JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN FRANKE

Sur la courbure des surfaces réciproques

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 415-421.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__415_0>

Sur la courbure des surfaces réciproques;

Par M. Jean FRANKE,

Professeur à l'École Polytechnique de Lemberg.

I.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = X + \theta a, \\ y = Y + \theta b, \\ z = Z + \theta c \end{cases}$$

les équations d'une surface réglée [S], dans lesquelles X, Y, Z sont les coordonnées rectangulaires du point central s de la génératrice rectiligne S, et a, b, c désignent les cosinus des angles que cette génératrice fait avec les axes positifs. Les quantités X, Y, Z; a, b, c sont des fonctions bien déterminées d'un paramètre t qui fixe la position de la génératrice dans l'espace, tandis qu'un second paramètre θ, indépendant du premier, détermine le point variable (x, y, z) sur cette génératrice. Ces six quantités satisfont, comme on sait, à l'équation différentielle suivante :

$$(2)\qquad \frac{da}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{db}{dt}\frac{dY}{dt} + \frac{dc}{dt}\frac{dZ}{dt} = 0.$$

Pour trouver la courbure K de la surface au point (x, y, z), il faut calculer l'angle infiniment petit $d\tau$, que la génératrice S fait avec la génératrice S′ infiniment voisine, ainsi que la plus courte distance $d\Delta$ de ces deux droites. En différentiant les équations (1) et posant

$$L = b\frac{dc}{dt} - c\frac{db}{dt},\quad M = c\frac{da}{dt} - a\frac{dc}{dt},\quad N = a\frac{db}{dt} - b\frac{da}{dt},$$

on obtient aisément

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{L\frac{dX}{dt} + M\frac{dY}{dt} + N\frac{dZ}{dt}}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{d\tau}{dt} = (L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}};$$

d'où l'on déduit, d'après une formule bien connue,

$$(3) \qquad K = -\frac{\left(\frac{d\tau}{d\Delta}\right)^2}{\left[1 + \theta^2\left(\frac{d\tau}{d\Delta}\right)^2\right]^2},$$

ou, en appelant *courbure centrale* de la surface relative à la génératrice considérée la courbure K_s au point central s,

$$(4) \quad K = \frac{K_s}{(1 - K_s\theta^2)^2}, \quad K_s = -\left(\frac{d\tau}{d\Delta}\right)^2 = -\frac{(L^2 + M^2 + N^2)^2}{\left(L\frac{dX}{dt} + M\frac{dY}{dt} + N\frac{dZ}{dt}\right)^2}.$$

Soit T la perpendiculaire commune aux droites S et S′, qui mesure la plus courte distance $d\Delta$: la surface [T], engendrée par cette droite, a été nommée par E. Bour la *réciproque* de la proposée. En posant

$$(5) \quad a_1 = \frac{L}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad b_1 = \frac{M}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad c_1 = \frac{N}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on obtient les équations de la surface réciproque

$$(6) \qquad \begin{cases} x = X + \theta_1 a_1, \\ y = Y + \theta_1 b_1, \\ z = Z + \theta_1 c_1. \end{cases}$$

La différentiation des équations (5) nous donne immédiatement

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{da_1}{dt} = \dfrac{P}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}}(bN - cM), \\ \dfrac{db_1}{dt} = \dfrac{P}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}}(cL - aN), \\ \dfrac{dc_1}{dt} = \dfrac{P}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}}(aM - bL). \end{cases}$$

où nous avons posé

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} P = a\left(\frac{db}{dt}\frac{d^2c}{dt^2} - \frac{dc}{dt}\frac{d^2b}{dt^2}\right) + b\left(\frac{dc}{dt}\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt}\frac{d^2c}{dt^2}\right) \\ + c\left(\frac{da}{dt}\frac{d^2b}{dt^2} - \frac{db}{dt}\frac{d^2a}{dt^2}\right); \end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut les expressions suivantes de l'angle infiniment petit $d\tau_1$ de deux génératrices voisines de la surface réciproque et de leur plus courte distance $d\Delta_1$

$$(9)\quad \frac{d\tau_1}{dt} = \frac{P}{L^2 + M^2 + N^2},$$

$$(10)\quad \frac{d\Delta_1}{dt} = -\left(a\frac{dX}{dt} + b\frac{dY}{dt} + c\frac{dZ}{dt}\right).$$

La courbure centrale de la surface réciproque relative à la génératrice T, que nous désignons par k_s, est par conséquent

$$(11)\quad k_s = -\frac{P^2}{(L^2 + M^2 + N^2)^2\left(a\frac{dX}{dt} + b\frac{dY}{dt} + c\frac{dZ}{dt}\right)^2}.$$

Désignons par ds l'élément de la ligne de striction commune à ces deux surfaces, et par $d\sigma$ la projection orthogonale de cet élément sur la génératrice S, il viendra

$$\frac{d\sigma}{dt} = a\frac{dX}{dt} + b\frac{dY}{dt} + c\frac{dZ}{dt},$$

par conséquent

$$(12)\quad \frac{k_s}{K_s} = \frac{P^2}{(L^2 + M^2 + N^2)^3}\left(\frac{d\Delta}{d\sigma}\right)^2.$$

On peut transformer cette formule de la manière suivante :

Menons par l'origine des coordonnées le cône directeur de la surface [S] et décrivons de ce même point comme centre une sphère de rayon égal à l'unité de longueur, la sphère coupera le cône suivant une courbe que l'on peut nommer l'*indicatrice sphérique* de la surface proposée. Si l'on désigne par $\frac{1}{\rho'}$ la courbure de l'indicatrice au point (a, b, c) et par (a', b', c') les cosinus des angles que la perpendiculaire au plan osculateur de la courbe au même point fait avec les axes positifs, on obtient aisément

$$\frac{aa' + bb' + cc'}{\rho'} = \frac{P}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}};$$

or l'expression $\frac{aa' + bb' + cc'}{\rho'}$ est la courbure géodésique de l'indicatrice considérée sur la sphère, que nous appellerons $\frac{1}{r}$; on a donc

$$(13) \qquad P = \frac{1}{r}(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour transformer le quotient $\frac{d\Delta}{d\sigma}$ dans l'équation (12), soit f l'angle moindre que 180 degrés que la tangente à la ligne de striction fait avec la direction positive de la génératrice S, on aura

$$\cos f = \frac{a\frac{dX}{dt} + b\frac{dY}{dt} + c\frac{dZ}{dt}}{\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}};$$

d'où il suit, en ayant égard à l'équation (2),

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{ds}{dt}\sin f, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos f;$$

par conséquent,

$$(14) \qquad \frac{d\Delta}{d\sigma} = \operatorname{tang} f.$$

En substituant les expressions (13) et (14) dans l'équation (12), il viendra enfin

$$(15) \qquad \frac{k_s}{K_s} = \frac{\operatorname{tang}^2 f}{r^2}.$$

Cette formule permet de calculer la courbure centrale de la surface réciproque [T] en fonction de la courbure centrale de la proposée [S].

Désignons par f_1 et r_1 les valeurs de l'angle f et du rayon r relatives à la surface [T], la formule précédente donnera

$$\frac{K_s}{k_s} = \frac{\tang^2 f_1}{r_1^2},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1}{r}\,\frac{1}{r_1} = \cot f \cot f_1. \tag{16}$$

C'est une remarquable relation symétrique entre les lignes de striction et les indicatrices sphériques de deux surfaces réciproques.

II.

Nous allons montrer l'application de la formule (15) à la solution d'un problème intéressant de Cinématique des systèmes rigides.

On sait que tout mouvement bien déterminé d'un système rigide peut en général être engendré par le roulement et le glissement d'une surface réglée (Σ), invariablement liée au système mobile, sur une autre surface réglée (S), immobile dans l'espace. Ces deux surfaces se touchent à chaque instant suivant une génératrice rectiligne qui est l'axe central du mouvement hélicoïdal infiniment petit du système. On peut appeler (S) la surface *centrale* et (Σ) la surface *génératrice* du mouvement du système donné. La surface centrale peut être choisie à volonté; mais, pour que (Σ) soit une surface génératrice correspondant à (S), il faut et il suffit que l'angle infiniment petit de deux génératrices consécutives de (Σ) et leur plus courte distance soient respectivement égales aux éléments analogues de deux génératrices correspondantes de la surface centrale, en appelant *correspondantes* deux génératrices S et Σ de ces deux surfaces qui viennent coïncider simultanément avec l'axe central. On voit donc que ces deux surfaces ont la même courbure centrale aux génératrices correspondantes.

Pour trouver l'amplitude $d\psi$ et la translation dl du mouvement hélicoïdal instantané relatif à l'axe central S, considérons deux génératrices correspondantes S′ et Σ', infiniment voisines de S. Les lignes de striction de nos deux surfaces se coupent au point central s de la génératrice S, et le mouvement hélicoïdal doit amener la droite Σ' dans une position telle qu'elle s'applique sur S', et qu'en même temps le point central σ' de Σ' tombe sur le point central s' de S'. En menant donc par σ' la perpendiculaire commune $\pi\sigma'$ à S et Σ' et par le point s' la perpendiculaire commune ps' à S et S', on voit immédiatement que l'amplitude de la rotation est égale à l'angle des deux droites ps' et $\pi\sigma'$. Or ps' et $\pi\sigma'$ sont deux génératrices correspondantes des surfaces (T) et ($\mathfrak{T}$), réciproques de (S) et (Σ); en désignant donc par $d\psi'$ et $d\psi''$ les angles infiniment petits que ces génératrices font avec la génératrice commune aux surfaces réciproques à l'instant considéré, on aura

$$d\psi = d\psi' \pm d\psi'', \tag{17}$$

le signe supérieur ou inférieur devant être choisi selon que les cônes directeurs des surfaces (S) et (Σ) se touchent extérieurement ou intérieurement, suivant une droite parallèle à l'axe central.

La rotation $d\psi$ amène la droite Σ' dans une position parallèle à S', et la translation dl doit faire coïncider le point σ' avec s'; on aura, par conséquent,

$$dl = \pi p = sp - s\pi,$$

ou, si l'on désigne par dl' et dl'' les plus courtes distances sp et $s\pi$ de la génératrice commune aux surfaces réciproques à la génératrice ps' et $\pi\sigma'$ respectivement,

$$dl = dl' - dl''. \tag{18}$$

Le quotient $\lambda = \frac{dl}{d\psi}$ est le *pas réduit* des hélices élémentaires décrites simultanément par les points du système mobile. Les formules précédentes nous donnent

$$\lambda = \frac{dl' - dl''}{d\psi' \pm d\psi''}.$$

En désignant par $d\tau$ l'angle infiniment petit que la génératrice S' ou Σ' fait avec l'axe central, et par $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{\rho}$ les courbures géodésiques des indicatrices sphériques des surfaces (S) et (Σ) au point correspondant à cet axe, nous aurons d'abord, en vertu des formules (9) et (13),

$$(19)\qquad d\psi' = \frac{d\tau}{r}, \quad d\psi'' = \frac{d\tau}{\rho};$$

par conséquent,

$$(20)\qquad \lambda = \frac{\frac{1}{r}\frac{dl'}{d\psi'} - \frac{1}{\rho}\frac{dl''}{d\psi''}}{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\rho}}.$$

Soit K_s la courbure centrale de (S) ou (Σ) relative à l'axe central, f et φ les angles que les lignes de striction de ces deux surfaces font avec l'axe central, et k'_s, k''_s les courbures des surfaces réciproques (T) et ($\mathfrak{T}$) au point s; on aura, d'après les formules données ci-dessus,

$$\frac{dl'}{d\psi'} = \frac{1}{\sqrt{-k'_s}}, \quad \frac{dl''}{d\psi''} = \frac{1}{\sqrt{-k''_s}},$$

$$k'_s = K_s \frac{\tang^2 f}{r^2}, \qquad k''_s = K_s \frac{\tang^2 \varphi}{\rho^2};$$

d'où l'on conclut

$$(21)\qquad \lambda = \frac{1}{\sqrt{-K_s}} \frac{\cot f - \cot \varphi}{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\rho}}.$$

Si les lignes de striction des surfaces centrale et génératrice se touchent au point s, on aura $f = \varphi$, par conséquent $\lambda = 0$; le mouvement hélicoïdal se réduit alors à une simple rotation autour de l'axe central. Dans ce cas, la surface génératrice est applicable sur la surface centrale.