JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MANNHEIM

Sur les surfaces réglées

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 57-60.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__57_0>

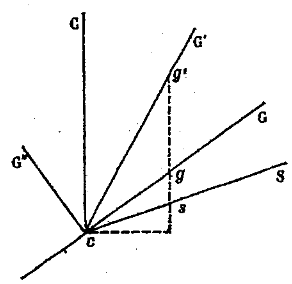
Sur les surfaces réglées;

PAR M. A. MANNHEIM.

Le travail de M. Franke, *Sur la courbure des surfaces réciproques,* qui vient de paraître dans le numéro de décembre 1877 de ce journal, est l'occasion de cette courte Note.

Prenons comme plan de la figure le plan central relatif à une génératrice G d'une surface gauche (G).

Appelons S la tangente en c à la ligne de striction (c) de (G); C la



direction conjuguée de S par rapport à l'indicatrice de (G) en c. Cette droite C est la caractéristique du plan central de G lorsqu'on passe du point central c au point infiniment voisin sur la ligne de striction (c). Menons sur le plan de la figure, et à partir de c, la droite G′ faisant avec G un angle donné. En construisant ainsi une droite dans chacun des plans centraux de (G), nous aurons pour le lieu de ces droites une surface (G′).

Je me propose de *déterminer le rapport des paramètres de distribution des plans tangents à* (G) *et* (G′) *pour les génératrices* G, G′.

Considérons l'angle de grandeur invariable (G, G'), dont le sommet c décrit la ligne de striction (c), dont le côté G coïncide successivement avec les génératrices de (G) et dont le plan reste tangent à cette surface aux différents points de (c).

Le déplacement infiniment petit de cet angle est un déplacement hélicoïdal. Pendant ce déplacement, G et G' engendrent des éléments d'hélicoïde réglé qui se raccordent respectivement avec (G) et (G') le long de G et de G'.

L'axe du déplacement hélicoïdal est parallèle à C; par suite, le plan central relatif à (G') doit être parallèle à cette droite, c'est-à-dire qu'il se confond avec le plan central de (G), et alors c est le point central sur G'.

Ainsi *la surface* (G') *a même ligne de striction que* (G); *ces deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre le long de cette ligne.*

Pour construire le paramètre de distribution des plans tangents à l'hélicoïde réglé qui se raccorde avec G, voici la construction que je donne dans mon cours à l'École Polytechnique. On élève en c une perpendiculaire à C et l'on porte sur cette droite un segment égal à la plus courte distance entre G et l'axe du déplacement hélicoïdal. De l'extrémité de ce segment on mène une parallèle à C; la portion sg interceptée sur cette droite par S et G est le paramètre de distribution cherché.

De même pour G' on a le paramètre sg'. Appelons K_G, $K_{G'}$ ces paramètres. On a alors

$$\frac{K_G}{K_{G'}} = \frac{sg}{sg'};$$

mais

$$sg = cs\frac{\sin(S, G)}{\sin(G, C)}, \quad sg' = cs\frac{\sin(S, G')}{\sin(G', C)}.$$

On a donc

$$(1)\qquad \frac{K_G}{K_{G'}} = \frac{\sin(S, C)}{\sin(G, C)}\frac{\sin(G', C)}{\sin(S, G')}.$$

Telle est la relation qui existe entre les paramètres de (G) et de (G').

M. Franke a considéré le cas où G' est perpendiculaire à G [1].

---

[1] C'est M. Chasles qui, le premier, a considéré ce cas (voir *Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*).

Plaçons-nous dans cette hypothèse et appelons G″ la perpendiculaire à G menée du point c. Dans ce cas la formule (1) devient

$$(2) \qquad \frac{K_G}{K_{G''}} = -\frac{\operatorname{tang}(S, G)}{\operatorname{tang}(G, C)}.$$

Transformons cette formule. Considérons une sphère de rayon 1 et sur cette sphère la courbe (γ) trace du cône qu'on obtient en menant du centre o de la sphère des rayons parallèles aux génératrices de (G).

Soit ol le rayon parallèle à G. Le plan normal à ce cône suivant ce rayon est parallèle au plan central relatif à G. Lorsqu'on passe au plan normal à ce cône, infiniment voisin de celui-ci, on a une caractéristique parallèle à C. Appelons oi cette caractéristique, le point i étant sur le plan tangent à la sphère en l.

Le segment il, qui est la tangente de l'angle iol, n'est autre que le rayon de courbure géodésique de la courbe (γ) au point l. Désignant par r ce rayon de courbure et remarquant que l'angle iol est égal à l'angle (G, C), la formule (2) peut s'écrire

$$(3) \qquad \frac{K_G}{K_G''} = -\frac{\operatorname{tang}(S, C)}{r}.$$

Cette formule revient à la formule (15) du travail de M. Franke.

Nous avons vu que la surface (G′) circonscrite à (G) le long de (c) a aussi cette courbe pour ligne de striction. On peut encore démontrer cette propriété de la manière suivante. Menons respectivement par G et G′ des plans normaux en c à (G.) Ces plans déterminent un dièdre qui, d'après la construction des génératrices de (G′), reste de grandeur constante, quelle que soit la position du point c sur (c).

Déplaçons infiniment peu ce dièdre, de façon que son arête, toujours normale à (G), passe par c', infiniment voisin de c sur (c) et que ses faces contiennent les génératrices de (G) et de (G′) qui passent par c'.

Puisque c est le point central sur G, la face qui contient cette droite touche (G) à l'infini ; par suite, la caractéristique de cette face est parallèle à G, et elle est alors perpendiculaire à l'arête du dièdre. Mais, on sait que dans ces conditions la caractéristique de l'autre face est aussi perpendiculaire à l'arête du dièdre [1]; la face du dièdre qui contient G′ touche alors (G′) à l'infini. Le plan tangent en c, qui est perpendiculaire à cette face, est donc le plan central pour G′ et c est le point central sur cette droite. Comme c est un point arbitraire de (c), cette courbe est alors la ligne de striction de (G′).

On démontre de la même manière que : *Si l'on construit comme précédemment une surface* (G_1) *en employant, au lieu de* (c), *une courbe quelconque tracée sur* (G), *les points où cette courbe rencontre la ligne de striction de* (G) *sont des points centraux relatifs à des génératrices de* (G_1).

Ou autrement : *Les lignes de striction des surfaces* (G) *et* (G_1) *se coupent sur la courbe de contact de ces deux surfaces.*

---

(1) Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 11 juin 1877.