JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUSSINESQ

Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans se croisant sur un même point d'un corps, et sur celle des déformations qui se produisent autour d'un tel point

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 3 (1877), p. 147-152.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3__147_0>

Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans se croisant en un même point d'un corps, et sur celle des déformations qui se produisent autour d'un tel point;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

1. Lamé, au moyen de son ellipsoïde d'élasticité et d'un autre ellipsoïde ou de deux hyperboloïdes conjugués, a interprété géométriquement, d'une manière en quelque sorte immédiate, les formules par lesquelles Cauchy avait exprimé les pressions exercées sur l'unité d'aire des éléments plans menés par un même point d'un corps. Je me propose de montrer qu'il est possible de simplifier encore la construction de ces pressions, et d'arriver ensuite sans calcul à la connaissance de particularités remarquables, concernant leurs composantes tangentielles, le rapport de ces composantes aux composantes normales, etc.

Je supposerai qu'on retranche, de toutes les composantes normales dont il s'agit, la demi-somme des deux forces principales la plus grande et la plus petite au point considéré, sans rien changer d'ailleurs aux composantes tangentielles. On sait que celles-ci et les composantes normales en excédant ne cesseront pas d'être régies par les formules de Cauchy, en sorte qu'il sera permis de faire abstraction de la partie commune retranchée, sauf à la rétablir finalement. Si R désigne la demi-différence des deux forces principales extrêmes, la plus grande sera donc réduite à R, la plus petite à — R, et la force principale intermédiaire ou moyenne aura une certaine valeur, T, comprise entre R et — R.

Je prendrai pour axes coordonnés Ox, Oy, Oz les droites qui représentent les trois forces principales R, T, — R quand on leur ajoute une même quantité, assez grande pour rendre la troisième positive. D'après les formules de Cauchy, la pression F que supporte l'élément plan dont la normale fait avec ces axes les angles α, β, γ aura pour composantes respectives

$$R\cos\alpha, \quad T\cos\beta, \quad -R\cos\gamma.$$

Cette pression vaut

$$F = \sqrt{R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) + T^2\cos^2\beta} = \sqrt{R^2 - (R^2 - T^2)\cos^2\beta}.$$

Elle ne dépend que de β et grandit, de $\sqrt{T^2}$ à R, quand β varie, soit de zéro à $\frac{\pi}{2}$, soit de π à $\frac{\pi}{2}$, ou que l'on considère des éléments superficiels de plus en plus inclinés sur le plan des deux forces principales extrêmes. Elle fait d'ailleurs avec Oy un angle, β', dont le cosinus,

$$\cos\beta' = \frac{T}{F}\cos\beta,$$

ne dépend également que de β et est moindre que $\cos\beta$ en valeur absolue, si ce n'est quand ces cosinus sont nuls ou que β, β' valent un angle droit. Enfin, si l'on projette sur le plan des xz, d'une part, la pression considérée, d'autre part, la normale à l'élément plan, ces projections feront avec les axes Ox, Oz des angles ayant leurs cosinus respectivement proportionnels à $R\cos\alpha$, $-R\cos\gamma$, pour la première, à $\cos\alpha$, $\cos\gamma$ pour la seconde, et d'ailleurs de mêmes signes que ces quantités : les deux projections étant ainsi inclinées sur Ox d'angles égaux, sur Oz d'angles supplémentaires, seront symétriques par rapport à Ox.

On construira donc comme il suit la pression F exercée sur l'élément plan. *A partir de l'origine et dans le plan des deux plus grandes forces principales* R, T, *on mènera, d'un même côté de la force principale moyenne* T, *deux droites inclinées, sur cette force moyenne, l'une, de l'angle donné* β *que fait avec elle la normale à l'élément superficiel* *proposé, l'autre, de l'angle* β' *dont le cosinus vaut* $\frac{T}{F}\cos\beta$, *en donnant à celle-ci la longueur* $F = \sqrt{R^2 - (R^2 - T^2)\cos^2\beta}$; *puis on imprimera à ces deux droites deux rotations égales et contraires autour de la force principale moyenne* T : *à l'instant où la première droite viendra coïncider avec la normale à l'élément plan, la seconde représentera la pression qui lui est appliquée.*

2. C'est dans le plan des xz, c'est-à-dire quand β et β' valent un droit, que l'inclinaison de la pression F sur la normale à l'élément qui la supporte varie dans les plus larges limites, vu que ce n'est qu'alors que cette pression peut coïncider, tantôt avec la normale, tantôt avec son prolongement. Ainsi la force F, qui atteint dans ce plan sa plus grande valeur absolue R, y devient successivement, soit tout entière normale et positive, soit tout entière normale et négative, soit tout entière tangentielle. Il est évident que la composante tangentielle R, qu'elle donne dans ce troisième cas, constitue la plus grande de toutes les composantes tangentielles de pression au point considéré; il l'est aussi que les pressions normales R, $-$ R, qu'elle donne dans les deux premiers cas, sont la plus grande et la plus petite des composantes normales de pression, et qu'elles restent la plus grande et la plus petite quand on ajoute à toutes les composantes normales la partie commune dont on avait fait abstraction. De même, lorsqu'on composera cette partie commune avec les forces F, il n'y aura évidemment pas de résultante plus grande ou plus petite que celle qu'on obtiendra en prenant simplement la somme ou la différence de cette partie commune et de R.

Considérons enfin le rapport d'une composante tangentielle quelconque de pression à la composante normale correspondante, et comparons-le au rapport analogue, calculé pour la pression qui a composante normale égale, mais qui est contenue dans le plan des xz. La plus grande des deux composantes tangentielles considérées est celle dont le carré, joint au carré de l'excédant commun de la composante normale sur la demi-somme des deux forces principales extrêmes, donne la plus grande valeur de F^2. C'est donc celle qui est comprise dans le plan des xz, et son rapport à la composante normale est le plus grand des deux en valeur absolue. En d'autres termes, des deux pressions totales considérées, celle que contient le plan des xz fait le plus petit angle avec l'élément superficiel qu'elle sollicite.

C'est donc, en résumé, dans le plan des deux forces principales extrêmes qu'il faut chercher tout à la fois : 1° la plus grande et la plus petite des pressions ; 2° la plus grande et la plus petite des composantes normales de pression ; 3° la plus grande des composantes tangentielles ; 4° la pression la moins inclinée sur l'élément plan qui la supporte.

3. Une construction exactement pareille permet de représenter, après des déformations quelconques, tous les éléments matériels rectilignes, d'une même longueur primitive infiniment petite, qu'on peut concevoir menés à partir d'un point déterminé O d'un corps. Si l'on prend leur longueur primitive constante pour unité et qu'on rapporte ces diverses lignes à trois axes Ox, Oy, Oz, dirigés suivant les trois éléments, dits *principaux*, qui sont rectangulaires entre eux après comme avant les déformations, on sait que les projections, sur ces axes, de l'élément quelconque qui faisait avec eux les angles α, β, γ, auront crû respectivement de

$$\partial_1 \cos\alpha, \quad \partial_2 \cos\beta, \quad \partial_3 \cos\gamma,$$

∂_1, ∂_2, ∂_3 désignant les trois dilatations principales (supposées rangées par ordre de grandeur décroissante). Ces accroissements se composent respectivement : 1° d'une partie

$$\tfrac{1}{2}(\partial_1 + \partial_3)\cos\alpha, \quad \tfrac{1}{2}(\partial_1 + \partial_3)\cos\beta, \quad \tfrac{1}{2}(\partial_1 + \partial_3)\cos\gamma,$$

dont l'effet est d'allonger de $\frac{1}{2}(\partial_1 + \partial_3)$ tous les éléments rectilignes considérés, sans changer leur direction ; 2° d'une autre partie

$$\frac{\partial_1 - \partial_3}{2}\cos\alpha, \quad \frac{2\partial_2 - (\partial_1 + \partial_3)}{2}\cos\beta, \quad -\frac{\partial_1 - \partial_3}{2}\cos\gamma,$$

qu'on pourra écrire

$$R\cos\alpha, \quad T\cos\beta, \quad -R\cos\gamma,$$

si l'on pose

$$R = \frac{\partial_1 - \partial_3}{2}, \quad T = \partial_2 - \frac{\partial_1 + \partial_3}{2}.$$

Il faudra évidemment, pour construire chaque élément rectiligne après les déformations, composer *géométriquement* la droite primitive 1, augmentée de $\frac{1}{2}(\partial_1 + \partial_3)$, avec une autre droite, F, dont les projections sur les axes seraient

$$R \cos\alpha, \quad T \cos\beta, \quad -R \cos\gamma.$$

C'est à celle-ci que s'applique la construction indiquée au n° **1**. La projection de cette droite F sur la direction qui fait avec les axes les angles α, β, γ, projection à laquelle convient actuellement le nom de *composante tangentielle* plutôt que celui de *composante normale*, s'ajoute à $\frac{1}{2}(\partial_1 + \partial_3)$ pour donner la *dilatation* totale qu'a éprouvée la projection de l'élément rectiligne sur sa direction première, dilatation dont la différence à celle de l'élément proposé est de l'ordre des carrés ou des produits de ∂_1, ∂_2, ∂_3, et le plus souvent négligeable. L'autre composante de la même droite F, *composante normale* et non plus tangentielle, mesure le déplacement de l'extrémité de l'élément rectiligne dans le sens perpendiculaire à sa direction primitive; divisée par la projection finale de l'élément rectiligne sur sa direction première, elle donne la tangente de l'angle qui représente le changement total de direction éprouvé par l'élément. On reconnaît, en raisonnant comme ci-dessus (n° **2**), dans le cas où l'on cherchait le plus petit angle d'une pression avec l'élément plan qu'elle sollicite, que ce changement de direction devient maximum pour des éléments rectilignes situés dans le plan des deux dilatations principales extrêmes ∂_1, ∂_3.

D'ordinaire, les déformations sont petites, la projection d'un élément rectiligne sur sa direction première diffère peu de 1, et la composante normale du déplacement de l'extrémité mesure à elle seule le changement de direction de l'élément rectiligne. Alors ce changement de direction est le plus grand possible, égal à R ou $\frac{1}{2}(\partial_1 - \partial_3)$, pour les quatre éléments bissecteurs des angles des deux axes Ox, Oz, c'est-à-dire des angles formés par les deux dilatations principales extrêmes ∂_1, ∂_3 ; en outre, il se fait symétriquement de part et d'autre de Ox et de Oz, en sorte que l'angle de deux de ces éléments qui étaient primitivement rectangulaires éprouve une variation double de R ou égale à $\partial_1 - \partial_3$. Il est évident qu'il n'y a pas d'autres éléments rectilignes, primitivement rectangulaires ou non, qui se rapprochent ou s'écartent mutuellement autant que ceux-là, par suite des déformations. Le *glissement maximum* de deux éléments rectilignes égale donc la différence des deux dilatations principales extrêmes; résultat bien connu en ce qui concerne deux éléments *rectangulaires*, mais qui n'avait peut-être pas été démontré aussi simplement.