JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LAURENT

Sur le calcul inverse des intégrales définies

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 4 (1878), p. 225-246.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4__225_0>

Sur le calcul inverse des intégrales définies;

PAR M. H. LAURENT.

Nous ne connaissons que fort peu de chose sur le calcul inverse des intégrales définies, et cependant ce calcul se présente assez souvent dans les questions de Physique mathématique. La figure des planètes en dépend; ainsi, quand on cherche si l'ellipsoïde à trois axes inégaux peut être une figure d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, on ne fait que résoudre un cas très-particulier d'une question qui dépendrait du calcul inverse des intégrales définies. Abel, dans un Mémoire posthume qui traite des fonctions génératrices, fait l'ébauche très-incomplète d'une théorie dont il tire des conséquences vraiment surprenantes; cette théorie dépend du calcul inverse des intégrales définies. Et l'on pourrait encore citer beaucoup d'exemples dans lesquels le calcul inverse des intégrales définies pourrait rendre d'importants services à la Science, et surtout à la Physique mathématique. Je me propose dans ce Mémoire d'étudier seulement quelques questions relatives à la théorie dont je viens de parler, et les plus simples; on verra que d'autres questions importantes, et en apparence très-étrangères au sujet, s'y rattachent.

1. De tous les problèmes, le plus simple que l'on puisse se poser sur le calcul inverse des intégrales définies consiste à trouver une fonction $\varphi(x)$ telle que l'on ait

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0. \tag{1}$$

Un tel problème admet évidement une infinité de solutions, et l'on peut se proposer d'en trouver la solution la plus générale. Soit $f(x)$ une fonction arbitraire de x; si l'on pose

$$\varphi(x) = f(x) - \int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx,$$

l'équation (1) sera satisfaite, et je dis que l'on aura ainsi la solution la plus générale de cette équation. En effet, soit $\varphi(x)$ la solution la plus générale : on peut la présenter sous la forme

$$\varphi(x) - \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{b-a},$$

puisque $\int_a^b \varphi(x)dx$ est nul. L'expression à laquelle on vient de parvenir joue dans le calcul inverse des intégrales définies le rôle des constantes arbitraires dans le Calcul intégral ordinaire. Ainsi je suppose qu'il s'agisse maintenant de résoudre l'équation

$$(2) \qquad \int_a^b \varphi(x)dx = g.$$

Quand on aura trouvé une seule solution de cette équation, il suffira de lui ajouter une expression de la forme $f(x) - \int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx$ pour en obtenir la solution la plus générale. En effet, soient $\varphi(x)$ la solution la plus générale de (2), $\psi(x)$ une solution particulière, on aura :

$$\int_a^b \varphi(x)dx = g,$$
$$\int_a^b \psi(x)dx = g$$

ou

$$\int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)]dx = 0;$$

$\varphi(x) - \psi(x)$ a donc pour valeur générale la solution de l'équation (1), ce qui établit la proposition avancée. Nous ferons d'ailleurs observer qu'une solution particulière de (2) est donnée par la formule

$$\varphi(x) = \frac{g}{b-a};$$

mais la plupart des problèmes que l'on peut se proposer sur le calcul inverse des intégrales définies affectent une forme plus compliquée : il s'agit souvent de déterminer une fonction $\varphi(u)$, de telle sorte que l'on ait

$$(3) \qquad \int_a^b \theta(u,x)\varphi(u)du = f(x).$$

$\theta(u,x)$ désigne alors une fonction donnée de u et de x, et $f(x)$ une fonction donnée également.

L'équation (3) *n'admet généralement pas de solution.* En effet, supposons que $f(x)$ devienne infinie pour $x = x_1$, le premier membre de (3) devra être infini pour $x = x_1$; ainsi on devra avoir

$$\theta(u,x_1)\varphi(u) = \infty.$$

On ne peut pas admettre que $\varphi(u)$ soit infini, sans quoi le premier membre de (3) serait toujours infini [pour parler plus exactement : si $\varphi(u)$ a un infini de nature à rendre l'intégrale infinie, comme cet infini est indépendant de x, il rendra l'intégrale infinie dans le cas même où x serait différent de x_1]: donc $\theta(u,x_1)$ est infini; mais alors, u variant le long du contour d'intégration, l'équation

$$\theta(u,x) = \infty$$

définit une fonction x de u, pour laquelle θ reste infinie. La fonction $f(x)$ devrait donc être infinie pour une suite continue de valeurs de x, ce qui est en général impossible. On voit donc qu'en se maintenant dans ces généralités le problème en question est impossible.

Que si, cependant, la fonction $\theta(u,x)$ était réductible, et si l'équation

$$\theta(u,x) = \infty$$

ne définissait pas une fonction x de u, notre raisonnement tomberait en défaut; mais, en général, il n'en est pas ainsi.

Abel, dans sa théorie des fonctions génératrices, admet que l'on peut toujours satisfaire à l'équation

$$\int_a^b e^{-ux}\varphi(u)du = f(x)$$

(il est vrai qu'il ne spécifie pas la nature des limites); il est évident que $\frac{1}{x}$, par exemple, ne saurait être représenté par une expression telle que le premier membre de l'équation précédente. Si l'on n'a pas $b = +\infty$ et $a = 0$, il est clair aussi que l'on ne saurait prendre $f(x) = x$, parce que, pour $x = \infty$, $f(x)$ est toujours infini, tandis que $\int_a^b e^{-ux}\varphi(u)du$ ne l'est pas nécessairement.

Toutefois, s'il n'est pas possible de représenter une fonction au moyen d'une intégrale définie tout le long de son parcours, on peut espérer de la représenter dans une portion limitée de ce parcours. Ces préliminaires nous apprennent que l'on ne doit pas, en général, étudier les fonctions définies par des intégrales, telles que les fonctions Γ de Legendre, sans essayer de changer leur forme. L'intégrale eulérienne de seconde espèce est impropre à définir la fonction Γ, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan; le produit considéré par Gauss la définit au contraire complétement et bien plus naturellement. Aussi ne faut-il point s'étonner que les propriétés des fonctions Γ découlent plus facilement de la définition de Gauss que de celle de Legendre.

2. Le problème qui consiste à résoudre, par rapport à $\varphi(x)$, l'équation

$$\int_a^b \varphi(x)dx = 0$$

étant indéterminé, nous nous proposerons de résoudre les équations simultanées

$$(1)\qquad \begin{cases} \int_a^b \varphi(x)dx = 0, \quad \int_a^b x\varphi(x)dx = 0, \quad \ldots, \\ \int_a^b x^{n-1}\varphi(x)dx = 0, \end{cases}$$

ou plus généralement

$$\int_a^b \theta(x)\varphi(x)dx = 0, \tag{2}$$

$\theta(x)$ désignant alors un polynôme arbitraire de degré $n-1$. Désignons par $\varphi^{-1}(x), \varphi^{-2}(x), \ldots, \varphi^{-n}(x)$ les intégrales successives de la fonction φ, prises de manière à s'annuler pour $x = a$. En intégrant par parties la formule (2), on trouve

$$\varphi^{-1}(b)\,\theta(b) - \varphi^{-2}(b)\,\theta'(b) + \varphi^{-3}(b)\,\theta''(b)\ldots \pm \varphi^{-n}(b)\,\theta^{(n-1)}(b) = 0,$$

$\theta^{n-1}(b)$ désignant une simple constante. Si l'on fait successivement $\theta = 1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, on voit que l'on aura

$$\varphi^{-1}(b) = 0, \quad \varphi^{-2}(b) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{-n}(b) = 0.$$

La fonction $\varphi^{-n}(x)$ s'annule donc, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées, non-seulement pour $x = a$, mais encore pour $x = b$. On peut donc poser

$$\varphi^{-n}(x) = (x-a)^n (x-b)^n \psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant une fonction qui n'est pas infinie pour $x = a$ ou pour $x = b$: il en résulte la solution suivante du problème que nous nous étions proposé de résoudre

$$\varphi(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n (x-b)^n \psi(x)]. \tag{3}$$

Nous allons maintenant discuter cette solution.

Considérons l'équation

$$z = x + t\,\frac{(z-a)(z-b)}{b-a} \tag{4}$$

et la fonction

$$\psi^{-1}(z) = \int \psi(z)\,dz$$

de la racine de cette équation z qui, pour $t = 0$, se réduit à x, à savoir :

$$z = \frac{b-a+t(b+a)-\sqrt{(b-a)[(t^2+1)(b-a)-4tx+2t(b+a)]}}{2t};$$

on aura, par la formule de Lagrange,

$$\psi^{-1}(z) = \psi^{-1}(x) + \frac{t}{1}\frac{(x-a)(x-b)\psi(x)}{b-a} + \ldots$$
$$+ \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)}{(b-a)^n}\right] + \ldots,$$

et, en différentiant par rapport à x,

$$\psi(z)\frac{dz}{dx} = \psi(x) + \frac{t}{1}\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)(x-b)}{b-a}\psi(x)\right] + \ldots$$
$$+ \frac{t^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{(x-a)^n(x-b)^n}{(b-a)^n}\psi(x)\right] + \ldots,$$

la fonction $\varphi(x)$ n'étant définie qu'à un facteur près, on voit qu'elle a pour fonction génératrice $\psi(z)\frac{dz}{dx}$, z étant racine de l'équation (4), et nous poserons dorénavant

$$(5) \qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{(b-a)^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n\psi(x)].$$

3. Nous examinerons d'abord le cas où $\psi(x)$ se réduit à une constante que nous prendrons égale à l'unité. Nous aurons alors

$$(1) \qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{(b-a)^n}\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n].$$

Les fonctions X_n de Legendre appartiennent à ce type, et l'on a, en supposant n et m entiers et différents l'un de l'autre,

$$(2) \qquad \begin{cases} \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0, \\ \int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx = \frac{b-a}{2n+1}, \end{cases}$$

formules que l'on vérifie aisément au moyen d'une intégration par parties.

La fonction $\varphi_n(x)$ vérifie une équation différentielle du second ordre qu'il sera alors facile d'intégrer complétement au moyen des quadratures. Si l'on pose

$$(x-a)^n(x-b)^n = u,$$

on en tire par différentiation

$$nu(2x-a-b) = \frac{du}{dx}(x-a)(x-b),$$

et, en différentiant $n+1$ fois de suite,

$$\begin{aligned} n\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}(2x-a-b) + 2n(n+1)\frac{d^n u}{dx^n} \\ = \frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}(x-a)(x-b) + (n+1)(2x-a-b)\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} \\ + (n+1)n\frac{d^n u}{dx^n}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}(x-a)(x-b) + (2x-a-b)\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} - n(n+1)\frac{d^n u}{dx^n} = 0,$$

ou bien encore

$$(3) \qquad \frac{d^2\varphi_n}{dx^2}(x-a)(x-b) + \frac{d\varphi_n}{dx}(2x-a-b) - n(n+1)\varphi_n = 0.$$

Cette équation a une assez grande généralité, le polynôme

$$(x-a)(x-b)$$

étant l'expression la plus générale des polynômes du second degré et $2x-a-b$ celle de leur dérivée.

On constate facilement que l'intégrale

$$\int \frac{(z-a)^n(x-b)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz$$

satisfait à l'équation (3), soit qu'on la prenne le long d'un contour fermé contenant le point x, ce qui fournit bien à un facteur près $\varphi_n(x)$, soit qu'on la prenne entre les limites a et b, ce qui fournit une seconde solution de l'équation (3); en appelant Φ_n cette seconde solution, la solution la plus générale de (3) sera

$$A\varphi_n + B\Phi_n,$$

où A et B désignent deux facteurs constants arbitraires. Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de ce cas d'ailleurs fort intéressant, parce que nous retomberions sur les propriétés bien connues des polynômes de Legendre, auxquels peuvent se ramener les polynômes φ_n par un simple changement de variable.

4. On obtient une classe de polynômes très-intéressants et déjà étudiés par M. Hermite quand on suppose $a = -\infty$ et $b = +\infty$; le produit $(x-a)^n(x-b)^n$ doit alors être remplacé par une fonction nulle pour $x = \pm\infty$ et admettant $\pm\infty$ pour racines multiples. L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire conduit à remplacer $(x-a)^n(x-b)^n$ par l'exponentielle e^{-x^2}. Posons alors

$$\varphi_n = \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n};$$

la fonction φ_n sera de la forme $e^{-x^2}U_n$, U_n désignant un polynôme entier en x qui jouira des propriétés exprimées par les équations suivantes :

$$U_{n+1} + 2xU_n + 2nU_n = 0,$$

d'où l'on conclut par la méthode de Sturm la réalité des racines de l'équation $U_n = 0$,

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2U_n}{dx^2} - 2x\frac{dU_n}{dx} + 2nU_n = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}U_mU_n dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}U_n^2 dx = 2.4.6\ldots 2n\sqrt{\pi}.$$

Sans vouloir faire ici une étude approfondie des polynômes de M. Hermite, je crois devoir faire, à leur égard, une remarque : c'est que l'intégrale

$$(2) \qquad V_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2-z^2}(z-x)^{-(n+1)}dz$$

satisfait à l'équation (1), à laquelle satisfait aussi la fonction U_n, en sorte que l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$AU_n + BV_n = 0.$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit de différentier la formule (2); on a alors

$$(3) \quad \frac{dV_n}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2-z^2}[2x(z-x)^{-n-1} + (n+1)(z-x)^{-n-2}]dz,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2V_n}{dx^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2-z^2}[&(4x^2+2)(z-x)^{-n-1} \\ &+ 4x(n+1)(z-x)^{-n-2} \\ &+ (n+1)(n+2)(z-x)^{-n-3}]dz. \end{aligned} \right.$$

Si l'on remarque alors que

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2-z^2}(n+1)(n+2)(z-x)^{-n-3}\,dz \\ &\qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} 2z(n+1)e^{x^2-z^2}(z-x)^{-n-2}\,dz, \end{aligned}$$

les équations (2), (3), (4), multipliées respectivement par $2n$, $-2x$, 1 et ajoutées, donnent

$$\frac{d^2V_n}{dx^2} - 2x\frac{dV}{dx} + 2nV_n = 0.$$

5. Si l'on prend $\varphi_n = \frac{d^n(x^n e^n)}{dx^n}$, on aura encore, en appelant θ un

polynôme quelconque de degré $n-1$,

$$\int_0^{\infty} \theta(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0.$$

Il est clair que, dans le cas actuel, φ_n est le produit, par $(-1)^n e^{-x}$, d'un certain polynôme entier du degré n en x, que nous appellerons P_n ou $P_n(x)$, et l'on a

$$(1) \qquad \int_0^{+\infty} P_n P_m e^{-x}\,dx = 0,$$

$$(2) \qquad \int_0^{\infty} P_n^2 e^{-x}\,dx = 1.2.3\ldots n\Gamma(n+1) = \Gamma^2(n+1).$$

La première de ces formules est évidente; la seconde se démontre en appliquant la règle d'intégration par parties à l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{d^n(e^{-n}x^n)}{dx^n}\,x^n\,dx,$$

x^n désignant la quantité à laquelle se réduit P_n quand on supprime les termes en x^{n-1}, x^{n-2}, ...,

De la formule

$$\frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x} = e^{-x} P_n(x)(-1)^n$$

on tire facilement la valeur de P_n

$$(3) \quad P_n(x) = x^n - \frac{n^2}{1} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2} x^{n-2} - \ldots \pm n(n-1)\ldots 1.$$

Si nous posons, pour un instant,

$$u = x^n e^{-x},$$

nous aurons, en différentiant,

$$u' = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}$$

ou bien

$$u'x = (n - x)u;$$

si l'on différentie $n + 1$ fois cette équation, et si l'on pose

$$Q_n = \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x} = (-1)^n e^{-x} P_n(x),$$

on aura

$$x\frac{d^2 Q_n}{dx^2} + (n+1)\frac{dQ_n}{dx} = (n - x)\frac{dQ_n}{dx} - (n+1)Q_n,$$

ou bien

$$(4) \qquad x\frac{d^2 Q_n}{dx^2} + (x+1)\frac{dQ_n}{dx} + (n+1)Q_n = 0.$$

Cette équation donne, en prenant P_n pour inconnue,

$$(5) \qquad x\frac{d^2 P_n}{dx^2} + (1 - x)\frac{dP_n}{dx} + nP_n = 0.$$

On a, à un facteur près,

$$Q_n = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

ou

$$Q_n = \int \frac{e^{-z} z^n}{(z-x)^{n+1}} dz,$$

l'intégrale étant prise autour du point x. Cherchons à vérifier que cette intégrale satisfait à l'équation (4) : à cet effet, observons que par la différentiation on constate que

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dz} e^{-z} z^{n+1} (z-x)^{-(n+2)} \\ &\quad = -(n+z) z^n (z-x)^{-(n+3)} e^{-z} \\ &\qquad -(1+x) z^n (z-x)^{-(n+2)} e^{-z} - x z^n (z-x)^{-(n+1)} e^{-z}; \end{aligned} \right.$$

en intégrant alors autour du point x et en observant que

$$\frac{dQ^n}{dx} = (n+1)\int \frac{e^{-z} z^n}{(z-x)^{n+1}} dz,$$

$$\frac{d^2 Q^s}{dx^2} = (n+1)(n+2)\int \frac{e^{-z} z^n dz}{(z-x)^{n+2}},$$

on trouve, en divisant par $-(n+1)$,

$$0 = x\frac{d^2Q_n}{dx^2} + (1+x)\frac{dQ_n}{dx} + (n+1)Q_n.$$

Or, si l'on avait posé

$$X_n = \int_0^\infty \frac{e^{-z}z^n}{(z-x)^{n+1}}dz,$$

la formule (A), intégrée entre les limites o et ∞, aurait donné par le même calcul

$$0 = x\frac{d^2X_n}{dx^2} + (1+x)\frac{dX_n}{dx} + (n+1)X_n,$$

ce qui prouve que X_n est aussi une solution de l'équation (4). Or nous avons vu que, si X_n était une solution de (4), $X_n e^x$ était une solution de (5). Nous poserons

$$\Pi_n = e^x X_n$$

et la fonction

$$\Pi_n = \int_0^\infty \frac{e^{x-z}z^n}{(z-x)^{n+1}}dz$$

sera une solution de l'équation (5). La solution la plus générale de (5) sera donc

$$AP_n + B\Pi_n,$$

A et B désignant deux quantités constantes. Toutefois, on sera obligé de supposer x négatif ou imaginaire de manière que l'intégrale Π_n reste finie.

On peut encore trouver d'autres expressions de la fonction P_n. Si, en effet, on considère la fonction Q_n sous la forme (elle n'est déterminée qu'à un facteur constant près)

$$Q_n = \frac{1}{1.2.3.\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n),$$

on voit que, si l'on développe la fonction $-e^{-z}$, z étant racine de

$$z = x + tz, \quad z = \frac{x}{1-t},$$

on aura, par la formule de Lagrange,

$$-e^{\frac{x}{t-1}} = -e^{-x} + \frac{t}{1} x e^{-x} + \ldots + \frac{t^n}{1.2.3\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x} x^n \ldots$$

et, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{e^{\frac{x}{t-1}}}{1-t} = e^{-x} + \frac{t}{1}\frac{d}{dx}(xe^{-x}) + \ldots + \frac{t^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)\ldots$$

Si l'on multiplie par e^x, les différents termes du second membre auraient pour coefficients les diverses valeurs de P_n, ainsi

$$\frac{e^{\frac{tx}{t-1}}}{1-t} = 1 + tP_1(x) + t^2P_2(x) + \ldots + t^nP_n(x) + \ldots.$$

Et nous sommes ainsi conduits à définir P_n comme le coefficient de t^n dans le développement de $\frac{e^{\frac{tx}{t-1}}}{1-t}$; on aura donc

$$P_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^{\frac{-tx}{1-t}}}{(1-t)\,t^{n+1}}\,dt,$$

l'intégrale étant prise autour du point $t = 0$. Si l'on pose $\frac{t}{1-t} = z$, on a

$$P_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^{-zx}}{z^{n+1}}(z+1)^{n-1}\,dz,$$

l'intégrale étant toujours prise autour de l'origine.

Il est à peine nécessaire de faire observer que l'équation $P_n = 0$ a toutes ses racines réelles et positives.

6. Je passe maintenant à l'étude d'un cas important, parce qu'il va nous conduire à l'intégration d'une classe très-étendue de fonctions. Posons

$$(1) \qquad \varphi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s}\right];$$

r et s désignant deux nombres quelconques. Si ces nombres sont positifs, la fonction φ_n sera encore une solution de notre problème; mais, dans ce qui va suivre, nous leur supposerons des valeurs arbitraires. Faisons pour un instant

$$u = (x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s};$$

nous aurons

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{n+r}{x-a} + \frac{n+s}{x-b}$$

ou

$$(x-a)(x-b)\frac{du}{dx} = u[(2n+r+s)x-(n+r)b-(n+s)a].$$

Si l'on différentie cette équation $n+1$ fois de suite, on a

$$\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}(x-a)(x-b) + \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}[(2-r-s)x+rb+as+a-l]$$
$$-\frac{d^n u}{dx^n}(n+1)(n+r+s) = 0;$$

ce qui peut encore s'écrire, en vertu de (1),

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_n}{dx^2}(x-a)(x-b) + \dfrac{d\varphi_n}{dx}[(2-r-s)x+b(r-1)+a(s-1)] \\ \qquad\qquad -\varphi_n(n+1)(n+r+s) = 0. \end{cases}$$

D'un autre côté, on peut observer que

$$(3)\qquad V = \int (z-a)^{n+r}(z-b)^{n+s}(z-x)^{-n-1}\,dz.$$

L'intégrale étant prise le long d'un contour infinitésimal décrit autour du point x est égale, à un facteur constant près, à $\varphi_n(x)$. On peut vérifier comme il suit que V satisfait à l'équation (2). On a

$$\begin{aligned} d(z-a)^{n+r+1}&(z-b)^{n+s+1}(z-x)^{-n-2} \\ &= \omega[(n+r+1)(z-b)(z-x) \\ &\qquad + (n+s+1)(z-a)(z-x) - (n+2)(z-a)(r-b)], \end{aligned}$$

ω désignant, pour abréger, la quantité

$$(z-a)^{n+r}(z-b)^{n+s}(z-x)^{-n-3}\,dz.$$

Si l'on intègre alors autour du point x et si l'on multiplie par $-(n+1)$, on trouve

$$\begin{aligned} o = \int (n+1)\,\omega\,[&-(n+r+1)(z-b)(z-x) \\ &-(n+s+1)(z-a)(z-x)+(n+2)(z-a)(z-b)], \end{aligned}$$

et, en mettant la variable $z-x$ en évidence au lieu de z,

$$\begin{aligned} o = \int (n+1)\,\omega\,\{&(n+2)(x-a)(x-b) \\ &+(z-x)[(2-r-s)x+b(r-1)+a(s-1)] \\ &-(n+r+s)(z-x)^2\}; \end{aligned}$$

or de (3) on tire

$$V=\int \omega(z-x)^2,\quad \frac{dV}{dx}=(n+1)\int\omega(z-x),$$
$$\frac{d^2V}{dx^2}=(n+1)(n+2)\int\omega,$$

et, en vertu de ces formules, l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dx^2}(x-a)(x-b)+\frac{dV}{dx}[(2-r-s)x+b(r-1)+a(s-1)] \\ -(n+1)(n+r+s)V=o. \end{aligned}$$

L'équation (2) est donc satisfaite en faisant $\varphi_n = V$. Mais cette vérification, si l'on y regarde de près, s'est faite sans qu'il ait été nécessaire de supposer n entier, et en supposant l'intégrale prise le long de l'axe des x, entre les limites a et b; d'où cette conclusion importante : l'équation (2), quels que soient n, r, s, se vérifie en posant

$$\varphi_n=\int_a^b (z-a)^{n+r}(z-b)^{n+s}(z-x)^{-n-1}\,dz;$$

on pourra donc, dans tous les cas, l'intégrer complétement, et une de ses intégrales sera algébrique, si n est entier.

Maintenant posons

$$a+b=-p,\quad ab=q,\quad 2-s-r=g,$$
$$b(r-1)+a(s-1)=h,\quad -(n+1)(n+r+s)=k;$$

d'où l'on tire

$$a=+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\qquad b=+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$
$$r=\frac{h+b-a(1-g)}{b-a},\qquad s=\frac{h+a-b(1-g)}{a-b},$$
$$n=\frac{g-3\pm\sqrt{(g-1)^2-4k}}{2}.$$

L'équation (2) prendra la forme très-générale

$$(3)\qquad (x^2+px+q)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+(gx+h)\frac{d\varphi}{dx}+k\varphi=0,$$

que l'on saura, par conséquent, intégrer. Il y a plus, comme on trouve deux valeurs de n pour une même valeur de k, on pourra, par ce procédé, trouver tout de suite les deux intégrales de l'équation (3).

Nous ferons encore une remarque : il n'était pas nécessaire de vérifier que l'intégrale V satisferait à l'équation (2); en effet, l'opération à l'aide de laquelle on prend une dérivée pouvant se ramener à une intégration, il était facile de prévoir que toute intégration faite entre des limites faisant disparaître les termes intégrés par parties pourrait, dans le résultat final, être substituée à une différentiation. Cette remarque nous permettra de généraliser, un peu plus loin, la théorie que nous venons d'exposer, en évitant des calculs qui, sans cela, deviendraient d'un longueur rebutante.

Lorsque l'on suppose $r=s=\frac{1}{2}$, $a=-1$, $b=1$, l'équation (2) se réduit à

$$\frac{d^2\varphi_n}{dx^2}(x^2-1)+\frac{d\varphi_n}{dx}x-(n+1)^2\varphi_n=0.$$

Cette équation peut s'intégrer par les moyens ordinaires; son intégrale est

$$\mathrm{A}\cos(n+1)\arccos x+\mathrm{B}\sin(n+1)\arccos x,$$

A et B désignant deux constantes; on en conclut facilement que, à un facteur constant près,

$$\sin(n+1)\arccos x = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^{n+\frac{1}{2}},$$

formule connue.

7. Proposons-nous, maintenant, de satisfaire aux équations

$$(1)\quad \int_a^b \varphi(x)dx = g_0,\quad \int_a^b \varphi(x)x\,dx = g_1,\quad \ldots,\quad \int^b \varphi(x)x^n dx = g_n,$$

$g_0, g_1, \ldots, g_n$ désignant des constantes données. Désignons par $\varphi^{-n}(x)$ la $n^{ième}$ intégrale de $\varphi(x)$, s'annulant pour $x=a$, on aura

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \varphi^{-1}(b) = g_0,$$

$$\int_a^b \varphi(x)x\,dx = \varphi^{-1}(b)b - \varphi^{-2}(b).1 = g_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\int_a^b \varphi(x)x^n dx = \varphi^{-1}(b)b^n - \varphi^{-2}(b)nb^{n-1}$$
$$+\varphi^{-3}(b)n(n-1)b^{n-2}\ldots \pm \varphi^{-n-1}1.2.3\ldots n = g_n.$$

Ces équations, respectivement multipliées par

$$b^n,\quad -\frac{n}{1}b^{n-1},\quad \frac{n(n-1)}{1.2}b^{n-2},\quad \ldots,\quad \ldots \pm 1$$

et ajoutées, en observant que

$$1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\ldots\pm 1 = (1-1)^n = 0,$$

$$\frac{n}{1}.1-\frac{n(n-1)}{1.2}.2+\ldots\mp n = n(1-1)^{n-1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

donnent

$$1.2.3\ldots n\varphi^{-(n+1)}(b) = g_0 b^n - \frac{n}{1}g_1 b^{n-1} + \ldots \mp g_n.$$

Nous désignerons par $F_n(b)$ le polynôme écrit dans le second membre, et qui, symboliquement, est égal à $(b-g)^n$; nous aurons alors

$$\varphi^{-(n+1)}(b)=\frac{F_n(b)}{1.2.3\ldots n}. \tag{2}$$

Cela posé, la fonction $\varphi^{-(n+1)}(x)$ jouit des propriétés suivantes : 1° elle se réduit, ainsi que ses n premières dérivées pour $x=b$, respectivement aux $n+1$ quantités

$$\frac{F_n(b)}{1.2.3\ldots n},\quad \frac{F_{n-1}(b)}{1.2.3\ldots(n-1)},\quad \ldots,\quad \frac{F_1(b)}{1},\quad F_0(b)=g_0.$$

2° elle s'annule, ainsi que ses n premières dérivées, pour $x=a$. La première propriété nous permet de la mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\varphi^{-(n+1)}(x)=\frac{F_n(b)}{1.2.3\ldots n}&+\frac{(x-b)}{1}\frac{F_{n-1}(b)}{1.2.3\ldots(n-1)}\\&+\frac{(x-b)^2}{1.2}\frac{F_{n-2}(b)}{1.2\ldots(n-2)}+\ldots\\&+\frac{(x-b)^n}{1.2.3\ldots n}g_0+(x-b)^{n+1}\theta(x),\end{aligned}$$

$\theta(x)$ désignant une fonction que l'on peut supposer finie pour $x=b$. On peut observer que $\frac{F_{n-1}(x)}{1.2.3\ldots(n-1)}$, $\frac{F_{n-2}(x)}{1.2.3\ldots(n-2)}\ldots$ sont les dérivées successives de $\frac{F_n(x)}{1.2.3\ldots n}$, ainsi qu'il est facile de le constater par un calcul direct; il en résulte que la formule précédente peut aussi s'écrire

$$\varphi^{-(n+1)}(x)=\frac{F_n(x)}{1.2.3\ldots n}+(x-b)^{n+1}\theta(x). \tag{3}$$

Mais, d'après la seconde propriété de la fonction, si l'on divise par $(x-b)^{n+1}$ et si l'on différentie n fois le résultat, on aura $n+1$ relations qui devront avoir lieu pour $x=a$, en supposant $\varphi^{-1}(a)=0$, $\varphi^{-2}(a)=0$, ..., $\varphi^{-(n+1)}(a)=0$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\theta(a)&=-\frac{F_n(a)}{1.2.3\ldots n}(a-b)^{-(n+1)},\\ \theta'(a)&=-\frac{d}{da}\frac{F_n(a)}{1.2.3\ldots n}(a-b)^{-(n+1)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

on en conclut le développement de $\theta(x)$

$$\theta(x) = -\frac{F_n(a)}{1.2\ldots n}(a-b)^{-(n+1)} - \frac{x-a}{1}\frac{d}{da}\frac{F_n(a)}{1.2\ldots n}(a-b)^{-(n+1)} - \ldots.$$

La formule (3) devient ainsi

$$\varphi^{-(n+1)}(x) = \frac{F_n(x)}{1.2.3\ldots n} - (x-b)^{n+1}\left[\frac{F_n(a)}{1.2.3\ldots n}(a-b)^{-(n+1)} + \ldots\right];$$

enfin, en différentiant $n+1$ fois

$$\varphi(x) = -\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left\{(x-b)^{n+1}\left[\frac{F_n(a)}{1.2.3\ldots n}(a-b)^{-(n+1)} + \ldots\right]\right\},$$

la solution cherchée $\varphi(x)$ se compose de deux parties dont l'une est un polynôme de degré n et dont l'autre est de la forme

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\psi(x),$$

et n'est autre qu'une *arbitraire d'intégration;* en faisant abstraction de cette arbitraire, on a

$$(3\ bis)\qquad \varphi(x) = -\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[(x-b)^{n+1}\Theta(x)]\frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

et

$$\Theta(x) = \frac{F_n(a)}{(a-b)^{n+1}} + (x-a)\frac{d}{da}\left[\frac{F_n(a)}{(a-b)^{n+1}}\right] + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n}{da^n}\left[\frac{F_n(a)}{(a-b)^{n+1}}\right].$$

On peut mettre la fonction Θ sous une forme un peu différente; en effet, en prenant les résidus relativement au point a, on a

$$\Theta(x) = \mathcal{E}\frac{F_n(z)}{(z-b)^{n+1}}\left[\frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\right]$$

ou bien

$$\Theta(x) = \mathcal{E}\frac{F_n(z)}{(z-b)^{n+1}}\frac{(z-a)^{n+1} - (x-a)^{n+1}}{(z-x)(z-a)^{n+1}}.$$

Cette formule peut encore s'écrire

$$\Theta(x) = -\mathcal{E}\frac{F_n(z)(x-a)^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-b)^{n+1}(z-x)};$$

par suite la formule (3 *bis*) donne

$$(4) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\mathcal{E}\frac{F_n(z)(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-b)^{n+1}(z-x)}.$$

Dans cette formule le résidu est relatif au point a, mais on peut le prendre par rapport au point b en changeant le signe; en effet, le résidu total est nul, car le dénominateur de la quantité placée sous le signe $\mathcal{E}$ est de degré supérieur de plus de deux unités à celui du numérateur. On a donc

$$\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b + \mathcal{E}_x = 0,$$

en représentant par $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{E}_b$, $\mathcal{E}_x$, pour abréger, les résidus relatifs aux points a, b, x. Or $\mathcal{E}_x$ est égal à $F_n(x)$; cette fonction, différentiée n fois, donnera un résultat nul, et l'on a

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b) = 0;$$

il sera donc permis de transporter la double parenthèse dans (12) autour de $(z-b)^{n+1}$, à la condition de changer le signe du second membre. Cette formule (4) se transforme donc comme il suit :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{(1.2\ldots n)^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\frac{d^n}{da^n}\frac{F(a)}{(a-b)^{n+1}(a-x)}\right] \\ &= \frac{-1}{(1.2\ldots n)^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\frac{d^n}{db^n}\frac{F(b)}{(b-a)^{n+1}(b-x)}\right].\end{aligned}$$

8. On peut donner un peu plus de généralité aux résultats qui précèdent et en déduire quelques conséquences intéressantes. Je suppose que l'on désire une fonction $\varphi_n(x)$ satisfaisant aux formules

$$\int\varphi_n(x)dx = 0, \quad \int x\varphi_n(x)dx = 0, \quad \ldots, \quad \int x^{n-1}\varphi_n(x)dx = 0,$$

quand on prend pour limites des intégrales, non-seulement a et b, mais encore b et c, etc. Il est clair que la solution de cette question sera donnée par la formule

$$\varphi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n(x-b)^n(x-c)^n \ldots \psi(x),$$

la fonction $\psi(x)$ étant choisie de manière à ne pas devenir infinie pour $x = a, b, c, \ldots$. Bornons-nous à considérer la fonction

$$\varphi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s}(x-c)^{n+t}.$$

Il est facile de voir qu'elle satisfait à une équation très-générale du troisième ordre et linéaire, que l'on saura par suite intégrer complétement. Si l'on pose

$$u = (x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s}(x-c)^{n+t},$$

on aura

$$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{n+r}{x+a} + \frac{n+s}{x-b} + \frac{n+t}{x-c}\right)$$

ou bien

$$\frac{du}{dx}(x-a)(x-b)(x-c) = u(n+r)(x-b)(x-c) + \ldots.$$

Si l'on différentie $n+2$ fois cette formule, on trouve

$$(x-a)(x-b)(x-c)\frac{d^{n+3}u}{dx^{n+3}} + \mathrm{P}\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}} + \mathrm{Q}\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + \mathrm{R}\frac{d^n u}{dx^n} = 0,$$

ou bien

$$(x-a)(x-b)(x-c)\frac{d^3\varphi_n}{dx^3} + \mathrm{P}\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} + \mathrm{Q}\frac{d\varphi_n}{dx} + \mathrm{R}\varphi_n = 0,$$

formule où P, Q, R sont des polynômes en x des degrés 2, 1, 0. Ces polynômes ne seront pas les plus généraux de leurs degrés, mais ils dépendront des paramètres n, r, s, t. Quant à l'équation à laquelle on parvient, elle admet les solutions

$$\int_a^b (z-a)^{n+r}(z-b)^{n+s}(z-c)^{n+t}(z-x)^{-n-1}\,dz,$$
$$\int_b^c (z-a)^{n+r}(z-b)^{n+s}(z-c)^{n+t}(z-x)^{-n-1}\,dz,$$

lors même que n n'est pas entier, et l'on peut par suite l'intégrer complétement.