

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WORMS DE ROMILLY

Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x} \frac{dV}{dx} + V = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 4 (1878), p. 177-186.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1878_3_4_177_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x} \frac{dV}{dx} + V = 0$;

PAR M. WORMS DE ROMILLY,

Ingenieur des Mines.

Considérons les quatre intégrales définies suivantes :

$$\varphi(x, \mu) = \int_0^\pi \sin(x \cos \omega) \sin^\mu \omega d\omega,$$

$$\theta(x, \mu) = \int_0^\pi \cos(x \cos \omega) \sin^\mu \omega d\omega,$$

$$\psi(x, \mu) = \int_0^\pi \sin(x \sin \omega) \cos^\mu \omega d\omega,$$

$$\tau(x, \mu) = \int_0^\pi \cos(x \sin \omega) \cos^\mu \omega d\omega.$$

Remplaçons dans les deux premières $\sin^\mu \omega$ par $\sin^{\mu-2k} \omega (1 - \cos^2 \omega)^k$, et dans les deux autres $\cos^\mu \omega$ par $\cos^{\mu-2k} \omega (1 - \sin^2 \omega)^k$, et développons les binômes, nous obtiendrons, pour les quatre fonctions, des relations analogues à

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, \mu) &= \int_0^\pi \sin(x \cos \omega) \sin^{\mu-2k} \omega \\ &\quad \left[1 - \frac{k \cos^2 \omega}{1} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \cos^4 \omega \dots \right] d\omega. \end{aligned} \right.$$

Différentions $2n$ fois, par rapport à x , la fonction φ , il vient

$$\frac{d^{2n} \varphi(x, \mu)}{dx^{2n}} = (-1)^n \int_0^\pi \sin(x \cos \omega) \sin^\mu \omega \cos^{2n} \omega d\omega;$$

la relation (1) peut donc s'écrire

$$(2) \quad \varphi(x, \mu) = \varphi(x, \mu - 2k) + \frac{k}{1} \frac{d^2 \varphi(x, \mu - 2k)}{dx^2} + \dots + \frac{d^{2k} \varphi(x, \mu - 2k)}{dx^{2k}}.$$

En effectuant les mêmes opérations sur les autres fonctions, on parviendrait à des relations de forme identique.

L'intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned} & \int \sin(x \cos \omega) \sin^\mu \omega d\omega \\ &= \frac{1}{x} \cos(x \cos \omega) \sin^{\mu-1} \omega + \frac{\mu-1}{x^2} \sin(x \cos \omega) \sin^{\mu-3} \omega \cos \omega \\ & \quad - \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2} \int \sin(x \cos \omega) \sin^{\mu-4} \omega \cos^2 \omega d\omega \\ & \quad + \frac{\mu-1}{x^2} \int \sin(x \cos \omega) \sin^{\mu-2} \omega d\omega. \end{aligned}$$

Pour $\mu = 1$ ou > 1 , les deux premiers termes du second membre s'annulent entre les limites zéro et π , et en remplaçant dans le troisième terme $\cos^2 \omega$ par sa valeur en $\sin \omega$, on trouve, après une dernière réduction,

$$\psi(x, \mu) = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2} \varphi(x, \mu-2) - \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2} \varphi(x, \mu-4).$$

Pour la fonction θ , les termes que l'on peut faire sortir du signe $\int$ sont

$$- \frac{1}{x} \sin(x \cos \omega) \sin^{\mu-1} \omega + \frac{\mu-1}{x^2} \cos(x \cos \omega) \sin^{\mu-3} \omega \cos \omega.$$

Le deuxième terme est nul, quel que soit μ ; il n'en est pas de même du premier terme qui, pour $\mu = 1$, devient égal à $+\frac{2 \sin x}{x}$; nous aurons donc

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta(x, \mu) &= \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2} \theta(x, \mu-2) \\ & \quad - \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2} \theta(x, \mu-4) + A_\mu, \end{aligned} \right.$$

A_μ étant nul, sauf dans le cas de $\mu = 1$, où il a pour valeur $+\frac{2 \sin x}{x}$.
On trouve de même

$$\begin{aligned}\tau(x, \mu) &= \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2} \tau(x, \mu-2) - \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2} \tau(x, \mu-4), \\ \psi(x, \mu) &= \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{x^2} \psi(x, \mu-2) \\ &\quad - \frac{(\mu-1)(\mu-3)}{x^2} \psi(x, \mu-4) + \frac{1 - (-1)^{\mu-1}}{x}.\end{aligned}$$

Si l'on remplace dans $\frac{d^m \varphi(x, \mu)}{dx^m}$ le facteur $\cos^m \omega$ ou le facteur $\cos^{m-1} \omega$, suivant que m est pair ou non, par sa valeur en $\sin \omega$, on obtient les relations

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d^{2n} \varphi(x, \mu)}{dx^{2n}} = (-1)^n \left[\varphi(x, \mu) - \frac{n}{1} \varphi(x, \mu+2) \right. \\ \quad \left. + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \varphi(x, \mu+4) \cdots + (-1)^n \varphi(x, \mu+2n) \right], \\ \frac{d^{2n+1} \varphi(x, \mu)}{dx^{2n+1}} = (-1)^n \left[\frac{d\varphi(x, \mu)}{dx} - \frac{n}{1} \frac{d\varphi(x, \mu+2)}{dx} + \cdots \right]. \end{cases}$$

Les relations seraient de forme identique pour θ , ψ , τ .

De ce qui précède il résulte que, connaissant les intégrales pour les valeurs 0, 1, 2, 3 de μ , on en déduira les intégrales pour une valeur quelconque de μ .

Nous remarquerons d'abord que la fonction φ est toujours nulle; car, pour deux valeurs $\frac{\pi}{2} + \omega'$, $\frac{\pi}{2} - \omega'$ de ω , le facteur $\sin(x \cos \omega)$ aura même valeur absolue et signe contraire, le facteur $\sin^\mu \omega$ aura même valeur : il est de même facile de voir que $\tau(x, \mu)$, $\psi(x, \mu)$ sont nuls quand μ est impair.

Quand μ est pair, θ et τ ont même valeur. En effet, faisons varier dans θ , ω_1 de zéro à $\frac{\pi}{2}$, et dans τ , ω_2 de $\frac{\pi}{2}$ à π , pour une valeur intermédiaire ω' ; on aura

$$\omega_1 = \omega', \quad \omega_2 = \frac{\pi}{2} + \omega',$$

$$d\theta = \cos(x \cos \omega') \sin^\mu \omega' d\omega', \quad d\tau = \cos(x \cos \omega') (-\sin \omega')^\mu d\omega'.$$

Ces deux valeurs sont égales. Prenons maintenant

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} + \omega', \quad \omega_2 = \omega',$$

$$d\theta = \cos(-x \sin \omega') (-\cos \omega')^\mu d\omega', \quad d\tau = \cos(x \sin \omega') \cos^\mu \omega' d\omega'.$$

Nous avons encore des valeurs égales; donc θ et τ ont mêmes valeurs quand μ est un nombre pair.

On a, d'autre part, immédiatement

$$\theta(x, 1) = \left[-\frac{\sin(x \cos \omega)}{x} \right]_0^\pi = \frac{2 \sin x}{x},$$

et en appliquant la formule (2), où nous ferons $h = 1$, $\mu = 3$,

$$\theta(x, 3) = \theta(x, 1) + \frac{d^2 \theta(x, 1)}{dx^2} = \frac{4}{x^2} \frac{\sin x}{x} - \frac{4 \cos x}{x^2}.$$

Il ne nous reste plus à chercher que les valeurs de θ et de ψ pour $\mu = 0$, $\mu = 2$. Or on a

$$\theta(x, 0) = \int_0^\pi \cos(x \cos \omega) d\omega = \int_0^\pi \left(1 - \frac{x^2 \cos^2 \omega}{1 \cdot 2} + \frac{x^4 \cos^4 \omega}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right) d\omega,$$

$$\begin{aligned} \theta(x, 2) &= \int_0^\pi \cos(x \cos \omega) \sin^2 \omega d\omega \\ &= \theta(x, 0) - \int_0^\pi \left(\frac{\cos^2 \omega}{1} - \frac{x^2 \cos^4 \omega}{1 \cdot 2} + \frac{x^4 \cos^6 \omega}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right) d\omega, \end{aligned}$$

et de même

$$\psi(x, 2) = \psi(x, 0) - \int_0^\pi \left(x \sin^3 \omega - \frac{x^3 \sin^5 \omega}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots \right) d\omega.$$

$$\psi(x, 0) = \int_0^\pi \left(x \sin \omega - \frac{x^3 \sin^3 \omega}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right) d\omega.$$

Or, en vertu des relations connues,

$$\int_0^\pi \cos^{2n} \omega d\omega = \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} \pi \int_0^\pi \cos^{2n+1} \omega d\omega = 0,$$

$$\int_0^\pi \sin^{2n} \omega d\omega = \frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n} \pi \int_0^\pi \sin^{2n+1} \omega d\omega = 2 \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n+1},$$

il vient

$$\begin{aligned}\theta(x, 0) &= \pi \left(1 - \frac{x^2}{1.2} \frac{1}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \frac{1.3}{2.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \frac{1.3.5}{2.4.6} \dots \right), \\ \theta(x, 2) &= \theta(x, 0) - \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{1.2} \frac{1.3}{2.4} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \frac{1.3.5}{2.4.6} \dots \right), \\ \theta(x, 2) &= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{1.2} \frac{1}{2} \frac{1}{4} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \frac{1.3}{2.4} \frac{1}{6} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \dots \right), \\ \psi(x, 0) &= 2x \left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} \frac{2}{3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} \frac{2.4}{3.5} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.7} \frac{2.4.6}{3.5.7} \dots \right), \\ \psi(x, 2) &= \psi(x, 0) - \left(x \frac{2}{3} \frac{2}{1} - \frac{x^3}{1.3.5} \frac{2}{5} \frac{2.4}{1.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \frac{2}{7} \frac{2.4.6}{1.3.5} \dots \right), \\ \psi(x, 2) &= x \left(\frac{2}{1} \frac{1}{3} - \frac{x^2}{1.2.3} \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{1}{5} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} \frac{2.4}{1.3} \frac{2}{5} \frac{1}{7} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.7} \frac{2.4.6}{1.3.5} \frac{2}{7} \frac{1}{9} \dots \right),\end{aligned}$$

Application.

Nous avons vu que l'une quelconque des fonctions φ , θ , ψ , τ , que nous désignerons par V , satisfait à la relation

$$V(x, \mu) = V(x, \mu - 2k) + \frac{k}{1} \frac{d^2V(x, \mu - 2k)}{dx^2} + \dots$$

Si nous posons $k = 1$, il vient

$$(5) \quad V(x, \mu) = V(x, \mu - 2) + \frac{d^2V(x, \mu - 2)}{dx^2}.$$

Supposons maintenant que la relation

$$(6) \quad \frac{d^2V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x} \frac{dV(x, \mu)}{dx} + V(x, \mu) = 0$$

soit satisfaite, je dis qu'en vertu de la relation (5) on aura aussi

$$(7) \quad \frac{d^2V(x, \mu+2)}{dx^2} + \frac{\mu+3}{x} \frac{dV(x, \mu+2)}{dx} + V(x, \mu+2) = 0.$$

Nous pouvons, en effet, écrire la relation (5)

$$V(x, \mu + 2) = V(x, \mu) + \frac{d^2 V(x, \mu)}{dx^2}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (7), on a

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{d^3 V(x, \mu)}{dx^3} + \frac{d^2 V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{\mu + 3}{x} \frac{dV(x, \mu)}{dx} \\ &+ \frac{\mu + 3}{x} \frac{d^2 V(x, \mu)}{dx^2} + V(x, \mu) + \frac{d^2 V(x, \mu)}{dx^2}. \end{aligned} \right.$$

Or, si nous différencions deux fois de suite la relation (6), nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{d^3 V(x, \mu)}{dx^3} + \frac{\mu + 1}{x} \frac{d^2 V(x, \mu)}{dx^2} - 2 \frac{\mu + 1}{x^2} \frac{dV(x, \mu)}{dx} \\ + 2 \frac{\mu + 1}{x^3} \frac{dV(x, \mu)}{dx} + \frac{d^2 V(x, \mu)}{dx^2} = 0, \\ \frac{d^2 V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{\mu + 1}{x} \frac{d^2 V(x, \mu)}{dx^2} - \frac{\mu + 1}{x^2} \frac{dV(x, \mu)}{dx} + \frac{dV(x, \mu)}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Multiplions la première par $\frac{2}{x}$ et ajoutons-la membre à membre à l'autre; nous trouverons

$$\frac{d^3 V(x, \mu)}{dx^3} + \frac{\mu + 3}{x} \frac{d^2 V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{d^2 V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dV(x, \mu)}{dx} = 0,$$

et, en retranchant cette équation membre à membre de l'équation (8),

$$\frac{d^2 V(x, \mu)}{dx^2} + \frac{\mu + 1}{x} \frac{dV(x, \mu)}{dx} + V(x, \mu) = 0,$$

ce qui est précisément l'équation (6) que nous avons supposée satisfaite.

Donc, si $V(x, 0)$, $V(x, 1)$ satisfont à la relation (6), il en est de même quel que soit μ .

La fonction φ étant toujours nulle, il n'y a pas lieu de la considérer; $\tau(x, 1)$, $\psi(x, 1)$ étant nuls satisfont à l'équation différentielle; $\theta(x, 1)$ substitué à V rend l'équation différentielle identiquement nulle. On

vérifie facilement que $\theta(x, 0)$ satisfait à l'équation différentielle; car, en substituant dans le premier membre la valeur de $\theta(x, 0)$ et de ses dérivées, on trouve

$$\int_0^\pi \cos(x \cos \omega) \sin^2 \omega d\omega - \frac{1}{x} \int_0^\pi \sin(x \cos \omega) \cos \omega d\omega;$$

le dernier terme est nul, le premier, intégré par parties, se réduit à

$$- \left[\frac{\sin(x \cos \omega)}{x} \sin \omega \right]_0^\pi,$$

qui est évidemment nul.

Pour $\psi(x, 0)$, on arrive à un terme

$$- \left[\frac{\cos(x \sin \omega)}{x} \cos \omega \right]_0^\pi,$$

dont la valeur est $\frac{2}{x}$; par conséquent $\psi(x, 0)$ ne satisfait pas à l'équation différentielle. Celle-ci n'est donc satisfaite que par la fonction $\theta(x, \mu)$ et par la fonction $\tau(x, \mu)$, qui est toujours nulle ou identique à $\theta(x, \mu)$.

Ainsi l'équation

$$(6) \quad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x} \frac{dV}{dx} + V = 0$$

admet toujours l'intégrale

$$(9) \quad V = A\theta(x, \mu).$$

On pourrait déduire de là, dans certains cas, l'intégrale complète. Considérons A comme fonction de x , cherchons les valeurs de $\frac{dV}{dx}$, $\frac{d^2V}{dx^2}$, et introduisons-les dans l'équation (6); celle-ci deviendra

$$A \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x} A \frac{d\theta}{dx} + A\theta + 2 \frac{dA}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \frac{\mu+1}{x} \theta \frac{dA}{dx} + \theta \frac{d^2A}{dx^2} = 0,$$

qui se réduit à

$$\theta \frac{d^2A}{dx^2} + \left(2 \frac{d\theta}{dx} + \frac{\mu+1}{x} \theta \right) \frac{dA}{dx} = 0$$

ou, en posant $\frac{dA}{dx} = B$,

$$\frac{\frac{dB}{dx}}{B} = -2 \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\theta} - \frac{\mu+1}{x}.$$

On a donc, en intégrant et désignant par k une constante arbitraire,

$$B\theta^2 x^{\mu+1} = k,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dA}{dx} = \frac{k}{\theta^2 x^{\mu+1}}, \quad A = k' + \int \frac{k dx}{x^{\mu+1} \theta^2},$$

ou enfin

$$V = k' \theta(x, \mu) + k \theta(x, \mu) \int \frac{dx}{x^{\mu+1} \theta^2(x, \mu)}.$$

Si $\mu = 1$, l'intégration se fait immédiatement, et l'on a

$$V = \frac{2k' \sin x}{x} - \frac{k \cos x}{x} = \frac{k_1 \sin x + k_2 \cos x}{x};$$

mais, en général, il serait impossible d'effectuer l'intégration.

Nous avons vu que la formule (2) permet d'exprimer $\theta(x, \mu)$ en fonction de $\theta(x, \mu - 2k)$ et de ses dérivées par rapport à x ; si μ est impair et que l'on prenne $\mu - 2k = 1$, ce qui est toujours possible, la formule (2) donne

$$\begin{aligned} (10) \quad \theta(x, \mu) &= \theta(x, 1) + \frac{\mu-1}{2} \frac{d^2 \theta(x, 1)}{dx^2} \\ &+ \frac{\frac{\mu-1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \frac{d^4 \theta(x, 1)}{dx^4} + \dots + \frac{d^{\mu-1} \theta(x, 1)}{dx^{\mu-1}}. \end{aligned}$$

De la valeur connue de $\theta(x, 1)$ on déduit

$$\begin{aligned} (11) \quad \frac{1}{2} d^{2n} \theta(x, 1) &= (-1)^n \left[\frac{\sin x}{x} + 2n \frac{\cos x}{x^2} - 2n(2n-1) \frac{\sin x}{x^3} \right. \\ &\quad \left. - 2n(2n-1)(2n-2) \frac{\cos x}{x^4} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \dots + 2n(2n-1) \dots 2 \cdot 1 \frac{\sin x}{x^{2n+1}} \right]; \end{aligned}$$

on aura donc

$$\begin{aligned} \theta(x, \mu) = & 2 \frac{\sin x}{x} \left[1 - \frac{\mu-1}{2} + \frac{\frac{\mu-1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2} - 1 \right)}{1.2} - \frac{\frac{\mu-1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2} - 1 \right) \left(\frac{\mu-1}{2} - 2 \right)}{1.2.3} \dots \right] \\ & + 2 \frac{\cos x}{x^2} \left[-\frac{\mu-1}{2} + \frac{\frac{\mu-1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2} - 1 \right)}{1.2} - \frac{\frac{\mu-1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2} - 1 \right) \left(\frac{\mu-1}{2} - 2 \right)}{1.2.3} 6\dots \right] \\ & + 2 \frac{\sin x}{x^3} \left[\frac{\mu-1}{2} - \frac{\frac{\mu-1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2} - 1 \right)}{1.2} + \frac{\frac{\mu-1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2} - 1 \right) \left(\frac{\mu-1}{2} - 2 \right)}{1.2.3} 6.5\dots \right] \\ & + 2 \frac{\cos x}{x^4} \left[-\frac{\frac{\mu-1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2} - 1 \right)}{1.2} + \frac{\frac{\mu-1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2} - 1 \right) \left(\frac{\mu-1}{2} - 2 \right)}{1.2.3} 6.5.4\dots \right] \\ & + 2 \frac{\sin x}{x^5} \left[+ \frac{\frac{\mu-1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2} - 1 \right)}{1.2} - \frac{\frac{\mu-1}{2} \left(\frac{\mu-1}{2} - 1 \right) \left(\frac{\mu-1}{2} - 2 \right)}{1.2.3} 6.5.4.3\dots \right] \\ & \dots \end{aligned}$$

$\theta(x, \mu)$ sera donc toujours de la forme

$$\varphi(x) \sin x + \psi(x) \cos x,$$

comme cela résulte évidemment des formes des équations (10) et (11).

En outre, nous savons que cette valeur de V

$$(12) \quad V_1 = k_1 [\varphi(x) \sin x + \psi(x) \cos x]$$

satisfait à l'équation différentielle donnée; nous allons démontrer que

$$(13) \quad V_2 = k_2 [\psi(x) \sin x - \varphi(x) \cos x]$$

satisfera aussi à la même équation, et par suite que l'intégrale complète sera

$$V = \sin x [k_1 \varphi(x) + k_2 \psi(x)] + \cos x [k_1 \psi(x) - k_2 \varphi(x)].$$

En effet, substituons à V la valeur (12) dans l'équation (6), on aura, en désignant les dérivées par rapport à x par des accents,

$$\begin{aligned} & k_1 (\varphi'' \sin x + \varphi' \cos x + 2\varphi' \cos x - 2\psi' \sin x - \varphi \sin x - \psi \cos x) \\ & + k_1 \frac{\mu+1}{x} (\varphi' \sin x + \psi' \cos x + \varphi \cos x - \psi \sin x) \\ & + k_1 (\varphi \sin x + \psi \cos x) = 0. \end{aligned}$$

Pour que le premier membre soit identiquement nul, quel que soit x , il faut que les facteurs de $\sin x$ et $\cos x$ soient nuls séparément; d'où

$$\varphi'' - 2\psi' - \varphi + \frac{\mu+1}{x}(\varphi' - \psi) + \varphi = 0,$$

$$\psi'' + 2\varphi' - \psi + \frac{\mu+1}{x}(\psi' - \varphi) + \psi = 0.$$

Or la substitution de V_2 à V dans (6) donnera

$$\begin{aligned} k_2(\psi'' \sin x - \varphi'' \cos x + 2\psi' \cos x + 2\varphi' \sin x - \psi \sin x + \varphi \cos x) \\ + k_2 \frac{\mu+1}{x}(\psi' \sin x - \varphi' \cos x + \psi \cos x + \varphi \sin x) \\ + k_2(\psi \sin x - \varphi \cos x) = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} k_2 \sin x [\psi'' + 2\varphi' - \psi + \frac{\mu+1}{x}(\psi' + \varphi) + \psi] \\ + k_2 \cos x [-\varphi'' + 2\psi' + \varphi + \frac{\mu+1}{x}(-\varphi' + \psi) - \varphi] = 0. \end{aligned}$$

Les facteurs de $\sin x$ et $\cos x$ étant les mêmes que plus haut, où ils étaient nuls, puisque V_1 est l'intégrale de l'équation différentielle (6), la même chose a encore lieu, et l'intégrale générale de

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{\mu+1}{x} \frac{dV}{dx} + V = 0,$$

lorsque μ est impair, sera

$$V = \sin x [k_1 \varphi(x) + k_2 \psi(x)] + \cos x [k_1 \psi(x) - k_2 \varphi(x)],$$

où φ et ψ sont déterminés par la relation

$$\theta(x, \mu) = \varphi(x) \sin x + \psi(x) \cos x,$$

et sont faciles à déterminer par les formules (10), (11) et (3).

Lorsque μ est pair, nous n'avons qu'une intégrale particulière $k\theta(x, \mu)$ et la fonction est sous forme de série.

