JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C. FLYE SAINTE-MARIE

Note sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, dans un cas particulier

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 213-215.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__213_0>

Note sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, dans un cas particulier;

PAR M. C. FLYE SAINTE-MARIE,

Capitaine d'artillerie, Inspecteur des études à l'École Polytechnique.

Soient H, K, L les trois axes principaux d'inertie d'un solide, en un point fixe O, et A, B, C les moments d'inertie du corps, par rapport à ces axes. Soient, à un instant quelconque, ω la vitesse de rotation autour de l'axe instantané, ω_x, ω_y, ω_z les composantes de ω suivant les axes principaux. Soient enfin P, Q, R les moments, autour des axes H, K, L, des forces agissant sur le solide.

Les formules d'Euler nous donnent

$$A\frac{d\omega_x}{dt} = (B - C)\,\omega_y\omega_z + P,$$

$$B\frac{d\omega_y}{dt} = (C - A)\,\omega_z\omega_x + Q,$$

$$C\frac{d\omega_z}{dt} = (A - B)\,\omega_x\omega_y + R.$$

Soient OM l'axe représentatif de la rotation à un instant donné, et OM′ l'axe représentatif à l'instant suivant. Par le point fixe, menons Om parallèle à MM′ et égale à $\frac{MM'}{dt}\cdot$ Cette droite, qui représente ce qu'on peut appeler *l'accélération de rotation,* se projette sur les axes H, K, L, suivant $\frac{d\omega_x}{dt}$, $\frac{d\omega_y}{dt}$, $\frac{d\omega_z}{dt}$.

Je désignerai par les lettres x, y, z ces trois dérivées, qui sont les coordonnées du point m, et par les lettres α, β, γ les cosinus des angles formés par l'axe instantané OM avec les trois axes principaux; d'où $\omega_x = \omega\alpha$, $\omega_y = \omega\beta$, $\omega_z = \omega\gamma$.

Les formules d'Euler deviennent alors

$$A x = (B - C)\,\omega^2 \beta\gamma + P,$$
$$B y = (C - A)\,\omega^2 \gamma\alpha + Q,$$
$$C z = (A - B)\,\omega^2 \alpha\beta + R.$$

Je multiplie la première par α, la deuxième par β, la troisième par γ, et j'ajoute.

Il vient

$$(1) \qquad A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = P\alpha + Q\beta + R\gamma$$

De même, en multipliant la première équation par $A\alpha$, la deuxième par $B\beta$, la troisième par $C\gamma$ et ajoutant, on obtient pour résultat

$$(2) \qquad A^2\alpha x + B^2\beta y + C^2\gamma z = AP\alpha + BQ\beta + CR\gamma.$$

Les équations (1) et (2) représentent chacune un plan contenant le point m, lequel appartiendra, par conséquent, à la droite représentée par les deux équations.

Par le point M, extrémité de l'axe représentatif de la rotation à un instant quelconque, je fais passer deux ellipsoïdes ayant pour équation :

L'un...... $AX^2 + BY^2 + CZ^2 = U$ (ellipsoïde d'inertie),
L'autre.... $A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2 = U'$.

Au point M, dont les coordonnées sont $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$, les plans tangents aux ellipsoïdes ont pour équation :

Le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie.. $A\,\alpha x + B\,\beta y + C\,\gamma z = \frac{U}{\omega}$,

Le plan tangent au second ellipsoïde... $A^2\alpha x + B^2\beta y + C^2\gamma z = \frac{U'}{\omega}$.

Ces plans sont parallèles aux deux plans contenant le point m, et représentés par les équations (1) et (2).

Laissant de côté le cas où les trois moments P, Q, R sont nuls, cas dans lequel la loi du mouvement a été mise en lumière par Poinsot, je supposerai seulement que le second membre de l'équation (1) s'annule.

Cette équation représentera alors un plan passant par le point fixe; ce plan contiendra donc la droite Om. D'ailleurs, il est parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie; donc aussi MM', parallèle à Om, sera parallèle à ce plan tangent. On en déduit que le déplacement élémentaire du point M se fait sur la surface de l'ellipsoïde et que, par conséquent, ce point reste toujours sur le même ellipsoïde d'inertie.

Or la somme $P\alpha + Q\beta + R\gamma$, que nous avons supposée nulle, n'est autre que le moment des forces autour de l'axe instantané; d'où ce théorème :

Lorsqu'un corps tourne autour d'un point fixe sous l'action de forces dont le moment autour de l'axe instantané est constamment nul, la vitesse de rotation est proportionnelle au rayon vecteur de l'ellipsoïde dirigé dans le sens de cet axe.

Réciproquement, *cette proportionnalité exige que la somme des moments des forces autour de l'axe instantané soit nulle.*

La proposition directe est applicable au *mouvement d'un corps tournant autour d'un point fixe, et assujetti à rester en contact avec une surface fixe, sans être soumis à d'autres forces que les réactions normales de la surface.*

En effet, lorsqu'un corps tourne autour d'un axe, le travail élémentaire d'une force agissant en un point du corps est égal au moment de la force autour de cet axe, multiplié par le déplacement angulaire élémentaire. Or, si un corps glisse sans frottement sur une surface fixe, le travail élémentaire de la réaction normale est évidemment nul, le point d'application se déplaçant tangentiellement à la surface; il en est donc de même du moment de la réaction autour de l'axe instantané. Il est également évident que, si le corps roule sans glissement, ce moment est encore nul. On est donc dans les conditions du théorème énoncé plus haut.