4}}{5!} & \\
 & & \quad \cdots\cdots & \\
 & & \quad + \dfrac{B_0}{2q+1!} &
\end{array}$$

Or, d'après la relation (6), le coefficient de x^{2q+1} est nul; on a donc, puisque B_0 est égal à l'unité,

$$\varphi(x)\frac{e^x + e^{-x}}{2} = x,$$

ce qui donne, pour la fonction génératrice cherchée,

$$\varphi(x) = \frac{2x}{e^x + e^{-x}},$$

et conduit, pour la valeur d'un coefficient quelconque B_{2n}, à l'expression

$$2n!\, B_{2n} = \left[\frac{d^{2n}\left(\dfrac{2x}{e^x + e^{-x}}\right)}{dx^{2n}}\right]_{x=0}.$$

Telle est l'expression générale des coefficients des polynômes auxiliaires; calculons maintenant la fonction génératrice de ces polynômes.

IV. — *Fonction génératrice des polynômes auxiliaires.*

Il nous suffira de chercher la fonction génératrice $\psi(xz)$ des polynômes de degré impair, car nous en déduirons immédiatement celle des polynômes de degré pair. En effet, chacun de ces derniers étant la dérivée du polynôme de degré impair dont le degré est supérieur d'une unité, il est clair que, pour avoir leur fonction génératrice, il suffira de diviser par z la dérivée de $\psi(xz)$ par rapport à x.

La suite des polynômes de degré impair est

$$B_0 x,\quad B_0\frac{x^3}{3!}+B_2h^2\frac{x}{1},\quad B_0\frac{x^5}{5!}+B_2h^2\frac{x^3}{3}+B_4h^4\frac{x}{1},\quad \ldots,$$
$$\ldots,\quad B_0\frac{x^{2p+1}}{2p+1\,!}+B_2h^2\frac{x^{2p-1}}{2p-1\,!}+\ldots+B_{2p}h^{2p}\frac{x}{1},\quad \ldots;$$

la fonction génératrice cherchée $\psi(xz)$ peut donc se mettre sous la forme

$$\psi(xz)=\left.B_0\frac{x}{h}\right|hz+\left.\begin{array}{l}B_2\dfrac{x}{h}\\ +B_0\dfrac{\left(\frac{x}{h}\right)^3}{3!}\end{array}\right|(hz)^3+\left.\begin{array}{l}B_4\dfrac{x}{h}\\ +B_2\dfrac{\left(\frac{x}{h}\right)^3}{3!}\\ +B_0\dfrac{\left(\frac{x}{h}\right)^5}{5!}\end{array}\right|(hz)^5+\ldots+\left.\begin{array}{l}B_{2p}\dfrac{x}{h}\\ +B_{2p-2}\dfrac{\left(\frac{x}{h}\right)^3}{3!}\\ +B_{2p-4}\dfrac{\left(\frac{x}{h}\right)^5}{5!}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ +B_2\dfrac{\left(\frac{x}{h}\right)^{2p-1}}{2p-1\,!}\\ +B_0\dfrac{\left(\frac{x}{h}\right)^{2p+1}}{2p+1\,!}\end{array}\right|(hz)^{2p+1}+\ldots.$$

Ceci posé, formons l'expression

$$\varphi(hz)=B_0+B_2(hz)^2+\ldots+B_{2p}(hz)^{2p}+\ldots,$$

et multiplions-la membre à membre par

$$\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{2}=xz+\frac{x^3z^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2p+1}z^{2p+1}}{2p+1\,!}+\ldots;$$

nous aurons

$$\varphi(hz)\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{2} = \begin{array}{l|l|l|l} B_0\dfrac{x}{h} & hz + B_2\dfrac{x}{h} & (hz)^3 + \ldots + B_{2p}\dfrac{x}{h} & (hz)^{2p+1} + \ldots, \\ & \quad + B_0\dfrac{\left(\dfrac{x}{h}\right)^3}{3!} & \quad + B_{2p-2}\dfrac{\left(\dfrac{x}{h}\right)^3}{3!} & \\ & & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\varphi(hz)\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{2} = \psi(xz),$$

et, par suite,

$$\psi(xz) = \frac{2hz}{e^{hz}-e^{-hz}}\,\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{2} = hz\frac{e^{xz}-e^{-xz}}{e^{hz}-e^{-hz}},$$

d'après la valeur que nous avons obtenue précédemment pour la fonction φ génératrice des coefficients.

La fonction $\psi(xz)$ est relative aux polynômes de degré impair; pour en déduire la fonction $\chi(xz)$ génératrice des polynômes de degré pair, il suffit, comme nous l'avons dit, de poser

$$\chi(xz) = \frac{1}{z}\frac{d\psi(xz)}{dx} = hz\frac{e^{xz}+e^{-xz}}{e^{hz}-e^{-hz}};$$

on en déduit

$$P_{2n+1} = \left[\frac{d^{2n+1}\left(hz\dfrac{e^{xz}-e^{-xz}}{e^{hz}-e^{-hz}}\right)}{dz^{2n+1}}\right]_{z=0},$$

$$P_{2n} = \left[\frac{d^{2n}\left(hz\dfrac{e^{xz}+e^{-xz}}{e^{hz}-e^{-hz}}\right)}{dz^{2n}}\right]_{z=0}.$$

Il est clair que les deux formules obtenues rentrent l'une dans l'autre, et que l'on peut prendre pour fonction génératrice des polynômes auxiliaires, quelle que soit la parité de leur degré,

$$\frac{2hz}{e^{hz}-e^{-hz}}e^{xz};$$

on a ainsi, pour expression générale des polynômes P_n,

$$P_n = \left[\frac{d^n \left(\frac{2hz}{e^{hz} - e^{-hz}} e^{xz} \right)}{dz^n} \right]_{z=0}.$$

V. — *Propriétés caractéristiques des polynômes auxiliaires.*

Les polynômes auxiliaires dont nous venons de trouver la fonction génératrice jouissent de deux propriétés qui nous ont servi à les déterminer, et sur lesquelles il est utile que nous insistions.

Ces deux propriétés sont les suivantes :

1° Chacun des polynômes est la dérivée du polynôme de degré immédiatement supérieur ;

2° La valeur moyenne, dans l'intervalle considéré, d'un polynôme quelconque, est égale à zéro, sauf pour le premier dont la valeur moyenne est égale à l'unité.

La méthode même que nous avons suivie pour la détermination des polynômes auxiliaires montre que les deux propriétés dont il s'agit sont caractéristiques de ces polynômes, puisque c'est en nous appuyant sur elles seulement que nous avons pu les trouver. Il peut n'être pas sans intérêt de démontrer directement ce point important.

Pour cela, remarquons que, d'après la relation

$$P_{n-1} = \frac{dP_n}{dx},$$

la fonction génératrice de ces polynômes est de la forme

$$\psi(z) e^{zx},$$

ainsi que l'a démontré M. Appell (¹).

On a donc

$$\psi(z) e^{zx} = \Sigma P_n z^n.$$

(¹) Appell, *loc. cit.*

Prenons la valeur moyenne des deux membres; on obtient, d'après la seconde propriété,

$$\psi(z)(\text{moy.}\, e^{zx})_{-h}^{+h} = 1,$$

et comme

$$(\text{moy.}\, e^{zx})_{-h}^{+h} = \frac{e^{hz} - e^{-hz}}{2hz},$$

on en déduit

$$\psi(z) = \frac{2hz}{e^{hz} - e^{-hz}},$$

ce qui donne, pour la fonction génératrice,

$$\frac{2hz}{e^{hz} - e^{-hz}} e^{xz},$$

expression trouvée précédemment.

Nous indiquerons, pour compléter l'étude des polynômes auxiliaires, certaines propriétés particulières qu'ils présentent.

Il a été démontré au § III que ces polynômes avaient tous leurs termes de même parité; nous savons, de plus, que leurs valeurs moyennes dans l'intervalle de $-h$ à $+h$ sont toutes nulles, sauf en ce qui concerne le premier. Si donc nous prenons un polynôme de degré impair autre que celui-là, il devra avoir des valeurs de signes contraires pour $-h$ et $+h$ d'après la première propriété rappelée, et des valeurs égales d'après la seconde.

Il en résulte que tous les polynômes de degré impair admettent pour racines $-h$, zéro et $+h$, excepté le premier qui, ainsi que nous l'avons vu, est égal à x.

Quant aux polynômes de degré pair qui sont les dérivées de polynômes de degré impair, ils auront tous, d'après le théorème de Rolle, au moins une racine réelle comprise entre $-h$ et zéro, et au moins une entre zéro et $+h$.

Il est d'ailleurs facile de reconnaître que les polynômes auxiliaires, quelle que soit la parité de leur degré, ne peuvent avoir dans l'intervalle de $-h$ à $+h$ d'autres racines réelles que celles indiquées. En effet, considérons l'un quelconque d'entre eux, P_n; ses dérivées successives sont $P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_1, P_0$; si l'on substitue dans $P_{n-1}, P_{n-2}, \ldots, P_2$ les quantités $-h$ et $+h$, les résultats obtenus sont égaux s'il s'agit d'un polynôme de degré pair, et sont nuls si c'est un polynôme de degré impair que l'on considère. Il n'y a donc pas de variation perdue jusqu'à P_2 qui, étant égal à $\frac{3x^2-h^2}{3.2!}$, est positif pour $-h$ et $+h$. Mais P_1 passe de la valeur $-h$ à la valeur $+h$ et P_0 reste égal à l'unité; deux variations sont par suite perdues et, d'après le théorème de Fourier, il y a, au plus, deux racines réelles dans l'intervalle considéré.

Nous ajouterons, pour terminer l'étude de ces polynômes, qu'ils n'ont pas forcément toutes leurs racines réelles. On constate aisément que le polynôme P_7 a quatre racines imaginaires représentées par

$$x = \pm h\sqrt{3 \pm \frac{2\sqrt{-1}}{\sqrt{3}}}.$$

VI. — *Développement d'une fonction dans l'intervalle de $-h$ à $+h$ en série de polynômes auxiliaires.*

Nous avons établi, dans la théorie qui précède, que pour former le polynôme de degré n tel que sa valeur moyenne et celle de ses n dérivées successives dans l'intervalle de $-h$ à $+h$ soient des quantités données $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$, il suffisait de former l'expression

$$P_0 Y_0 + P_1 Y_1 + \ldots + P_n Y_n,$$

où $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sont les polynômes auxiliaires que nous savons calculer.

Nous avons reconnu de plus que ces polynômes formaient une suite indéfinie et que chacun d'eux était indépendant du degré de polynôme que l'on voulait former.

Il résulte de là que nous pouvons étendre indéfiniment le développement auquel nous sommes arrivé et représenter une fonction quelconque de x, dans l'intervalle de $-h$ à $+h$, par la série

$$y = P_0(\text{moy.}\, y)_{-h}^{+h} + P_1\left(\text{moy.}\,\frac{dy}{dx}\right)_{-h}^{+h} + P_2\left(\text{moy.}\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{-h}^{+h} + \cdots.$$

Nous indiquerons ici les premiers termes de ce développement en remplaçant P_0, P_1 par leurs valeurs obtenues plus haut,

$$\begin{aligned} y = (\text{moy.}\, y)_{-h}^{+h} &+ \frac{3x}{3.1!}\left(\text{moy.}\,\frac{dy}{dx}\right)_{-h}^{+h} + \frac{3x^2 - h^2}{3.2!}\left(\text{moy.}\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{-h}^{+h} \\ &+ \frac{3x^3 - 3h^2x}{3.3!}\left(\text{moy.}\,\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{-h}^{+h} + \frac{3x^4 - 6h^2 + \frac{7}{5}h^4}{3.4!}\left(\text{moy.}\,\frac{d^4y}{dx^4}\right)_{-h}^{+h} \\ &+ \frac{3x^5 - 10h^2x^3 + 7h^4x}{3.5!}\left(\text{moy.}\,\frac{d^5y}{dx^5}\right)_{-h}^{+h} \\ &+ \frac{3x^6 - 15h^2x^4 + 21h^4x^2 - \frac{31}{7}h^6}{3.6!}\left(\text{moy.}\,\frac{d^6y}{dx^6}\right)_{-h}^{+h} \\ &+ \frac{3x^7 - 21h^2x^5 + 49h^4x^3 - 31h^6x}{3.7!}\left(\text{moy.}\,\frac{d^7y}{dx^7}\right)_{-h}^{+h} + \cdots. \end{aligned}$$

On voit que, lorsque l'intervalle considéré diminue indéfiniment, c'est-à-dire lorsque h tend vers zéro, la série précédente devient celle de Maclaurin, ce qui pouvait se prévoir *a priori*.

Dans la plupart des questions de Mécanique appliquée, il suffira d'employer les deux ou trois premiers termes du développement.

Cela revient à remplacer la courbe représentatrice de la fonction inconnue soit par une droite comprenant la même aire totale et parallèle à la corde extrême, soit par un arc de parabole à axe vertical, détachant une aire équivalente, ayant sa corde extrême parallèle à celle de la courbe, et tel que la valeur moyenne de $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit la même que celle qui correspond à la courbe. Dans les deux cas, la ligne substituée à la courbe réelle traverse donc cette dernière de manière à déterminer une surface équivalente et à avoir la même direction moyenne.

Il en résulte que les erreurs à craindre dans l'intervalle considéré seront, en général, moindres que si l'on eût fait usage de la formule de Maclaurin.

Cette formule, en effet, qui donne une grande approximation dans les environs du point de départ, expose à des erreurs très sensibles dès que l'on s'éloigne de ce point particulier.

Or, dans les questions de Mécanique pratique, c'est surtout la marche générale du phénomène qu'il importe de saisir plutôt que son expression exacte en un point donné. Aussi conviendra-t-il, dans la généralité des cas, d'employer de préférence le mode de développement que nous venons de faire connaître.