

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Recherches sur la poussée des terres et stabilité des murs de soutènement

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 3 (1877), p. 115-146.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3_115_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1877_3_3_115_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Recherches sur la poussée des terres et stabilité des murs
de soutènement;*

PAR M. H. RESAL.

1. Le calcul de la poussée produite par un massif prismatique de terre sur un mur, basé sur les principes posés par Coulomb, présente, dans le cas le plus général, une assez grande complication pour que jusqu'à présent on n'ait pas essayé de l'effectuer. Poncelet [*] a éludé la difficulté en ayant recours à une construction géométrique très-ingénieuse, qui est devenue classique et que plus tard M. de Saint-Guilhem [**] a généralisée en supposant que le massif supporte une surcharge.

Cependant, si l'on choisit convenablement l'inconnue, la détermination de la poussée, par suite celle de la butée, deviennent relativement simple, et c'est en partie ce que nous nous proposons de faire voir dans ce qui suit.

Nous considérerons, comme on le fait d'habitude, un massif de terre assez long pour que les conditions relatives à ses extrémités n'aient aucune influence sensible sur l'équilibre intérieur de la masse, en d'autres termes, pour qu'on puisse considérer le massif comme indéfini.

Mais, avant d'aborder la question, nous rappellerons les principes sur lesquels on fait reposer la théorie approximative de la poussée des terres, telle qu'elle est enseignée dans les écoles d'application, et qui d'ailleurs a reçu la sanction de l'expérience [***].

[*] *Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations. (Mémoires de l'officier du Génie, n° 13.)*

[**] *Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2^e série, t. IV.*

[***] *Nouvelles expériences sur la poussée des terres; par le lieutenant-colonel du*

On admet que : 1° lorsque les terres sont sur le point de glisser, la tendance au glissement a lieu suivant des plans parallèles aux arêtes du massif [*]; 2° chaque plan de glissement ou de tendance à la rupture (*plan de rupture*) correspond à celui des prismes, ayant une arête commune dans le plan intérieur du mur, qui exerce sur ce mur le maximum de pression (*poussée*).

On considérait autrefois la composante tangentielle de la réaction de la masse de terre extérieure au prisme de rupture sur ce prisme comme se composant de deux termes, l'un représentant le frottement et l'autre, proportionnel à l'étendue de la surface de contact, la cohésion. Poncelet n'a pas tenu compte de ce dernier terme, et cela avec raison, puisque l'on fait le calcul de la poussée dans l'hypothèse où il y a tendance au glissement, c'est-à-dire en supposant que la cohésion est détruite. D'ailleurs, en opérant ainsi, on ne fait qu'améliorer les conditions de sécurité, puisqu'on ne peut qu'exagérer la valeur de la poussée et, par suite, l'épaisseur du mur.

Poncelet est le premier qui ait introduit dans la théorie de la poussée le frottement des terres sur le mur, dont le coefficient n'est que légèrement inférieur à celui des terres sur elles-mêmes.

DE LA POUSSÉE DES TERRES.

2. *Expression de la poussée.* — Nous considérerons une portion du massif et du mur limitée par deux plans menés perpendiculairement aux arêtes à un mètre de distance l'un de l'autre, de manière à être ramenés à la considération de la section déterminée par l'un de ces plans.

Génie Audé. Additions à ce Mémoire par le capitaine du Génie Domergue. (*Mémorial de l'officier du Génie*, n° 15.)

[*] Par une analyse rigoureuse, M. Maurice Levy a démontré que cette hypothèse ne se réalise, dans le cas où la partie supérieure du massif est plane, qu'à la condition que l'inclinaison du parement est une fonction déterminée de la pente du talus et des angles de frottement de la terre sur elle-même et contre le mur. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2^e série, t. XV.)

Rankine commet deux erreurs en traitant le cas d'un simple talus. Il suppose d'a-

Soient (*fig. 1*)

Π le poids du mètre cube de terre;

ABCDEFGH le profil polygonal de la masse de terre;

AB la trace du parement intérieur du mur;

ε l'inclinaison de cette trace sur la verticale;

α , α' les angles de frottement de la terre sur elle-même et de la terre sur le mur [*].

Considérons un point déterminé A de la trace du parement intérieur du mur, et désignons par z sa distance AB au sommet B de ce parement.

Supposons, sauf vérification ultérieure, que le plan de rupture passant par le point A rencontre le côté EF.

bord, lorsque le massif est indéfini dans tous les sens, que la pression sur un plan parallèle au plan du talus lui est normale et est égale au poids du prisme vertical construit sur l'élément. La seconde partie de cet énoncé est inexacte; car il résulte de la théorie de M. Maurice Levy qu'il faut substituer au prisme de Rankine le prisme normal à l'élément.

Le savant anglais admet en outre que, lorsque les terres s'appuient contre un mur, la distribution des pressions est la même que si le massif était indéfini, ce qui évidemment est inexact, puisque l'on a à remplir une condition qu'il faut exprimer.

[*] On a

$\alpha = 30^\circ$, soit $\tan \alpha = 0,577$	pour le gros sable sec (Audé).
16	0,286 pour le sable extra-fin (Audé).
36	0,727 pour la terre humectée (Morin).
55	1,282 pour les terres fortes et les plus denses (Morin).
30	0,577 pour l'argile sèche (Lesbros).
22	0,404 pour l'argile humide et ramollie (<i>id.</i>).
26	0,488 pour la même argile recouverte de grosse grève (<i>id.</i>).

Puis :

$\alpha' = 27^\circ$. α' , soit $\tan \alpha' = 0,51$	pour la pierre de libage sur un lit d'argile sèche.
18 .47	0,34 { pour la pierre de libage sur un lit d'argile humide et ramollie.
21 .49	0,40 { pour la pierre de libage sur un lit d'argile, cette argile étant recouverte de grosse grève.
26 .34	0,500 pour le gros sable sur bois (Audé et Domergue).
15 .25	0,257 pour le sable extra-fin (Audé et Domergue).
3 .43	0,065 pour le mortier coulant (Audé et Domergue).

Dans les applications on prend ordinairement α' égal à α .

Soient

I et M les intersections de la direction de ce côté avec celles de AB et de la verticale AV du point A;

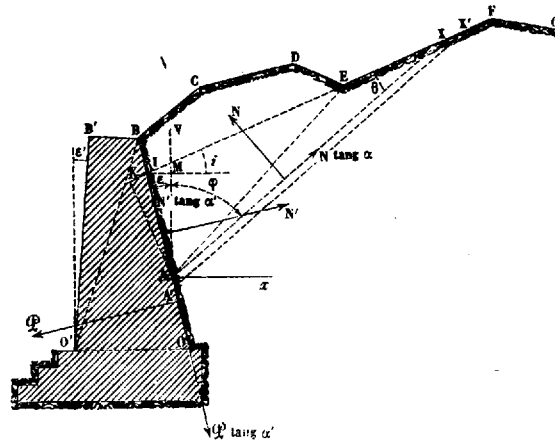
r la distance AE;

φ l'angle que forme sa direction avec AV;

$h = AK$ la perpendiculaire abaissée du point A sur EI;

B la base du triangle de hauteur h équivalent à l'aire ABCDE.

Fig. 1.



Pour chaque position du point A ou pour chaque valeur de z , les grandeurs r , φ , h , B seront complètement déterminées et pourront s'obtenir soit par le calcul, soit géométriquement.

Joignons un point quelconque X du côté EF au point A et appelons θ l'angle formé par la droite AX avec ce côté.

La figure donne les relations suivantes :

$$\widehat{IMA} = 90^\circ - i, \quad \widehat{IEA} = 90^\circ - i - \varphi, \quad \widehat{EAX} = 90^\circ - i - \varphi - \theta,$$

$$(a) \quad EX = r \frac{\sin \widehat{EAX}}{\sin \theta} = r [\cos(i + \varphi) \cot \theta - \sin(i + \varphi)],$$

$$(b) \quad \widehat{VAX} = 90^\circ - i - \theta,$$

et l'on a

$$\text{aire ABCDEXA} = \frac{h}{2}(B + EX) = \frac{h}{2}[B - r \sin(i + \varphi) + r \cos(i + \varphi) \cot \theta];$$

par suite, pour le poids Q du prisme correspondant à cette aire,

$$(c) \quad Q = \frac{nh}{2}[B - r \sin(i + \varphi) + r \cos(i + \varphi) \cot \theta].$$

Ce poids faisant équilibre aux réactions normales N et N' des plans AB, AX et aux frottements correspondants N tang α, N' tang α', on a, en projetant successivement sur l'horizontale et la verticale,

$$N' \cos \varepsilon - N' \tan \alpha' \sin \varepsilon - N \cos \widehat{VAX} + N \tan \alpha \sin \widehat{VAX} = 0,$$

$$N' \sin \varepsilon + N' \tan \alpha' \cos \varepsilon + N \sin \widehat{VAX} + N \tan \alpha \cos \widehat{VAX} = Q,$$

ou

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{N}{\cos \alpha} = \frac{N'}{\cos \alpha'} \frac{\cos(\varepsilon + \alpha')}{\cos(\alpha + \widehat{VAX})}, \\ N' \frac{\sin(\varepsilon + \alpha')}{\cos \alpha'} + N \frac{\sin(\widehat{VAX} + \alpha)}{\cos \alpha} = Q. \end{array} \right.$$

En éliminant N entre les deux équations, on trouve

$$(e) \quad \frac{N'}{\cos \alpha'} = Q \frac{\cos(\alpha + \widehat{VAX})}{\sin(\varepsilon + \alpha + \alpha' + \widehat{VAX})} = Q \frac{\sin(\theta + i - \alpha)}{\cos(\theta + i - \alpha - \alpha' - \varepsilon)}.$$

Pour qu'il y ait une poussée, comme nous l'avons supposé, il faut que N' soit positif ou que l'on ait

$$(f) \quad \theta + i > \alpha;$$

$$(g) \quad \theta + i < 90^\circ + \varepsilon + \alpha + \alpha',$$

d'où

$$90^\circ + \varepsilon > -\alpha',$$

condition qui sera toujours satisfaite.

Mais l'angle $\theta + i$ est celui que forme AX avec l'horizontale Ax du point A; il faut donc que l'inclinaison $90^\circ + \varepsilon$ de AB sur Ax soit supérieure à α . En se reportant à la formule (d), on voit que, pour que N soit positif, il faut que

$$(h) \quad \varepsilon < 90^\circ - \alpha',$$

condition que l'on supposera remplie.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\theta + i < \alpha, \quad \theta + i < 90^\circ + \varepsilon + \alpha + \alpha';$$

la première de ces conditions entraîne nécessairement l'autre; car de l'inégalité

$$\alpha < 90^\circ + \varepsilon + \alpha + \alpha'$$

on déduit

$$\varepsilon > -(90^\circ + \alpha'),$$

ce qui a toujours lieu. La réaction N' sera alors négative, c'est-à-dire que, pour établir l'équilibre strict, il faudrait exercer une traction sur AB; le mur deviendrait ainsi complètement inutile. Il suit de là que, pour qu'une terre se tienne d'elle-même en équilibre, il faut que l'inclinaison de sa surface sur l'horizon soit au plus égale à l'angle de frottement α dont la tangente a reçu le nom de *pente naturelle des terres dépourvues de cohésion*. On voit, par suite, que l'angle i est au plus égal à α et ne peut pas descendre au-dessous de $-\alpha$.

Revenons maintenant à la question de la poussée; les conditions

$$\varepsilon > -(90^\circ - \alpha + i), \quad \varepsilon < 90^\circ - \alpha'$$

sont toujours très-largement remplies dans les applications; car ou ε est très-petit en valeur absolue, lorsque, exceptionnellement, il est négatif, ou il est nul, ou, lorsqu'il est positif, sa valeur atteint au plus une quinzaine de degrés.

La condition (g), lorsqu'on y suppose $\theta = 0$, donne

$$\varepsilon + \alpha + \alpha' - \varepsilon' > -90^\circ,$$

ou encore

$$\cos(\varepsilon + \alpha + \alpha' - i) > 0,$$

ce qui a toujours lieu.

En remplaçant le poids Q par sa valeur (c) dans la formule (c) , on trouve

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{N'}{\cos \alpha'} \frac{2 \cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)}{\pi h \sin(\alpha - i)} \\ & = [B - r \sin(i + \varphi) + r \cos(i + \varphi) \cot \theta] \frac{\cot(\alpha - i) - \cot \theta}{\cot \theta + \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)}. \end{aligned} \right.$$

Si nous posons maintenant

$$(2) \quad \cot \theta = x - \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i),$$

$$(3) \quad \lambda = \cot(\alpha - i) + 1 \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i) = \frac{\cos(\alpha' + \varepsilon)}{\sin(\alpha - i) \cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)},$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} br \cos(i + \varphi) &= r \sin(i + \varphi) + r \cos(i + \varphi) \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i) - B \\ &= r \frac{\sin(\alpha + \alpha' + \varepsilon + \varphi)}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} - B, \end{aligned} \right.$$

la formule (1) devient

$$(5) \quad \frac{N'}{\cos \alpha'} \frac{2 \cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)}{\pi h \sin(\alpha - i) \cos(i + \varphi)} = (x - b) \frac{\lambda - x}{x}.$$

Les dérivées première et seconde, par rapport à x , du second membre de cette dernière équation étant respectivement $\frac{b\lambda}{x^2} - 1$ et $-\frac{2b\lambda}{x^3}$, on voit que le maximum de ce second membre correspond à la racine positive de l'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée première, c'est-à-dire à

$$(d) \quad x = \sqrt{b\lambda}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (5) et désignant par N'_1 le maximum N' , c'est-à-dire la composante normale de la poussée, on trouve

$$N'_1 = \frac{\pi h r}{2} \frac{\cos \alpha' \sin(\alpha - i) \cos(i + \varphi)}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} (\sqrt{\lambda} - \sqrt{b})^2$$

ou, en remplaçant λ et b par leurs valeurs déduites des équations (3) et (4),

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} N'_1 &= \frac{\pi h r}{2} \frac{\cos \alpha' \sin(\alpha - i) \cos(i + \varphi)}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} \\ &\times \left[\sqrt{\frac{\cos(\alpha + \varepsilon)}{\sin(\alpha - i) \cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)}} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \alpha' + \varepsilon + \varphi)}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i) \cos(i + \varphi)} - \frac{B}{r \cos(i + \varphi)}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Comme cette valeur doit être essentiellement positive, i ne peut pas être supérieur à l'angle α qui, comme nous l'avons dit plus haut, mesure la plus grande inclinaison que peut atteindre un talus, ou la pente naturelle des terres dénuées de cohésion.

Pour que l'expression (6) représente bien la poussée, il faut que la valeur de θ correspondant à celle (d) de x , donne pour EX une valeur au plus égale à celle du côté EF que nous désignerons par c , ce qui donne la condition suivante :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &-r \sin(i + \varphi) + r \cos(i + \varphi) \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{\cos(\alpha' + \varepsilon)}{\sin(\alpha - i) \cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i) \cos(i + \varphi)}} \left[\frac{\sin(\alpha + \alpha' + \varepsilon + \varphi)}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} - \frac{B}{r} \right] \right. \\ &\quad \left. - \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i) \right\} \leq c \end{aligned} \right.$$

Il faudrait aussi exprimer que EX doit être positif, mais il est inutile d'avoir égard à cette condition, en raison de la méthode que nous allons indiquer.

Portons sur BA, à partir du point B, les longueurs B.1, 1.2, 2.3, ... égales à une longueur donnée que l'on pourra prendre aussi petite que l'on voudra, et proposons-nous de calculer successivement les poussées exercées sur les portions B.1, B.2, B.3, ... du mur. On déterminera au moyen de la formule (7) la division à partir de laquelle on ne peut plus supposer que le plan de rupture coupe BC, soit par exemple la division n° 3; à partir de ce point, on supposera que le plan de rupture rencontre CD jusqu'à la division, soit par exemple le n° 7, pour laquelle la condition (7) n'est plus vérifiée, et ainsi de suite. Ces démarcations étant établies, on appliquera en conséquence

la formule (6) pour calculer les poussées normales sur les longueurs B.1, B.2, B.3, ..., en attribuant respectivement à r , h , φ , B des valeurs convenables entre le point B et le point n° 3, entre ce dernier et le point n° 7, etc.

3. Composantes horizontale et verticale et moment de la poussée.

— Considérons maintenant z comme variable et prenons sur le parement intérieur, à partir du point B, une longueur déterminée $BO = l$.

Désignons par $\mathcal{Q}$ la poussée normale sur OB. Si, n étant un nombre entier, on divise l en $2n$ parties égales, on pourra calculer successivement les poussées sur B.1, B.2, ... et enfin $\mathcal{Q}$. Les composantes horizontale et verticale de la poussée totale $\frac{\mathcal{Q}}{\cos \alpha}$ auront respectivement pour valeurs

$$(8) \quad X = \mathcal{Q} \cos \epsilon - \mathcal{Q} \tan \alpha' \sin \epsilon = \frac{\mathcal{Q} \cos(\alpha' + \epsilon)}{\cos \alpha'},$$

$$(9) \quad Y = \mathcal{Q} \sin \epsilon + \mathcal{Q} \tan \alpha' \cos \epsilon = \frac{\mathcal{Q} \sin(\alpha' + \epsilon)}{\cos \alpha'}.$$

Proposons-nous maintenant de déterminer le moment, par rapport au point O, de la poussée sur OB. Soient (*fig. 1*) AX, A'X' les plans de rupture passant par les deux points consécutifs A, A' définis par $BA = z$, $BA' = z + dz$; la poussée normale sur BA' sera $N'_1 + \frac{dN'_1}{dz} dz$ et l'accroissement du moment de la poussée sera, par suite, $\frac{dN'_1}{dz} (l - z)$, d'où, pour le moment cherché,

$$\pi = \int_0^l (l - z) dN'_1.$$

La fonction N'_1 sera généralement discontinue; mais dans tous les cas elle a la même valeur lorsque l'on passe d'un côté au suivant du profil BCDEF, de sorte que l'on peut effectuer l'intégration par parties entre les limites zéro et l , comme si N'_1 était continue, ce qui donne

$$\pi' = [N'_1 (l - z)]_0^l + \int_0^l N'_1 dz,$$

ou, comme N'_1 est nul pour $z = 0$,

$$(10) \quad \pi = \int_0^l N'_1 dz,$$

et, comme on connaît les valeurs de N'_1 pour les valeurs B. 1, B. 2, B. 3, ..., une méthode de quadrature par approximation fera connaître π . Le bras de levier moyen p de la poussée est défini par la relation

$$(11) \quad p = \frac{\pi}{\Phi}.$$

Le point de OB qui se trouve à la distance p du point O est ce que l'on appelle le *centre de poussée*, parce que l'on peut supposer que la poussée totale lui est directement appliquée.

Nous ferons remarquer que l'on peut considérer la portion du mur correspondant à OB comme sollicitée par deux forces X, Y respectivement horizontale et verticale et par un couple dont le moment est π .

4. *Cas où la surface extérieure du massif est plane.* — On a, dans cette hypothèse,

$$B = 0, \quad \varphi = -\varepsilon, \quad h = z \cos(i - \varepsilon), \quad r = z,$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} \sqrt{\frac{\cos(\alpha' + \varepsilon) \sin(\alpha + \alpha')}{\sin(\alpha - i) \cos i}} - \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i).$$

L'angle θ étant indépendant de z , tous les plans de rupture sont parallèles.

La formule (6) donne

$$(6') \quad \left\{ \begin{aligned} N'_1 &= \frac{\pi z^2 \cos^2(i - \varepsilon) \cos \alpha' \sin(\alpha - i)}{2 \cos^2(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} \\ &\times \left[\sqrt{\frac{\cos(\alpha' + \varepsilon)}{\sin(\alpha - i)}} - \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\cos(i - \varepsilon)}} \right]^2 [*], \end{aligned} \right.$$

[*] Si l'on fait passer le facteur $\sin(\alpha - i)$ sous les radicaux, que l'on suppose ensuite $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, $i = 0$, on retombe sur la formule relative à la poussée d'un

et la poussée est ainsi de la forme kz^2 , k étant une constante; la poussée correspondant à $z = l$ est donc

$$Q = kl^2,$$

et, d'après la formule (10), son moment par rapport au point O a pour valeur

$$\mathcal{M} = k \frac{l^3}{3},$$

d'où, pour le bras de levier de la poussée,

$$p = \frac{l}{3}.$$

Ce bras de levier est ainsi égal au $\frac{1}{3}$ de la longueur de la portion considérée du parement intérieur, comme pour les liquides. En supposant nulles une, deux ou trois des quantités α' , i , ϵ , on retombe sur des cas particuliers qui ont été l'objet d'études spéciales de plusieurs savants ingénieurs, notamment de Poncelet et d'Ardant [*].

On remarquera que la poussée est nulle et que le mur devient inutile lorsque l'on a $\epsilon = -(90^\circ - i)$, circonstance qui évidemment ne se présentera jamais.

5. Si l'on a $i = 0$, $\epsilon = 0$, $\alpha' = \alpha$, la formule (6') donne

$$(6'') \quad \frac{2N_1}{\Pi z^2} = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \left(\sqrt{\frac{1}{\tan \alpha}} - \frac{\sqrt{2 \tan \alpha}}{1 + \tan 2\alpha} \right),$$

ou, en posant $\tan \alpha = u$,

$$\frac{2N_1}{\Pi z^2} = \frac{\sqrt{u}}{1 - u^2} \left(1 - \frac{u\sqrt{2}}{1 + u^2} \right).$$

liquide dont le poids spécifique serait Π , contre un mur incliné, sur la verticale de l'angle ϵ .

[*] *Nouvelles recherches sur le profil du revêtement le plus économique*; par le lieutenant-colonel Ardant. (*Mémorial de l'officier du Génie*, n° 15.)

La valeur de u qui rend N_1 maximum est fournie par l'équation

$$u^3 - 2\sqrt{2} \cdot u^2 + 5u^2 - \frac{5}{2}\sqrt{2} \cdot u^2 + 4u - 2\sqrt{2} - 2 = 0,$$

et l'on reconnaît facilement que la racine de cette équation qui convient à la question est un peu supérieure à l'unité, chiffre qui est rarement atteint. On peut donc dire d'une manière générale que dans le cas actuel la poussée croît avec le coefficient de frottement.

6. *Cas où la surface supérieure du massif est plane et supporte une surcharge verticale uniforme.* — Représentons par $\Pi\eta$ la valeur de la surcharge par unité de surface.

Au poids du prisme de poussée (*fig. 1*) il faudra ajouter

$$\Pi\eta \times IX = \Pi\eta z \frac{\cos(\varepsilon - i)}{\sin \theta},$$

c'est-à-dire que l'on devra remplacer $\frac{\Pi z^2 \cos^2(\varepsilon - i)}{2 \sin \theta}$ par

$$\frac{\Pi z^2 \cos^2(\varepsilon - i)}{2 \sin \theta} \left[1 + \frac{2\eta}{z \cos(\varepsilon - i)} \right],$$

ce qui revient à multiplier la formule (6') par le facteur

$$1 + \frac{2\eta}{z \cos(\varepsilon - i)}.$$

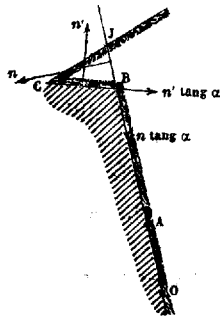
7. *Examen du cas où le sommet du mur est recouvert en partie ou en totalité par le massif de terre.* — Ce cas se présente souvent dans les travaux de fortification permanente. Soient (*fig. 2*) CB la portion de la largeur du sommet du mur recouverte par la terre; J le point où la direction du parement intérieur du mur rencontre le talus, γ la longueur JB; n , n' les réactions normales des faces JB et CB sur le prisme CBJ. Conservons d'ailleurs les notations du n° 2, nous avons

$$CB = \gamma \frac{\cos(i - \varepsilon)}{\sin i},$$

$$\frac{\Pi}{3} \gamma^2 \frac{\cos^2(i - \epsilon)}{\sin i}.$$

En projetant les forces qui sollicitent le prisme CJB respectivement sur

Fig. 2.



l'horizontale et la verticale, on trouve les relations suivantes :

$$n \cos \epsilon - n \tan \alpha \sin \epsilon - n' \tan \alpha' = 0,$$

$$n' - n \sin \epsilon - n \tan \alpha \cos \epsilon = \frac{\Pi \gamma^2}{2} \frac{\cos^2(i - \epsilon)}{\sin i},$$

ou

$$n' = n \cot \alpha \frac{\cos(\alpha + \epsilon)}{\cos \alpha}, \quad n' - n \frac{\sin(\alpha + \epsilon)}{\cos \alpha} = \frac{\Pi}{2} \gamma^2 \frac{\cos^2(i - \epsilon)}{\sin i};$$

d'où, par l'élimination de n' ,

$$n = \frac{\Pi}{2} \gamma^2 \frac{\cos^2(i - \epsilon) \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin i \sin(\epsilon + \alpha + \alpha')}.$$

On démontrerait, comme au n° 4, que la résultante r de n et $n \tan \alpha$ peut être considérée comme appliquée au tiers de BJ à partir du point B. Pour obtenir la poussée sur BO, on pourra supposer que le mur se prolonge jusqu'en J; de la poussée obtenue on retranchera géométriquement r , et de son moment celui de cette dernière force.

Mais, en général, on ne tient pas compte de la force τ , parce qu'elle est relativement faible, et qu'en la négligeant on ne fait qu'améliorer les conditions de stabilité du mur, dont nous parlerons plus loin.

DE LA BUTÉE DES TERRES.

8. Poncelet a donné le nom de *butée* à la résistance qu'oppose un massif à un mur qui, sous l'action d'un effort extérieur, tendrait à faire remonter les terres. Cette résistance doit être considérée comme étant le minimum de celles qu'opposent les prismes au glissement de bas en haut.

L'équivalent de la formule (1), relatif à la butée des terres, s'obtiendra évidemment en y changeant les signes de α et α' , puisque la seule différence consiste en ce que les frottements changent de sens. On a ainsi

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \frac{N'}{\cos \alpha'} &= \frac{2 \cos (\alpha + \alpha' + i - \epsilon)}{\Pi h \sin (\alpha + i)} \\ &\times [B - r \sin (i + \varphi) + r \cos (i + \varphi) \cot \theta] \frac{\cot \theta + \cot (\alpha + i)}{\cot \theta - \tan (\alpha + \alpha' + i - \epsilon)}. \end{aligned} \right.$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} x &= \cot \theta - \tan (\alpha + \alpha' + i - \epsilon), \\ \lambda' &= \cot (\alpha + i) + \tan (\alpha + \alpha' + i - \epsilon) = \frac{\cos (\alpha' - \epsilon)}{\sin (\alpha + i) \cos (\alpha + \alpha' + i - \epsilon)}, \\ r \cos (i + \varphi) b' &= B - r \sin (i + \varphi) + r \cos (i + \varphi) \tan (\alpha + \alpha' + i - \epsilon) \\ &= B - r \frac{\sin (\alpha + \alpha' - \epsilon - \varphi)}{\cos (i + \varphi) \cos (\alpha + \alpha' + i - \epsilon)}, \end{aligned}$$

l'équation (12) devient

$$\frac{N'}{\cos \alpha'} \frac{2 \cos (\alpha + \alpha' + i - \epsilon)}{\Pi h r \sin (\alpha + i) \cos (i + \varphi)} = (x + b') \frac{x + \lambda}{x}.$$

Si l'on cherche la valeur de x qui rend minimum le second membre

de cette équation, on trouve

$$x = \sqrt{\lambda' b'}.$$

Si N'_2 est la valeur correspondante de N' , ou l'intensité de la composante normale de la butée, on a

$$N'_2 = \frac{\pi h r \cos \alpha' \sin(\alpha + i) \cos(i + \varphi)}{2 \cos(\alpha + \alpha' + i - \varepsilon)} (\sqrt{\lambda'} + \sqrt{b'}),$$

ou

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} N'_2 &= \frac{\pi h r \cos \alpha' \sin(\alpha + i) \cos(i + \varphi)}{2 \cos(\alpha + \alpha' + i - \varepsilon)} \\ &\times \left[\sqrt{\frac{\cos(\alpha' - \varepsilon)}{\sin(\alpha + i) \cos(\alpha + \alpha' + i - \varepsilon)}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{B}{r \cos(i + \varphi)} + \frac{\sin(\alpha + \alpha' - \varepsilon - \varphi)}{\cos(i + \varphi) \cos(\alpha + \alpha' + i - \varepsilon)}} \right]^2. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas d'un simple talus, qui correspond au n° 4 pour la poussée, on a

$$(13') \quad N'_2 = \frac{\pi z^2 \cos \alpha' \cos^2(i - \varepsilon) \sin(\alpha + i)}{\cos^2(\alpha + \alpha' + i - \varepsilon)} \left[\sqrt{\frac{\cos(\alpha' - \varepsilon)}{\sin(\alpha + i)}} + \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\cos(i - \varepsilon)}} \right]^2.$$

En se reportant au numéro précité, on reconnaît sans peine que, toutes choses égales d'ailleurs, la butée sera généralement supérieure à la poussée.

Tout ce que nous avons dit sur la poussée, relativement aux composantes horizontale et verticale et au moment, étant applicable à la butée, nous n'avons pas à insister davantage sur ce sujet.

DE LA STABILITÉ D'UN MUR DE SOUTÈNEMENT.

9. Lorsque l'on veut calculer l'épaisseur d'un mur devant résister à une poussée déterminée, on fait abstraction de la cohésion de la maçonnerie, en vue d'obtenir une plus grande sécurité et de parer à toutes les éventualités : on considère alors le mur comme composé de tranches horizontales infiniment minces, exerçant l'une sur

l'autre, au moment où il y a une tendance au glissement, un frottement dont le coefficient a été déterminé par des expériences préalables et dû à la composante verticale des efforts qui s'exercent sur la portion supérieure du mur qui tend à se déplacer.

Cette constitution hypothétique du mur permet également de supposer qu'une partie supérieure de ce mur tend à se déplacer par rotation autour du côté de sa base situé dans le plan du parement extérieur.

Nous avons donc deux modes de rupture à étudier : 1° par glissement suivant une assise; 2° par rotation autour d'une horizontale comprise dans le plan du parement extérieur.

Soient (*fig. 1*)

O'B' le parement extérieur;

ϵ' son inclinaison sur la verticale;

e_0, e les épaisseurs BB', OO' du mur au sommet et au point O;

f'' le coefficient de frottement de la maçonnerie sur elle-même [*];

H la hauteur de BB' au-dessus de OO';

Π' le poids du mètre cube de maçonnerie.

Conservons d'ailleurs les notations des numéros précédents; nous avons les relations

$$(14) \quad H = l \cos \epsilon, \quad e = e_0 + H (\tan \epsilon + \tan \epsilon').$$

[*] L'expérience a donné pour f'' les chiffres suivants :

Calcaire bouchardé sur lui-même.....	0,78
Muschelkalk bien dressé sur calcaire oolithique tendre.....	0,75
Calcaire oolithique tendre sur lui-même, sans ou avec interposition de mortier en sable fin.....	0,74
Grès sur grès uni.....	0,71
Calcaire dur bien dressé sur lui-même.....	0,70
Brique sur calcaire tendre ou dur.....	0,67
Grès uni sur grès uni, avec interposition de mortier frais, granite bien dressé sur granite.....	0,66
Calcaire dur poli sur calcaire dur poli.....	0,58
Granite bien dressé sur granite bien dressé avec interposition de mortier frais.....	0,49

10. *Tendance à la rupture par glissement.* — S'il y avait tendance au glissement suivant OO' , le poids du mur et la composante verticale de la poussée donneraient lieu au frottement

$$f'' \left[\Pi' \frac{(e+e_0)}{2} H + Y \right] = f'' \left\{ \Pi' \left[e_0 + \frac{H}{2} (\tan \epsilon + \tan \epsilon') + \mathcal{P} \frac{\sin(\alpha' + \epsilon)}{\cos \alpha'} \right] \right\}.$$

Pour que cette tendance n'ait pas lieu, il faut que ce frottement soit supérieur à la composante horizontale de la poussée, ou que l'on ait

$$f'' \left\{ \Pi' \left[e_0 + \frac{H}{2} (\tan \epsilon + \tan \epsilon') + \mathcal{P} \frac{\sin(\alpha' + \epsilon)}{\cos \alpha'} \right] \right\} > \mathcal{P} \frac{\cos(\alpha' + \epsilon)}{\cos \alpha'},$$

condition qui sera satisfaite, puisque ϵ n'est jamais négatif, si la suivante est vérifiée :

$$e_0 + \frac{H}{2} (\tan \epsilon + \tan \epsilon') > \frac{\mathcal{P}}{\Pi' f''}.$$

Le maximum du second membre de cette inégalité correspondra généralement au pied du mur, de sorte que nous supposons dorénavant que H est la hauteur du mur au-dessus de sa fondation, et $\mathcal{P}$ la poussée normale sur toute l'étendue du parement intérieur.

Nous pourrions donc poser

$$(15) \quad e_0 + \frac{H}{2} (\tan \epsilon + \tan \epsilon') = \mu \frac{\mathcal{P}}{\Pi' f''},$$

μ étant un nombre supérieur à l'unité, appelé *coefficient de stabilité relatif au glissement*, et que l'on devra prendre d'autant plus grand que l'on devra obtenir de meilleures conditions de sécurité.

En prenant pour types des murs qui ont résisté à toutes les causes de dislocation pendant un grand nombre d'années, on déduira pour μ un certain nombre de valeurs dont le maximum devra être considéré comme suffisant. C'est ainsi que Poncelet a été conduit à proposer le chiffre

$$\mu = 1,912,$$

pour obtenir une sécurité convenable.

Ce chiffre étant admis, la formule (15) fera connaître l'épaisseur

que l'on doit donner au sommet, par suite à la base, à un mur qui doit se trouver dans des conditions déterminées.

11. *Tendance à la rupture par rotation.* — Si l'on décompose (*fig. 1*) le trapèze OBB'O' en deux triangles, en menant la diagonale O'B, on trouve facilement que le moment de l'aire de ce trapèze par rapport au point O' a pour valeur

$$\frac{H}{6} [e_0 (2H \tan \epsilon' + e_0) + e(e - H \tan \epsilon)];$$

pour qu'il n'y ait pas tendance à la rotation autour de l'horizontale projetée en O', il faut que

$$\frac{\Pi'}{6} [e_0 (2H \tan \epsilon' + e_0) + e(e - H \tan \epsilon)] + \frac{Pe \sin(\alpha' + \epsilon)}{\cos \alpha'} < \pi,$$

inégalité qui sera *a fortiori* satisfaite si la suivante est vérifiée :

$$e_0 (2H \tan \epsilon' + e_0) + e(e - H \tan \epsilon) < \frac{6\pi}{\Pi'}.$$

On pourra donc poser

$$e_0 (2H \tan \epsilon' + e_0) + e(e - H \tan \epsilon) = \frac{6\mu' \pi}{\Pi'},$$

μ' étant un coefficient supérieur à l'unité, appelé *coefficient de stabilité* relatif à la *rotation* et que l'on déterminera de la même manière que celui qui est relatif au glissement.

D'après Poncelet, on peut prendre

$$\mu' = 1,86.$$

Si l'on remplace dans la formule précédente e par sa valeur (14), on a, pour déterminer e_0 , l'équation

$$(16) e_0^2 + H(2 \tan \epsilon' + \frac{1}{2} \tan \epsilon) e_0 + \frac{H^2}{2} (\tan \epsilon' - \tan \epsilon) \tan \epsilon = 3\mu' \frac{\pi}{\Pi'} [*],$$

d'où l'on déduira e_0 .

[*] Généralement, l'angle ϵ' est assez petit pour que l'on puisse négliger le carré de

Il est clair que, pour que la double condition de stabilité par glissement et par rotation soit remplie, il faut prendre la plus grande des valeurs de e_0 données par les équations (15) et (16).

12. Des contre-forts. — On désigne sous ce nom des murs secondaires placés dans un massif de terre que doit soutenir un mur de soutènement auquel ils sont reliés. Ils sont généralement identiques, également espacés, et leurs faces latérales sont normales aux parements du mur principal. Ils ont pour effet d'assurer la stabilité de ce mur lorsque, par suite d'exigences particulières, on ne peut pas lui donner l'épaisseur calculée d'après la méthode exposée plus haut.

Soient

$\mathcal{P}, \mathcal{P}_1$, les poussées par mètre courant sur le mur de soutènement et un contre-fort, supposés tous deux indéfinis, et que nous savons calculer ;

v, v_1 , leurs bras de levier par rapport au côté extérieur de la base du mur ;

Q, Q_1 , les poids par unité de longueur horizontale du mur et d'un contre-fort ;

q, q_1 , leurs bras de levier par rapport au côté ci-dessus de la base du mur ;

X, X_1 , les composantes horizontales de $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1$;

L, L_1 , la distance des plans moyens de deux contre-forts consécutifs et la largeur de ces contre-forts.

Considérons la portion du mur de soutènement déterminée par deux plans perpendiculaires à ses arêtes, menés aux milieux des intervalles qui séparent un contre-fort de celui qui le précède et de celui qui le suit. Nous aurons pour les conditions de stabilité, en conservant à

sa tangente. Dans le profil de Vauban ($H = 10^m$) on avait $\tan \epsilon' = \frac{1}{5}$; mais, par suite de la faible pente du parement extérieur, les eaux pluviales ne se dégageaient pas suffisamment des joints et provoquaient la fécondation des semences végétales apportées par le vent et les courants d'air. Il résultait de là des végétations qui avaient pour effet de disloquer les éléments du parement. Pour obvier à cet inconvénient, il convient de prendre $\tan \epsilon'$ inférieur à $\frac{1}{10}$. On admet généralement $\frac{1}{10}$.

f'' , μ , μ' les mêmes significations que ci-dessus,

$$X(L - L_1) + X_1 L_1 = \mu f''(QL + QL_1),$$

$$\mathcal{Q}(L - L_1)v + \mathcal{Q}_1 L_1 v_1 = \mu'(QqL + Q_1 L_1 q_1).$$

Les quantités v , v_1 , Q , Q_1 , q , q_1 s'exprimeront facilement en fonction des épaisseurs à la base ou au sommet du mur et des contre-forts; on aura ainsi deux équations à deux inconnues que l'on pourra déterminer, et qui devront être considérées comme des minima.

Si les parements intérieurs du mur et des contre-forts sont parallèles, on a évidemment

$$P = P_1, \quad X = X_1.$$

DES FONDATIONS.

13. Dans ce qui précède, nous n'avons admis une tendance à la destruction d'un mur par glissement et par rotation que dans le mur lui-même et spécialement à sa base; nous avons admis ainsi implicitement que cette base était reliée à un massif de maçonnerie ou *fondation* engagée dans le terrain, et dont l'épaisseur à la base est supérieure à celle du mur.

Le profil d'une fondation est naturellement limité par deux bases horizontales (*fig. 1*); chacun de ses côtés latéraux est vertical ou présente des gradins.

Dans ce dernier cas, on calcule, par approximation, la poussée et la butée des terres, en remplaçant le profil des gradins par une droite moyenne.

Les fondations ont pour objet :

1° De répartir le poids total de la maçonnerie sur une plus grande étendue de terrain, de manière à réduire la pression par mètre carré de surface et par suite le tassement;

2° D'augmenter le poids total et de lui donner un plus grand bras de levier sans augmenter sensiblement la poussée et son bras de levier.

On satisfera à ces conditions en donnant à la fondation un grand

empatement sur le devant, et par suite une faible hauteur relative. Les effets de l'augmentation de la poussée et de son moment, due à l'existence de la fondation, seront en partie compensés par ceux de la butée et de son moment.

Les conditions de stabilité de l'ensemble de la maçonnerie, relatives au glissement sur le terrain et à la rotation autour du côté extérieur de la base de la fondation, s'établiront dans chaque cas en suivant la méthode indiquée aux n^{os} 10 et 11, en faisant toutefois intervenir la butée.

14. *Contre-forts extérieurs ou éperons butants.* — Lorsque le frottement de la maçonnerie sur le terrain est très-faible, comme cela a lieu, par exemple, quand le terrain est argilo-vaseux, on ne pourrait éviter de glissement qu'en donnant à la fondation un empatement démesuré.

On évite cet inconvénient, quand les circonstances le permettent, en reliant de distance en distance (par des châssis en charpente, ou mieux encore, au point de vue de la durée, par des voûtes renversées), la fondation du mur à celle d'un second mur qui lui fait face, d'une hauteur moins élevée, accolé lui-même contre un massif de terre.

En donnant au second mur une hauteur suffisante, on pourra, par la butée qu'il développera, neutraliser, autant qu'on le voudra, les effets de la poussée sur le mur principal et assurer la stabilité de ce dernier.

La place de Bergues offre un exemple de l'emploi des éperons butants en charpente, dont l'idée première paraît due à Vauban.

15. *Fondations sur sable rapporté.* — Lorsque la nature d'un terrain est telle qu'il puisse, sous l'action d'une forte charge, éprouver un tassement notable, tassement qui serait toujours accompagné d'un refoulement latéral de la matière, il est dangereux d'établir directement, sur un pareil terrain, la fondation d'une construction. On évite ce danger en employant différents procédés dont il serait inopportun de faire ici la nomenclature. Cependant, parmi ces procédés, il en est un qui a été l'objet d'études spéciales, de la part des membres les plus distingués du corps des ingénieurs militaires, et qui constitue ce que

venable, on peut réduire la pression par mètre carré sur le fond, dans telle proportion que l'on voudra, et par suite rendre insensible le tassement du terrain. La poussée est d'ailleurs neutralisée par la butée de la terre contre le sable rapporté.

Supposons (*fig. 3*) que la charge sur le sable soit produite par le poids d'un prisme vertical assez long pour qu'on puisse le considérer comme indéfini, dont les faces CC_1 , $C'C'_1$, parallèles à celles AB , $A'B'$ de la tranchée, soient respectivement situées à une même distance $b = BC = B'C'$ de ces dernières. Nous serons, comme plus haut, ramené à considérer une section faite par un plan perpendiculaire aux longs côtés de la tranchée.

Soient

$2e$ la largeur CC' de la base du prisme;

I son point milieu et IV la verticale de ce point;

$z = AB = A'B'$ la hauteur du prisme de sable;

η la hauteur du prisme CC_1 , $C'C'_1$ multipliée par le rapport de son poids spécifique à celui Π du sable.

La charge par unité de surface sera représentée par $\Pi\eta$.

Admettons que la hauteur z soit assez grande, sauf justification ultérieure, pour que le prisme de poussée sur AB rencontre la direction du côté CC_1 en un point a situé au-dessous de C , et que le prisme de poussée sur Ca rencontre IV en un point b situé en contre-bas de I . Les points a' , b' sont les symétriques de a , b par rapport à IV . Nous pourrions, sans grande erreur et pour simplifier, supposer que l'angle du frottement contre les parois AB , $A'B'$ est égal à celui qui est relatif au sable sur lui-même.

Nous désignerons par n , n' les réactions normales de ab , aC sur le prisme arénacé $aCib$, et par φ l'inclinaison de ab sur l'horizon. Si nous admettons qu'il y ait tendance au glissement de la droite vers la gauche du prisme ci-dessus, il y aura une tendance semblable de la gauche vers la droite de la part de la masse $a'C'Ib'$.

Nous devons donc supposer que les deux masses tendent à se séparer suivant leur face commune Ib et que, par suite, elles n'exercent aucune action l'une sur l'autre.

En désignant par x la longueur aC , on a

$$Ib = x - e \tan \varphi, \quad \text{aire } aCib = e \left(x - \frac{e}{2} \tan \varphi \right),$$

et

$$\Pi e \left(\eta + x - \frac{e}{2} \tan \varphi \right),$$

pour le poids du prisme $aCib$ augmenté de la charge sur CI .

Les conditions d'équilibre de translation du même prisme sont

$$\begin{aligned} n (\cos \varphi + \tan \alpha \sin \varphi) + n' \tan \alpha &= \Pi e \left(\eta + x - \frac{e}{2} \tan \varphi \right), \\ n (\sin \varphi - \tan \alpha \cos \varphi) - n' &= 0; \end{aligned}$$

d'où, par l'élimination de n ,

$$(h) \quad \frac{n'}{\Pi e} = \frac{\left(\eta + x - \frac{e}{2} \tan \varphi \right) (\tan \varphi - \tan \alpha)}{1 + 2 \tan \alpha \tan \varphi - \tan^2 \alpha}$$

Posant

$$1 + 2 \tan \alpha \tan \varphi - \tan^2 \alpha = u,$$

d'où

$$\tan \varphi = \frac{u - 1 + \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha} = \frac{u}{2} \cot \alpha - \cot 2\alpha,$$

$$\tan \varphi - \tan \alpha = \frac{u - 1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha},$$

la formule (h) devient

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{4 n' \tan^2 \alpha}{\Pi e} &= \left[2(\eta + x) \tan \alpha - \frac{e}{2} (u - 1 + \tan^2 \alpha) \right] \frac{(u - 1 - \tan^2 \alpha)}{u} \\ &= \frac{-\frac{e}{2} u^2 + 2u \left[(\eta + x) \tan \alpha + \frac{e}{2} \right] - 2(\eta + x)(1 + \tan^2 \alpha) \tan \alpha - \frac{e}{2} (1 - \tan^2 \alpha)}{u} \quad [*] \end{aligned} \right.$$

[*] Cette expression est de la forme

$$\frac{-a u^2 + 2 b u - c}{u} = -a u + 2 b - \frac{c}{u}.$$

Ses dérivées première et seconde sont respectivement $-a + \frac{c}{u^2}$, $-\frac{2c}{u^3}$. Son maxi-

Le maximum de cette fonction de u correspond à

$$(18) \quad u = \sqrt{\frac{4(\eta+x)(1+\tan^2\alpha)\tan\alpha + e(1-\tan^4\alpha)}{e}},$$

et l'on a par suite, pour la poussée n'_1 sur aC ,

$$n'_1 = \frac{\Pi e \cot \alpha}{2} \left\{ \left[\eta + x + \frac{e}{2 \tan \alpha} - \sqrt{\frac{e}{2 \tan \alpha} \left[2(\eta+x)(1+\tan^2\alpha) + \frac{e}{2 \tan \alpha} (1-\tan^4\alpha) \right]} \right] \right\},$$

expression que l'on peut, sans grande erreur, réduire à la suivante :

$$n'_1 = \frac{\Pi e \cot \alpha}{2} \left[\eta + x + \frac{e}{2 \tan \alpha} - \sqrt{\frac{e}{\tan \alpha} (\eta + x)} \right],$$

attendu que $\sqrt{\frac{e \tan \alpha}{\eta + x}}$, $\frac{e}{4 \tan \alpha} \frac{1 - \tan^4 \alpha}{\eta + x}$ sont en général de petites fractions.

Soit maintenant θ l'inclinaison inconnue de Aa sur l'horizon; on a

$$x = z - b \tan \theta,$$

par suite,

$$n'_1 = \frac{\Pi e}{2} \cot \alpha \left[\eta + z + \frac{e \cot \alpha}{2} - b \tan \theta - \sqrt{e(\eta + z - b \tan \theta) \cot \alpha} \right],$$

ou approximativement

$$(19) \quad n'_1 = \frac{\Pi e}{2} \cot \alpha \left[\eta + z + \frac{e \cot \alpha}{2} - b \tan \theta - \sqrt{e(\eta + z) \cot \alpha} \right],$$

en raison de ce que $\frac{b \tan \theta}{2(\eta + z)}$ est en général une faible fraction.

mum correspond à

$$u = \sqrt{\frac{c}{a}},$$

et a pour valeur

$$2(b - \sqrt{ca}).$$

Soient, maintenant, N , N' les réactions normales des plans Aa , AB sur le prisme de sable $ABCa$; ce prisme étant en équilibre, sous l'action de ces forces, des frottements auxquels elles donnent lieu et de son poids, on a

$$\frac{N \cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} + N' \tan \alpha - n'_1 \tan \alpha = \Pi b \left(z - \frac{b \tan \theta}{2} \right),$$

$$\frac{N \sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} - N' + n'_1 = 0;$$

d'où, par l'élimination de N ,

$$N' = n'_1 + \frac{\Pi b \left(z - \frac{b}{2} \tan \theta \right) (\tan \theta - \tan \alpha)}{1 + 2 \tan \alpha \tan \theta - \tan^2 \alpha}.$$

Si nous posons

$$1 + 2 \tan \alpha \tan \theta - \tan^2 \alpha = u,$$

le second terme de cette expression ne sera autre chose que la valeur que prendrait n' si l'on remplaçait dans la formule (17) e par b et $\eta + x$ par z ; de sorte que, en ayant égard à la formule (19), on a, en négligeant la quatrième puissance de $\tan \alpha$,

$$\frac{4 N' \tan^2 \alpha}{\Pi b} = \frac{2e}{b} \left[\eta + z + \frac{e}{2} \cot \alpha + b \cot 2\alpha - \sqrt{e(\eta + z) \cot \alpha} \right] \tan \alpha$$

$$+ 2 \left(z \tan \alpha + \frac{b}{2} \right) - \left(e + \frac{b}{2} \right) u - \frac{2z(1 + \tan^2 \alpha) \tan \alpha + \frac{b}{2}}{u},$$

expression dont le maximum correspond à

$$(20) \quad u = \sqrt{\frac{2z(1 + \tan^2 \alpha) \tan \alpha + \frac{b}{2}}{e + \frac{b}{2}}}$$

et la poussée normale N'_1 sur AB sera donnée par la formule

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2 N'_1}{\Pi} \tan \alpha &= e\eta + z(e + b) + \frac{b}{2} \cot \alpha [b + e(1 - \tan^2 \alpha)] \\ &\quad - e \sqrt{e(\eta + z) \cot \alpha} \\ &\quad - b \sqrt{\left(e + \frac{b}{2} \right) \cot \alpha \left[2z(1 + \tan^2 \alpha) + \frac{b}{2} \cot \alpha \right]}; \end{aligned} \right.$$

et l'on aura pour le rapport δ de la résultante du frottement sur les deux parois au poids total

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{1}{2} + \frac{b}{4} \cot \alpha \frac{[b + e(1 - \tan^2 \alpha)]}{e\eta + z(e + b)} \\ &- \frac{e\sqrt{e(\eta + z)} \cot \alpha + b \sqrt{\left(e + \frac{b}{2}\right) \cot \alpha \left[z(1 + \tan^2 \alpha) + \frac{b}{4} \cot^2 \alpha\right]}}{2[e\eta + z(e + b)]} \end{aligned} \right.$$

et ce rapport serait égal à $\frac{1}{2}$ si z était infini.

On reconnaît ainsi qu'en substituant à la terre du sable, qui a à peu près le même poids spécifique, on peut réduire considérablement la pression sur le fond de la tranchée, en donnant une hauteur convenable à cette dernière.

Si b est très-petit, comme cela a lieu le plus souvent, la formule (22) se réduit approximativement à la suivante :

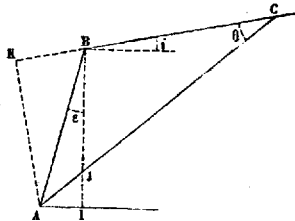
$$\delta = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{e \cot \alpha}{\eta + z}} \right),$$

qui est d'une facile application.

DE L'ÉQUILIBRE DES TERRES LORSQUE LA RUPTURE PAR GLISSEMENT NE TEND PAS À SE PRODUIRE.

16. Proposons-nous (*fig. 4*) de déterminer le minimum de l'inclinaison ε sur la verticale que l'on doit donner à un talus AB pratiqué

Fig. 4.



dans un terrain BC incliné de l'angle i sur l'horizon, pour que la terre ne tende pas à se désagréger.

Soient

AK, BI les perpendiculaires abaissées respectivement du point A sur la direction de BC et du point B sur l'horizontale de A;

C un point quelconque du profil du terrain;

θ l'angle ACB;

H la hauteur BI;

γ la cohésion de la terre par unité de surface [*];

J l'intersection de AC et de BI.

La figure donne

$$AB = \frac{H}{\cos \varepsilon}, \quad BC = AB \frac{\sin \widehat{BAC}}{\sin \theta} = AB \frac{\sin(i + \varepsilon + \theta)}{\sin \theta},$$

$$AC = AB \frac{\cos(i + \varepsilon)}{\sin \theta}, \quad \widehat{BCJ} = 90^\circ - i - \theta.$$

Si l'on exprime que la composante suivant AC du poids du prisme BAC est inférieure à la cohésion γAC , on a

$$\frac{\pi H}{2} \frac{AB \cos(i + \varepsilon + \theta) (\cos i - \sin i \tan \varepsilon) \sin(i + \theta)}{\sin \theta} < \frac{AB \cos(i + \varepsilon) \gamma}{\sin \theta};$$

d'où

$$\tan \varepsilon > \frac{\frac{\pi H}{2\gamma} (\cot \theta - \tan i) (1 + \cot \theta \tan i) - (1 + \cot^2 \theta)}{\frac{\pi H}{2\gamma} (1 + \cot \theta \tan i)^2}.$$

Il faut donc que ε soit au plus égal au maximum par rapport à $\cot \theta$ du second membre de cette inégalité. Mais nous nous bornerons ici à considérer le cas de $i = 0$. Nous aurons alors

$$\tan \varepsilon = \max. \left[\cot \theta - \frac{2\gamma}{\pi H} (1 + \cot^2 \theta) \right]$$

[*] On a, d'après Navier,

$\gamma = 136^{\text{ks}}$ pour les terres franches,

$\gamma = 568^{\text{ks}}$ pour les terres très-fortes.

ou

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\Pi H}{8\gamma} - \frac{2\gamma}{H}.$$

Le talus sera vertical pour la hauteur H , donnée par la formule

$$H_1 = \frac{4\gamma}{\Pi}.$$

Si H croît indéfiniment, ε tendra vers 90° ; mais, à partir du moment où ε atteindra $90^\circ - \alpha$, les terres tiendront quand même en raison du frottement; la valeur H_2 de H correspondant à cette limite est donnée par la formule

$$H_2 = \frac{4\gamma}{\Pi} \left(\cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right) = H_1 \left(\cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right).$$

Pour les terres très-fortes, on a

$$\gamma = 568^{\text{kg}}, \quad \Pi = 1800^{\text{kg}}, \quad \alpha = 55^\circ$$

et

$$H_1 = 1^{\text{m}}, 26, \quad H_2 = 2^{\text{m}}, 38.$$

NOTE SUR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉQUILIBRE
DES SEMI-FLUIDES.

17. Dans cette Note nous avons uniquement pour objet de donner quelques développements à l'extrait du Mémoire de M. Maurice Levy, publié au tome IV de la deuxième série de ce Recueil.

Soient Ox , Oy deux axes rectangulaires tracés dans une section d'un prisme horizontal indéfini de terre; i l'inclinaison de Oy sur la verticale; N et T les composantes normale et tangentielle de la pression sur un élément plan passant par le point (x, y) incliné de l'angle θ sur Oy ; χ l'angle formé par cette pression avec la normale parallèle aux arêtes du prisme; nous attribuerons à Π et α les mêmes significations

[*] Voir notamment notre *Traité de Mécanique générale*, t. II, p. 64.

que ci-dessus, et nous aurons

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} = -\Pi \sin i, \\ \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{yy}}{dx} = \Pi \cos i; \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} N = \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} + \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \cos 2\theta + p_{xy} \sin 2\theta, \\ T = -\frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \sin 2\theta + p_{xy} \cos 2\theta; \end{cases}$$

$$(25) \quad \tan \chi = \frac{N}{T} = \frac{-(p_{xx} - p_{yy}) \sin 2\theta + 2p_{xy} \cos 2\theta}{p_{xx} + p_{yy} + (p_{xx} - p_{yy}) \sin 2\theta + 2p_{xy} \cos 2\theta}.$$

La masse ne pouvant supporter que des pressions et non des tractions, il faut que p_{xx} , p_{yy} et N soient positifs. Il est facile de reconnaître que le minimum de N est

$$N = \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{p_{xx} - p_{yy}}{2}\right)^2 + (p_{xy})^2};$$

et, pour qu'il soit positif, il faut que l'on ait

$$(26) \quad p_{xx} p_{yy} > p_{xy}^2.$$

Le maximum et le minimum de χ correspondent aux valeurs de $2\theta + \chi$ données par l'équation

$$(27) \quad \tan(2\theta + \chi) = -\frac{p_{xx} - p_{yy}}{2p_{xy}}.$$

Mais, si nous supposons que la masse de sable se trouve en équilibre instable, on doit avoir

$$\chi = \pm \alpha,$$

par suite

$$(28) \quad \tan(2\theta \pm \alpha) = -\frac{p_{xx} - p_{yy}}{2p_{xy}},$$

et l'équation (25) donne, par suite,

$$(29) \quad (p_{xx} - p_{yy})^2 - 4p_{xy}^2 \pm (p_{xx} - p_{yy})^2 \sin \alpha = 0 \quad [*],$$

[*] Dans l'extrait cité plus haut du Mémoire de M. Maurice Levy, on a substitué, par inadvertance, $\sin^2 \alpha$ à $\sin \alpha$, dans cette formule.

et les équations (23) et (29), en ayant égard aux conditions relatives à la surface, permettront de déterminer p_{xx} , p_{yy} , p_{xy} .

18. Supposons maintenant que le massif soit indéfini dans le sens transversal et qu'il soit limité à sa partie supérieure par un plan incliné de l'angle i sur l'horizon; nous ferons coïncider l'axe Ox avec la trace de ce plan. Les équations (23) et (28) seront satisfaites, ainsi que les conditions $p_{yy} = 0$, $p_{xy} = 0$ relatives à la surface, en posant

$$(30) \quad p_{yy} = \Pi \cos i, \quad p_{xy} = -\Pi \sin i, \quad p_{xx} = -\Pi_{yy} [^*],$$

n étant donné par la double équation

$$n^2(1 \pm \sin \alpha) - 2n \cos i (1 \mp \sin \alpha) + \cos^2 i (1 \pm \sin \alpha) - 4 = 0.$$

Pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut que l'on ait

$$1 \pm \sin \alpha > (1 \pm 2 \sin \alpha) \cos^2 i,$$

condition qui ne peut être remplie pour $i = 0$ qu'en prenant les signes inférieurs; et nous aurons alors

$$(31) \quad n = \frac{(1 + \sin \alpha) \cos i + \sqrt{1 - \sin \alpha - (1 - 2 \sin \alpha) \cos^2 i}}{1 - \sin \alpha} [^{**}].$$

Nous avons rejeté le signe inférieur du radical, parce que, pour le cas d'un liquide ou de $\alpha = 0$, $i = 0$, on doit trouver $n = 1$.

La condition (26), qui se réduit à

$$\sqrt{1 - \sin \alpha - (1 - 2 \sin \alpha) \cos^2 i} > -\sin \alpha - \cos 2i,$$

sera toujours satisfaite.

[*] De ce que $\frac{p_{xy}}{p_{xx}} = -\tan i$, la pression sur un plan parallèle au talus est bien verticale; mais elle est égale à Πy et non au poids du prisme vertical, comme le suppose Rankine.

[**] Si α et par suite i est assez petit pour qu'on en puisse négliger le carré, on a

$$n = 1 + 2 \sin \alpha + \sqrt{\sin \alpha} (1 + \sin \alpha).$$

Les angles θ donnés par la formule (27) étant indépendants de x et y , tous les plans de glissement sont parallèles.

Supposons maintenant que l'on entaille le massif et que l'on veuille soutenir le talus par un mur construit de telle façon que la répartition des pressions dans la masse soit la même que dans le cas ci-dessus, où cette masse est supposée indéfinie dans le sens transversal. Désignons par α' l'angle de frottement de la terre sur le mur; l'angle θ que devra faire le parement intérieur du mur avec Oy sera donné par l'équation (25), en y supposant $\lambda = \alpha'$, et qui devient

$$(32) \quad \tan \alpha' = - \frac{(n - \cos i) \sin 2\theta - 2 \sin i \cos 2\theta}{n + \cos i + (n - \cos i) \sin 2\theta - 2 \sin i \sin 2\theta}.$$

On voit ainsi que, rigoureusement parlant, l'hypothèse qui consiste à considérer les surfaces de glissement comme planes ne peut se réaliser que dans un cas très-particulier, comme nous l'avons fait observer plus haut dans une Note spéciale.

Revenons au cas d'un massif indéfini transversalement. Supposons qu'il supporte une charge verticale uniformément répartie sur le plan qui le limite à sa partie supérieure et censé horizontal, soit $\Pi\eta$ la charge par mètre carré de surface. Nous satisferons aux équations (23) et (29), ainsi qu'à la condition relative à la surface, en posant

$$p_{yy} = \Pi(y + \eta), \quad p_{xy} = 0, \quad p_{xx} = n(y + \eta),$$

n étant donné par l'équation (31), en y faisant $i = 0$.