JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Extrait d'une Lettre à M. Resal

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 207-212.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__207_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Extrait d'une Lettre à M. Resal;

PAR M. OSSIAN BONNET.

L'article intéressant sur le mouvement d'un point sur une surface, que vous venez de publier dans votre Journal, me remet en mémoire que je vous avais promis la communication d'une démonstration des formules de Lagrange susceptible d'entrer dans l'enseignement le plus élémentaire pour le cas spécial du mouvement d'un point sur une surface. Voici cette démonstration, qui me paraît à la fois simple et directe.

Je conserverai toutes vos notations, auxquelles j'ajouterai les suivantes : p et q seront les deux variables indépendantes au moyen desquelles on aura exprimé les coordonnées cartésiennes x, y, z des différents points de la surface. La caractéristique D indiquera les différentielles totales relatives à un déplacement infiniment petit égal à $\mathrm{D}s$, effectué sur la surface et dans une direction entièrement quelconque; la caractéristique d indiquera les différentielles ordinaires relatives à un déplacement infiniment petit égal à $ds = vdt$, effectué sur la surface et tangentiellement à la trajectoire du point mobile, c'est-à-dire les différentielles par rapport à t; enfin la caractéristique δ indiquera les différentielles relatives à un déplacement infiniment petit égal à δs, effectué sur la surface et normalement à la trajectoire du point mobile. Nous poserons

$$\mathrm{D}s^2 = \mathrm{E}.\mathrm{D}p^2 + 2\mathrm{F}.\mathrm{D}p\,\mathrm{D}q + \mathrm{G}.\mathrm{D}q^2,$$
$$\mathrm{X}.\mathrm{D}x + \mathrm{Y}.\mathrm{D}y + \mathrm{Z}.\mathrm{D}z = \mathrm{P}.\mathrm{D}p + \mathrm{Q}.\mathrm{D}q,$$

E, F, G, P, Q étant des fonctions connues de p et de q, dont les trois premières dépendent de la forme de la surface, et les deux autres de la grandeur et de la direction de la force qui sollicite le point matériel; par conséquent, on aura

$$ds^2 = \mathrm{E}.dp^2 + 2\mathrm{F}.dp\,dq + \mathrm{G}.dq^2;$$

par suite

$$v^2 = \mathrm{E}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + 2\mathrm{F}\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} + \mathrm{G}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

ou

$$v^2 = \mathrm{E}p'^2 + 2\mathrm{F}p'q' + \mathrm{G}q'^2;$$

en faisant

$$\frac{dp}{dt} = p', \quad \frac{dq}{dt} = q',$$

et, en outre,

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = \mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq,$$
$$\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z = \mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q.$$

Écrivons maintenant les deux équations du mouvement, qui sont indépendantes de la réaction inconnue de la surface, à savoir

$$d(\tfrac{1}{2}v^2) = \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = \mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq,$$
$$\frac{v^2}{\rho_g} = \mathrm{X}\frac{\delta x}{\delta s} + \mathrm{Y}\frac{\delta y}{\delta s} + \mathrm{Z}\frac{\delta z}{\delta s} = \mathrm{P}\frac{\delta p}{\delta s} + \mathrm{Q}\frac{\delta q}{\delta s}.$$

Ces deux équations, où ρ_g désigne le rayon de courbure géodésique de la trajectoire, sont établies dans votre Mémoire par un calcul un peu long, mais on reconnaît aisément qu'elles résultent immédiatement de l'expression des composantes tangentielle et normale de l'accélération dans le mouvement d'un point libre.

Or, d'après une formule que j'ai donnée pour la première fois dans mon premier Mémoire sur la *Théorie générale des surfaces* (XXXII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 37), et que l'on sait maintenant établir bien simplement d'une foule de manières :

$$\frac{1}{\rho_g} = -\frac{\delta\, ds}{ds\, \delta s},$$

on a donc

$$d\tfrac{1}{2}v^2 = \mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq,$$

$$-\frac{v^2\,\delta\, ds}{ds} = \mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q,$$

ou, en remplaçant, dans la seconde équation, v par $\frac{ds}{dt}$, puis $ds\,\delta\, ds$ par $\delta\,\frac{1}{2}ds^2$,

$$(1)\qquad \begin{cases} d\,\tfrac{1}{2}v^2 = \mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq, \\ -\dfrac{1}{dt^2}\,\delta\,\tfrac{1}{2}ds^2 = \mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q. \end{cases}$$

Posons, en général,

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{E}\alpha^2 + 2\mathrm{F}\alpha\beta + \mathrm{G}\beta^2) = \omega,$$

α et β étant des fonctions quelconques de p et de q, et différentions successivement suivant la caractéristique d et suivant la caractéristique δ, nous aurons

$$(2)\qquad \begin{cases} d\omega = \dfrac{\partial\omega}{\partial p}dp + \dfrac{\partial\omega}{\partial q}dq + \dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha}d\alpha + \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}d\beta, \\ \delta\omega = \dfrac{\partial\omega}{\partial p}\delta p + \dfrac{\partial\omega}{\partial q}\delta q + \dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha}\delta\alpha + \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}\delta\beta, \end{cases}$$

les dérivées partielles $\frac{\partial\omega}{\partial p}$, $\frac{\partial\omega}{\partial q}$, $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\omega}{\partial\beta}$ étant prises comme si α, β et p et q, dont E, F, G sont fonctions, étaient quatre variables indépendantes.

Occupons-nous de la première relation

$$(2,\ 1^\circ)\qquad d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial p}dp + \frac{\partial\omega}{\partial q}dq + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\beta}d\beta.$$

ω étant une fonction homogène du second degré par rapport à α et à β, on a

$$\alpha \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \beta \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = 2\omega,$$

d'où

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\beta + \alpha d \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \beta d \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = 2 d\omega;$$

ajoutant membre à membre cette dernière équation et l'équation (2, 1°), réduisant et isolant $d\omega$, on a

$$d\omega = \alpha d \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \beta d \frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \frac{\partial\omega}{\partial p} dp - \frac{\partial\omega}{\partial q} dq.$$

Supposant enfin que α soit $p' = \frac{dp}{dt}$, et que β soit $q' = \frac{dq}{dt}$, auquel cas ω est égal à $\frac{1}{2} v^2$, il vient

$$d \tfrac{1}{2} v^2 = dp \left(\frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} - \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p} \right) + dq \left(\frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} - \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q} \right),$$

ce qui permet de mettre la première des équations (1) sous la forme

$$dp \left(\frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} - \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p} - \mathrm{P} \right) + dq \left(\frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} - \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q} - \mathrm{Q} \right) = 0.$$

Passons à la deuxième des équations (2)

$$\delta\omega = \frac{\partial\omega}{\partial p} \delta p + \frac{\partial\omega}{\partial q} \delta q + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} \delta\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\beta} \delta\beta;$$

si l'on y fait $\alpha = dp$, $\beta = dq$, ce qui donne $\omega = \frac{1}{2} ds^2$, et qu'on la divise par dt^2, il viendra

$$\frac{\delta \frac{1}{2} ds^2}{dt^2} = \frac{\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial p}}{dt^2} \delta p + \frac{\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial q}}{dt^2} \delta q + \frac{\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial\, dp}}{dt^2} \delta\, dp + \frac{\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial\, dq}}{dt^2} \delta\, dq;$$

mais

$$\frac{\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial p}}{dt^2} = \frac{\partial \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2}}{\partial p} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p}, \quad \frac{\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial q}}{dt^2} = \frac{\partial \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2}}{\partial q} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q},$$

$$\frac{\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial\, dp}}{dt} = \frac{\partial \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2}}{\partial \frac{dp}{dt}} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'}, \quad \frac{\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial\, dq}}{dt} = \frac{\partial \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2}}{\partial \frac{dq}{dt}} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'},$$

les dérivées partielles, dans les valeurs transformées, étant prises comme si p, q, p', q' étaient des variables indépendantes, puis

$$\frac{\delta\, dp}{dt} = \frac{d\,\delta p}{dt}, \quad \frac{\delta\, dq}{dt} = \frac{d\,\delta q}{dt}:$$

donc

$$\frac{\delta \frac{1}{2} ds^2}{dt^2} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} \frac{d\,\delta p}{dt} + \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} \frac{d\,\delta q}{dt};$$

d'autre part,

$$\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} \frac{d\,\delta p}{dt} = d\left(\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} \frac{\delta p}{dt}\right) - \frac{\delta p}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} \frac{d\,\delta q}{dt} = d\left(\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} \frac{\delta q}{dt}\right) - \frac{\delta q}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'};$$

enfin, les différentielles indiquées par les caractéristiques d et δ étant relatives à des déplacements rectangulaires effectués sur la surface, on a

$$(\mathrm{E}\, dp + \mathrm{F}\, dq)\,\delta p + (\mathrm{F}\, dp + \mathrm{G}\, dq)\,\delta q = 0,$$

ou, en divisant par dt^2,

$$(\mathrm{E}p' + \mathrm{F}q') \frac{\delta p}{dt} + (\mathrm{F}p' + \mathrm{G}q') \frac{\delta q}{dt} = 0$$

ou

$$\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} \frac{\delta p}{dt} + \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} \frac{\delta q}{dt} = 0:$$

donc la deuxième des équations (2) revient à

$$\frac{\delta \frac{1}{2} ds^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p} - \frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'}\right) \delta p + \left(\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q} - \frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'}\right) \delta q,$$

ce qui permet de mettre la deuxième des équations (1) sous la forme

$$\partial p\left(\frac{1}{dt}d\frac{\partial\frac{1}{2}v^2}{\partial p'}-\frac{\partial\frac{1}{2}v^2}{\partial p}-\mathrm{P}\right)+\partial q\left(\frac{1}{dt}d\frac{\partial\frac{1}{2}v^2}{\partial q'}-\frac{\partial\frac{1}{2}v^2}{\partial q}-\mathrm{Q}\right)=0.$$

Ce résultat et celui qui a été obtenu plus haut montrent que

$$\frac{d\dfrac{\partial\frac{1}{2}v^2}{\partial p'}}{dt}=\frac{\partial\frac{1}{2}v^2}{\partial p}+\mathrm{P},\quad \frac{d\dfrac{\partial\frac{1}{2}v^2}{\partial q'}}{dt}=\frac{\partial\frac{1}{2}v^2}{\partial q}+\mathrm{Q}.$$

Ce sont les équations de Lagrange; on en déduit, comme on sait, aisément celles de Hamilton.