JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Développements sur la question du mouvement d'un point matériel sur une surface

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 79-98.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__79_0>

Développements sur la question du mouvement d'un point matériel sur une surface;

PAR M. H. RESAL.

Cette question, ayant été traitée bien des fois, devrait être considérée comme épuisée. Je crois cependant être arrivé à quelques résultats nouveaux, que je me propose de faire connaître dans ce travail.

Pour éviter toute confusion, j'emploierai la caractéristique ∂ pour désigner les différentielles partielles, en réservant la lettre d pour caractériser les différentielles totales.

Coordonnées rectangulaires.

Soient

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la surface;

N sa réaction sur un point mobile m;

v la vitesse de ce point au bout du temps t;

$ds = v dt$ l'élément de chemin;

X, Y, Z les composantes de la force extérieure F qui agit sur le mobile, parallèles aux axes Ox, Oy, Oz;

α, β, γ et λ, μ, ν les angles que forment respectivement avec les axes ci-dessus les directions de v et de N.

On a, comme on le sait,

$$(2)\qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$(3)\qquad \cos\lambda = \pm\frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial x},\quad \cos\mu = \pm\frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial y},\quad \cos\nu = \pm\frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial z},$$

en posant, pour abréger,

$$(4)\qquad \Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

En supposant égale à l'unité la masse du point m, ce qui revient à substituer aux forces leurs accélérations, l'équation du mouvement du point en projection sur l'axe des x peut se mettre sous la forme

$$\frac{dv\cos\alpha}{dt} = X + N\cos\lambda,$$

ou, en développant,

$$(a)\qquad \cos\alpha\frac{dv}{dt} + v^2\frac{d\cos\alpha}{ds} = X + N\cos\lambda.$$

On a de même, pour les axes des y et des z,

$$(a')\qquad \cos\beta\frac{dv}{dt} + v^2\frac{d\cos\beta}{ds} = Y + N\cos\mu,$$

$$(a'')\qquad \cos\gamma\frac{dv}{dt} + v^2\frac{d\cos\gamma}{ds} = Z + N\cos\nu.$$

Les équations (a) et (a') donnent, par l'élimination de $\frac{dv}{dt}$,

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} & v^2\frac{(\cos\beta\, d\cos\alpha - \cos\alpha\, d\cos\beta)}{ds} \\ & \quad = X\cos\beta - Y\cos\alpha + N(\cos\lambda\cos\beta - \cos\mu\cos\alpha). \end{aligned}\right.$$

Soient :

ε l'angle de contingence de la courbe décrite par le mobile;

α', β', γ' les angles que forme la binormale ou axe du plan osculateur avec les axes Ox, Oy, Oz;

$\rho = \frac{ds}{\varepsilon}$ le rayon de courbure.

On a

$$(5)\qquad \varepsilon\cos\gamma' = \cos\beta\, d\cos\alpha - \cos\alpha\, d\cos\beta \text{ [*]},$$

et l'équation (a) peut se mettre sous la forme suivante :

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned} &\frac{v^2}{\rho}\cos\gamma' = \mathrm{X}\cos\beta - \mathrm{Y}\cos\alpha + \mathrm{N}(\cos\lambda\cos\beta - \cos\mu\cos\alpha),\\ &\text{et de même}\\ &\frac{v^2}{\rho}\cos\beta' = \mathrm{Z}\cos\alpha - \mathrm{X}\cos\gamma + \mathrm{N}(\cos\nu\cos\alpha - \cos\lambda\cos\gamma),\\ &\frac{v^2}{\rho}\cos\alpha' = \mathrm{Y}\cos\gamma - \mathrm{Z}\cos\beta + \mathrm{N}(\cos\mu\cos\gamma - \cos\nu\cos\beta).\end{aligned}\right.$$

Si θ désigne l'angle formé par la binormale à la trajectoire avec la normale à la surface, on a

$$(c)\qquad \cos\theta = \cos\alpha'\cos\lambda + \cos\beta'\cos\mu + \cos\gamma'\cos\nu,$$

avec les relations

$$(d)\qquad \left\{\begin{aligned} &\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,\\ &\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (6) multipliées respectivement par $\cos\nu$, $\cos\mu$, $\cos\lambda$, on trouve, eu égard aux relations précédentes,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{v^2}{\rho}\cos\theta = {} & \mathrm{X}(\cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu) + \mathrm{Y}(\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu)\\ & + \mathrm{Z}(\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda).\end{aligned}\right.$$

Le premier membre de cette équation est le quotient du carré de la vitesse par le rayon de courbure géodésique; dans le second

[*] Menons en effet, par l'origine O, deux droites d'une longueur égale à l'unité et parallèles à deux tangentes consécutives, et joignons leurs extrémités; nous obtiendrons ainsi un triangle infinitésimal. La formule (5) n'exprime autre chose que l'égalité de deux expressions de la projection de l'aire de ce triangle sur le plan $x\mathrm{O}y$.

membre, le coefficient de Z, par exemple, est le cosinus de l'angle formé par la tangente à la trajectoire avec l'axe Oz [*].

On a donc ce théorème peu connu, auquel j'étais arrivé, il y a bien des années, par des considérations géométriques :

La composante de la force extérieure suivant la perpendiculaire à la vitesse, comprise dans le plan tangent, est égale au produit de la vitesse par la courbure géodésique de la trajectoire.

Si l'on ajoute entre elles les équations (a), (a'), (a''), après les avoir multipliées respectivement par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, et que l'on ait égard à la première des relations (d), on trouve

$$\begin{gathered}v^2\left(\cos\lambda\frac{d\cos\alpha}{ds}+\cos\mu\frac{d\cos\beta}{ds}+\cos\nu\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)\\ =\mathrm{X}\cos\lambda+\mathrm{Y}\cos\mu+\mathrm{Z}\cos\nu+\mathrm{N}.\end{gathered}$$

Soient α'', β'', γ'' les angles formés par la normale principale de la trajectoire avec les axes Ox, Oy, Oz; on a

$$(e)\qquad \cos\alpha''=\frac{d\cos\alpha}{\varepsilon},\quad \cos\beta''=\frac{d\cos\beta}{\varepsilon},\quad \cos\gamma''=\frac{d\cos\gamma}{\varepsilon}\ [**],$$

et l'équation précédente peut, par suite, se mettre sous la forme

$$\begin{gathered}\frac{v^2}{\rho}(\cos\alpha\cos\alpha''+\cos\beta\cos\beta''+\cos\gamma\cos\gamma'')\\ =\mathrm{X}\cos\lambda+\mathrm{Y}\cos\mu+\mathrm{Z}\cos\nu+\mathrm{N}.\end{gathered}$$

Or le coefficient de $\frac{v^2}{\rho}$ est le cosinus de l'angle formé par la normale principale à la trajectoire avec la normale à la surface, et ρ divisé

---

[*] En effet, menons, par l'origine, deux droites Oa, Ob d'une longueur égale à l'unité, respectivement parallèles à v et à N; joignons ab; élevons en O la perpendiculaire Oc au plan du triangle aOb, égale à la valeur numérique de l'aire de ce triangle : si l'on exprime que la projection de Oc sur Oz est égale à la projection de l'aire aOb sur le plan xOy, on arrive au résultat énoncé.

[**] On arrive immédiatement à ces formules (démonstration de M. Serret) en projetant successivement sur les trois axes le contour du triangle infinitésimal de la note de la page précédente.

par ce cosinus est égal au rayon de courbure Γ de la section normale à la surface passant par la direction de la vitesse.

L'équation ci-dessus peut donc se mettre sous cette forme

$$(8) \qquad N = \frac{v^2}{\Gamma} - (X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu);$$

d'où ce théorème, que l'on démontre facilement par la Géométrie :

La réaction de la surface est égale au quotient du carré de la vitesse par le rayon de courbure de la section normale menée par la direction de cette vitesse, diminué de la composante de la force extérieure normale à la surface, le sens positif de cette composante étant celui de la réaction.

Si l'on ajoute membre à membre les équations (a), (a'), (a''), après les avoir multipliées respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, on trouve

$$(9) \qquad \frac{dv}{dt} = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma,$$

comme on devait le prévoir.

Ainsi, au système des équations (a), (a'), (a''), on peut substituer le système des équations (7), (8) et (9), dont une seule d'entre elles renferme la réaction de la surface dont on pourra, par suite, trouver la valeur lorsque les éléments du mouvement seront connus.

L'équation qui, jointe à l'équation (1), doit déterminer la forme de la trajectoire, ne peut résulter que de l'élimination du temps entre les équations (7) et (9), et c'est cette élimination que nous allons faire dans le cas où la force extérieure dérive d'un potentiel $\Psi(x, y, z)$.

Nous pouvons substituer à l'équation (9) celle des forces vives qui s'en déduit, ou

$$(9') \qquad v^2 = 2\Psi + C,$$

C étant une constante.

Nous avons

$$(10) \qquad X = \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial\Psi}{\partial z}.$$

En ayant égard à la formule (c), l'équation (7) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&\frac{v^2}{ds}(\varepsilon\cos\alpha'\cos\lambda+\varepsilon\cos\beta'\cos\mu+\varepsilon\cos\gamma'\cos\nu)\\&\quad=\mathrm{X}(\cos\beta\cos\nu-\cos\gamma\cos\mu)+\mathrm{Y}(\cos\gamma\cos\lambda-\cos\alpha\cos\nu)\\&\qquad+\mathrm{Z}(\cos\alpha\cos\mu-\cos\beta\cos\lambda).\end{aligned}$$

Maintenant, dans le premier membre de cette équation, on substitue à $\varepsilon\cos\alpha'$, $\varepsilon\cos\beta'$, $\varepsilon\cos\gamma'$ leurs valeurs déduites de la formule (5) et de ses deux analogues; on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{v^2}{ds}[(\cos\gamma\, d\cos\beta-\cos\beta\, d\cos\gamma)\cos\lambda+(\cos\alpha\, d\cos\gamma-\cos\gamma\, d\cos\alpha)\cos\mu\\&\qquad\qquad+(\cos\beta\, d\cos\alpha-\cos\alpha\, d\cos\beta)\cos\nu]\\&\quad=\mathrm{X}(\cos\beta\cos\nu-\cos\gamma\cos\mu)+\mathrm{Y}(\cos\gamma\cos\lambda-\cos\alpha\cos\nu)\\&\qquad+\mathrm{Z}(\cos\alpha\cos\mu-\cos\beta\cos\lambda);\end{aligned}$$

mais on a

$$d\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=\frac{\cos\gamma\, d\cos\beta-\cos\beta\, d\cos\gamma}{\cos^2\gamma},\quad\ldots;$$

par suite,

$$\begin{aligned}&\frac{v^2}{ds}\left(\cos^2\gamma\cos\lambda\, d\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+\cos^2\alpha\cos\mu\, d\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}+\cos^2\beta\cos\nu\, d\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)\\&\quad=\mathrm{X}(\cos\beta\cos\nu-\cos\gamma\cos\mu)+\mathrm{Y}(\cos\gamma\cos\lambda-\cos\alpha\cos\nu)\\&\qquad+\mathrm{Z}(\cos\alpha\cos\mu-\cos\beta\cos\lambda),\end{aligned}$$

ou, en vertu des formules (2), (3), (9'), (10),

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}&(2\Psi+\mathrm{C})\left[\frac{dz^2}{ds^2}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dz}\right)+\frac{dx^2}{ds^2}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{dy^2}{ds^2}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{dy}\right)\right]\\&\quad=\left(\frac{dy}{ds}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}-\frac{dz}{ds}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\left(\frac{dz}{ds}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x}-\frac{dx}{ds}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial y}\\&\qquad+\left(\frac{dx}{ds}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial y}-\frac{dy}{ds}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation cherchée qui est symétrique par rapport aux coordonnées et qui ne me paraît pas avoir été donnée jusqu'à présent.

En supposant $\Psi = 0$, on obtiendra, pour l'équation différentielle des lignes géodésiques de la surface $F = 0$,

$$(12) \qquad dz^2 \frac{\partial F}{\partial x} d\left(\frac{dy}{dz}\right) + dx^2 \frac{\partial F}{\partial y} d\left(\frac{dz}{dx}\right) + dy^2 \frac{\partial F}{\partial z} d\left(\frac{dx}{dy}\right) = 0,$$

équation dans laquelle on choisira la variable la plus convenable dans la question que l'on aura à traiter.

Supposons que l'équation de la surface puisse se mettre sous la forme

$$(13) \qquad z = f(x, y);$$

nous aurons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

et, en prenant x pour variable, l'équation (12) deviendra

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Or on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2},$$

et l'équation différentielle des lignes géodésiques en projection sur le plan xOy est, par suite,

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2}\left(1 + \frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dy^3}{dx^3} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{2\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dy}{dx} \\ &\quad + \left(2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.\end{aligned}\right.$$

S'il s'agit d'une surface sinueuse, différant assez peu du plan moyen xOy pour que l'on puisse négliger les secondes puissances de z et de ses dérivées partielles premières et secondes, on voit, d'après cette équation, que la projection sur le plan moyen d'une ligne géodésique sera, aux termes du second ordre près, une ligne droite; conséquence qui pourrait peut-être avoir une certaine utilité dans l'art du nivellement.

Coordonnées cylindriques.

Conservons à N la même signification que plus haut.

Soient (*fig.* 1)

$z = mn$ l'ordonnée du point mobile m parallèle à l'axe Oz;

$r = m\mathrm{I} = On = r$ la distance du point à cet axe;

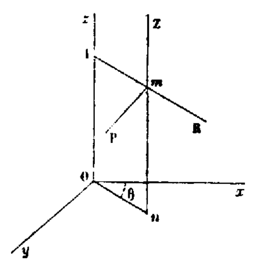
φ l'angle formé par On avec Ox;

$$\mathrm{F}(r, \varphi, z) = 0 \qquad (1)$$

l'équation de la surface fixe;

R, P, Z les composantes de la force extérieure F suivant les directions de r, de la perpendiculaire à ce rayon menée parallèlement au plan xOy, et de la parallèle en m à Oz.

Fig. 1.



Nous supposerons que la force extérieure F dérive d'un potentiel

$$\Psi(r, \varphi, z),$$

de sorte que nous aurons, pour l'expression du travail virtuel pour un déplacement quelconque,

$$\mathrm{R}\,\delta r + \mathrm{P}r\,\delta\theta + \mathrm{Z}\,\delta z = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\,\delta r + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\,\delta\varphi + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\delta z,$$

d'où

$$R = \frac{\partial\Psi}{\partial r}, \quad P = \frac{\partial\Psi}{r\partial\varphi}, \quad Z = \frac{\partial\Psi}{\partial z}. \tag{2}$$

Le principe des forces vives donne, en appelant C une constante,

$$\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}{dt^2} = 2\Psi + C,$$

et, en posant

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad u = \omega^2,$$

cette équation prend la forme

$$u\left(r^2 + \frac{dr^2 + dz^2}{d\varphi^2}\right) = 2\Psi + C. \tag{3}$$

Soient λ, μ, ν les angles formés par la direction de N avec celles de R, P, Z; on a, en exprimant que le travail virtuel de la réaction N de la surface est nul, pour un déplacement quelconque sur la surface,

$$N\cos\lambda\,\delta r + N\cos\mu . r\delta\varphi + N\cos\nu\,\delta z = 0;$$

mais on a aussi

$$\frac{\partial F}{\partial r}\delta r + \frac{\partial F}{r\partial\varphi} r\delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0,$$

d'où, par comparaison,

$$\cos\lambda = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial r}, \quad \cos\mu = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{r\partial\varphi}, \quad \cos\nu = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial z}, \tag{4}$$

en posant

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{r\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}. \tag{5}$$

L'équation du mouvement en projection sur l'axe Oz est

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N\cos\nu,$$

ou

$$\omega\frac{d\omega\dfrac{dz}{d\varphi}}{d\varphi} = Z + N\cos\nu,$$

ou encore, en développant,

$$\frac{1}{2}\frac{du}{d\varphi}\frac{dz}{d\varphi} + u\frac{d^2z}{d\varphi^2} = \mathrm{Z} + \mathrm{N}\cos\nu. \tag{6}$$

En projetant le mouvement sur le plan xOy, et prenant les moments par rapport au point O, on trouve

$$\frac{d\omega r^2}{dt} = \mathrm{P}r + \mathrm{N}r\cos\mu,$$

d'où

$$\omega\frac{d\omega r^2}{d\varphi} = \mathrm{P}r + \mathrm{N}\cos\mu r,$$

et enfin, en développant,

$$\frac{r}{2}\frac{du}{d\varphi} + 2u\frac{dr}{d\varphi} = \mathrm{P} + \mathrm{N}\cos\mu. \tag{7}$$

Si nous considérons la projection n de m sur le plan xOy comme un mobile animé d'un mouvement relatif suivant la droite indéfinie On, qui se meut avec la vitesse angulaire ω, on a (théorème de Coriolis), en remarquant que les forces d'entraînement $r\frac{d\varphi}{dt}$ et centrifuge composée sont perpendiculaires à On,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \mathrm{R} + \omega^2 r + \mathrm{N}\cos\lambda,$$

d'où, en opérant comme pour l'établissement de la formule (6),

$$\frac{1}{2}\frac{du}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi} + u\frac{d^2r}{d\varphi^2} = \mathrm{R} + ur + \mathrm{N}\cos\lambda. \tag{8}$$

Les équations (3), (6), (7), (8), dans les trois dernières desquelles on devra remplacer P, R, Z et λ, μ, ν par leurs valeurs (2) et (4), permettront d'éliminer N, u, $\frac{du}{d\varphi}$, et l'on obtiendra ainsi l'équation qui, jointe à l'équation (1), déterminera la nature de la trajectoire; mais il peut arriver qu'il devienne inutile d'employer ces quatre équations, équations dont l'une rentre dans les autres, et qu'il soit plus avantageux de substituer à l'une des trois dernières celle que l'on obtient en différentiant la première, ce qui se présente notamment dans l'un des exemples suivants.

Mouvement d'un point sur un hélicoïde gauche.

Soit

$$z = k\varphi$$

l'équation de l'hélicoïde, k étant une constante.

Comme on a $\lambda = 90^\circ$, la réaction N disparaît de l'équation (8), qu'il convient alors de joindre à l'équation (3); ces équations deviennent

$$(3') \qquad \left(r^2 + k^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2}\right) u = 2\Psi + c,$$

$$(8') \qquad \frac{du}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi} + 2u\left(\frac{dr}{d\varphi} - r\right) = 2\mathrm{R}.$$

En différentiant la première, on trouve

$$\left(r^2 + k^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2}\right)\frac{du}{d\varphi} + 2u\frac{dr}{d\varphi}\left(r + \frac{d^2r}{d\varphi^2}\right) = 2\left(\mathrm{R}\frac{dr}{d\varphi} + \mathrm{P}r + \mathrm{Q}k\right),$$

d'où, en en retranchant l'équation (8'), multipliée par $\frac{dr}{d\theta}$,

$$(9) \qquad (r^2 + k^2)\frac{du}{d\varphi} + 4ur\frac{dr}{d\varphi} = 2(\mathrm{P}r + \mathrm{Q}k),$$

équation qui, dans certains cas, pourra être substituée avec avantage à l'une des équations (3') et (8').

1° *La force qui sollicite le mobile est dirigée suivant le rayon r et est une fonction de ce rayon.*

Soit donc $\Psi = f(r)$, f étant une fonction donnée du rayon; comme on a $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$, il convient d'employer l'équation (9), qui se réduit à

$$(r^2 + k^2)\frac{du}{dr} + 4ur = 0,$$

d'où

$$u = \frac{A}{(r^2 + k^2)^2},$$

A étant une constante positive dépendant des conditions initiales du mouvement.

L'équation (3') devient alors

$$A\left(r^2 + k^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2}\right)\frac{1}{(r^2 + k^2)^2} = 2f(r) + c,$$

d'où

$$(10) \qquad \varphi = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{(r^2 + k^2)[2f(r) + c - A(r^2 + k^2)]}}.$$

Ce problème se trouve ainsi ramené à une quadrature.

Si l'on suppose $f(r) = 0$, l'équation (10) devient, en comprenant dans C la constante $-Ak^2$,

$$\varphi = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{(r^2 + k^2)(C - Ar^2)}},$$

ce qui est l'équation générale des lignes géodésiques de l'hélicoïde.

2° *L'axe de l'hélicoïde est vertical et le point mobile n'est sollicité que par la pesanteur.*

On a $Q = -g$, $R = 0$, $P = 0$, et les équations (8') et (9) deviennent

$$\frac{du}{d\varphi}\frac{dr}{d\varphi} + 2u\left(\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - r\right) = 0,$$

$$(r^2 + k^2)\frac{du}{d\varphi} + 4ur\frac{dr}{d\varphi} = -2gk,$$

d'où, par l'élimination de $\frac{du}{d\varphi}$,

$$u = \frac{-gk\frac{dr}{d\varphi}}{\left(\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - r\right)(r^2 + k^2) - 2r\frac{dr^2}{d\varphi^2}};$$

mais on a aussi

$$\left(r^2 + k^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2}\right)u = -2gk(\varphi + \alpha),$$

α étant une constante; d'où, pour l'équation cherchée,

$$\left(r^2+k^2+\frac{dr^2}{d\varphi^2}\right)\frac{dr}{d\varphi}=2(\varphi+\alpha)\left[\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}-r\right)(r^2+k^2)-2r\frac{dr^2}{d\varphi^2}\right].$$

Mouvement d'un point pesant sur la surface intérieure d'un cylindre incliné sur l'horizon.

Nous supposerons le plan xOz vertical; si i est l'angle que forme l'axe Oz du cylindre avec l'horizon, on a, pour la distance ζ du point mobile au plan horizontal passant par Oy,

$$\zeta = z\sin i + r\cos\varphi\cos i,$$

par suite

$$\Psi = g(z\sin i + r\cos\varphi\cos i),$$

$$\mathrm{P}=\frac{d\Psi}{rd\varphi}=-g\sin\varphi\cos i.$$

Supposons que le mobile parte du repos, que l'on fasse passer le plan xOy par sa position initiale, et soit φ_0 la valeur de φ correspondant à cette position. Les équations (3) et (7) nous donneront

$$u\left(r^2+\frac{dz^2}{d\varphi^2}\right)=2g[z\sin i+r(\cos\varphi-\cos\varphi_0)\cos i],$$

$$\frac{r}{2}\frac{du}{d\varphi}=-g\sin\varphi\cos i;$$

de cette dernière on tire

$$u=\frac{2g\cos i}{r}(\cos\varphi-\cos\varphi_0),$$

et, en portant cette valeur dans la première, on trouve

$$\frac{dz^2}{d\varphi^2}=\frac{r\tang iz}{\cos\varphi-\cos\varphi_0},$$

d'où

$$z=\frac{1}{4}r\tang i\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}\right]^2.$$

Formules applicables au cas où la surface est de révolution.

Soit $z = f(r)$ l'équation de la surface; comme on a $\mu = 90°$, il sera convenable d'employer les équations (3) et (7) et celle qui résulte de la différentiation de la première, ce qui donne

$$u\left\{r^2 + [1 + f'(r)^2]\frac{dr^2}{d\varphi^2}\right\} = 2\Psi + C,$$

$$\frac{r}{2}\frac{du}{d\varphi} + 2u\frac{dr}{d\varphi} = P,$$

$$\frac{1}{2}\left\{r^2 + [1 + f'(r)^2]\frac{dr^2}{d\varphi^2}\right\}\frac{du}{d\varphi} + u\left\{r\frac{dr}{d\theta} + [1 + f'(r)^2]\frac{dr}{d\varphi}\frac{d^2r}{d\varphi^2} + f(r)f'(r)\frac{dr^3}{d\varphi^3}\right\}$$
$$= R\frac{dr}{d\varphi} + Pr + Zf'(r)\frac{dr}{d\varphi}.$$

On obtiendra l'équation cherchée en éliminant entre les précédentes u et $\frac{du}{d\varphi}$.

Si $P = 0$, la seconde de ces équations donne

$$ur^4 = \text{const.}\, A,$$

ce qui devait être, en vertu du principe des aires; la troisième devient inutile, et la première donne

$$\left\{r^2 + [1 + f'(r)^2]\frac{dr^2}{d\varphi^2}\right\}\frac{A}{r^4} = 2\Psi + C.$$

On voit, d'après cela, que l'équation générale des lignes géodésiques sera de la forme

$$r^2 + [1 + f'(r)^2]\frac{dr^2}{d\theta^2} = Br^4,$$

B étant une constante.

Coordonnées sphériques.

Soient (*fig.* 2) :

$Om = r$ le rayon vecteur du mobile;
n sa projection sur le plan xOy;
φ l'angle formé par On avec Ox;
θ l'angle mOz;

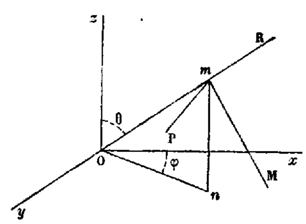
$$\text{(1)} \qquad F(r, \varphi, \theta) = 0$$

l'équation de la surface;

R, M, P les composantes de la force extérieure F suivant r, la méridienne et le parallèle;

$\Psi(r, \varphi, \theta)$ le potentiel.

Fig. 2.



Le travail élémentaire de la force F étant

$$R dr + M r d\theta + P r \sin\theta d\varphi = \frac{\partial\Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} d\theta + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} d\varphi,$$

on a les relations

$$\text{(2)} \qquad R = \frac{\partial\Psi}{\partial r}, \quad M = \frac{\partial\Psi}{r\partial\theta}, \quad P = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}.$$

Si nous désignons par λ, μ, ν les angles que forme la normale avec les directions de R, M, P, on a, en exprimant que le travail élémentaire de la réaction N est nul pour tout déplacement sur la surface,

$$N\cos\lambda\,\delta r + N\cos\mu . r\delta\theta + N\cos\nu\, r\sin\varphi\,\delta\varphi = 0;$$

mais on a aussi

$$\frac{\partial F}{\partial r}\delta r + \frac{\partial F}{r\partial\theta} r\delta\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi} r\sin\theta\,\delta\varphi = 0,$$

d'où

$$(3)\qquad \cos\lambda = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial r},\quad \cos\mu = \frac{1}{\Delta r}\frac{\partial F}{\partial\theta},\quad \cos\nu = \frac{1}{\Delta r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi},$$

en posant

$$(4)\qquad \Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)^2}.$$

Le principe des forces vives donne

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2}{dt} = 2\Psi + C,$$

et, en posant $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, $\omega^2 = u$, cette équation prend la forme suivante :

$$(5)\qquad u\left(\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{d\varphi^2} + r^2\sin^2\theta\right) = 2\Psi + C.$$

Si l'on projette le mouvement du point sur le plan xOy, et que l'on prenne les moments par rapport à l'origine, on trouve

$$\frac{d\omega r^2\sin^2\theta}{dt} = (P + N\cos\nu) r\sin\theta,$$

d'où

$$(6)\qquad \frac{1}{2}\frac{du}{d\varphi} r\sin\theta + 2u\frac{dr\sin\theta}{d\varphi} = P + N\cos\nu.$$

Le point n pouvant être considéré comme animé d'un mouvement relatif suivant la droite On qui tourne avec la vitesse angulaire ω, on a, en remarquant que les accélérations angulaire et centrifuge composées ne donnent que des composantes perpendiculaires à On,

$$\frac{d^2 r\sin\theta}{dt^2} = R\sin\theta + M\cos\theta + N(\cos\lambda\sin\theta + \cos\mu\cos\theta) + \omega^2 r\sin\theta,$$

ou

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2} r\sin\theta\frac{du}{d\varphi} + u\frac{dr\sin\theta}{d\varphi} \\ &\qquad = R\sin\theta + M\cos\theta + N(\cos\lambda\sin\theta + \cos\mu\cos\theta) + ur\sin\theta.\end{aligned}\right.$$

Enfin, en projetant le mouvement sur Oz, on a

$$\frac{d^2 r\cos\theta}{dt^2} = R\cos\theta - M\sin\theta + N(\cos\lambda\cos\theta - \cos\mu\sin\theta),$$

ou

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{r}{2}\cos\theta\frac{du}{d\varphi} + u\frac{dr\cos\theta}{d\varphi}\\ &\qquad = R\cos\theta - M\sin\theta + N(\cos\lambda\cos\theta - \cos\mu\sin\theta).\end{aligned}\right.$$

En éliminant u, $\frac{du}{dt}$ et N entre les équations (5), (6), (7), (8), dont l'une rentre dans les autres, on obtiendra l'équation cherchée.

Ces équations offrant une certaine complication, nous ne les appliquerons qu'à la recherche des lignes géodésiques tracées sur la surface d'un sphéroïde, question qui a été traitée pour la première fois par Laplace.

Si nous désignons par v la vitesse initiale, les équations (5), (6), (8), les seules dont nous ferons usage, deviennent, lorsque le mobile n'est sollicité par aucune force extérieure,

$$(5')\qquad u\left(\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{d\varphi^2} + r^2\sin^2\theta\right) = v^2,$$

$$(6')\qquad r\sin\theta\frac{du}{d\varphi} + 4u\frac{dr\sin\theta}{d\varphi} = 2N\cos\nu,$$

$$(8')\qquad r\cos\theta\frac{du}{d\varphi} + 2u\frac{dr\cos\theta}{d\varphi} = 2N(\cos\lambda\cos\theta - \cos\mu\sin\theta),$$

d'où, par l'élimination de N,

$$(9)\qquad \frac{r\sin\theta\dfrac{du}{d\varphi} + 4u\dfrac{dr\sin\theta}{d\varphi}}{r\cos\theta\dfrac{du}{d\varphi} + 2u\dfrac{dr\cos\theta}{d\varphi}} = \frac{\cos\nu}{\cos\lambda\cos\theta - \cos\mu\sin\theta}.$$

Nous n'avons plus maintenant qu'à considérer les équations (5') et (9), entre lesquelles nous devrons éliminer u.

Considérons d'abord le cas d'une sphère dont, pour simplifier, nous supposerons le rayon égal à l'unité; comme on a $\nu = 90^\circ$, l'équation (9′) devient

$$(10)\qquad \sin\theta\, du + 4u\, d\sin\theta = 0,$$

d'où

$$(11)\qquad u = \frac{h}{\sin^4\theta},\quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{4h\cos\theta}{\sin^5\theta} = -4u\cot\theta,$$

h désignant une constante. En portant la valeur de u dans l'équation (5′), on trouve

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} d\varphi &= \frac{d\theta}{\pm\sin\theta\sqrt{\frac{v^2}{h}\sin^2\theta - 1}} = \frac{d\theta}{\pm\sin\theta\sqrt{\left(\frac{v^2}{h} - 1\right) - \cos^2\theta}} \\ &= \pm\frac{\frac{d\theta}{\sin^2\theta}}{\sqrt{\frac{v^2}{h} - 1 - \cot^2\theta}}; \end{aligned}\right.$$

d'où, en appelant α une nouvelle constante,

$$(13)\qquad \left(\frac{v^2}{h} - 1\right)\sin(\varphi + \alpha) = \cot\theta,$$

qui est bien l'équation polaire d'un plan passant par l'origine des coordonnées.

Abordons maintenant la question des sphéroïdes, et soit

$$r = 1 + \varepsilon$$

l'équation de la surface de l'un de ces solides, ε étant une fonction de θ et φ, qui ne peut prendre que des valeurs assez petites pour que l'on puisse en négliger la seconde puissance; nous supposerons également que les dérivées partielles de ε sont du même ordre de grandeur que cette fonction.

Nous avons ici $F = r - (1 + \varepsilon)$; par suite, au degré d'approximation convenu,

$$(14)\qquad \cos\lambda = 1,\quad \cos\mu = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta},\quad \cos\nu = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}.$$

L'équation (9) peut d'abord se réduire à la suivante, en prenant maintenant θ pour variable :

$$(1+\varepsilon)\sin\theta\,\frac{du}{d\theta} + 4u\,\frac{d(1+\varepsilon)\sin\theta}{d\theta} = \frac{\cos\nu}{\cos\theta}\left(-2u\sin\theta + \cos\theta\,\frac{du}{d\varphi}\right),$$

ou, en remarquant que l'on a

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{d\theta} = -\left(\cos\mu + \cos\nu\sin\theta\,\frac{d\varphi}{d\theta}\right),$$

et, développant,

$$\begin{aligned}\sin\theta\,\frac{du}{d\theta} &+ 4u\,\frac{d\sin\theta}{d\theta}\\ &= \frac{du}{d\theta}(\cos\nu - \varepsilon\sin\theta) + 2u\Big(2\sin\theta\cos\mu - 2\varepsilon\cos\theta - \cos\nu\,\mathrm{tang}\,\theta\\ &\qquad + 2\cos\nu\sin^2\theta\,\frac{d\varphi}{d\theta}\Big).\end{aligned}$$

Au degré d'approximation convenu, on peut, d'après la seconde des formules (11), remplacer, dans le second membre de cette équation, $\frac{du}{d\theta}$ par $-4u\cot\theta$, et il vient alors

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}&\sin\theta\,\frac{du}{d\theta} + 4u\,\frac{d\sin\theta}{d\theta}\\ &\quad = 2u\left[2\sin\theta\cos\mu - \cos\nu(\mathrm{tang}\,\theta + 2\cot\theta) - 2\cos\nu\sin^2\theta\,\frac{d\varphi}{d\theta}\right].\end{aligned}\right.$$

Enfin, en remplaçant, dans le même membre, u et $\frac{d\varphi}{d\theta}$ par leurs valeurs (11) et (12), on trouve

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}&\sin\theta\,\frac{du}{d\theta} + 4u\,\frac{d\sin\theta}{d\theta}\\ &\quad = \frac{2h}{\sin^4\theta}\left[2\cos\theta\cos\mu - \cos\nu(\mathrm{tang}\,\theta + 2\cot\theta) \mp \frac{2\cos\nu\sin\theta}{\sqrt{\frac{c^2}{h}\sin^2\theta - 1}}\right].\end{aligned}\right.$$

Si, dans les expressions des $\cos\mu$ et $\cos\nu$, on peut éliminer l'angle φ au moyen de l'équation (13), on aura une équation linéaire en u que l'on intégrera; on développera ensuite les exponentielles en série, en s'arrêtant aux premiers termes de l'ordre du second membre; on substituera ensuite la valeur de u dans l'équation (3') qui, dans le cas actuel, donne

$$(17) \qquad \varphi = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{\nu^2(1-2\varepsilon)}{u} - \sin^2\theta}},$$

ce qui fera connaître φ en fonction de θ.

Supposons, par exemple, que l'on fasse passer le plan zOx par deux points de la courbe ou par la tangente en l'un de ses points, sauf à déterminer les constantes en conséquence; φ et $\frac{d\varphi}{d\theta}$ seront de l'ordre de ε; $\cos\mu$ et $\cos\nu$, dans l'équation (14), seront, par suite, indépendants de φ, et l'on aura

$$(18) \quad \sin\theta \frac{du}{d\theta} + 4u \frac{d\sin\theta}{d\theta} = 2u[2\sin\theta\cos\mu - (\tang\theta + 2\cot\theta)\cos\nu].$$

Nous pourrons représenter u par la première des formules (11), en considérant h comme une fonction de θ, ce qui nous donnera

$$\frac{dh}{h} = \frac{2}{\sin\theta}[2\cos\theta\cos\mu - (\tang\theta + 2\cot\theta)\cos\nu],$$

$$h = \mathrm{H} e^{2\int[2\cos\theta\cos\mu - (\tang\theta + 2\cot\theta)\cos\nu]\,d\theta},$$

H étant une constante, et le problème se trouve ainsi résolu.