JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BRETON (DE CHAMP)

Mémoire sur les lignes de faîte et de thalweg que l'on est conduit à considérer en topographie

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 99-114.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__99_0>

Mémoire sur les lignes de faîte et de thalweg que l'on est conduit à considérer en topographie;

Par M. BRETON (de Champ),

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées en retraite.

Exposé de la question.

1. Le problème auquel ce Mémoire est consacré peut s'énoncer en ces termes : *Une surface étant donnée par son équation, trouver les différentes lignes, soit de faîte, soit de thalweg, qu'elle présente dans son étendue.* Lorsque je me décidai, il y a une trentaine d'années, à publier la première édition de mon *Traité du nivellement*, j'avais cherché vainement la solution de ce problème dans les ouvrages qui étaient alors le plus répandus. On comprend combien il dut m'en coûter de laisser subsister dans cette première publication une lacune de cette importance.

Quelques années plus tard, je fus conduit à reconnaître que les notions admises par les auteurs sur les faîtes et les thalwegs étaient, en réalité, souvent inexactes. Après avoir appelé l'attention des géomètres sur cet état de choses, je m'appliquai à sonder moi-même la question. Ce fut dans le courant de l'année 1867 que je parvins à démêler, pour la première fois, le véritable caractère mathématique des lignes qu'il s'agissait de trouver. Cette découverte m'a permis de donner enfin l'essai de solution du problème ci-dessus, qui forme la Note XII dans la troisième édition de mon *Traité du nivellement*, publiée en 1873.

Je me propose de développer ici cette théorie et de l'appliquer à des exemples convenablement choisis.

2. Dans tout ce qui va suivre, on supposera qu'il s'agit d'une surface rapportée à trois axes ox, oy, oz perpendiculaires entre eux; les deux premiers ox, oy seront regardés comme horizontaux, et le troisième oz comme vertical. De plus, il sera nécessaire d'avoir bien présentes à l'esprit les notions ci-après relatives aux *lignes de niveau* et aux *lignes de plus grande pente*.

3. Les lignes de niveau d'une surface sont les sections que l'on fait en la coupant par des plans horizontaux. Si l'équation de la surface proposée peut être mise sous la forme

$$(f) \qquad z = f(x, y),$$

les équations de la ligne de niveau située dans le plan ayant pour ordonnée z_0 seront

$$z = z_0, \quad f(x, y) = z_0$$

On tire de cette dernière

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

en faisant attention que, par hypothèse, z_0 est une constante. C'est là l'équation différentielle des lignes de niveau. En remplaçant par p et q les deux dérivées partielles, et en posant $dy = y'dx$, cette équation devient

$$(n) \qquad p + qy' = 0.$$

Si l'équation de la surface est

$$(\mathrm{F}) \qquad \mathrm{F}(x, y, z) = 0,$$

on obtiendra l'équation différentielle des lignes de niveau en éliminant z entre les équations

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0, \quad \frac{d\mathrm{F}}{dx} + y'\frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0.$$

4. On appelle *ligne de plus grande pente* d'une surface toute courbe qui, en chacun de ses points, a pour tangente celle des tangentes à la surface, en ce même point, qui fait le plus grand angle avec le plan

horizontal. Il est facile de conclure de cette définition que la tangente à la ligne de plus grande pente qui passe par un point m de la surface est perpendiculaire à la trace horizontale du plan tangent mené par ce point m, et qu'elle est aussi perpendiculaire à la tangente menée par ce même point à la ligne de niveau qui y passe.

De là ce théorème : *Toute ligne de plus grande pente d'une surface coupe à angle droit toutes les lignes de niveau qu'elle rencontre sur la même surface; et, réciproquement, toute courbe qui jouit de cette propriété est une ligne de plus grande pente.*

5. On peut ajouter, d'après les hypothèses admises ci-dessus, que les projections de ces deux systèmes de lignes sur le plan horizontal xoy formeront deux réseaux tels, que toute ligne de l'un coupera orthogonalement toutes les lignes de l'autre.

Il résulte de cette dernière propriété que, si l'équation de la surface proposée peut s'écrire

$$(f) \qquad z = f(x, y),$$

de sorte que l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de niveau soit

$$(n) \qquad p + qy' = 0,$$

comme on l'a vu ci-dessus, l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente sera

$$(i) \qquad py' - q = 0.$$

En effet, si l'on multiplie la valeur de y' tirée de cette équation par celle que donne la précédente, et qu'au produit on ajoute l'unité, on obtient pour somme zéro; ce qui est, comme on le sait, la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes de ces deux systèmes se coupent orthogonalement.

Si l'équation de la surface doit être employée sous la forme

$$(F) \qquad F(x, y, z) = 0,$$

on aura pour l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente, par un raisonnement semblable,

$$y'\frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dy} = 0.$$

Il restera à éliminer z entre cette dernière équation et celle de la surface. L'équation finale ainsi obtenue pourra être mise sous la forme

$$(\varphi) \qquad \varphi(x, y, y') = 0.$$

Toutes les fois que, dans la suite de ce travail, il s'agira de l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente d'une surface, on devra entendre par là une équation telle que (φ), ramenée, comme je viens de l'expliquer, à ne renfermer que x, y et y', sans z.

Caractère géométrique par lequel les lignes de faîte et de thalweg se distinguent essentiellement des lignes ordinaires de plus grande pente.

6. Lorsqu'on cherche à se rendre compte de la manière dont est composé le réseau des lignes de plus grande pente d'une surface, on arrive bientôt à reconnaître dans l'étendue de celle-ci un certain nombre de régions distinctes, auxquelles nous donnerons le nom de *versants*, à cause de leur analogie avec les versants naturels, qui jouent un si grand rôle dans le système orographique et hydrographique d'une contrée.

Nous ajouterons, en poursuivant cette analogie, que chacun de ces versants *géométriques* se termine dans sa partie supérieure à une ligne de faîte, et dans sa partie inférieure à une ligne de thalweg.

Ces lignes de faîte et de thalweg appartiennent au réseau des lignes de plus grande pente de la surface; mais elles se distinguent essentiellement des autres lignes de ce réseau, c'est-à-dire des lignes ordinaires de plus grande pente, par un caractère géométrique dont l'importance ne saurait être méconnue.

7. Considérons, pour fixer les idées, une ligne de faîte séparan deux versants opposés. Toute ligne ordinaire de plus grande pente issue d'un point situé sur l'un de ces versants, aussi près qu'on le voudra de cette ligne de faîte, descend, en s'éloignant de cette dernière, plus ou moins rapidement, pour se rapprocher finalement de la ligne de thalweg qui règne à la base du versant. On peut raisonner d'une manière analogue sur les lignes ordinaires de plus grande pente qui, ayant leur point de départ dans le voisinage d'une ligne de thalweg, remontent en suivant les déclivités des deux versants qu'elle sépare, vers les lignes de faîte qui couronnent ces mêmes versants.

Ainsi donc, toute ligne ordinaire de plus grande pente traverse dans sa largeur le versant dans lequel elle pénètre, s'éloignant du faîte pour se rapprocher du thalweg, ou inversement; mais rien de semblable n'a lieu pour les lignes de faîte et de thalweg, qui sont les limites séparatives des différents versants dont se compose la surface.

Sous quelle forme ce caractère se retrouve dans l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente.

8. L'hypothèse la plus large que l'on puisse faire, au sujet de la relation que l'on doit concevoir comme existant entre l'abscisse x et l'ordonnée y d'un point de la projection horizontale d'une ligne de faîte ou de thalweg, consiste à la représenter par une équation d'ordre indéfini

$$(\psi) \qquad \psi(x, y, y', y'', y''', \ldots) = 0,$$

entre x, y, y' et un certain nombre de dérivées $y'', y''', \ldots$, en faisant

$$d^2y = y''dx^2, \; d^3y = y'''dx^3, \; \ldots.$$

D'après ce qui a été expliqué ci-dessus, cette équation ne subsistera que pour certaines lignes de plus grande pente, et *non pour toutes indistinctement*, comme il arrive pour l'équation

$$(\varphi) \qquad \varphi(x, y, y') = 0.$$

Comme il sera toujours possible de tirer de celle-ci y' en fonction de

x et de y, la substitution de cette valeur dans (ψ) en fera disparaître y'. En différentiant ensuite (φ) par rapport à x, et faisant la même substitution dans le résultat, on aura y'' en fonction de x et de y, et l'on pourra également faire disparaître de (ψ) cette dérivée. Il est clair qu'en continuant ainsi de proche en proche on arrivera à une transformée

$$(\Psi) \qquad \Psi(x, y) = 0,$$

qui ne renfermera plus que x et y. Cette dernière équation devra vérifier l'équation différentielle

$$(\varphi) \qquad \varphi(x, y, y') = 0,$$

qui s'applique à *toutes* les lignes de plus grande pente. Elle en sera donc une *intégrale,* et cette intégrale, d'après la nature même des opérations par lesquelles on l'aura obtenue, *ne renfermera pas de constante arbitraire.*

Cette équation (φ) pourra d'ailleurs être vérifiée en égalant à zéro, non-seulement la fonction (Ψ), mais aussi celles de ses dérivées totales qui s'y trouveront associées. Enfin il pourra être utile aussi de recourir à celles de l'équation (φ) [*].

9. On peut donc énoncer ce théorème: *Les équations des projections horizontales des lignes de faîte et de thalweg d'une surface sont nécessairement comprises parmi celles des intégrales de l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente de cette surface, qui peuvent être obtenues sans passer par l'intégrale générale de cette équation.*

Les exemples qui vont être présentés montreront comment ce théorème doit être entendu et appliqué. Ils achèveront en même temps d'éclaircir ce qui aurait pu paraître obscur dans l'exposé ci-dessus.

---

[*] Cette remarque a été omise, par inadvertance, dans la Note XII de mon *Traité du nivellement* (troisième édition, 1873).

PROBLÈME I.

Trouver les lignes de faîte et de thalweg de l'ellipsoïde qui a pour équation

$$\text{(F)} \qquad F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

10. Pour obtenir l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente d'une surface dont l'équation est ainsi présentée, il faut (**5**) éliminer z entre les deux équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad y' \frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dy} = 0;$$

ce qui donne

$$(\varphi) \qquad \varphi(x, y, y') = \frac{y'x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 0.$$

Cette équation a pour intégrale générale

$$y^{b^2} = (\gamma x)^{a^2},$$

γ désignant une constante arbitraire. Mais cela ne nous dit point quelles sont les valeurs de cette constante qui répondent à la question proposée.

D'après notre théorème (**9**), nous remarquerons qu'il se présente immédiatement deux manières de vérifier l'équation $\varphi(x, y, y') = 0$. L'une consiste à faire $y = 0$ et $y' = 0$, ce qui a lieu pour la section principale contenue dans le plan zox; l'autre à faire $x = 0, y' = \infty$, ce qui a lieu pour la section principale contenue dans le plan yoz.

11. Chacun de ces plans partage la surface en deux versants symétriques, séparés par une ligne de faîte au-dessus du plan xoy et par une ligne de thalweg au-dessous de ce plan.

Problème II.

Trouver les lignes de faîte et de thalweg de la surface cylindrique qui a pour équation

$$(\mathrm{F}) \qquad \mathrm{F}(x, y, z) = \frac{(x - mz)^2}{a^2} + \frac{(y - nz)^2}{b^2} - 1 = 0$$

12. Ici nous avons (**5**) à éliminer z entre les équations

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0, \quad y' \frac{d\mathrm{F}}{dx} - \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0.$$

Cette dernière donne, en faisant les opérations indiquées,

$$y' \frac{x - mz}{a^2} - \frac{y - nz}{b^2} = 0;$$

d'où

$$z = \frac{b^2 xy' - a^2 y}{b^2 my' - a^2 n}, \quad x - mz = \frac{a^2(my - nx)}{b^2 my' - a^2 n}, \quad y - nz = \frac{b^2 y'(my - nx)}{b^2 my' - a^2 n}.$$

Ces expressions de $x - mz$ et de $y - nz$ étant substituées dans l'équation de la surface, il vient, pour l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente,

$$(\varphi) \quad \varphi(x, y, y') = (a^2 + b^2 y'^2)(my - nx)^2 - (b^2 my' - a^2 n)^2 = 0.$$

Cette dernière ne nous offrant immédiatement aucune intégrale de la nature de celles que suppose l'énoncé du théorème auquel nous avons été conduit (**9**), nous égalerons à zéro (**8**) la dérivée du premier membre de cette équation prise par rapport à x, en regardant y et y' comme des fonctions de x; il vient ainsi

$$(\varphi') \qquad \left\{ \begin{aligned} &[(my - nx)^2 y' - nx(b^2 my' - a^2 n)] b^2 y'' \\ &\quad + (my - nx)(my' - n)(a^2 + b^2 y'^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

13. On satisfait à cette équation en posant

$$my' - n = 0, \quad y'' = 0;$$

cette dernière égalité est une conséquence de la première.

De ce que l'on a $y'' = 0$, nous devons conclure que les lignes cherchées sont en projection horizontale des lignes droites. La relation $my' - n = 0$ nous apprend que ces lignes sont parallèles à la droite dont les projections horizontales ont pour équations

$$x = mz, \quad y = nz;$$

et il s'ensuit, par une conséquence facile à saisir, que les lignes cherchées ne peuvent être que des génératrices de la surface.

Pour déterminer quelles sont ces génératrices, il suffit de substituer dans l'équation (φ), au lieu de y', sa valeur tirée de la relation $my' - n = 0$; il vient ainsi

$$(a^2m^2 + b^2n^2)(my - nx)^2 - (a^2 - b^2)^2 m^2n^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$my - nx = \pm \frac{(a^2 - b^2)mn}{\sqrt{a^2m^2 + b^2n^2}} \quad \text{et} \quad y = \frac{n}{m}x \pm \frac{(a^2 - b^2)n}{\sqrt{a^2m^2 + b^2n^2}}.$$

La question admet donc deux solutions, lesquelles répondent respectivement à deux génératrices de la surface proposée.

Ce sont là les équations des projections horizontales des lignes demandées. D'après ce qui précède, ces équations vérifient l'équation $\varphi(x, y, y') = 0$ de la projection horizontale des lignes de plus grande pente.

Pour achever de déterminer ces génératrices, nous rappellerons qu'elles ne peuvent être des lignes de faîte ou de thalweg, que si elles satisfont à la condition de couper orthogonalement les sections horizontales qu'elles rencontrent. Considérons dans le plan xoy l'ellipse représentée par l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0,$$

qui répond à $z=0$; l'élément de cette courbe, au point qui a pour coordonnées x_0, y_0, fait avec l'axe ox un angle dont la tangente trigonométrique a pour expression

$$-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

La projection horizontale de la génératrice passant par le même point fait avec le même axe ox un angle qui a pour tangente trigonométrique $\frac{n}{m}$. Pour que cette projection soit perpendiculaire à l'élément cherché, il faut que l'on ait

$$-\frac{n}{m}\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}+1=0.$$

De cette relation et de l'équation ci-dessus on tire

$$x_0=\frac{\pm a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2+b^2 n^2}},\quad y_0=\frac{\pm b^2 n}{\sqrt{a^2 m^2+b^2 n^2}},$$

expressions qui satisfont à la relation

$$m y_0 - n x_0 = \mp\frac{(a^2-b^2)\,mn}{\sqrt{a^2 m^2+b^2 n^2}},$$

comme on devait s'y attendre.

14. Dans ce problème, la surface proposée se divise en deux versants. La ligne de faite mm', d'une part, et la ligne de thalweg nn', d'autre part, situées dans un même plan diamétral, déterminent ce partage. Toute ligne de plus grande pente $aa'a''$, qui part d'un point a voisin de la ligne de faite mm', et situé à droite de cette ligne, est formée en projection horizontale de deux branches réunies par un point de rebroussement a' qui se trouve du même côté sur le contour apparent de la surface. A gauche de la ligne de faîte, toute ligne de plus grande pente $bb'b''$ présente en projection horizontale deux branches réunies par un point de rebroussement b' situé sur le contour apparent de la surface, pareillement à gauche de la ligne de faîte. Les portions des lignes de plus grande pente situées sur la partie convexe de la surface, doivent être considérées comme extérieures à celle-ci. Les autres branches avec la ligne de thalweg doivent être considérées comme *intérieures*.

Problème III.

Trouver les lignes de faîte et de thalweg de la surface conique qui a pour équation

$$(\mathrm{F}) \qquad \mathrm{F}(x, y, z) = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{z}{x} = 0,$$

f désignant une fonction quelconque.

15. La surface représentée par cette équation a pour sommet l'origine des coordonnées. Pour simplifier l'écriture, remplaçons $\frac{y}{x}$ par α. L'équation

$$(5) \qquad y' \frac{d\mathrm{F}}{dx} - \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0$$

donne

$$y'\left[-\frac{\alpha}{x} f'(\alpha) + \frac{z}{x^2}\right] + \frac{1}{x} f'(\alpha) = 0.$$

On trouve, après avoir supprimé x, qui est dénominateur commun, et remplacé $\frac{z}{x}$ par $f(\alpha)$, en vertu de l'équation (F),

$$(\varphi) \qquad \varphi(x, y, y') = y'[f(\alpha) - \alpha f(\alpha)] + f'(\alpha) = 0.$$

Si maintenant (**8**) nous égalons à zéro, comme nous l'avons fait (**12**) dans le Problème II, la dérivée de cette équation (φ), prise en regardant y et y' comme deux fonctions de x, il vient

$$(\varphi') \qquad y''[f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)] - \frac{1 + \alpha y'}{x}(y' - \alpha) f''(\alpha) = 0.$$

On satisfait immédiatement à cette dernière équation en posant

$$y' - \alpha = 0, \quad y'' = 0.$$

La première de ces deux conditions nous apprend que les valeurs de z qui résolvent la question sont les racines de l'équation

$$\alpha f(\alpha) = (1 + \alpha^2) f'(\alpha) = 0,$$

à laquelle on est conduit, en faisant $y' = \alpha$ dans l'équation (φ). La condition $y'' = 0$ signifie que les lignes cherchées sont nécessairement des génératrices de la surface.

16. Ces génératrices jouissent, comme cela doit être, de la propriété de couper à angle droit les lignes de niveau de la surface. En effet, l'équation différentielle de la projection horizontale de ces lignes de niveau, laquelle s'obtient (3) par l'élimination de z entre les équations

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} = 0,$$

est

$$(y' - \alpha) f'(\alpha) + f(\alpha) = 0,$$

et l'on doit avoir

$$\alpha y' + 1 = 0.$$

Or il est facile de s'assurer que l'on a

$$\alpha y' + 1 = -\frac{\alpha f(\alpha) - (1 + \alpha^2) f'(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

et nous savons par l'équation précédente (15) que le numérateur de cette expression est égal à zéro.

On conclut de ce qui précède que les lignes de faîte et de thalweg d'une surface conique sont celles d'entre les génératrices de cette surface qui coupent à angle droit le contour de sa base.

La division de la surface en versants donne lieu à diverses remarques, analogues à celles qui terminent (14) le *Problème II*.

17. Il n'aura certainement pas échappé au lecteur qu'il existe une seconde manière de satisfaire à l'équation

$$(\varphi') \qquad y''[f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)] - \frac{1+\alpha y'}{x}(y'-\alpha)f''(\alpha)$$

elle consiste à poser

$$1+\alpha y' = 0, \quad y'' = 0.$$

L'équation (φ) se réduit alors à $\frac{f(\alpha)}{x} = 0$, ce qui exige que l'on ait $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, quel que soit α, et par conséquent $z = 0$, auquel cas tous les points de la surface sont dans le plan xoy. Il ne s'agit plus, à proprement parler, d'une surface conique.

Problème IV.

Trouver les lignes de faite et de thalweg de la surface qui a pour équation

$$(\mathrm{F}) \qquad \mathrm{F}(x, y, z) = (x - \mathrm{R}\cos\zeta)^2 + (y - \mathrm{R}\sin\zeta)^2 - r^2 = 0.$$

(Cette surface est celle qu'engendre une circonférence de cercle horizontale de rayon r, dont le centre est assujetti à demeurer à la distance R, supposée constante de l'axe oz, tandis que la projection horizontale de cette ligne R fait un angle variable ζ avec l'axe ox, ζ étant une fonction assignée de l'ordonnée z du plan de la circonférence génératrice).

18. Cela posé, l'équation ci-dessus donne

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} = 2(x - \mathrm{R}\cos\zeta), \quad \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 2(y - \mathrm{R}\sin\zeta);$$

par suite l'équation (5)

$$y'\frac{d\mathrm{F}}{dx} - \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0,$$

devient

$$y'(x - \mathrm{R}\cos\zeta) - (y - \mathrm{R}\sin\zeta) = 0.$$

On en tire

$$x - \mathrm{R}\cos\zeta = \frac{y - \mathrm{R}\sin\zeta}{y'}.$$

Cette expression de $x - \mathrm{R}\cos\zeta$ étant substituée dans l'équation de la surface, il en résulte

$$y - \mathrm{R}\sin\zeta = \frac{ry'}{\sqrt{1y+'^2}} \quad \text{et} \quad x - \mathrm{R}\cos\zeta = \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}},$$

d'où

$$\mathrm{R}\sin\zeta = y - \frac{ry'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}\cos\zeta = x - \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Ces deux dernières équations donnent, à cause que $\sin^2\zeta + \cos^2\zeta = 1$,

$$\mathrm{R}^2 = x^2 + y^2 + r^2 - \frac{2r(x + yy')}{\sqrt{1+y'^2}};$$

nous pouvons écrire, en conséquence,

$$(\varphi) \qquad \varphi(x, y, y') = x^2 + y^2 + r^2 - \mathrm{R}^2 - \frac{2r(x + yy')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0.$$

19. On aperçoit immédiatement que cette équation s'intègre lorsqu'on pose

$$x^2 + y^2 + r^2 - \mathrm{R}^2 = 0, \quad x + yy' = 0.$$

La première de ces deux conditions entraîne la seconde, qui est, abstraction faite du facteur 2, la dérivée de $x^2 + y^2 + r^2 - \mathrm{R}^2$. Elle nous apprend que les lignes cherchées ont pour projection horizontale une circonférence de cercle de rayon $\sqrt{\mathrm{R}^2 - r^2}$, dont le centre est à l'origine o des coordonnées.

20. Remarquons en passant que, dans le problème actuel, l'intégrale proprement dite de l'équation (φ) s'obtient sans difficulté. Il suffit pour cela de poser $ds = \pm\, dx\sqrt{1+y'^2}$, de sorte que ds sera la différentielle de l'arc de la projection horizontale d'une ligne de plus grande pente. En désignant par C une constante arbitraire, cette intégrale est, comme on peut s'en assurer par la différentiation,

$$x^2 + y^2 + r^2 - R^2 = e^{\pm\frac{s}{r}+C};$$

mais la connaissance de cette intégrale nous laisse dans l'ignorance sur la valeur de la constante C, comme on l'a vu déjà dans le Problème I. Si la méthode exposée dans ce Mémoire réussit, c'est précisément parce que les intégrales que l'on y emploie ne renferment pas de constantes arbitraires.

Problème V.

Trouver les lignes de faîte et de thalweg de la surface conoïde qui a pour directrice rectiligne l'axe oz et pour plan directeur le plan xoy.

21. Je dois faire observer que cet énoncé n'est pas complet. Pour achever de définir la surface, il faudrait ajouter une nouvelle condition, par exemple assujettir la génératrice à rencontrer une ligne donnée. J'ai laissé à dessein cette lacune dans l'énoncé.

L'équation de la surface peut ainsi être mise sous la forme

$$(f) \qquad z = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

en désignant par f une fonction quelconque. On en tire (5) pour l'équation de la projection horizontale des lignes de plus grande pente

$$(\varphi) \qquad py' - q = -\frac{(yy'+x)}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

ou plus simplement, en supprimant le facteur $-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right)$,

$$(\varphi) \qquad \varphi(x, y, y') = (yy' + x) = 0.$$

22. On satisfait à cette équation en coupant la surface projetée par une surface cylindrique à base circulaire, le rayon R de cette base pouvant être choisi à volonté. Ici nous sommes en présence d'une véritable indétermination. En effet, l'équation

$$yy' + x = 0$$

est, à un facteur près, la dérivée de celle-ci :

$$y^2 + x^2 - R^2 = 0.$$

23. Le partage de la surface en *versants* a lieu suivant les génératrices horizontales. Dans chaque section cylindrique ainsi obtenue, la partie convexe située au-dessus de ces génératrices est une ligne de faîte, la partie concave située au-dessous de ces mêmes génératrices est une ligne de thalweg.

Il peut sembler que dans une telle surface les génératrices les plus élevées sont aussi des lignes de faîte. Mais, en examinant la question, on reconnaît sans peine que ces génératrices, tout en marquant de véritables *culminations* de la surface, ne sont cependant pas des lignes de faîte dans le sens géométrique qu'on attache à cette expression. Par une raison semblable, les génératrices les plus basses ne sont pas des lignes de thalweg proprement dites.