JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALLÉGRET

Note sur le problème des trois corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 422-425.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__422_0>

Note sur le problème des trois corps;

Par M. ALLÉGRET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

Dans les remarques critiques publiées dans le numéro de juillet du *Journal de Mathématiques* (t. III, p. 216), M. Émile Mathieu m'attribue une méthode toute différente de celle qui est exposée à la fin de mon Mémoire sur le problème des trois corps (*Journal de Mathématiques*, t. I, p. 277). Je regrette d'être obligé de me défendre d'avoir pris pour *intégrales*, ou comme des *quantités invariables avec le temps*, les sommes d'aires momentanées comptées dans les plans mobiles dont il est question au dernier Chapitre de ce Mémoire. Mais, si M. Mathieu veut prendre la peine de lire avec plus d'attention le n° 51 dudit Chapitre (p. 315), il reconnaîtra, je ne puis en douter, que l'opinion qu'il me prête est sans fondement. Les quantités désignées par C, F et G sont des constantes arbitraires par rapport aux variables de l'équation (45) où le temps n'entre pas, mais rien n'empêche de supposer aussi ces quantités C, F et G fonctions du temps. La solution S continue à convenir au problème des trois corps, pourvu seulement que la dérivée partielle de S par rapport au temps soit nulle. Or, si l'on remplace, par exemple, C, F et G par des fonctions qui satisfassent identiquement à la seconde ligne des équations (48), savoir

$$\frac{\partial V}{\partial C} = \chi_0 - \chi, \quad \frac{\partial V}{\partial F} = \rho_0 - \rho, \quad \frac{\partial V}{\partial G} = \varpi_0 - \varpi,$$

et qu'ajoutant à S une constante convenable on mette cette dernière quantité sous la forme

$$S = C(\chi - \chi_0) + F(\rho - \rho_0) + G(\varpi - \varpi_0) + V,$$

on s'assure que $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$. S est alors une solution de l'équation primordiale aux dérivées partielles, où les six variables $s, \sigma, \omega, \chi, \rho$ et ϖ sont indépendantes du temps; par suite, la variabilité de C, F et G, que j'ai admise, est ainsi facilement justifiée.

J'ai dit d'ailleurs formellement que ces quantités C, F et G sont uniquement fonctions des trois angles φ, ψ et ν qui déterminent à chaque instant dans l'espace la position variable du triangle des trois corps. Attribuer aux trois premières quantités une constance absolue reviendrait donc à supposer aussi la constance des trois derniers angles, ce qui est une absurdité manifeste. Enfin comment pourrait-on concilier l'opinion que me prête M. Mathieu avec ces paroles de mon Mémoire (*loc. cit.*) :

« Lorsque les éléments du triangle des trois corps seront connus au moyen de la solution singulière V et des trois premières équations (48), on devra faire varier les angles φ, ψ et ν (c'est-à-dire évidemment déterminer leurs valeurs en fonction du temps), AINSI QUE LES FONCTIONS DÉSIGNÉES PAR C, F et G, etc. »?

J'espère que M. Mathieu reconnaîtra qu'il s'est tout à fait trompé en me reprochant une aussi grossière erreur. Je vais maintenant examiner son objection relative à l'emploi des variables χ, ρ et ϖ qui n'auraient pas, selon lui, *de véritables différentielles*. Si mon contradicteur a voulu entendre par là que ces trois variables ne doivent pas être assimilées aux coordonnées ordinaires et susceptibles de déterminer dans l'espace la position des corps, il n'était pas besoin d'appuyer une assertion aussi évidente de l'autorité d'un fragment posthume et fort obscur de la deuxième édition de la *Mécanique analytique*. Je n'ai point prétendu le contraire; je me suis contenté d'admettre implicitement (par suite des équations différentielles entre les variables considérées et de leurs intégrales correspondantes) qu'il existe entre les six coordonnées ordinaires du problème, les trois nouvelles variables auxiliaires χ, ρ et ϖ, et certaines constantes arbitraires, en nombre suffisant, des relations inconnues, mais possibles. J'ai pu dès lors penser, contrairement à l'opinion de M. Mathieu, que les formules relatives aux changements de variables indépendantes, et par suite aussi les transformations d'Hamilton et de Lagrange, inverses l'une de l'autre, subsistent encore, sous la réserve toutefois que les constantes arbitraires dont il s'agit appartiennent à une même solution complète de l'équation fondamentale d'Hamilton. Ces relations inconnues ont pour effet de diminuer les constantes arbitraires de la solution complète, qui devient nécessairement par l'introduction des nouvelles variables χ, ρ et ϖ, une *solution singulière*. Cette remarque détruit toute l'argumentation de M. Mathieu, car la méthode visiblement erronée qu'il m'attribue ne conviendrait qu'à une solution complète, laquelle ne saurait ici être en question (*voir* notamment l'introduction et la fin du n° **32** de mon Mémoire). Mais, si M. Mathieu rejetait absolument l'emploi des variables χ, ρ et ϖ comme incompatible avec quelque solution singulière et convenable du problème, il commettrait lui-même une erreur très-grave. Qu'il veuille bien, en effet, se reporter à l'équation (45) qu'il incrimine, il verra que cette équation admet une solution immédiate, celle pour laquelle S est indépendante de χ, ρ et ϖ. On l'obtient en faisant $\chi' = \rho' = \varpi' = 0$ et l'on retrouve la solution donnée par l'ensemble des équations (30) et (31) de mon Mémoire, laquelle est inattaquable. Ainsi, au point de vue des solutions singulières, qui sont ici tout aussi acceptables que les solutions complètes, l'emploi des variables χ, ρ et ϖ, que M. Mathieu condamne, est parfaitement légitime.

J'ajoute enfin, pour répondre à une assertion fort hasardée du commencement de sa Note, que le dernier Chapitre de mon Mémoire est loin d'avoir l'importance que mon contradicteur lui attribue.

Si l'on considère, en effet, que dans les deux Chapitres qui précèdent le dernier, il a été démontré l'existence d'une solution singulière de l'équation

$$U - T = H,$$

il devient aisé de reconnaître que cette solution s'étend au cas général, en rendant variable la quantité H supposée tout d'abord constante. Cette hypothèse ne fait que transformer la solution précédente en une nouvelle solution singulière qui convient encore au problème. Les quatre équations des aires et des forces vives permettent ensuite, par la méthode du n° **47**, de former de nouvelles équations différentielles du premier ordre entre les quatre variables H, φ, ψ et ν et par l'intégration on aurait ensuite la solution la plus générale du problème des trois corps.

Je n'ai pas cru devoir m'arrêter, il est vrai, à l'exposition de cette méthode, qui se présentait d'elle-même comme une conséquence de ma théorie des solutions singulières et générales des équations aux dérivées partielles (voir *Journal de Mathématiques*, t. III, p. 259). Si j'ai préféré exprimer la variabilité de H en introduisant dans U quelques nouveaux termes, c'est afin de conserver à H la valeur de la constante absolue des forces vives. C'est là le but unique du dernier Chapitre de mon Mémoire. Mais, en supposant que la méthode qui y a été suivie soit défectueuse en quelque point, ce que j'ignore, il serait à coup sûr excessif et peut-être injuste de nier, à propos d'une question d'un intérêt théorique d'ordre secondaire, le pas fait vers la solution du problème des trois corps, en signalant pour la première fois une solution singulière qui ne dépend pas de la position des axes coordonnés. Cette solution mettrait assurément, si elle pouvait être obtenue, sur la voie du résultat définitif. C'est là, selon moi, contrairement encore à l'opinion de M. Mathieu, le point capital de mon Mémoire, et je crois l'avoir dit fort clairement et dans l'introduction et dans le cours même de mon travail. J'aurais été bien aise que M. Émile Mathieu eût constaté ce léger mais incontestable progrès, de même que je voudrais pouvoir reconnaître quelque chose de fondé dans ses observations. En essayant de nous éclairer mutuellement, nous pourrons toujours du moins, M. Mathieu et moi, montrer au public, dans une discussion courtoise, qu'il est possible de concilier les égards que se doivent deux collègues avec une recherche scrupuleuse de la vérité géométrique.